EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA:

UNA EXPERIENCIA DE AULA CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

WILFRAN GONZÁLEZ AGUIRRE

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Bogotá, D.C.

2018

EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA:

UNA EXPERIENCIA DE AULA CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

WILFRAN GONZÁLEZ AGUIRRE

Informe final de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Educación, énfasis Educación Matemática, en Modalidad Profundización

Director

DR. PEDRO JAVIER ROJAS GARZÓN

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
Bogotá, D.C.
2018

A mis hijas y mi esposa. Me maravilla su amor por mí, realmente son lo más valioso con lo que cuento.

Mis más sinceros agradecimientos a quienes han sido parte de este proceso: profesores, estudiantes y amigos, cada uno ha sido importante en su justa medida.

A los niños que hicieron parte de esta experiencia agradezco el compromiso con el desarrollo de las tareas y su gallardía para asumir conscientemente su proceso de aprendizaje.

Al profesor Pedro Javier Rojas y su acertada dirección.

A mis compañeros que de forma sincera y desinteresada me mostraron su mejor cara.

Contenido

RESUMEN 7

ABSTRACT 8

INTRODUCCIÓN 9

CONTEXTALIZACÓN Y ANTECEDENTES DE LA PROBLEMÁTICA ASOCIADA AL CONCEPTO DE ÁREA 9

PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN 12

1. REFERENTES TEÓRICOS 14

1.1 LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁREA 15

2. DISEÑO METODOLÓGICO 23

2.1 RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN 24

2.2 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS 25

2.2.1 Reconocimiento de la superficie. 25

2.2.2 Conservación de la superficie. 25

2.2.3 Medida 26

2.2.4 Relaciones entre el área y el perímetro. 26

2.3 DISEÑO DE TAREAS Y ACTIVIDADES 26

2.3.1 Conceptos y procesos relacionados con el área. 26

2.3.2 Conjunto de tareas 28

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL TRABAJO EN EL AULA 36

3.1 Instrumento de indagación 36

3.2 Implementación de la propuesta 41

3.2.1 Actividad 1: Comparando y ordenando rectángulos 41

3.2.2 Actividad 2: Comparando regiones 47

3.2.3 Actividad 3: Descubriendo figuras en las sombras 52

3.2.4 Actividad 4: Comparando y contando con diversas figuras 55

3.2.5 Actividad 5: Midiendo figuras con otras figuras 58

3.2.6 Actividad 6: Midiendo figuras con cuadritos 64

3.2.7 Actividad 7: Observando la superficie en otros contextos 67

3.2.8 Actividad 8: Relacionando áreas y perímetros 70

3.2.9 Calculando áreas y perímetros 78

3.2.10 Instrumento final. Resultados y comparación 80
4. CONSIDERACIONES FINALES Y RECOMENDACIONES 82
4.1 Sobre el aprendizaje de los estudiantes 83
4.2 Sobre el trabajo en el aula 84
4.3 Limitaciones, recomendaciones y reflexión final 85
REFERENCIAS 88
ANEXOS 90
Anexo 1: Instrumento de indagación 90
Anexo 2: Fotografías del trabajo en el aula 91
Anexo 3: Productos realizados por los estudiantes 94

RESUMEN

El aprendizaje del concepto de área ha sido abordado por diferentes autores y en diferentes épocas, posibilitando que los profesores tengamos a disposición herramientas de tipo didáctico y metodológico, que nos ayuden al desarrollo de dicho concepto de una manera práctica y significativa, que redunde en los desempeños académicos de los estudiantes en aspectos de tipo espacial y geométrico. En esta experiencia se trabajó un conjunto de tareas encaminadas al desarrollo del concepto de área en estudiantes de grado séptimo, observando las dificultades que estos encuentran frente al manejo de dicho concepto y a partir de algunos aspectos identificados como relevantes para su enseñanza. La metodología utilizada se enmarcó dentro de la investigación cualitativa, en la investigación-acción. El trabajo práctico y colaborativo estuvo presente durante el desarrollo de la experiencia, cuyo objetivo principal era posibilitar la conceptualización del área por parte de los estudiantes. Para ello se tomaron referentes básicos de la Educación Matemática Realista (EMR), particularmente desde los trabajos de Freudenthal (1983) y Puig (1997), en los cuales se plantea la importancia de abordar los objetos matemáticos a partir de objetos mentales que se van constituyendo como organizadores de fenómenos. Desde esta perspectiva, reconociendo aspectos y procesos fundamentales asociados a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de área (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993), así como de una propuesta de enseñanza (Corberán, 1996), se realizó la elección del conjunto de tareas que orientaron el desarrollo de la intervención en el aula, las cuales estuvieron encaminadas al reconocimiento de la superficie como magnitud, a la observación y comprobación de la conservación de la superficie bajo transformaciones, a la realización de procesos de composición y descomposición de superficies, al trabajo de procesos de medición y medida, y a la construcción de unidades de medida de superficie.

Mediante el uso de material práctico los estudiantes realizaron apreciaciones frente al concepto de área, desde la identificación consciente de la superficie, como magnitud susceptible de ser comparada, manipulada y medida, hasta la identificación de unidades bidimensionales que, a partir del recubrimiento, servían de unidad de medida arbitraria para la cuantificación de una superficie específica.

ABSTRACT

The learning of the concept of area has been approached by different authors and at different times, enabling teachers to have at our disposal tools of a didactic and methodological type, which help us to develop this concept in a practical and meaningful way, that would compromise the academic performance of students in spatial and geometric aspects. In this experience, a set of tasks was worked aimed to the development of the concept of area in seventh grade students, observing the difficulties they face in the management of this concept and from some aspects identified as relevant to their teaching. The methodology used was framed within the qualitative research, in action research. The practical and collaborative work was present during the development of the experience, whose main objective was to enable students to conceptualize the area. In order to do this, the basic concepts of Realistic Mathematical Education (EMR) were taken, particularly since the works of Freudenthal (1983) and Puig (1997), in which the importance of approaching mathematical objects from mental objects constituting as organizers of phenomena. From this perspective, recognizing the fundamental aspects and processes associated with the teaching and learning of the area concept (Del Olmo, Moreno and Gil, 1993), as well as a teaching proposal (Corberán, 1996), it was chosen a set of tasks that guided the development of the intervention in the classroom, which were directed to the recognition of the surface as magnitude, to the observation and verification of the conservation of the surface under transformations, to the realization of processes of composition and decomposition of surfaces , the work of measuring and measurement processes, and the construction of surface measurement units.

Through the use of practical material, the students made an appreciation of the area concept, from the conscious identification of the surface, as a magnitude that could be compared, manipulated and measured, until the identification of two-dimensional units that, from the coating, served as arbitrary unit of measure for the quantification of a specific surface.

INTRODUCCIÓN

En la literatura nacional e internacional se reportan dificultades en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, donde se pone de manifiesto la creciente preocupación de la comunidad académica frente a la adquisición de posturas críticas que permitan el mejoramiento de los procesos didácticos en el aula, tanto en la comprensión y el conocimiento de los estudiantes, como en los diferentes aspectos de la labor docente. Por otro lado, resultados de pruebas nacionales e internacionales entregados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), muestran una leve disminución en los puntajes promedio para la asignatura de matemáticas en los exámenes SABER 11 y en las pruebas PISA, durante los años 2011 a 2014 (Informe nacional entregado por el ICFES en 2016). Lo anterior se evidencia de manera práctica en las aulas de clase en las dificultades que encuentran los estudiantes al abordar diversos conceptos matemáticos, y muestra la necesidad de diseñar actividades y tareas que aborden fenómenos en diferentes contextos que posibiliten la constitución de objetos matemáticos escolares. Particularmente para el concepto de área se relacionan en lo siguiente algunas dificultades y problemáticas asociadas.

CONTEXTALIZACÓN Y ANTECEDENTES DE LA PROBLEMÁTICA ASOCIADA AL CONCEPTO DE ÁREA

En diversas investigaciones se ha podido evidenciar algunas de las dificultades que encuentran los estudiantes con el concepto de área, por ejemplo el no reconocimiento de la superficie como magnitud o el manejo incorrecto de las unidades de medida; de igual manera, hacen parte de esta problemática las múltiples dificultades y obstáculos conceptuales asociados a la superficie, en cuanto a medida, entre las cuales se puede destacar la relación que las unidades de superficie conservan con las unidades de longitud, siendo estas últimas la base de las primeras (Chamorro, 1997), así como con la relación área-perímetro a través de diversas maneras, lo cual se ve reflejado y contribuye, en particular, al aumento de los índices de pérdida de la asignatura en la institución educativa en la que me desempeño, y, en general, al bajo índice en los resultados de diferentes pruebas de estado.

Lo anterior se muestra tanto desde la experiencia profesional, pues luego de varios años de trabajar temas de geometría en grado séptimo, especialmente aquellos referentes a los conceptos

de área y perímetro, en las evaluaciones realizadas al interior de la institución por los profesores del área de matemáticas, así como en reportes sobre los resultados de evaluaciones externas (por ejemplo, SABER, PISA), se plantea la no apropiación por parte de los estudiantes de conceptos básicos en matemáticas, entre los que se incluye área y perímetro, evidenciada en la dificultad para aplicar dichos conceptos para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana. No obstante, desde lo planteado por el MEN en los Lineamientos Curriculares (1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), los estudiantes deben "ser matemáticamente competentes" para reconocer semejanza y congruencias entre figuras. Además deben identificar atributos medibles como la superficie (Grado 3°) para justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras, deben utilizar diferentes procedimientos para calcular el área de una superficie y describir relaciones entre área y perímetro (Grado 5°). Finalmente deben resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia, incluyendo el cálculo de áreas por medio de la composición y descomposición de figuras (Grado 7°).

En resumen, como objetivos principales en el contexto de medición, el MEN (1998) señala la construcción de los conceptos de cada magnitud, la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes, la estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto", la apreciación del rango de las magnitudes, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, la diferencia entre la unidad y el patrón de medición, la asignación numérica y el papel del trasfondo social de la medición. (MEN, 1998, p.42).En concordancia con dichos objetivos, desde el plan de área de la institución en la que laboro, lo referente a los conceptos de área y perímetro está presente dentro de los contenidos de las asignaturas de geometría desde los grados de primaria, esperando que en los primeros años de secundaria los estudiantes hayan construido el concepto de área, entre otros, y puedan utilizarlo en la solución de situaciones de medición. Desafortunadamente, incluso en la educación media, los estudiantes aún encuentran dificultades para el manejo de este y otros conceptos matemáticos. Las pruebas PISA, en las que el país ha participado, dan cuenta del bajo desempeño en matemáticas de nuestros estudiantes, pues el puntaje de Colombia es inferior a los obtenidos por 61 países y no es estadísticamente diferente de los observados en los países que obtuvieron los tres puntajes más bajos. Al respecto, el ICFES (2013) reporta:

> En matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y el 18%, en el nivel 2. Esto quiere decir que solo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. En contraste, apenas 3 de cada mil alcanzaron los niveles 5 y 6. Quienes están en estos niveles tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados: pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información; aplican conocimientos en contextos poco estandarizados; reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
> (Informe Nacional de Resultados: Colombia en Pisa, entregado por el Icfes en 2013).

De la misma manera, como lo plantean Piaget (1948)**,** Freudenthal (1983), Héraud (1989), Chamorro (1995)**,** frente al aprendizaje del área y sus aspectos importantes, existen muchas dificultades en la manera en que se aborda dicho concepto en las aulas. Particularmente, D´Amore y Fandiño (2007), señalan que los conflictos que encuentran los estudiantes, asociados a la relación área-perímetro, aspecto importante en la construcción del concepto de área, ya que estos dos conceptos deben ser abordados de manera simultánea en busca de evitar confusiones entre ellos, se reconocen desde hace mucho tiempo, y son considerados ya en la literatura de la matemática educativa como el tipo de dificultades que se consideran como “obstáculos conceptuales”, relación que ha sido estudiada con base en la teoría de niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. La falsa creencia sobre la existencia de una relación directa entre perímetro y área de figuras planas, desarrollada por los estudiantes, en la cual asocian con un aumento de área un aumento de perímetro, con una disminución del área una disminución del perímetro y viceversa, posiblemente sea adquirida debido al trabajo restringido con figuras básicas (triángulos, rectángulos, entre otros), que realizan los docentes y los textos escolares, además de ser abordada, por lo general, en figuras semejantes para construir relaciones.

En la misma investigación de D´Amore y Fandiño (2007) se muestra que las dificultades asociadas con relaciones existentes entre áreas y perímetros no son sólo de los estudiantes, sino también de los maestros, quienes poco énfasis hacen en aspectos como éste, fundamentales en la

apropiada construcción y relación de estos dos importantes conceptos de la geometría, y pudieron concluir que los problemas no sólo son de carácter epistemológico sino también, en consecuencia, de tipo didáctico.

Las dificultades que encuentran los estudiantes frente al manejo del concepto de área es la problemática que se abordó en el desarrollo de esta investigación; dificultades que consideramos hacen que su desempeño en grados superiores, por ejemplo en el manejo de temáticas del álgebra y el cálculo, no sea el esperado. En tal sentido, para el desarrollo de esta propuesta de intervención se reconoció la necesidad de seleccionar e implementar un conjunto de tareas en relación con el concepto de área, que posibilitara su comprensión, y que a su vez contribuyera con el mejoramiento del desarrollo del pensamiento métrico y geométrico en los estudiantes.

Inicialmente se propuso un instrumento de indagación con el cual se pudo evidenciar algunas de las dificultades expuestas en la literatura; allí se pudo ver que los estudiantes de grado séptimo, a pesar de haber tenido diferentes acercamientos al concepto del área desde grados anteriores, según los estándares curriculares y los planes de área del colegio, presentan confusiones entre área y perímetro, no manejan adecuadamente las unidades de superficie, no reconocían propiedades básicas del área como lo es la conservación.

PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

La intervención en el aula que aquí se reporta tuvo como propósito fundamental posibilitar la conceptualización del área por parte de los estudiantes de grado séptimo (12/13 años), en una institución educativa oficial, a través de la implementación de un conjunto de tareas, en diversos contextos, diseñadas para abordar aspectos y procesos específicos relacionados con dicho concepto: Reconocimiento de la magnitud (superficie), Conservación bajo transformaciones, Composición y descomposición, Procesos de medición y medida, y, Unidad de medida. El conjunto de tareas diseñadas e implementadas, junto con la descripción y evaluación de las actividades desarrolladas en el aula, se espera que puedan constituirse en un referente para apoyar la labor de los docentes que requieran abordar procesos de formación relacionados con el concepto de área.

En cada una de tareas propuestas se abordaron situaciones que buscaban que los estudiantes, a través de la manipulación concreta de material y de encontrarse frente a situaciones prácticas y de contexto cercano, reconocieran los diferentes aspectos o procesos relacionados con el concepto de área; por ejemplo, se resaltaba la conservación de la magnitud superficie ante diferentes transformaciones, la comparación de figuras con respecto a su superficie, con lo cual se hacía uso de la transitividad para posibilitar procesos de medición. De igual manera, el concepto de perímetro fue abordado en tanto se reconocieron algunas dificultades que encuentran los niños y jóvenes al considerar que existe una relación de dependencia entre estos dos conceptos.

1. REFERENTES TEÓRICOS

El MEN resalta la importancia del desarrollo y construcción de las nociones que involucran la medición, especificando el manejo que se le debe dar a la enseñanza de los conceptos de área y de perímetro, como fundamentales en los contenidos a desarrollar por parte de los educadores. De igual manera, en diferentes investigaciones frente al aprendizaje del área (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989; Chamorro, 1997; D´Amore y Fandiño, 2007; Corberán, 1996) se han evidenciado algunas de las principales dificultades en torno a ella, generando interés e importancia por el estudio del aprendizaje de la misma. En los trabajos de Camargo (2001) y D´Amore y Fandiño (2007), se reconocen aspectos de la obra de Piaget, Inheler y Szemisnska (1948), quienes dedican parte de su interés al estudio de la geometría euclidiana y plantean la importancia del estudio de la conservación y la transitividad en los procesos de medición en el espacio en dos dimensiones. Dentro de los resultados que encontraron, discriminados dentro de los periodos o estadios señalados por Piaget, aparece el recurso de la comparación perceptiva, donde los niños acuden y confían en lo que perciben con los sentidos al momento de emitir un juicio de comparación, después acuden a algún tipo de recursos comparativos que denominan *transferencia manual* que apoye su percepción inicial. Más adelante los niños son capaces de valerse de su propio cuerpo o de un objeto externo que les permita hacer una medición de los objetos a comparar, inicialmente buscando que sean del mismo tamaño, para luego, en periodos más elevados, usar objetos más grandes o más pequeños realizando transposiciones del mismo, con lo cual puedan llegar a construir la idea de unidad de medida. En el mismo sentido, como se mencionó con anterioridad, Chamorro (1997) señala las múltiples dificultades y obstáculos conceptuales asociados a la superficie, en cuanto a medida, entre las cuales se puede destacar la relación que las unidades de superficie conservan con las unidades de longitud, siendo estas últimas la base de las primeras. Señala, además, que solamente con un adecuado manejo de relaciones espaciales, relaciones multiplicativas y de un modelo geométrico, se puede garantizar la coordinación y la visualización de dichas relaciones.

Lo anterior puesto en el contexto de la construcción y reconocimiento de la magnitud de superficie, se aproxima a lo que autores posteriores señalan como adecuado dentro del aprendizaje de los conceptos de área y de perímetro. Por ejemplo, Freudenthal (1983) citado por Corberán (1996, pp. 9-10), refiere la conveniencia de abordar la enseñanza del área a partir de un

análisis fenomenológico hacia la constitución del objeto mental. En relación con propuestas para el tratamiento del concepto de área, Del Olmo, Moreno y Gil (1993) señalan la importancia de permitir que los estudiantes perciban el área como una cualidad de los objetos y se distinga de otras que estos presenten, además que puedan reconocer de forma cualitativa figuras con mayor o menor área que otras, realizando comparaciones directas o indirectas, hasta llegar al cálculo de áreas, primero sin que sea imprescindible la realización de mediciones, hasta permitir que los estudiantes elijan una unidad de medida conveniente para cuantificar la superficie, inicialmente a través del pavimentado por medio de la iteración de la unidad elegida y posteriormente con la aplicación de fórmulas.

1.1 LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁREA

Algunos autores señalan de manera específica aspectos importantes relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del área. En esta sección se señalan algunos de ellos, junto con las consideraciones más relevantes al respecto.

Del Olmo y otros (1993) señalan que la enseñanza del área involucra una serie de conceptos y procesos previos, su compresión implica que se realice un trabajo práctico de medición, donde el estudiante pueda observar las múltiples aplicaciones que ésta tiene en la cotidianidad y que además se presenta en una serie de situaciones donde su uso es necesario e indispensable para la solución de problemas prácticos. La formación del concepto de área viene dada por tres tipos de aproximaciones: Repartir Equitativamente, Comparar y Reproducir, y Medir. Asociados a estos conceptos están los procesos de percepción, comparación, medida y estimación, los cuales están relacionados transversalmente.

Repartir equitativamente incluye aquellas situaciones en las que se debe repartir un objeto dado, este tipo de aproximación está estrechamente relacionada con el concepto de fracción, ya que la fracción se utiliza en este sentido como medidora de la magnitud superficie.

Comparar y reproducir como aproximación al concepto de área, es un poco más compleja que repartir equitativamente, pues incluye situaciones en las que se debe comparar dos superficies y situaciones en las que, dada una de ellas, se debe hallar otra de igual área (por ejemplo dibujar un cuadrado que tenga igual área que un círculo).Estas situaciones pueden ser resueltas mediante

alguno de cinco procesos: Por inclusión, por transformaciones de romper y rehacer, por estimación, por medida o por medio de funciones.

Medir incluye situaciones en las que la superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar. Su realización puede efectuarse por medio de cuatro formas: recubrimiento con unidades, acotación entre un valor superior e inferior, transformaciones de romper y rehacer y/o relaciones geométricas.

Respecto a los procesos asociados se tiene:

Percepción. Desde la percepción es como el estudiante construye la medida del objeto, este tipo de aproximación realizada por los niños es previa a otro tipo de abstracción frente a la medición.

Comparación. La comparación de áreas implica el establecimiento de diferencias y semejanzas frente al tamaño de las superficies, de forma directa, con procesos de medición, o de forma indirecta, por estimación o por uso de fórmulas.

Medida. Medir puede ser visto como el eje de los procesos de construcción, manejo y comprensión de las magnitudes.

Estimación. La estimación puede permitir el acceso a diferentes técnicas de medición y puede llevar a los estudiantes a la adquisición de conciencia frente al tamaño de las unidades de medida y su relación con el tamaño de la superficie, como también a la validación de los sistemas de medición.

De los aspectos propuestos por Del Olmo y otros (1993) se prestó especial cuidado a la comparación y a la medida al momento de generar y desarrollar la propuesta, pues, teniendo en cuenta que el área la concebimos como la medida de la superficie, el hecho de medir se constituye como un proceso vital en la construcción del concepto dándole sustento práctico, el cual inicia con la comparación de superficies. De igual manera la percepción y la estimación como procesos asociados en la construcción del concepto de área, estuvieron de manera constante en el trabajo de los estudiantes con cada una de las tareas propuestas, pues desde los sentidos y la intuición como principal forma de relacionarse con el mundo, en particular con las

situaciones propuestas, se llevó a los estudiantes a interiorizar la noción de superficie y luego su medida como concepto de área.

Por otro lado, en la fenomenología de Freudenthal (1983, pp. 1-27) se realiza un acercamiento hacia la constitución de los objetos matemáticos referentes a la medición, iniciando con la longitud, a través del acercamiento a objetos mentales representados por fenómenos, a través de adjetivos usados para referirse a características o atributos de las cosas, partiendo de la comparación para establecer formas de medición. Desde lo planteado por este autor, inicialmente se puede ver cómo se refiere la superficie expresada mediante adjetivos: Grande, amplio, espacioso, diminuto, reducido, pequeño, estrecho, son algunos adjetivos usados para describir superficies, o algunas de sus propiedades. Por supuesto la habilidad de distinguir tales propiedades precede a la habilidad de expresarlas lingüísticamente. Para el adulto puede ser claro –al menos inconscientemente– cómo estas expresiones están relacionadas con la misma magnitud, superficie, y este adulto muchas veces presupone que el niño estará al tanto de ésta relación. Muchas veces los investigadores en este campo no están conscientes de esta dificultad. No es rebuscado preguntarse uno mismo cómo es que los niños se las ingenian para desarrollar un conocimiento a partir de estas conexiones. Un factor perturbador es el obscurecimiento de este complejo de adjetivos por el uso de “grande y pequeño”, los cuales sirven para muchas cosas (como para “niño grande” y “niña pequeña”). Alrededor de adjetivos tales como “grande” o “amplio” existe un complejo de expresiones relacionadas: más grande, el más grande, tan grande como, menos grande, no tan grande como, demasiado grande, muy grande. La habilidad de distinguirlos precede a la de la expresión lingüística (por ejemplo, algo no puede pasar a través de un agujero porque es *demasiado grueso*; el cubo más pequeño se coloca arriba del más grande). Las inhibiciones trabajan en contra de usar comparativos y superlativos – “grande” es usado cuando se quiere decir “más grande” y “el más grande”.

Siguiendo con las ideas de Freudenthal (1983, p. 12), los adjetivos mencionados cumplen al comparar objetos o lugares respecto a la superficie. Esta actividad se desarrolla ampliamente antes de que sea constituido lo que los matemáticos llaman relación de orden de las magnitudes (longitud, peso, superficie), por no mencionar, volverse consciente del orden de la relación. La constitución de una relación de orden en cualquier sistema incluye al menos el funcionamiento operacional de transitividad, esto es, el derivar conclusiones fácticas de acuerdo a los patrones

tales como: *a* tan grande como *b, b* tan grande como *c*, así que *a* tan grande como *c;* y *a* más pequeño que *b, b* más pequeño que *c*, por tanto *a* más pequeño que *c;* lo cual por supuesto no significa la habilidad de verbalizar o aún de formalizar la transitividad. Una de las nociones matemáticas que ha sido absorbida por la "conservación" con el fin de mezclarla con otras muy diferentes es la *invariancia bajo un conjunto de transformaciones*. Por ejemplo, la diferencia entre las superficies de una *esfera* y un *anillo* es invariante bajo deformaciones arbitrarias. (La superficie de un anillo no se puede deformar para convertirse en la de una esfera); la *forma* de una figura es invariante bajo semejanzas.

La expresión *congruente* es bien conocida en el contexto de la geometría (segmentos congruentes, ángulos congruentes, figuras congruentes, etc.), la cual resulta equivalente a "igualdad" en aritmética o álgebra. Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, independiente de su posición u orientación, es decir, si una de ellas puede ser obtenida de la otra mediante traslaciones, rotaciones o reflexiones (invariantes en forma y tamaño). No obstante, el concepto de congruencia se puede hacer menos restrictivo, al exigir sólo una de las dos condiciones anteriormente planteadas; en particular, si no se impone la condición de tener la misma forma, pero se mantiene la de tener el mismo tamaño (cantidad de superficie), se tiene entonces una *congruencia en área* (invariante en tamaño); así, si se tiene dos figuras congruentes en área, una de ellas puede obtenerse de la otra no sólo mediante transformaciones "rígidas", sino también realizando procesos de descomposición y recomposición exacta de la una en la otra. La figura más simple es el segmento de recta. Segmentos de recta "iguales" en lugar de "congruentes" es un término más antiguo. La terminología que prevalece ahora se reserva "igualdad" a coincidencia; esto es, a identidad de hecho. Aún cuando segmentos de recta congruentes son iguales en cierto sentido; esto es, respecto a su longitud. Y de manera inversa: segmentos de recta que tienen la misma longitud pueden ser llevados uno sobre el otro por medio de mapeos de congruencia. Un cuerpo rígido puede ser desplazado, y en tanto que no esté mal fabricado, permanece congruente con él mismo bajo esta operación. La rigidez es la realización física de la propiedad llamada *invariancia de la forma y el tamaño bajo movimientos.* El área cumple con esta propiedad.

La longitud, así como la superficie, presenta invariancia bajo una trasformación diferente a los mapeos planos o espaciales de congruencia. Se trata de transformar "objetos largos", doblando o

curvando con un cierto esfuerzo: dos objetos a ser comparados se acomodan uno al lado del otro o uno al inicio de otro mientras ciertas deformaciones son permitidas. Para el caso del área una superficie puede cortarse para ser dividida y reacomodada, buscando una comparación frente a otra de diferente forma, cuando se trate de materiales sobre los cuales sea posible realizar este tipo de transformaciones.

Una superficie puede ser "rota" y rehacerse sin que cambie la medida de su área, a pesar de que su reconfiguración sea de forma diferente. Lo anterior no es nada trivial. Por el contrario, el hecho de pasar por una serie de intermedios hace que los estados inicial y final sean realmente significativos, si se enfatiza solamente en ellos al momento de formular algún tipo de pregunta referente a la comparación de sus superficies. Siempre que la transformación de romper y rehacer reproduce el estado inicial, la cuestión "¿son de la misma área?" puede ser trivial. Más aún, la respuesta revela solamente hasta dónde el niño que fue cuestionado puede recordar el estado inicial y es capaz de comparar un estado real y uno mentalmente realizado, uno con el otro. Si el estado final no es idéntico al inicial, la respuesta también revela hasta dónde el niño sabe qué característica importa si se está trabajando con la superficie. Se debe señalar en este punto que al romper y rehacer superficies, éstas se transforman en superficies, es decir, no pierden su naturaleza; luego, al ser rehechas, el área de la superficie no depende de la ubicación de las partes.

A partir de lo anteriormente expuesto, se enfatizó en los procesos de cortar y rehacer en las tareas propuestas en la intervención, como herramienta fundamental en el desarrollo de la investigación. Se buscó que los estudiantes realizaran este tipo de procesos para que las conclusiones hechas, basadas en la comparación entre superficies, fueran evidentes, a través de la manipulación propiamente dicha de las superficies, con lo cual se hicieran más validos los juicios emitidos por los estudiantes.

Puig, basado en Freudenthal (1997), también hace referencia a la manera de abordar la enseñanza de los objetos matemáticos desde la fenomenología, particularmente los referidos a longitudes, áreas y volúmenes, resaltando la importancia de la constitución de objetos mentales adecuados conforme las necesidades de enseñanza previstas, pues es indudable que es el docente y sus concepciones los que determinan los alcances del aprendizaje de sus estudiantes. Por ello señala

la necesidad de no tratar estos conceptos de manera ligera, quitándoles la importancia que tienen como conceptos asociados a la medición. De esta manera, señala que, en ocasiones, lo que muestra una fenomenología didáctica es que los fenómenos organizados por el concepto son tan variados que se constituyen de hecho objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para explorar en la enseñanza, o varios objetos mentales si se exploran varios tipos de fenómenos. Para la adquisición del concepto es preciso integrar entonces esos distintos objetos mentales en un único objeto mental. Éste es el caso, por ejemplo, del concepto de área. Longitudes, áreas y volúmenes son las magnitudes que se miden en la geometría elemental y hace falta, por tanto, que se adquieran esos conceptos como parte del aprendizaje de la medida y la medición. La comparación entre cualidades de objetos es el comienzo de la actividad de medición. Ésta se convierte en medida por el intermedio del establecimiento de una unidad y la consideración de los objetos que se tratan como objetos de los que se puede predicar esa cualidad; por ejemplo, se les puede predicar la longitud si tiene sentido decir de ellos que son "largos".

Ahora bien, longitud, área y volumen, como conceptos, son problemáticos por la variedad de enfoques para la constitución del objeto mental área (o volumen). En efecto, las figuras planas se pueden comparar con respecto al área directamente, si una es parte de otra, o indirectamente, después de transformaciones de cortar y pegar, congruencias y otras aplicaciones que preservan el área; o bien midiéndolas ambas. La medida puede hacerse cubriendo la figura con unidades de área, o mediante aproximaciones interiores y exteriores; para lo cual se usa la aditividad del área bajo la composición de figuras planas que son mutuamente disjuntas, salvo sus fronteras (de dimensión uno), o la convergencia de las áreas por aproximación. No está claro que estos enfoques conduzcan al mismo resultado, y, de hecho, la prueba de que el resultado de la medición siguiendo todos esos procedimientos es la misma no es simple. La constitución del objeto mental volumen tiene además la complicación adicional de considerar los fenómenos correspondientes a la capacidad, que, usualmente, se miden con unidades distintas. En ocasiones, incluso es difícil distinguir el objeto mental del concepto. Al menos si se quiere tener un objeto mental unitario: sólo mediante el acceso al concepto es posible unificar un conjunto heterogéneo de objetos mentales.

En lo anterior se observa la importancia de realizar buenos procesos de medida en busca de la conceptualización de objetos mentales asociados a las magnitudes. Particularmente para el área en el desarrollo de la propuesta se plantearon tareas en las que el estudiante debía realizar procesos de medición de diversas superficies y en variados contextos, coincidiendo con lo señalado por Puig (1997), hasta el punto de que, dentro de los aspectos señalados como relevantes en la enseñanza y el aprendizaje del área se incluyeron los procesos de medición y medida, como se verá más adelante.

Corberán (1996), basada principalmente en Freudenthal (1983), Perrin-Glorian (1992) y Héraud (1989), señala los aspectos más importantes al momento de generar una secuencia que permita el aprendizaje del concepto de área, como lo son la conservación del área, la unidad de medida y el cálculo de áreas. Dentro de dicha secuencia se abordan y desarrollan estos aspectos a través de lo que la autora nombra como una sugerencia para la enseñanza del área:

a. Conservación del área. Partición, reagrupación, desplazamiento.
b. Unidad de medida.
    i. Carácter iterativo y recubrimiento de la unidad de área.
    ii. La unidad se puede subdividir.
    iii. Relación entre el tamaño de la unidad y el número de unidades medidas.
    iv. Usar unidades de área de diversas formas.
    v. Selección apropiada de la unidad de área en el proceso de medición.
    vi. La introducción de la unidad estándar de área es dejada para el final.
c. Cálculo de áreas.
    i. Además de las fórmulas, los estudiantes deben estar familiarizados con algunos métodos de estimación, con lo cual los estudiantes logren un acercamiento al proceso de medida.
    ii. Los estudiantes deben realizar actividades donde encuentren áreas de figuras irregulares.
    iii. El momento de enfrentar a los niños con las fórmulas no es el más adecuado, pues casi siempre se realiza mucho antes de que comprendan el concepto de área.
    iv. El momento y el modo de introducir las fórmulas es inadecuado y hace que los estudiantes abandonen otras formas o técnicas de medida.

Se debe diferenciar el concepto de área del concepto de superficie y del concepto de perímetro durante todo el proceso de medida (Corberán, 1996).

Con base en lo anterior, Corberán genera una propuesta basada en recursos didácticos, donde resalta la importancia de un correcto abordaje de dichas nociones, mostrando las posibles causas que generan falsas creencias y las formas de abordarlas en busca de una mejor comprensión y facilidad en el trabajo práctico, hasta la construcción y correcta utilización de fórmulas y unidades de longitud y superficie; propuesta que luego complementa y proporciona a los docentes como una guía de recursos didácticos para la enseñanza en primaria del concepto de área, donde además señala la relación (didáctica) entre área y perímetro como aspecto importante a tener en cuenta en el desarrollo de dicho concepto y, dentro de la secuencia didáctica que propone, presenta una serie de actividades enfocadas a la conceptualización del área y de las relaciones existentes entre área y perímetro.

Finalmente se debe resaltar que para la realización de esta investigación se consideraron las diferentes ideas de estos autores, tanto en la elección, adecuación y aplicación de las tareas, desarrollo de las actividades y análisis posterior del trabajo en el aula, como en la elección de la metodología de trabajo. Dichas ideas e investigaciones fueron determinantes para la construcción y elección de los diferentes aspectos resaltados como importantes en la enseñanza y el aprendizaje del área, así como las consideraciones de la fenomenología frente a la forma de reconocer que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los estudiantes y ser relevante para ellos y para su contexto.

2. DISEÑO METODOLÓGICO

En las investigaciones relacionadas y llevadas a cabo en contextos educativos, se tiene como uno de los principales objetivos o intereses, el analizar y apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje, buscando intervenir un problema puntual, con lo cual buscar el mejoramiento de los procesos y métodos pedagógicos en un contexto determinado. El desarrollo de la presente investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, desde el modelo de investigación-acción descrito por Elliott (2005), desde donde se plantea como objetivo fundamental de este tipo de investigaciones el mejoramiento de la práctica educativa por encima de la generación de conocimientos, aunque esto último viene como consecuencia directa de lo primero. De igual manera se plantea que la investigación-acción perfecciona la práctica educativa mediante el desarrollo de diferentes capacidades personales y profesionales en diversas situaciones, constituyéndose en una solución a las diferencias entre teoría y práctica de la manera en que estas son percibidas por los profesores.

Se partió de la identificación de una problemática relacionada con la conceptualización del área, desde el reconocimiento de la superficie como magnitud, así como el manejo de unidades apropiadas para la medición de áreas, hasta su diferenciación con el perímetro y la existencia de falsas relaciones entre área y perímetro. Luego se realizó una indagación preliminar donde se pudo evidenciar las dificultades mencionadas, con lo cual precisar la búsqueda de referentes e iniciar la intervención que buscaba una conceptualización adecuada del área a partir de los aspectos y procesos determinados como importantes en sus procesos de aprendizaje y enseñanza. El proceso investigativo dio inicio con un diagnóstico frente al desarrollo de los conceptos de área y perímetro en los estudiantes de grado séptimo de un colegio público ubicado al sur de Bogotá, realizado a través de un instrumento de indagación. Luego se generó un conjunto de nueve tareas de trabajo en el aula con material práctico, inicialmente planteadas para que algunas fueran trabajadas de forma individual y otras en pequeños grupos, bajo la guía del docente investigador; además se realizaron tres sesiones plenarias de socialización del trabajo realizado, en una puesta en común donde se pudo contrastar las formas y resultados seguidos y conseguidos por cada estudiante o grupo, puntualizando e institucionalizando aspectos determinantes en la conceptualización del área. La elección y aplicación de las tareas se encaminó al trabajo práctico de aspectos relevantes para la conceptualización del área. Se utilizaron instrumentos escritos,

como fotocopias y portafolios de los estudiantes como evidencia del trabajo, con los cuales se pudo obtener la información necesaria para el análisis del avance y desarrollo del concepto de área por parte de los estudiantes.

2.1 RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

Las diferentes tareas fueron desarrolladas en los momentos de clase, dos veces por semana en sesiones de ochenta minutos, donde cada uno de los estudiantes contaba con los elementos necesarios que le permitían abordar la tarea de forma efectiva, siempre bajo la guía del docente investigador, quien intervenía de acuerdo a las necesidades que se presentaban. Las sesiones de trabajo en pequeños grupos (tres estudiantes), se mantuvieron durante algunas sesiones de clase con el objetivo de que los estudiantes interactuaran de forma espontánea con sus compañeros en el desarrollo de las actividades y pudieran compartir las dudas e inquietudes que les iban surgiendo, así como las estrategias utilizadas al abordar las tareas. En las plenarias de socialización se pudo contrastar las formas y resultados seguidos y conseguidos por cada estudiante o grupo de estudiantes.

Para el análisis de los resultados se tuvo en cuenta conceptos y procesos relacionados con el área y con los procesos de enseñanza y aprendizaje que están asociados a dicho concepto, con los cuales se pudo realizar una caracterización y clasificación de los estudiantes, de acuerdo a sus procedimientos y resultados, durante la aplicación del conjunto de tareas. Aunque no son lineales, tampoco mutuamente excluyentes, las siguientes pueden tomarse como las fases que, a nuestro criterio, posibilitaban de manera acertada la conceptualización del área, y sobre las cuales se construyó el conjunto de tareas y también se realizó el análisis y la categorización:

1. *El reconocimiento de la magnitud superficie*.
2. *Conservación bajo transformaciones*.
3. *Composición y descomposición*.
4. *Procesos de medición y medida*.
5. *Unidad de medida*.

2.2 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Para la adquisición del concepto de área se debe permitir que los estudiantes tengan un acercamiento efectivo al proceso de medición de superficies, pues el acto de medir requiere numerosos intentos y estimaciones, buscando con ello establecer e individualizar claramente la magnitud que se quiere medir. El estudiante debe tener una transición, provista por diversas situaciones que lo pongan en contacto directo con la magnitud que se quiere medir, desde la percepción de la magnitud, su conservación y comparación, lo que implica poder realizar juicios de ordenamiento, hasta el establecimiento de una unidad de medida y su relación numérica con la magnitud propiamente dicha. Frente a este proceso, las siguientes categorías fueron tenidas en cuenta para visualizar el progreso de los estudiantes respecto a la conceptualización del área, y las implicaciones alrededor de ella:

2.2.1 Reconocimiento de la superficie. El estudiante puede establecer la superficie como atributo de los objetos y de las figuras, aislarla de los demás atributos que presentan, y puede realizar cierto tipo de inferencias frente a su tamaño, realizando comparaciones y ordenaciones de los objetos o de las figuras basadas en su superficie. Dentro de este aspecto se observó si el estudiante:

- Identifica la magnitud superficie como atributo de figuras y objetos.
- Reconoce la posibilidad de cuantificar la superficie.
- Identifica el área como la medida de la superficie.
- Identifica y diferencia el área y el perímetro.

2.2.2 Conservación de la superficie. El estudiante debe ser capaz de darse cuenta que la superficie se conserva a pesar de que los objetos o las figuras cambien de posición o forma; además de realizar comparaciones entre superficies de forma directa, a través de la percepción, y de forma indirecta a través del uso de un tercero. En este aspecto el estudiante:

- Identifica la conservación de la superficie bajo transformaciones rígidas.
- Identifica la conservación de la superficie bajo procesos de cortar, descomponer y reconfigurar.
- Compara superficies de forma directa, usando únicamente lo percibido por la vista.
- Compara superficies realizando desplazamiento o superposición de las figuras, o valiéndose de algún tipo de comparación arbitraria.
- Hace uso de la transitividad en la comparación de superficies.

2.2.3 Medida. El estudiante debe reconocer la necesidad de contar con criterios específicos para tomar decisiones sobre la comparación de superficies (decidir si una superficie es mayor, menor o igual que otra), reconociendo la necesidad de cuantificar la superficie, para lo cual requiere de una unidad de medida. En particular, debe establecer que existe relación entre la superficie y el número que la mide (área), es decir, ser capaz de medir la superficie. Dentro de este aspecto se destaca que el estudiante:

- Elige y usa unidades de medida de superficie apropiadas.
- Relaciona el tamaño de la unidad de medida con la cantidad de veces que cabe en una superficie determinada.
- Reconoce el carácter iterativo, de subdivisión y de recubrimiento de la unidad de medida.
- Usa y reconoce unidades estándares de superficie.
- Desliga la forma de la superficie del área de ésta.

2.2.4 Relaciones entre el área y el perímetro. Como parte del proceso de conceptualización del área se tiene el manejo del perímetro como concepto desarrollado de forma simultánea y que permite afianzar de manera más adecuada el concepto de área, a través de su comparación y diferenciación. Aquí el estudiante:

- No muestra confusión entre área y perímetro.
- No muestra confusión entre área y superficie plana.
- Establece relaciones entre área y perímetro de acuerdo a modificaciones que puede llegar a sufrir la superficie.

2.3 DISEÑO DE TAREAS Y ACTIVIDADES

Las tareas fueron seleccionadas y adecuadas para orientar el desarrollo de conceptos y procesos relacionados con el aprendizaje del área, estas se describirán más adelante en esta sección. En las actividades desarrolladas con estas tareas, inicialmente se usó material tangible y se promovió la realización de acciones sobre éste, en diferentes contextos, y con el propósito adicional de despertar interés por parte de los estudiantes con respecto al trabajo propuesto.

2.3.1 Conceptos y procesos relacionados con el área.

El desarrollo de las actividades en el aula se basó en un conjunto de tareas, cuyo diseño estuvo orientado hacia el abordaje de los siguientes conceptos y procesos relacionados con el área, y su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje:

- *El reconocimiento de la magnitud superficie*. Es importante que los estudiantes sean conscientes de la existencia de la superficie como atributo presente en las figuras planas y en los objetos, y puedan realizar inferencias frente a ella respecto a su tamaño, al ser comparada con otras y decidir si es más grande o más pequeña, organizar una serie de figuras, diferenciar y aislar la superficie de los demás atributos de las figuras, etc.
- *Conservación bajo transformaciones*. La conservación de la superficie bajo movimientos de rotación, reflexión o translación, debe ser percibida por los estudiantes a través de la manipulación de figuras, donde se pueda apreciar dicha conservación de manera efectiva con la superposición de una misma figura, es decir, de forma directa; o de forma indirecta, a través de un tercero que pueda ser superpuesto en ellas y sirva de comparativo. Con esto último se empieza a poner en juego la visualización de la transitividad como propiedad básica de la magnitud superficie.
- *Composición y descomposición*. Se les debe brindar a los estudiantes la posibilidad de observar los cambios que pueda llegar a sufrir la superficie de una figura cuando es expuesta a cambios de corte, descomposición, recomposición, y puedan llegar a concluir frente a ello, enfatizando que en todo ese proceso la superficie se conserva. Es decir, la superficie inicial es equivalente a las partes en que se descompone al recortarla, y la recomposición de estas partes en otra superficie, donde no existe superposición, genera otra superficie equivalente.
- *Procesos de medición y medida*. Realizar comparaciones entre figuras, medir una figura con otra o con varias, de tal manera que en dicho proceso el estudiante vaya construyendo el concepto de área como cantidad de superficie de una determinada unidad de medida, dada o tomada por él mismo, es un paso crucial hacia la conceptualización del área. Los estudiantes deben poder ver y manipular las figuras, de tal manera que la medida resulte de su propio proceso de medición, por la iteración de la *unidad* sobre la superficie a medir, o por comparación directa o indirecta.
- *Unidad de medida*. El manejo de unidades de medida para la obtención del área de una superficie, como la cantidad de veces que son necesarias para su recubrimiento, debe ser consecuencia de un proceso de elección, superposición y cuantificación. El estudiante debe poder elegir la unidad de medida más conveniente, además de observar que ésta es

susceptible de ser divida en busca de la exactitud de la medida asignada a la superficie en términos de la unidad elegida.

2.3.2 Conjunto de tareas

Las primeras tareas están orientadas a posibilitar el reconocimiento de la superficie como magnitud y la comparación entre superficies (tareas 1, 2 y 3), así como a la medición de la superficie a través de unidades de tipo bidimensional mediante recubrimientos (tareas4, 5 y 6), y, posteriormente, al cálculo de áreas y su relación con el perímetro (tareas 7, 8 y 9); no obstante, los objetivos planteados para cada grupo de tareas no son exclusivos de éstas, en tanto algunas tareas posibilitan abordar de manera transversal varios de los propósitos señalados anteriormente. Los objetivos específicos de cada tarea serán presentados en siguiente capítulo, en el que se describirá con cierto detalle los resultados de la implementación de la propuesta

Para el desarrollo de las actividades de aula, relacionadas con esta propuesta de intervención, en total se diseñaron nueve tareas, las cuales se describen a continuación.

Tarea 1: **Comparando y ordenando rectángulos**

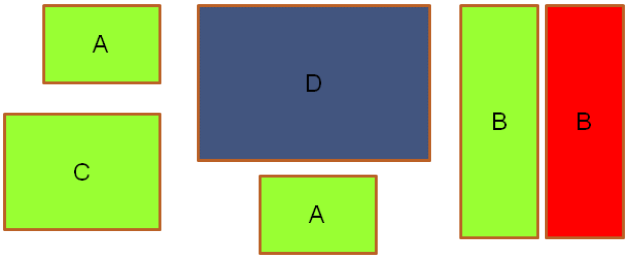


Figura 1.Comparando y ordenando rectángulos

De acuerdo con las figuras entregadas, realicen cada uno de los siguientes puntos:

1. Describan algunas características de las figuras.
2. Identifiquen similitudes y diferencias entre las figuras.
3. Ordenen las figuras y justifiquen el orden dado.
4. ¿Cuál de las figuras tiene mayor superficie? Expliquen su respuesta.
5. Recubran la figura D de dos maneras diferentes.
6. ¿Con cuál de las figuras se puede recubrir completamente cada una de las demás? Expliquen su respuesta.
7. ¿Qué pueden concluir de las superficies de las figuras B y C?

Nota. El conjunto de formas rectangulares hechas en cartulina se les entrega a los estudiantes, sin información alguna sobre las medidas de sus lados.

Adaptada de Corberán (1998).

Tarea 2**: Comparando regiones**

1. La finca de Don Luis y la de Don Hugo tienen cada una un corral donde se crían las gallinas. Dibuja los corrales en un trozo de cartulina y recórtalos. ¿En cuál de los dos corrales hay más espacio para que se muevan las gallinas?

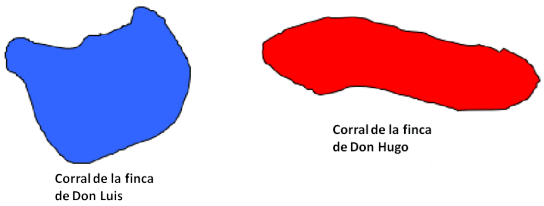


Figura 2. Corrales

Tomada de Corberán (1998).

2. Imagínate que las siguientes figuras representan dos campos cubiertos de hierba. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Explica.

Figura 3. Campos de hierba

Adaptada de Corberán (1998).

3. Si tuvieras que pintar un techo que tiene la forma que se muestra en la figura A y otro como el de la figura B, ¿En alguno de los dos se requerirá más pintura que en el otro? Explica tu respuesta.

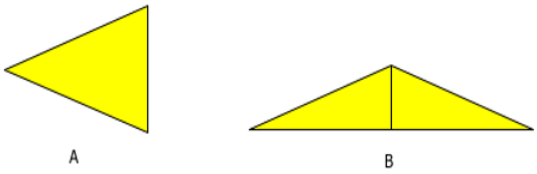


Figura 4. Techos

Tomada de Corberán (1998).

4. Compara la superficie de las siguientes figuras y describe detalladamente el proceso que uses.

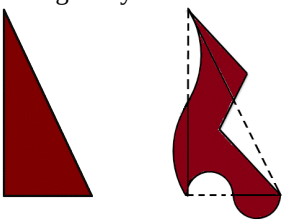


Figura 5. Recomposición y comparación

Adaptada de Del Olmo y otros (1993).

Tarea 3: **Descubriendo figuras en las sombras**

En esta actividad los estudiantes contaron con su propio tamgram, realizado por ellos mismos siguiendo las indicaciones dadas con anterioridad por el profesor.

El tangram es un puzzle de siete piezas que procede de China, y con el que se pueden construir más de 300 figuras diferentes. Las siete piezas resultan de la descomposición del cuadrado como se indica en la figura.

Figura 6. Tangram

1. Construye tu propio tangram siguiendo las indicaciones del profesor sobre un cuadrado de 12cm de lado.
2. Construye con las siete piezas del tangram cada una de las figuras que a continuación se te presentan. Una vez construidas debes reproducirlas en tu portafolio, indicando la posición de cada una de las piezas.

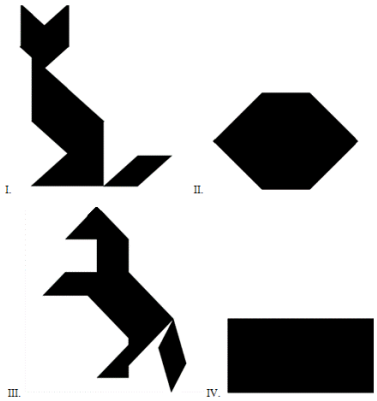


Figura 7. Figuras en las sombras

3. Responde de forma razonada a las siguientes preguntas y explica lo más detallado posible tus respuestas:
   a. ¿Alguna de las figuras construidas tiene menos superficie que las otras? Explica.
   b. ¿Qué tipo de relación podrías establecer entre el tamaño de las diferentes fichas que conforman el tangram?

Tarea 4: **Comparando y contando con diversas figuras**

Observen las siguientes figuras y respondan:

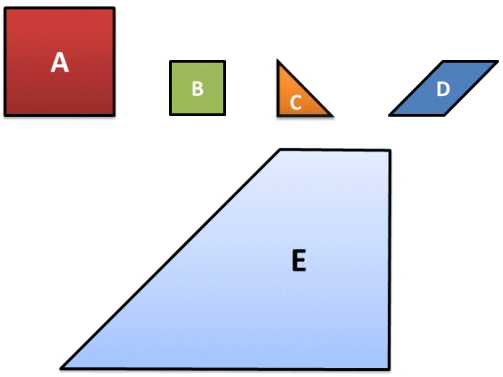


Figura 8. Diferentes figuras

1. Comparen las superficies de las figuras dadas y ordénenlas de mayor a menor.
2. ¿Qué relación existe entre la superficie de las figuras **A** y la superficie de la figura y **B**?
3. ¿Qué relación existe entre la superficie de las figuras **A** y la superficie de la figuras **E**?
4. ¿Con cuál de las figuras se podría recubrir completamente cada una de las demás? Expliquen su respuesta.

Tengan en cuenta que, de ser necesario, las figuras pueden ser descompuesta o recortadas.

Tarea 5**: Midiendo figuras con otras figuras**

1. Dibuja tu mano en una hoja de papel cuadriculado y calcula el número de cuadrados que hay en su interior. Intercambia este dato con tus compañeros. Después de ello, ¿podrías decir qué niño tiene la mano más grande y la más pequeña?
2. Utiliza tu propia mano y ayudándote de ella, calcula el número de veces que te cabe en un pliego de cartulina. El número que has obtenido representa una medida aproximada del área del pliego de cartulina. Compara la medida que tú has obtenido con la que han obtenido algunos de tus compañeros y comenta lo ocurrido.
3. Calcula cuántas figuras A caben en la figura (S), cuántas figuras B caben en la figura (S) y cuántas figuras C caben en la figura (S). Completa la tabla siguiente:

	Figura A (Unidad A)	Figura B (Unidad B)	Figura C (Unidad C)
Superficie (S)			

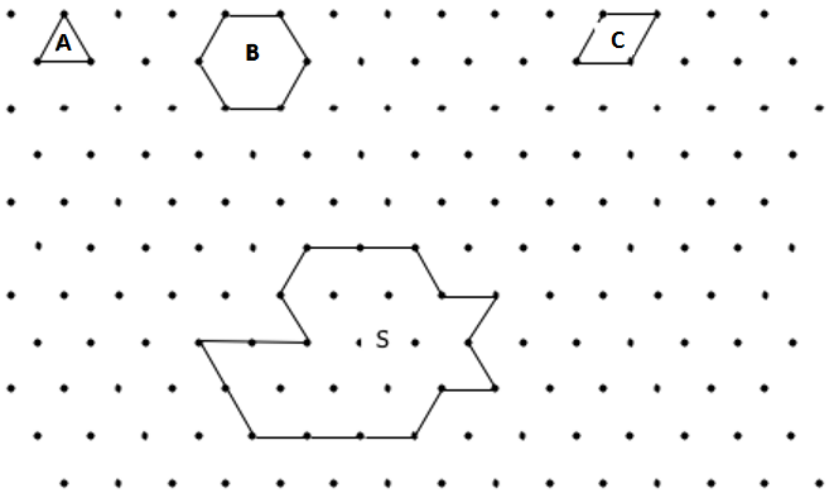


Figura 9. Medición de una superficie con formas variadas

Ahora contesta:

a. ¿Qué relación, en cuanto a su tamaño, podemos establecer entre las figuras A, B y C?
b. ¿Cómo le asignaríamos una medida a la figura S usando las otras figuras?

4. ¿Cuántas veces cabe la figura A en cada una de las figuras 1, 2 y 3?

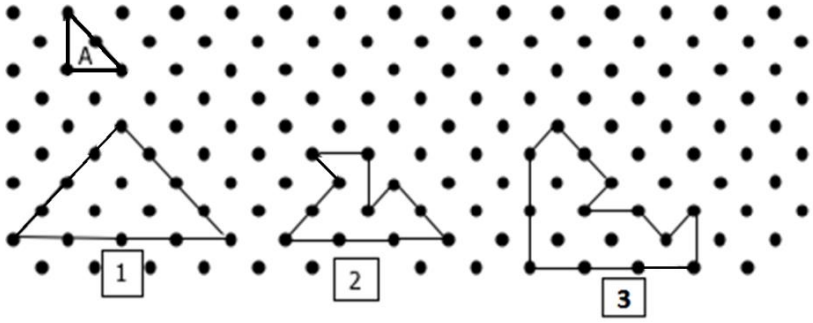


Figura 10. Medición de diferentes superficies con la misma unidad

Adaptada de Corberán (1998).

Tarea 6**: Midiendo figuras con cuadritos**

1. Luis ha diseñado las siguientes figuras, utilizando para ello la cuadrícula de una hoja.

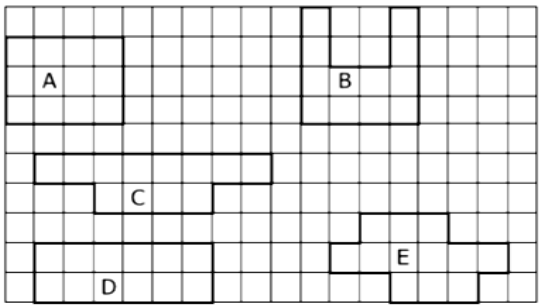


Figura 11. Midiendo figuras con cuadritos

a. Calcula cuántos cuadritos pequeños son necesarios para construir cada una de estas figuras. ¿Qué observas?
b. ¿Qué puedes decir del tamaño de cada una de la figuras construidas por Luis?
c. Si cuatro cuadritos pequeños equivalen a un centímetro cuadrado ($1cm^2$):
   i. Dibuje dos figuras diferentes cuya superficie sea equivalente a $1cm^2$.
   ii. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide la figura A?
   iii. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide la figura E

2. ¿Cuántos cuadrados como el A, se necesitan para formar la siguientes figuras?

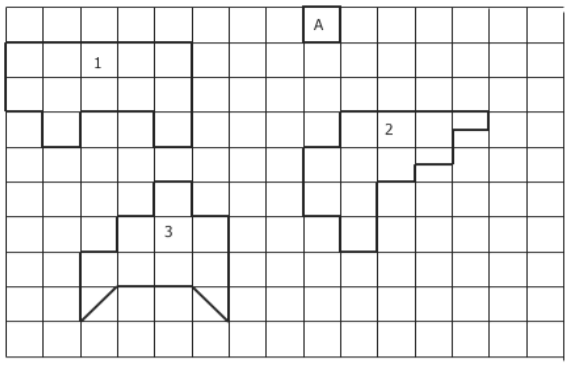


Figura 12. Superficies y cuadritos

Adaptada de Corberán (1998).

Tarea 7**: Observando la superficie en otros contextos**

1. Compara estas dos figuras que representan dos estanques. ¿En cuál de los dos estanques hay más espacio para que los patos naden en él?

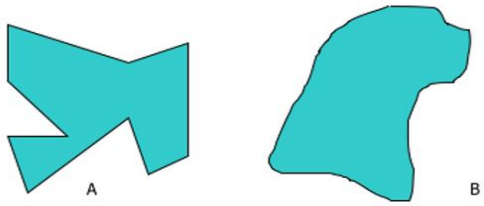


Figura 13. Estanques

2. La figura A se recortó en 3 piezas que fueron reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura B.
   a) Compara el área de la figura A con el área de la de la figura B. ¿Qué podrías decir?
   b) Compara los perímetros de las dos figuras. ¿Qué relación hay entre el perímetro de la figura A y el perímetro de la figura B?

Figura 14. Transformación de superficies

3. Las superficies que se muestran a continuación, ¿ocupan la misma cantidad de plano o diferente? ¿Alguna de ellas tiene mayor perímetro? Explica tus respuestas.

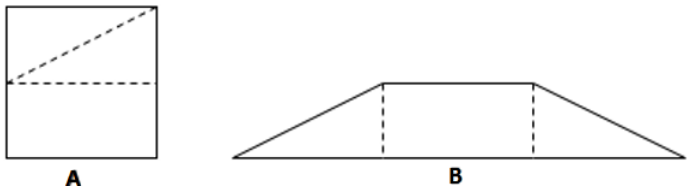


Figura 15. Superficie y perímetro

Adaptada de Corberán (1998) y Bohórquez (2004).

4. ¿Qué puedes decir del tamaño de los dos pasteles que están representados a través de las siguientes figuras?

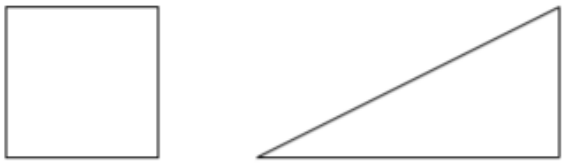


Figura 16. Pasteles

Adaptada de Corberán (1998).

Tarea 8**: Relacionando área y perímetros**

Con anterioridad a la sesión de trabajo se les pedirá a los estudiantes como tarea lo siguiente:

- Investiga qué es el perímetro de una figura geométrica y halla el perímetro de cada una de las figuras A, B, C y D de la tarea 1: **Comparando y ordenando rectángulos.**

Luego, en clase, se generará una discusión en torno a los resultados de la investigación de los estudiantes y frente a las siguientes cuestiones:

1) ¿Dos figuras con igual área siempre tienen el mismo perímetro? Justifica tu respuesta.
2) a. Encuentre dos figuras de igual área pero diferente perímetro.
   b. Encuentre dos figuras de igual perímetro pero diferente área
   c. Encuentre dos figuras diferentes que tengan igual área e igual perímetro.
   d. Encuentre dos figuras diferentes que tengan diferente área y diferente perímetro.
3) a. ¿Qué pasa con en área de un cuadrado si se duplica la longitud de sus lados?
   b. ¿Qué pasa con en área de un cuadrado si se triplica la longitud de sus lados?

Tarea 9**: Calculando áreas y perímetros**

Calcula el área y el perímetro de cada una de las figuras que se presentan a continuación, teniendo en cuenta que cuatro cuadritos de la cuadricula representan un centímetro cuadrado ($1cm^2$).

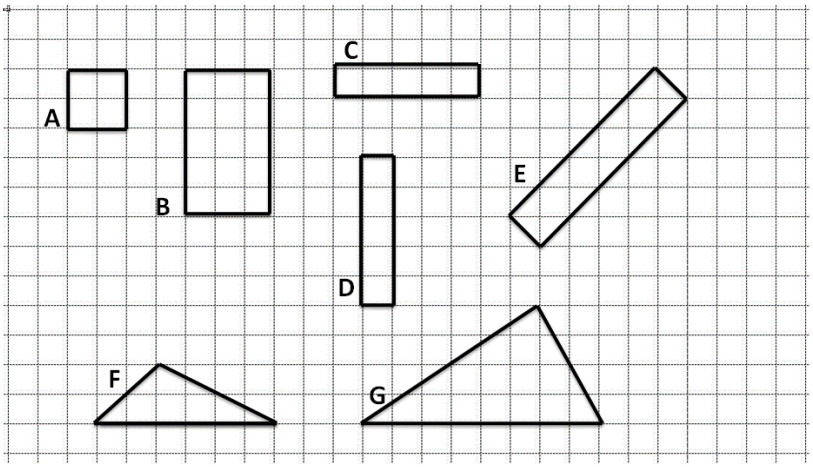


Figura 17. Medición en cm^2

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL TRABAJO EN EL AULA

En esta sección se describe la implementación de la propuesta en las sesiones de trabajo en el aula. Para el desarrollo de cada una de las sesiones se tuvo en cuenta el trabajo previo realizado por los estudiantes en sesiones anteriores, apoyados en la revisión teórica expuesta anteriormente, ya que la metodología elegida permitía replantear el desarrollo de la investigación en busca de que fueran alcanzados los objetivos de aprendizaje. De igual manera, las tareas fueron planteadas y trabajadas de manera práctica y sencilla, es decir, bajo parámetros acordes a las dificultades conceptuales identificadas en los estudiantes por medio del instrumento de indagación, en aspectos como el reconocimiento y la comparación de superficies, así como en las relaciones con el perímetro y el manejo de unidades de medida tanto de longitud como de superficie. La tarea 8.1 se planteó como necesidad particular frente a los resultados de las tareas 5 y 8, con el propósito de profundizar en aspectos puntuales de la medición de superficies y las relaciones entre área y perímetro.

Como los diferentes momentos de trabajo en el aula se hicieron de manera individual, en pequeños grupos y en plenarias, siempre estuvieron enmarcados en la importancia del respeto por la opinión y las ideas del otro como punto de partida de aprendizaje entre pares, además de la correcta utilización del lenguaje como instrumento de comunicación y constructor de conocimiento. En dichas sesiones se recogió información, producto del trabajo de los estudiantes y de las apreciaciones del docente investigador, para organizarla y realizar un adecuado análisis de los datos, centrando la mirada en aquellos considerados más relevantes para la investigación, teniendo en cuenta las necesidades y objetivos planteados en esta.

3.1 Instrumento de indagación

El desarrollo de este instrumento fue de manera individual. Cada uno de los estudiantes contó con, aproximadamente, treinta minutos durante los cuales abordó de manera autónoma cada uno de los aspectos abordados en el instrumento (anexo 1).

A continuación se muestran los resultados de cada uno de los ítems, de manera estadística, y luego se realiza un análisis de éstos como primer acercamiento hacia la visualización de las concepciones de los estudiantes frente a los conceptos que se pusieron en juego.

PUNTO 1				
SUPERFICIE		PERÍMETRO		N° ESTUDIANTES
Mayor (18)	Por la falta de un pedazo	mayor	Por los lados	10
			Por el pedazo	
			Forma	
			Percepción	
			Por ser rectangular	
		menor	Confusión con superficie	3
			No responde	
		igual	Son iguales	1
		NR	No responde	4
			Son la misma figura	
			Falta un pedazo	
Menor (5)	Percepción	mayor	Por el pedazo	1
		menor	Falta un pedazo	2
			Tiene más lados	
		otro	Por el pedazo que falta	2
Igual (1)	Por la igualdad en la longitud de las bases	mayor	Por el pedazo	1
Otro (8)	Tienen diferente forma; falta un pedazo; igualdad en la base.	mayor	Por la falta del pedazo	3
		menor	A la figura B le ponen un pedazo	1
		igual	Igualdad (en la base)	3
		NR	No responde	1

Para tratar de resolver esta pregunta, los estudiantes centraron su atención principalmente en tres aspectos de las figuras: la forma, las medidas y el número de sus lados. El hecho de que una de las figuras sea un rectángulo y a la otra la vieran como un rectángulo al que le *falta* una parte (figura B, punto 1) hizo que los estudiantes realizaran conjeturas frente al perímetro y al área de las figuras, basados en la percepción visual de éstas o en algunas de las longitudes de sus lados. Al parecer genera dificultad que la figura presente esa *falta* de un pedazo en una de sus esquinas, lo cual no parece asimilarse fácilmente por parte de los estudiantes o de manera natural y los condiciona al momento de emitir juicios.

Una primera conclusión puede encaminarse a decir que la mayoría de los estudiantes, aunque parece reconocer la superficie de una figura, no realiza inferencias correctas frente a ella, y la relacionan con algunas de sus dimensiones lineales ante la necesidad de dar algún tipo de respuesta a los cuestionamientos.

PUNTO 2		
PERÍMETROS		
Si (32)	Igual medida, diferente ubicación.	3
	Iguales en profundidad.	1
	Igualdad en lados.	6
	Se debe voltear.	11
	Son de igual forma	1
	Son iguales.	2
	Igual medida, diferente forma.	1
	Son dos figuras diferentes.	1
	Son la misma figura.	1
SUPERFICIE		
Si	Está volteada.	28
No	Una es plana, la otra es puntuda.	4
	Diferente lado (posición).	
	Tiene un poquito más.	
	Al girar no quedan iguales.	

La mayoría de los estudiantes (88%) afirmaron que las dos figuras son iguales tanto en perímetro como en superficie, fijando su observación en aspectos como su forma, en la igualdad de las medidas de sus lados o en la apreciación del hecho de que solamente se deben girar para ser iguales. Solamente cuatro estudiantes señalan que la superficie es diferente, basando sus apreciaciones en lo que logran percibir mediante la observación y la posición de las figuras.

Una rotación rígida de una figura sencilla (figura geométrica básica), como en este caso un cuadrado, parece no generar inconvenientes en los estudiantes frente a la comparación de sus perímetros y superficies.

PUNTO 3		
K tiene más superficie	Está más cuadrada	11
	No responde	
	Es más ancha en la parte inferior	
	Diferente superficie	

	Es más grande	
	Una es más corta	
	Percepción	
L tiene más superficie	Tiene más anchura	4
	No queda igual	
	Es más larga	
	L tiene más superficie	
L = K	Tienen las mismas partes iguales	16
	K se vuelve L	
	L es más ancha	
	Número de cuadrados de igual forma	
	Igual tamaño y forma	
	Cada uno tiene cuatro piezas	
	Mismas fichas rotadas y movidas	
	Mismas figuras	
	Solo cambia la ubicación	
	No responde	
No responde		1

Aproximadamente la mitad de los estudiantes (52%) contestó que las dos figuras tienen la misma superficie, al parecer, basados en la información entregada por el ejercicio, donde se afirma que se parte de una figura para la construcción de la otra, o por el número de cuadrados. Sin embargo la otra mitad aproximada (48%) de los estudiantes no da muestra de la observación de la conservación de la superficie bajo este tipo de transformaciones. Se fijan en la forma, la altura o la anchura de las figuras, o en la percepción visual para justificar la desigualdad de sus superficies, omitiendo la información que brinda la condición inicial. En este punto se debe tener en cuenta que si el estado final no es idéntico al inicial, la respuesta puede mostrar hasta dónde el niño sabe qué característica de la figura es la que importa o se está considerando como fundamental al momento de realizar la comparación (Freudenthal, 1983).

La conservación de la superficie bajo transformaciones de cortar y recomponer debe ser trabajada de manera más específica en este tipo de procesos, como aspecto básico en la construcción del concepto de área, buscando que los estudiantes puedan desligar la medida de una superficie de su forma.

PUNTO 4			
	Área	Perímetro	N° EST.
No responden			3
No justifican	6cm2	7cm2	1
	6cm2	12cm2	3
	6	12	1
	15	10	1
Justifican sin unidades	1	96	1
	6	12	1
	12	6	2
	24	48	1
	24	12	1
Justifican con unidades cm y cm	6	12	6
	12	12	1
	10	10	1
	24	12	1
	10	12	1
	24	48	1
Justifican con unidades cm^2 y cm2	6	12	1
	8	11	1
Justifican con unidades cm^2 y cm	6	12	1
	$\pi 1/2$	12	1
	12	12	1
	24	12	1

Con estas respuestas se puede apreciar que, en general, los estudiantes no manejan ni usan adecuadamente las unidades estándar de medida (centímetros y centímetros cuadrados) para longitud y superficie. Esto indica que no cuentan con los conceptos de área y perímetro de la manera adecuada, además de presentar algún tipo de confusión entre ellos, lo cual también se observa con la gran diversidad de resultados presentados. Los estudiantes ven la necesidad de realizar algún tipo de operación aritmética en busca de dar respuesta a lo que se les solicita en este numeral, y acuden a recordar procesos de cálculo de áreas y perímetros a través de fórmulas, en su mayoría errados o confusos, y sin mostrar algún tipo de relación entre la superficie como magnitud y los procesos utilizados en el cálculo del área.

3.2 Implementación de la propuesta

En esta sección se describe, con cierto detalle, cada una de las actividades realizadas a partir de las tareas propuestas, presentando inicialmente dicha tarea y una descripción de la forma en que fue abordada por los estudiantes (33 en total), en el trabajo en pequeños grupos (usualmente 11 grupos de 3 estudiantes cada uno) o en las sesiones plenarias, resaltando tanto los logros como las dificultades que encontraron al abordar algunos de los ítems de la tarea. Posteriormente se realiza un análisis preliminar sobre el trabajo realizado en la sesión y sobre algunas evidencias obtenidas con respecto a los propósitos planteados en cada tarea y en la propuesta general, a partir del cual se realiza una toma de decisiones sobre la siguiente actividad, ya sea dando continuidad a la planeación prevista o realizando alguna modificación de ésta, explicitando los motivos de tal decisión. Los análisis de cada una de las tareas y actividades desarrolladas por los estudiantes, descritos en adelante, tienen como punto de partida y eje de interpretación las categorías descritas en la sección 2.2.

3.2.1 Actividad 1: Comparando y ordenando rectángulos

Tarea:

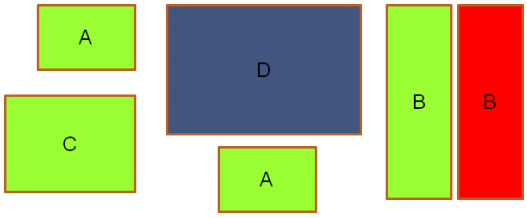


Figura 187.Comparando y ordenando rectángulos

De acuerdo con las fichas entregadas (representadas en las figuras), realicen cada uno de los siguientes puntos:

1. Describan algunas características de las figuras.
2. Identifiquen similitudes y diferencias entre las figuras.
3. Ordenen las figuras y justifiquen el orden dado.
4. ¿Cuál de las figuras tiene mayor superficie? Expliquen su respuesta.
5. Recubran la figura D de dos maneras diferentes.
6. ¿Con cuál de las figuras se puede recubrir completamente cada una de las demás? Expliquen su respuesta.
7. ¿Qué pueden concluir de las superficies de las figuras B y C?

***Objetivo*:** Identificar la superficie como un atributo de las figuras y usar relaciones de tipo geométrico en la comparación de superficies

Esta tarea fue trabajada en dos momentos: el primero se llevó a cabo en una sesión de clase en la que se trabajó en pequeños grupos, conformados autónomamente por estudiantes teniendo en cuenta su ubicación en el salón de clase, y el segundo en una sesión plenaria, en la que varios

grupos socializaron el trabajo realizado, compartiendo formas de proceder, y en la que el profesor les solicitó aclaraciones, les planteó preguntas sobre sus afirmaciones y sobre los procedimientos efectuados, además de resaltar algunos aspectos que consideró importantes con respecto a los propósitos de la tarea, así como avalar o cuestionar algunas respuestas.

Descripción primera sesión.

En la primera sesión a cada grupo se le entregó un conjunto de 6 fichas en cartulina (figuras) de forma rectangular, de 4 tamaños y colores diferentes, además de una hoja con la tarea propuesta y las 7 preguntas o instrucciones, relacionadas con el reconocimiento de la superficie, su caracterización y la comparación entre superficies de diferente tamaño.

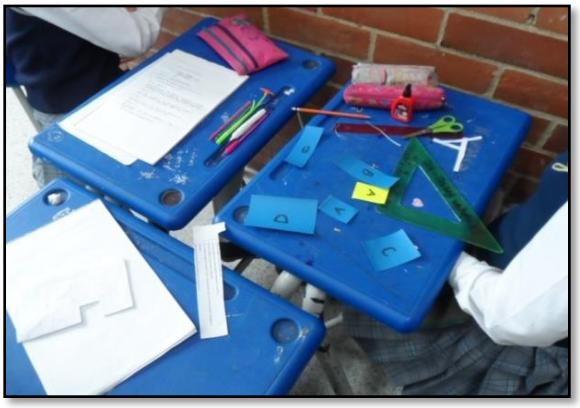


Figura 19. Trabajo en clase

Inicialmente, cada grupo pudo observar y manipular las distintas fichas por algunos minutos antes de abordar las preguntas o instrucciones formuladas. Luego, en el desarrollo de la sesión, varios grupos recibieron el apoyo del docente cada vez que lo requerían y otros, aunque no solicitaban apoyo, eran consultados por el profesor con respecto a su avance en el trabajo propuesto. En la mayoría de las intervenciones del docente en los grupos de trabajo, se buscó, en principio, que los estudiantes intentaran resolver sus inquietudes por sí mismos, a partir de la formulación de preguntas sobre las ideas que expresaban, planteándoles así, algún argumento para que se pronunciaran con respecto a su validez, o también acudiendo a algún ejemplo, con la intención de posibilitar el esclarecimiento de sus propias ideas, reconocer el trabajo realizado, afianzar sus argumentos y propiciar el desarrollo de los objetivos planteados.

En relación con el avance frente al reconocimiento de la superficie, se tuvo en cuenta el trabajo realizado en los tres primeros ítems de la tarea, donde se pudo evidenciar que ninguno de los grupos reconoció explícitamente la superficie como característica de las figuras, como sí lo hicieron con el color y con la forma. Algunos grupos hicieron referencia al *tamaño*, pero acudieron a las dimensiones lineales, no a la superficie como referente de comparación o como característica de las figuras; sólo un grupo hizo referencia a la superficie pero no la usó como criterio para ordenar las figuras.

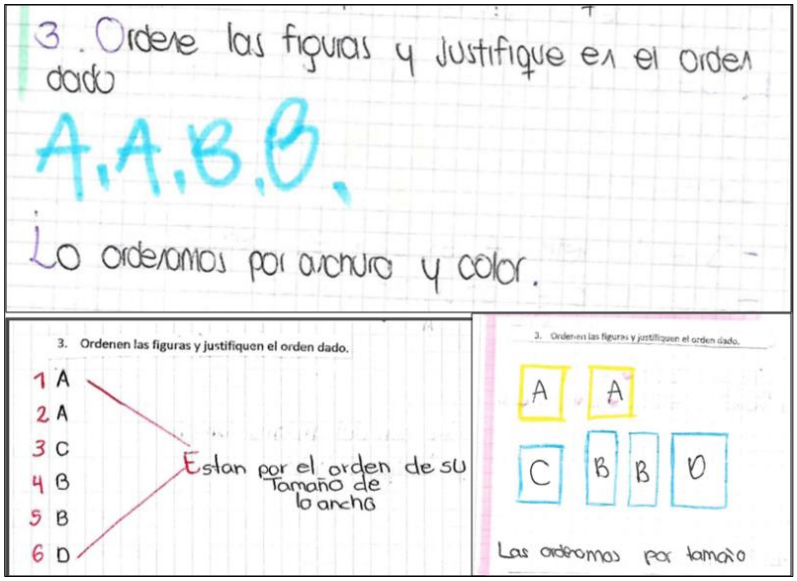


Figura 20. Los estudiantes acuden a las dimensiones lineales para comparar

La figura 19 muestra la manera en que los grupos acuden a las dimensiones lineales para el ordenamiento de las fichas, incluso en el recuadro de la parte inferior derecha se observa que el orden está dado, inicialmente, por la altura de las fichas, y posteriormente por su ancho, lo cual muestra que ante alturas iguales, los estudiantes recurren a la anchura para dirimir y ordenar.

Posteriormente, y sólo a partir del trabajo de los ítems 4 al 7, en los cuales se hacía referencia explícita de la superficie y se preguntaba por la figura con mayor superficie –además de propiciar comparaciones de las superficies mediante recubrimientos–, los estudiantes comenzaron a considerar la superficie dentro de los aspectos usados para la caracterización de las figuras, aunque persistía en ellos el uso de las dimensiones lineales como fuente de comparación. Además, la forma de las figuras representó una dificultad, en tanto no reconocieron posibles equivalencias entre las superficies de figuras diferentes; de hecho, los atributos unidimensionales

generaron una dificultad similar, en tanto consideraban que si las longitudes eran diferentes, sus superficies también lo eran. Por otra parte, la mayoría de los grupos de estudiantes relacionaron la palabra *recubrir* con ocultar o cubrir y, en tal sentido, pensaban que las más grandes podían ocultar a las más pequeñas, sin necesidad de establecer las relaciones esperadas en cuanto tamaños y, en particular, cubrir completamente una figura usando un número de veces otra más pequeña.

Al final de la sesión, dos de los grupos lograron concluir que las figuras B y C son iguales en tamaño, aunque sólo uno de ellos explicitó la manera en que lograron concluirlo, usando la ficha A como medio (unidad) de comparación (Figura 20):

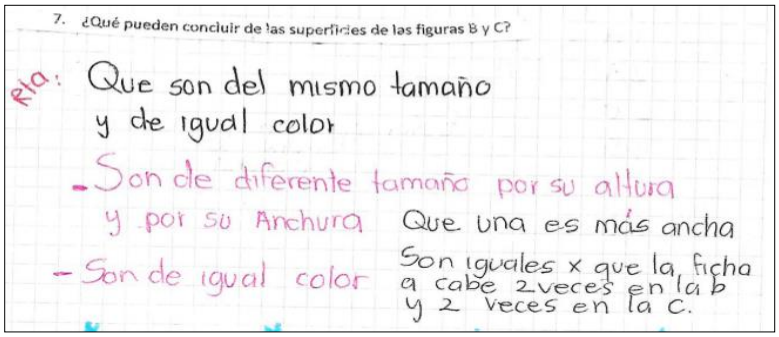


Figura 21. Comparación de las figuras B y C a través de la figura A

Descripción segunda sesión.

Para el desarrollo esta sesión plenaria se inició el trabajo con los mismos grupos de la sesión anterior, proponiéndoles que retomaran el trabajo realizado con respecto a la tarea 1, y que uno de ellos compartiera con sus demás compañeros los resultados obtenidos. Los primeros grupos participaron de manera voluntaria, y un representante dio cuenta oralmente de la manera en que procedieron y de los razonamientos usados cuando abordaron cada uno de los ítems.

En la socialización de los primeros puntos, frente a la caracterización de las figuras, los estudiantes enfatizaban en el color, la forma (rectangular), las letras con las que se denominaron cada una de las fichas y el tamaño diferenciándolo en dos aspectos: en cuanto a la longitud de sus lados y en cuanto a la superficie. De igual manera mencionaron las anteriores características

como parte de las similitudes y diferencias de las figuras, donde además mencionaron el perímetro, el área y el material del cual estaban hechas.

El profesor planteó que la tarea solicitaba explícitamente comparar las fichas con respecto a la superficie como característica de éstas, y acudió a realizar algunas preguntas a los estudiantes para indagar si reconocían la superficie como un atributo de los objetos; para ello les pidió que señalaran superficies de algunos de los objetos que tenían a su alcance, como la mesa de trabajo o la silla, además del tablero y de una de las paredes del salón de clase. Varios de ellos, mediante movimientos con su mano, recorrían la tapa de la mesa y decían "ésta es la superficie de la mesa". Una vez hicieron referencia a la superficie de algunos objetos, el profesor les pidió dar ejemplos de cosas que no tuvieran superficie. Una estudiante puso como ejemplo el aire, otro mencionó que un *círculo*, luego corrige rápidamente diciendo que se refería a una *esfera*. Cuando se le pide que explique la elección de dicho ejemplo, argumenta que "el aire no tiene superficie porque no se queda en un solo lugar, porque no se puede tocar y porque no se ve". De igual manera, el otro estudiante, luego de aclarar que se había equivocado pues una esfera sí tiene superficie, puso un balón como ejemplo de una esfera ante la petición del docente de que nombrara un objeto que tuviera forma esférica, pasó su mano por él y dijo "esto que estoy tocando es la superficie del balón". El profesor mencionó y enfatizó el hecho señalado por el estudiante sobre *poder tocar* la superficie como una forma inmediata de su identificación; es decir, que los sentidos hacen parte fundamental en el reconocimiento de las diferentes magnitudes, y la superficie no es la excepción.

Posteriormente, al discutir sobre el ordenamiento de las figuras, los estudiantes plantearon algunas afirmaciones que, luego, sirvieron de referente para el reconocimiento de la conservación de la superficie:

- *Las dos formas (de ordenamiento) sirven ya que si se corta la figura D queda como la B.*
- *Las dos figuras pueden ser formadas por dos figuras como la A.*

Luego de las intervenciones anteriores, todos los estudiantes estuvieron de acuerdo que la figura de mayor superficie era la D, aunque para justificarlo nuevamente usaron las dimensiones lineales de la figura (longitud y anchura).

En esta sesión, frente al recubrimiento de las figuras, se intentó que los estudiantes observaran detenidamente las diferentes maneras en que se podía realizar el recubrimiento y comenzaran a realizar apreciaciones frente a la conservación de la superficie y a la disociación del área de la forma de la superficie, entre otras relaciones, con respecto a las diferentes figuras que se estaban trabajando. Para ello se enfatizó en la comparación de las figuras B y C, en lo cual hubo dos posturas marcadas: los que señalaban que las figuras tenían igual superficie y los que no.

> *Estudiante 1:* S*i se corta la figura B o la C por la mitad se puede formar la otra, y por lo tanto son iguales*
>
> *Estudiante 2: Lo que dice es cierto, pero la pregunta hace referencia a cuál de las figuras tiene más superficie, entonces hay que decir que son diferentes porque se debe tener en cuenta las figuras ahora, no en el caso hipotético de que se puedan cortar y reconstruir.*

El docente resaltó los dos planteamientos, con sus diferencias, y planteó la necesidad tener en cuenta los argumentos dados por cada uno de ellos, de analizarlos y asumir una posición con respecto a ellos; invitándolos a reflexionar sobre al respecto.

Análisis.

Desde el trabajo en pequeños grupos como en la socialización se pudo evidenciar que, en principio, la superficie no es considerada como un atributo de las figuras ni es considerado como criterio para establecer algún tipo de comparación entre ellas, como lo pueden ser otras de sus características como el ancho, el largo o el color; este reconocimiento sólo se logró en la sesión plenaria. Lo cual es fundamental en el aprendizaje del área, pues este se inicia cuando el profesor ayuda a los estudiantes a reconocer los atributos medibles de las figuras, en este caso la superficie, lo cual, aunque para él resulte obvio, no siempre lo es para los niños (Del Olmo y otros, 1993).

Por otro lado, respecto al proceso de recubrir, es importante que los estudiantes empiecen a realizarlo utilizando figuras de diferentes tamaños, pues el recubrimiento es uno de los procesos que permite el inicio de la medición de áreas, lo cual se consideró como aspecto a enfatizar en la realización de ejercicios de este tipo en las actividades posteriores.

También se pudo observar que las dimensiones lineales son el primer criterio de comparación al cual acuden los estudiantes, lo cual puede ser considerado como razonable, pues a partir de éstas es que los profesores basan la enseñanza del cálculo de áreas. Confirmándose el hecho de que la

medición del área por medio del uso de las dimensiones lineales de una figura, que es el enfoque más utilizado por los docentes para enseñar a los estudiantes, tiene altos índices de incomprensión, pues posee altos niveles de abstracción y de formalización (Corberán, 1996), lo cual se ve reflejado en el uso errado fórmulas; sin embargo los estudiantes acuden a las dimensiones lineales en busca de realizar inferencias frente a la superficie.

Los procedimientos geométricos para comparar y medir áreas inician con el recubrimiento de superficies, donde el número o la cantidad están ausentes de los razonamientos de los estudiantes, y permite establecer relaciones de igualdad o inclusión, inicialmente entre figuras, conduciendo a un análisis del área de forma cualitativa. Lo anterior facilita la comprensión de la conservación de la superficie, ayuda en la disociación del área de la forma de la superficie y da elementos para diferenciar el área del perímetro de una figura.

Considerando el tamaño de una figura a partir de la superficie de ésta, se inicia su apreciación como magnitud propia de figuras, además, cuando se es posible señalar si una es más grande o tiene más superficie que otra, se inicia el proceso hacia la medición de superficie desde la posibilidad de cuantificarla. De esta manera el tamaño fue el punto de partida para la comparación entre superficies, la cual conduce a la medición, con términos relacionales como mayor que, menor que, o tanto como.

Luego de las dos sesiones de trabajo, se pudo conseguir que los estudiantes observaran la superficie como atributo de las figuras y realizaran conjeturas y comparaciones a través de ella, se logró avanzar frente a la observación de la conservación de la superficie y a la visualización de la transitividad. El avance mostrado por los estudiantes en estos aspectos permite la continuación del trabajo con la demás actividades, siguiendo la planeación, en busca de reafirmar dichas apreciaciones y avanzar hacia la comparación de superficies como ruta hacia su medición y medida.

3.2.2 Actividad 2: Comparando regiones

***Tarea*:**

1. La finca de Don Luis y la de Don Hugo tienen cada una un corral donde se crían las gallinas. Dibuja los corrales en un trozo de cartulina y recórtalos. ¿En cuál de los dos corrales hay más espacio para que se muevan las gallinas?

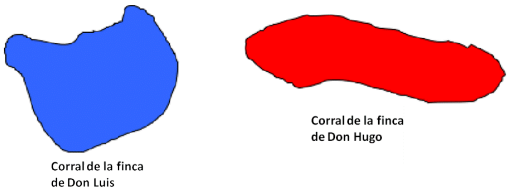


Figura 22. Corrales

2. Imagínate que las siguientes figuras representan dos campos cubiertos de hierba. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Explica.

Figura 23. Campos de hierba

3. Si tuvieras que pintar un techo que tiene la forma que se muestra en la figura A y otro como el de la figura B, ¿En alguno de los dos se requerirá más pintura que en el otro? Explica tu respuesta.

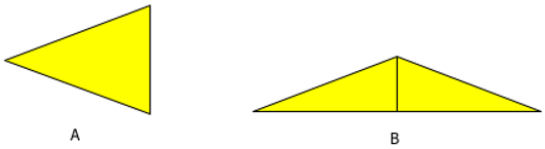


Figura 24. Techos

4. Compara la superficie de las siguientes figuras y describe detalladamente el proceso que uses.

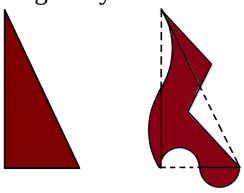


Figura 25. Recomposición y comparación

***Objetivos**:* Trabajar el área como cantidad de plano ocupado por la superficie, la disociación del área de la forma de la superficie y la conservación de la superficie; realizar procedimientos de comparación de superficies por recomposición, superposición y complementariedad.

Descripción.

El trabajo durante esta sesión fue de manera individual. Se propuso a los estudiantes que usaran material para realizar la comparación de las diferentes superficies dadas en la guía de trabajo, es decir, que recortaran, midieran, trazaran, etc. Cada estudiante recibió una fotocopia con las tareas propuestas en esta actividad y, además, contó con cartulina, regla, tijeras, colbón, entre otros instrumentos que le permitían trabajar de manera práctica en la actividad.

A pesar de hacer explícita la indicación de que se podían recortar las figuras para realizar su reconstrucción y/o reconfiguración, dos terceras partes de los estudiantes no hicieron uso de esta estrategia en la solución del primer punto, tal vez porque no sintieron la necesidad de utilizarla, pues realizaron la comparación basados en otros atributos de las figuras como el largo o el

ancho, de acuerdo a lo que podían percibir. Se evidenció la dificultad de los estudiantes para desprenderse de las magnitudes lineales al momento de comparar áreas y hacerlo con la superficie propiamente, más aun cuando ésta no ha sido reconocida como atributo de las figuras, lo cual es imprescindible para la realización de dicho proceso. Sin embargo los demás estudiantes recortaron y, a través de la superposición, intentaron dar un juicio comparativo basado en el tamaño de las superficies de las figuras.

Análisis.

Para el análisis de los resultados de esta actividad, se partió del ejercicio de los corrales (punto 1) y se clasifican los resultados de los estudiantes en dos grupos: los que recortaron y reconfiguraron para realizar la comparación y los que no. La mayoría de los que no recortaron realizaron la comparación guiados por su percepción de las dimensiones lineales de los dibujos que representaban los corrales (Figura 21, superior). Otros no compararon o simplemente realizaron conclusiones sin justificarlas. Mientras que todos los que recortaron y realizaron algún tipo de reconfiguración, justificaron su decisión por medio del proceso que utilizaron (Figura 21, inferior).

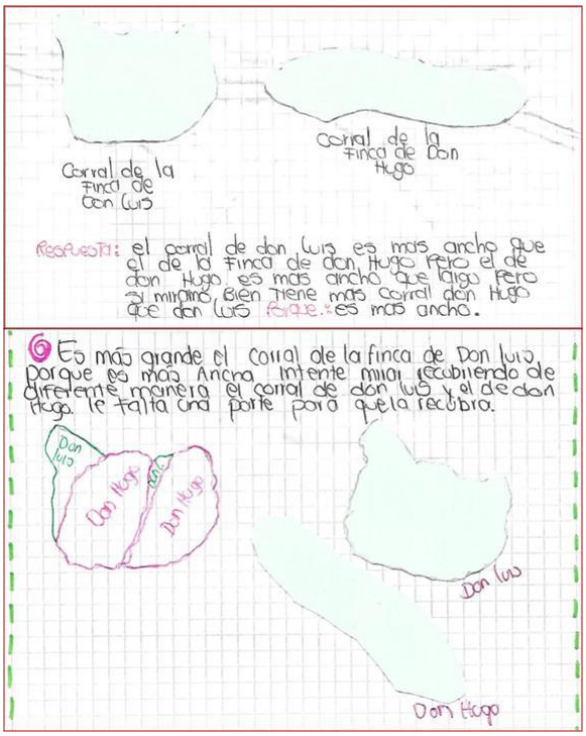


Figura 26. Comparación por dimensiones lineales (superior); comparación por recomposición y superposición (inferior).

El hecho de que algunos estudiantes no se limitaran a la percepción visual de las figuras como referente de comparación entre las superficies, mostraba que empezaban a identificarla como una magnitud de la cual, para hacer inferencias o comparaciones, es necesario realizar algún tipo de proceso de medición que abarque más que las dimensiones lineales de una figura. La forma irregular de los *corrales* impedía que muchos estudiantes emitieran un juicio de manera apresurada, viéndose llevados al recorte y recomposición; aunque dicha forma también generó cierta dificultad, y algunos estudiantes trataron de recordar algún tipo de fórmula que les ayudara con la comparación, pero no tuvieron éxito.

Frente a las respuestas de los puntos 2, 3 y 4 de acuerdo al resultado del punto 1, los estudiantes que recortaron y reconfiguraron para comparar, lograron hacerlo adecuadamente en casi la totalidad de los demás puntos, incluso sin recortar en algunos de ellos (Figura 22); mientras los que no, tuvieron menos aciertos en la comparación de las demás superficies. El 90% de los primeros reconfiguró y concluyó acertadamente, mientras que solo un pequeño porcentaje de los segundos, 10% aproximadamente, lo realizó.

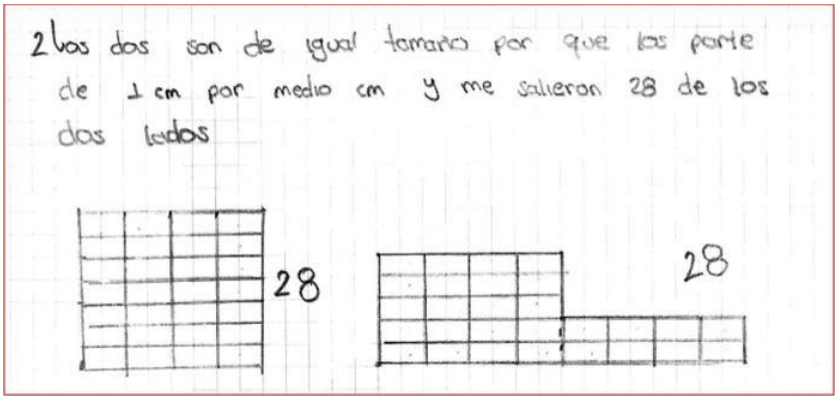


Figura 27. Comparación por subdivisión de la superficie

En general, en estos puntos, las respuestas fueron diversas, sobresaliendo la comparación por la percepción y la descripción de la reconfiguración que se debía realizar en una de las superficies, para que quedara de la misma forma que la otra, o por lo menos se aproximara, y, por lo tanto, concluir su igualdad en tamaño si la reconfiguración se hacía de forma correcta, o su desigualdad en caso contrario. La forma rectangular de las figuras del punto 2(campos de hierba) hizo que fuera más fácil realizar la comparación; aquí, veinticuatro estudiantes asociaron la parte lateral derecha de la figura B como la parte *faltante* en la parte superior de la misma y, que si se

reubicara haría que las dos figuras fueran iguales en forma y tamaño. En el punto 3 diecisiete estudiantes señalaron la igualdad de las figuras en tamaño, aunque muchos no realizaron su reconfiguración a través del recorte y pegado, sino que utilizaron dibujos para realizar la comparación. Cabe señalar que el hecho de que en ese punto se trabaje con triángulos hace que no se visualice la igualdad de forma tan clara como en el punto 2 con las formas rectangulares, aunque de igual manera los estudiantes en su mayoría no necesitaron de reconfiguración práctica para visualizar la igualdad, pues la realizaban, también, a través de dibujos.

Finalmente en el punto 4, quince estudiantes determinan que las superficies de las figuras son iguales, basándose en que de una de las figuras *sale* la otra, y señalan que las dos se complementan (Figura 23). Aunque la reconfiguración solamente la realizaron nueve estudiantes, los demás se apoyaron en la percepción visual de las figuras.

Figura 28. Superposición y complementariedad

En ese momento fue importante ir visualizando el camino hacia la medición de áreas, para lo cual un claro punto de partida es la comparación de superficies, por ello se tuvo en cuenta la apropiación de los estudiantes frente a esta magnitud y sus implicaciones; es decir, se debe tener muy claro lo que se debe medir para poder hacerlo adecuadamente.

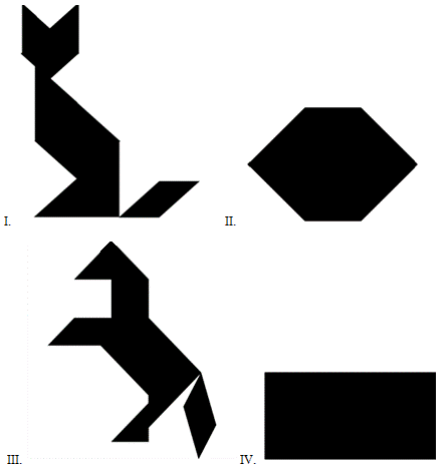
Como conclusión de la sesión se observa que los estudiantes han avanzado en la comparación de las superficies, pues se valen de la reconfiguración para realizarla y acuden a ella como recurso

para la medición. De igual manera se observa que el proceso va bien encaminado y, con los objetivos planteados para las siguientes actividades, se espera que el progreso continúe.

3.2.3 Actividad 3: Descubriendo figuras en las sombras

***Tarea*:**
El tangram es un puzzle de siete piezas que procede de China, y con el que se pueden construir más de 300 figuras diferentes. Las siete piezas resultan de la descomposición del cuadrado como se indica en la figura.

1. Construye tu propio tangram siguiendo las indicaciones del profesor sobre un cuadrado de 12cm de lado.
2. Construye con las siete piezas del tangram cada una de las figuras que a continuación se te presentan. Una vez construidas debes reproducirlas en tu portafolio, indicando la posición de cada una de las piezas.



3. Responde de forma razonada a las siguientes preguntas y explica lo más detallado posible tus respuestas:
   a. ¿Alguna de las figuras construidas tiene menos superficie que las otras? Explica.
   b. ¿Qué tipo de relación podrías establecer entre el tamaño de las diferentes fichas que conforman el tangram?

***Objetivo**:* Trabajar en la conservación del área y su disociación de la forma de la superficie.

Descripción

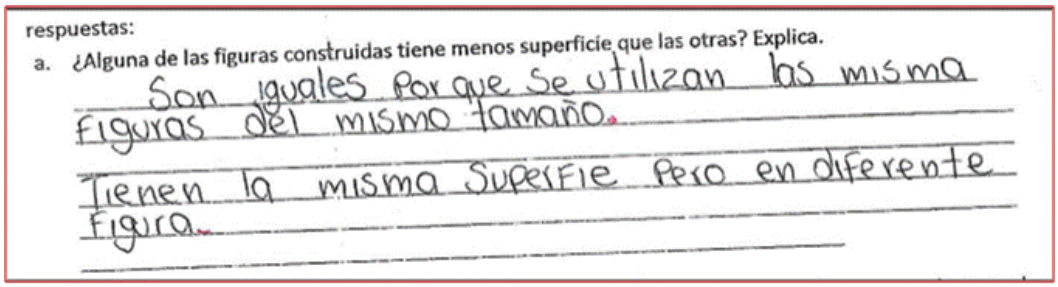
Esta actividad fue trabajada en dos sesiones de clase, la primera se usó para la construcción de las fichas del tangram y la segunda para la construcción de las figuras y la solución de las preguntas.

Para la primera sesión se pidió con anterioridad a los estudiantes que trajeran un cuadrado de 12cm de lado hecho en cartulina. La mayoría de los estudiantes llevaron el cuadrado conforme a lo solicitado, aunque en algunos casos se tuvo que realizar algún tipo de arreglo sobre él, e incluso en los casos más críticos se necesitó realizarlo de nuevo. Luego, a través de plegado y recorte, paso a paso bajo las indicaciones del docente, se llevó a cabo la construcción del tangram. Al final de la construcción todos los estudiantes contaban con las siete piezas, todas iguales, para el desarrollo de la actividad.

En la segunda sesión, la construcción de las figuras utilizando el tangram se desarrolló de forma satisfactoria, pues todos los estudiantes las realizaron adecuadamente y con mucho interés sobre la misma, aunque algunos tardaron más que otros.

Figura 24. Trabajo en clase con las fichas del tangram.

En la solución de las preguntas, se tuvieron las siguientes apreciaciones: 26 de los 32 estudiantes que participaron en la sesión de clase señalaron que todas las figuras construidas tienen la misma superficie, basando su conclusión en que están conformadas por, precisamente, las mismas fichas, las del tangram (Figura 25); 23 estudiantes realizaron algún tipo de comparación entre los tamaños de algunas de las fichas del tangram, de los cuales cinco compararon los tamaños de todas las fichas.


respuestas:

a. ¿Alguna de las figuras construidas tiene menos superficie que las otras? Explica.

Son iguales Por que Se utilizan las misma Figuras del mismo tamaño.

Tienen la misma SuperFie Pero en diferente Figura.

Figura 25. Conservación de la superficie

Análisis

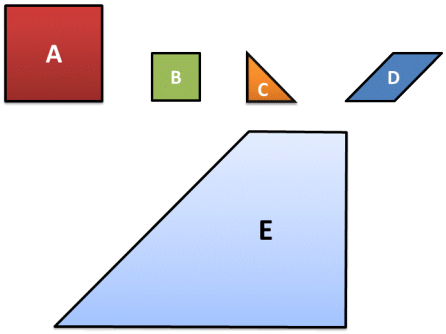
La construcción propia de las piezas del tangram, ayudó para que la mayoría de los estudiantes dieron cuenta de la conservación de la superficie, pues mostraron que todas las figuras construidas con dichas piezas tenían la misma superficie, y pudieron dejar de lado, al menos por el momento, la percepción que tenían de su altura o su anchura o de lo que representaban. También empezaron a realizar comparaciones entre los tamaños de las piezas del tangram, con lo cual se iban encaminando hacia la necesidad de asignar valores numéricos a las superficies, y así comenzar el proceso de elección de unidades de medida que les permita emitir juicios de orden de manera más precisa. Del Olmo, Moreno y Gil (1993) relacionan la enseñanza del concepto de área estrechamente con la comprensión del concepto de medida y que, por lo tanto, el proceso debe considerar como punto de partida la percepción de la cualidad, la superficie, luego se debe comenzar a realizar comparaciones entre ella y terminar con la aritmetización y la estimación. Por ello la diversidad de figuras que se pueden formar con las piezas del tangram ayuda a que los estudiantes observen la conservación de la superficie a través de procesos de comparación con diversas formas, sobre todo cuando ellos mismos construyeron las piezas a partir de una figura convencional, como un cuadrado, sobre el cual han tenido suficientes acercamientos que les permiten cierto grado de confianza frente a sus propiedades y características.

Luego de la realización de esta actividad se pudo ver que los estudiantes identifican la conservación de la superficie y desligan el área de la forma en que se les presenta, cuando han realizado procesos prácticos sobre material concreto y han manipulado de diversas maneras las superficies que están comparando. Por lo tanto se planteó la necesidad de empezar a comparar superficies a través de unidades bidimensionales de medida, así como de involucrar el conteo y el recubrimiento en el proceso de conceptualización del área, con lo cual llevar a los estudiantes a que asocien un número al área, el cual se corresponda con el proceso de medición realizado por

ellos mismos. También es importante que los estudiantes interactúen con sus compañeros en este proceso. Por lo anterior, y teniendo en cuenta que los estudiantes trabajaron las dos últimas actividades de manera individual, la siguiente tarea se planteó para ser desarrollada en pequeños grupos.

3.2.4 Actividad 4: Comparando y contando con diversas figuras

***Tarea*:**
Observen las siguientes figuras y respondan:



1. Comparen las superficies de las figuras dadas y ordénenlas de mayor a menor.
2. ¿Qué relación existe entre la superficie de las figuras **A** y la superficie de la figura y **B**?
3. ¿Qué relación existe entre la superficie de las figuras **A** y la superficie de la figuras **E**?
4. ¿Con cuál de las figuras se podría recubrir completamente cada una de las demás? Expliquen su respuesta.

Tengan en cuenta que, de ser necesario, las figuras pueden ser descompuesta o recortadas.
***Objetivo**:* Comparar superficies a través de la superposición de figuras y comenzar a emplear unidades bidimensionales en la medición de superficies.

Descripción

Esta actividad se trabajó en grupos de tres estudiantes. Cada grupo recibió una fotocopia que contenía las cinco figuras propuestas y las preguntas planteadas en la tarea. También se les entregó un conjunto de fichas hechas en cartulina con medidas exactamente iguales a las figuras de la fotocopia. Las respuestas grupos de estudiantes y un breve análisis de ellas se presentan a continuación.

Análisis

Frente al ordenamiento de las figuras de mayor a menor, siete de los once grupos de trabajo lo realizaron señalando la figura D como mayor que la B. De los demás grupos, uno hace la

aclaración de que B y D son iguales, indicando que C cabe dos veces en cada una de ellas; mientras que otros dos aclaran que B y D son iguales, para lo cual realizaron la comparación de estas a través de la figura C.

Con estos resultados se pudo observar y concluir que el hecho de que la figura D se viera un poco más *alargada* que la B, pudo ser la razón principal que llevó a la mayoría de los grupos a considerarla como la de mayor superficie o la más grande entre las dos, mostrando la tendencia de los estudiantes a seguir acudiendo a las dimensiones lineales y a la forma de las figuras para la realización de la comparación, dejando de lado, por el momento, el uso de un tercero para ello, que, para este caso concreto sería la ficha C. Sin embargo tres de los grupos lograron identificar la igualdad de estas dos figuras, precisamente usando C para compararlas, y señalaron que las dos tenían la misma superficie, argumentando que C cabía exactamente dos veces en cada una de ellas, a pesar de la diferencia en sus formas.

Por otro lado, los estudiantes empezaron a realizar recubrimientos de algunas de las figuras usando las demás y también empezaron a cuantificarlas de acuerdo al número de veces que una cabe en otra. Por ejemplo, seis de los grupos mostraron la relación entre las figuras A y B, señalando que la una c*abe cuatro veces en la otra* o que *una es cuatro veces la otra*, sin limitarse a nombrar su forma o su color. Y cuando se requirió una partición de la figura A para recubrir completamente la figura E, también seis de los grupos de estudiantes lograron realizar la comparación. En este aspecto empezaron a surgir comparaciones de tipo cuantitativo, lo cual se fue aprovechando para iniciar el acercamiento hacia el manejo del área como medida de la superficie. Siete de los grupos coincidieron en señalar la figura C como la que puede recubrir a las demás, incluso uno de los grupos señala la cantidad de veces que ésta cabe en las demás (Figura 26).

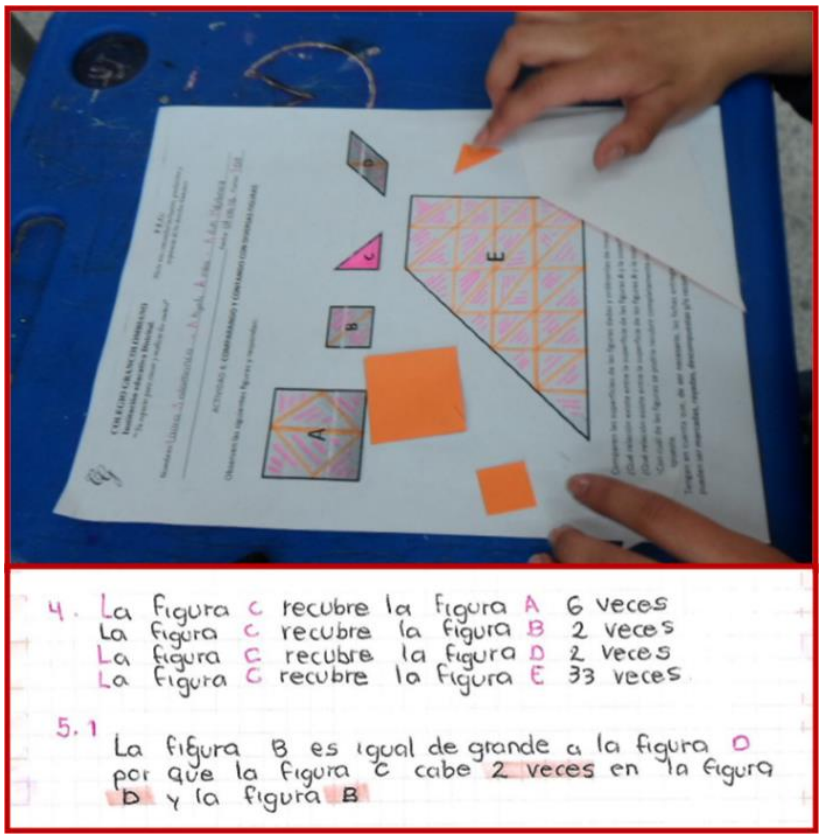


Figura 2629. Uso de la figura C como unidad de medida para el recubrimiento.

Durante las anteriores sesiones de clase se dio inicio al trabajo para desarrollar y afianzar la idea de que la superficie se puede cuantificar, cuando se cuenta con una figura que es posible superponer un determinado número de veces para recubrir a otras, generando una comparación numérica entre ellas, de manera tal que pueda asignársele un valor numérico relativo a la *unidad* utilizada. De esta manera se comenzó a involucrar la medida como aspecto importante en la conceptualización del área y parte fundamental de los objetivos de esta investigación.

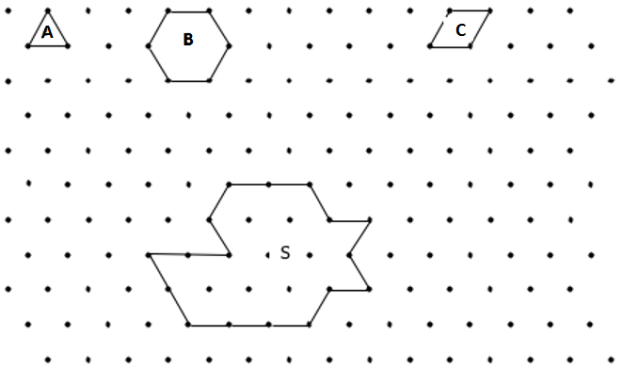
En las sesiones siguientes se enfocó el trabajo de las actividades en la cuantificación de la superficie a través de diferentes unidades bidimensionales de medida en diversos contextos. Los estudiantes tuvieron la posibilidad de medir diferentes superficies a través de procesos de recubrimiento, usando diversas unidades de medida que, además, podían ser subdvididas y/o reconstruidas para que abarcarán en su totalidad la superficie a medir, o por lo menos, se tuviera una buena aproximación.

3.2.5 Actividad 5: Midiendo figuras con otras figuras

Tarea:

1. Dibuja tu mano en una hoja de papel cuadriculado y calcula el número de cuadrados que hay en su interior. Intercambia este dato con tus compañeros. Después de ello, ¿podrías decir qué niño tiene la mano más grande y la más pequeña?
2. Utiliza tu propia mano y ayudándote de ella, calcula el número de veces que te cabe en un pliego de cartulina. El número que has obtenido representa una medida aproximada del área del pliego de cartulina. Compara la medida que tú has obtenido con la que han obtenido algunos de tus compañeros y comenta lo ocurrido.
3. Calcula cuántas figuras A caben en la figura (S), cuántas figuras B caben en la figura (S) y cuántas figuras C caben en la figura (S). Completa la tabla siguiente:

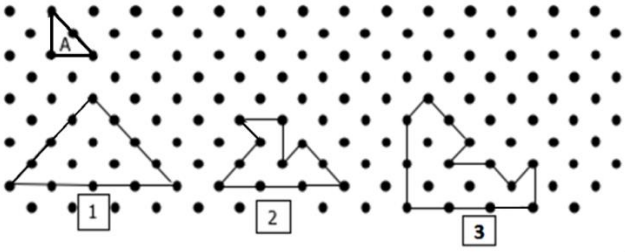
	Figura A (Unidad A)	Figura B (Unidad B)	Figura C (Unidad C)
Superficie (S)			



Ahora contesta:

c. ¿Qué relación, en cuanto a su tamaño, podemos establecer entre las figuras A, B y C?
d. ¿Cómo le asignaríamos una medida a la figura S usando las otras figuras?

4. ¿Cuántas veces cabe la figura A en cada una de las figuras 1, 2 y 3?



Objetivo: Introducir a los estudiantes hacia el manejo del área como cantidad de plano ocupado por la superficie, a través del trabajo con procedimientos numéricos usando una unidad de medida bidimensional.

Descripción

Las indicaciones para el desarrollo de esta actividad fueron entregadas a los estudiantes a través de una fotocopia de manera individual. Luego, a medida que iban realizando el primer punto y comparaban sus resultados con los de algunos de sus compañeros, se fueron formando grupos y se les entregó un pliego de papel periódico por grupo para que realizaran el segundo punto.

Finalmente, los puntos 3 y 4 fueron abordados por los estudiantes de manera individual y cada uno entregó sus propios resultados.

Con el análisis posterior de los resultados de esta sesión se decidió realizar una sesión plenaria (segunda sesión) para puntualizar respecto a los aspectos de medición propios de la superficie, pues se evidenciaron algunas dificultades en dichos procesos, y se hacía necesario corregirlos antes de continuar con la siguiente actividad.

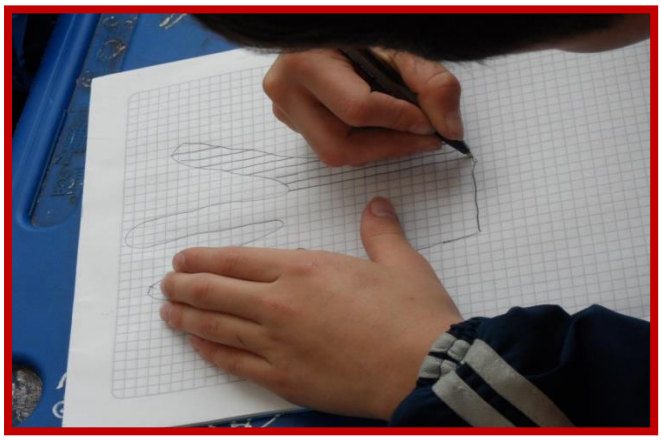


Figura 27. Midiendo la superficie de la palma de la mano

Análisis de la primera sesión

En los dos primeros puntos de la actividad cada estudiante debía realizar la medición de una superficie a través del uso de una unidad de medida determinada. Frente a comparar el tamaño de la palma de la mano con la de algunos de sus compañeros, veintidós estudiantes realizaron un juicio comparativo basado en el número de cuadritos que había en la figura trazada con la palma de su mano y la de algunos de sus compañeros; otros diez estudiantes calcularon la cantidad de cuadritos de la figura de su mano, pero no emitieron ningún tipo de juicio comparativo entre el tamaño de su mano y el tamaño de la mano de sus compañeros. Solamente un estudiante consideró que no podía decir quién tenía la mano más grande porque el conteo de los cuadritos en las siluetas, tanto la suya como la de sus compañeros, no coincidían con los tamaños reales de sus manos, pues, al parecer, alguno de ellos no fue riguroso en el conteo de los cuadritos en la silueta.

Por su parte, en la medición del pliego de papel dos estudiantes dan la medida de acuerdo al número de veces que caben sus palmas en él, y hacen una inferencia frente a los tamaños de sus

manos; veintidós estudiantes expresan la cantidad de veces que cabe la palma de su mano y/o la de sus compañeros en el pliego de papel, incluso algunos describen su estrategia de medición a través del conteo, pero no hacen comparaciones entre el tamaño de sus manos; dos estudiantes dan una respuesta que no ofrece información suficiente de la medición y/o comparación pedida en el ejercicio.

En la segunda parte de la sesión, donde los estudiantes debían medir la figura S con las figuras A, B y C (punto 3), 19 estudiantes aproximaron correctamente el número de veces que cabe A en S (29 veces), aunque de estos, ocho establecieron relaciones entre las figuras e intentaron asignar medida a la figura S de acuerdo al número de veces que caben las demás (al menos una) en ella, nueve establecen relaciones de tamaño entre las figuras, pero sin hacer referencia a su medida y no asignaron valor a S. Además, cinco estudiantes trataron de relacionar la cantidad de veces que caben las figuras A, B y C, con la medida de la figura S.

Por otro lado, al momento de dar un valor numérico a la superficie, los estudiantes se encontraron con algunas dificultades, por ejemplo, superpusieron la unidad en el recubrimiento (Figura 28), omitieron partes de la superficie a medir en las cuales no cabe la unidad de medida de manera completa (figura 29).

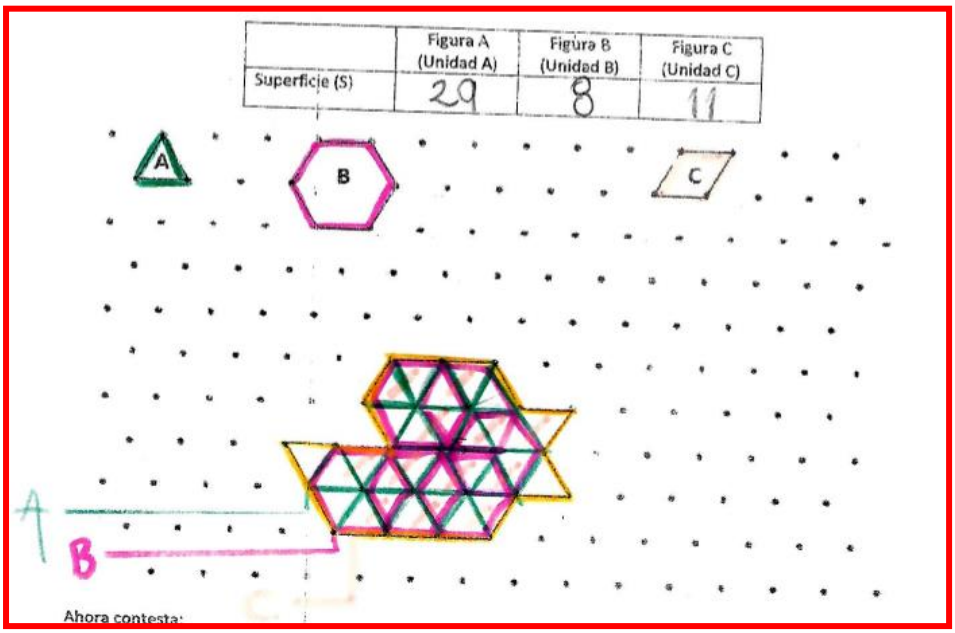


Figura 28.Las figuras A, B y C usadas como unidad de medida para recubrir la superficie S

En la figura 28 se observa la forma en que es puesta la figura B sobre la superficie a medir, ocupando una misma parte de ésta varias veces. Esto muestra que el estudiante aún no tiene claro el proceso de medición de superficies a través de la iteración de una unidad bidimensional, sino que intenta ver cuántas veces cabe la figura B en ella, además de que omite las regiones donde no es posible ubicarla de manera completa.

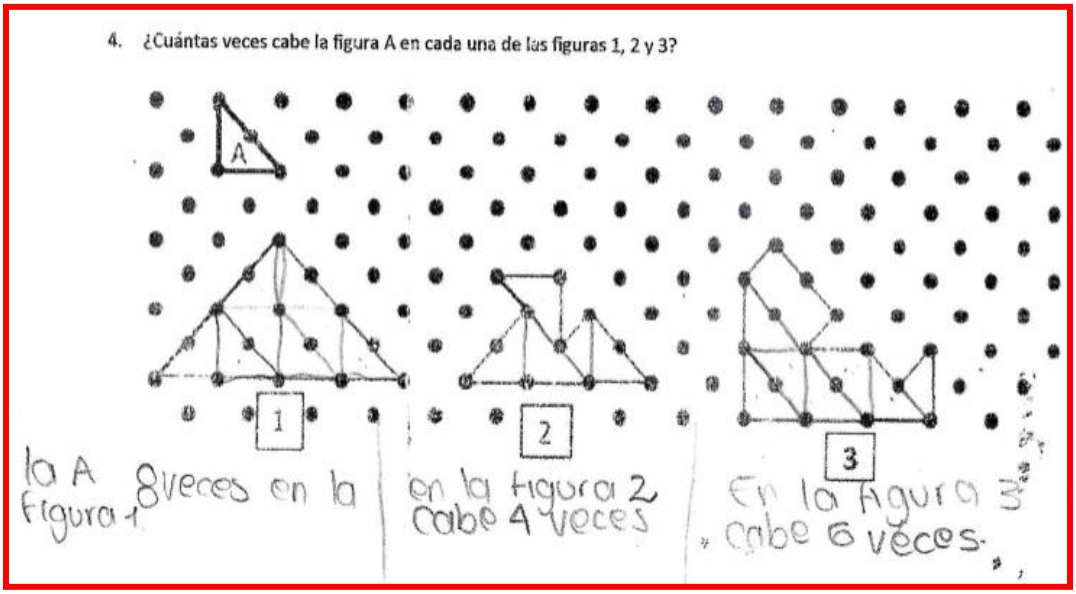


Figura 29. Ubicación de la figura A en las superficies 1, 2 y 3

La figura 29 muestra la omisión que realiza el estudiante de algunos de los sectores de las superficies 2 y 3, una vez ha realizado la subdivisión de estas en regiones correspondientes a la figura A y no visualiza otra forma de recubrir adecuadamente los sectores faltantes.

De manera general se puede concluir que los estudiantes no midieron adecuadamente las figuras, a pesar de que casi todos intentaron realizar los recubrimientos pedidos sobre las superficies a través de la subdivisión de las mismas. En este punto se evidenciaron algunas dificultades relacionadas con los procesos de medición y medida de superficies, y por lo tanto, debido a su importancia en el proceso de conceptualización del área y de los objetivos propuestos para actividades posteriores, se planteó la necesidad de realizar una sesión plenaria que obedeciera a corregir las dificultades vistas y a suplir las necesidades previstas para el trabajo de las siguientes sesiones.

Descripción de la segunda sesión

El propósito principal de esta sesión fue puntualizar en algunos aspectos importantes del trabajo con superficies puestos en práctica durante la realización de las actividades anteriores, y que han pasado desapercibidos o no han sido lo suficientemente claros para los estudiantes. La clase estuvo enfocada en las intervenciones espontaneas de los estudiantes, mediadas por el docente, permitiéndoles identificar y dar la relevancia e importancia necesarias a diferentes aspectos de la superficie, en busca de orientar el trabajo en pro de los objetivos de aprendizaje trazados con las tareas en la intervención. Cada intervención de los estudiantes presentaba y sustentaba su punto de vista a través de la realización de procesos y la presentación de argumentos.

La discusión dio inicio con el planteamiento de la definición de superficie. Se pidió que los estudiantes intentaran definirla basados en las actividades trabajadas, como punto de partida. Luego se dirigió la discusión hacia algunos aspectos importantes de la superficie, donde se pudo llegar a señalar que es posible medirla y compararla con otras frente a su tamaño. En la parte final de la sesión, se pudo concluir que la superficie se conserva bajo transformaciones. A continuación se describe el desarrollo de la plenaria, los guiones muestran intervenciones puntuales de los estudiantes (E) y del profesor (P):

1. Sobre la *Definición de superficie.*
   - *E1: Es lo que compone una figura.*

El profesor pregunta al grupo que si están conformes con la definición dada por su compañero o sienten que falta algo en ella o se puede complementar. El mismo estudiante pregunta si puede leer la definición de superficie del diccionario y como ningún otro estudiante se atrevía a dar otra definición propia, el docente se lo permite.

- *E1: "Es el contorno o límite de los cuerpos que delimitan el espacio que ocupan." "Extensión de tierra." "Aspecto exterior de algo."*

Frente a estas acepciones otro estudiante se atreve a dar su propia definición:

- *E 2: Es la parte plana de una figura, delimitada por segmentos, es decir, lo que está por dentro.*

Luego de esta intervención el docente realiza en el tablero el dibujo de una figura y le pregunta cuál es la superficie a la que se refiere el estudiante, y él mismo responde:

- *E2: La parte interna.*

De esta manera se pudo señalar que la superficie corresponde a la región plana de una figura que está delimitada por su contorno, que en el caso de una figura geométrica plana o polígono corresponde a segmentos.

2. *Aspectos importantes* o que se deben tener en cuenta respecto a la superficie.

Se les plantea a los estudiantes una discusión relacionada con aquellas *cosas* (aspectos, atributos) que se deben tener en cuenta al trabajar con la superficie de figuras y que son importantes o se han podido identificar durante el trabajo realizado hasta el momento. A cada uno de los estudiantes que intervinieron, se le pidió profundizar un poco al respecto o dar una pequeña explicación de su apreciación. Las siguientes son algunas de las intervenciones de los estudiantes:

- *E 3: La atura. La altura es como lo largo, como el tamaño que ocupa.* (Y aclaraba que se refería a lo largo, al tamaño, o a *lo que ocupa* la figura).
- *P*: *¿Es decir que el tamaño de la superficie está determinado por su altura?*
- *E3*: *No, la altura no determina la cantidad de superficie que tiene una figura, porque la figura puede ser más ancha o más angosta y cambia.*

- *E 4: La medida. La medida, quiere decir que debe tenerse en cuenta que la superficie puede ser medida. Y el tamaño, también tiene que ver con la medida y es importante para saber qué tan grande o qué tan pequeña es una figura. La superficie tiene medida, es decir, se puede medir.*

- *E 5: La forma. La forma que tenga una figura o una superficie no determina su tamaño, pues la forma puede variar pero el tamaño puede corresponder con otra.*

- *E 4: El tamaño tiene que ver con la medida.*

Luego de que los estudiantes presentaran y argumentaran, se dieron las siguientes apreciaciones, a manera de conclusión, las cuales iban contando con la aprobación de todo el grupo al momento de su planteamiento:

- "La superficie se puede medir."
- "Las superficies se pueden comparar."

3. *Conservación* de la superficie.

La discusión frente a este aspecto se inició con la siguiente pregunta: *¿Qué le sucede al tamaño de una superficie si ésta se corta y se recompone?*

- *E6: No cambia. Sigue siendo la misma, solo cambia de forma.*

La generalidad del grupo estuvo de acuerdo con la anterior apreciación, lo cual se evidenció con diferentes comentarios al respecto. Finalmente se realizaron las siguientes conclusiones y se recomendó que fueran muy tenidas en cuenta para lo que seguía del trabajo:

- "La superficie de una figura no cambia si se recorta y se vuelve a armar de la misma o de otra manera, sin superponerse las piezas resultantes."
- "La superficie no se modifica cuando sufre ciertas transformaciones."
- "Una figura puede cambiar de posición pero no se modifican su tamaño ni su forma."

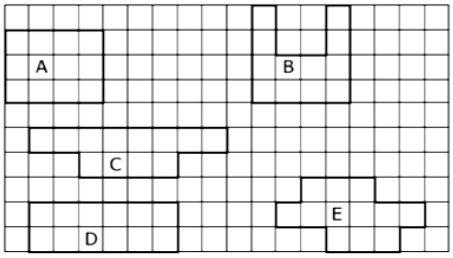
La participación activa de los estudiantes en la discusión evidencia su interés por la forma en que se han trabajado las diferentes sesiones de clase y permite que, por sí mismos, se den cuenta de su avance en el aprendizaje. De esta manera incrementa la motivación por el trabajo en las tareas propuestas y aumenta la probabilidad de que este sea exitoso y alcance los objetivos planteados.

Luego de los resultados obtenidos en esta sesión de socialización, se continuará con el desarrollo del conjunto de tareas programado para la intervención.

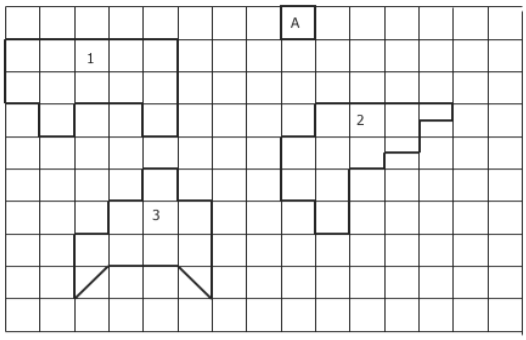
3.2.6 Actividad 6: Midiendo figuras con cuadritos

Tarea:

1. Luis ha diseñado las siguientes figuras, utilizando para ello la cuadrícula de una hoja.



   a. Calcula cuántos cuadritos pequeños son necesarios para construir cada una de estas figuras. ¿Qué observas?
   b. ¿Qué puedes decir del tamaño de cada una de la figuras construidas por Luis?
   c. Si cuatro cuadritos pequeños equivalen a un centímetro cuadrado ($1cm^2$):
      i. Dibuje dos figuras diferentes cuya superficie sea equivalente a $1cm^2$.
      ii. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide la figura A?
      iii. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide la figura E?
2. ¿Cuántos cuadrados como el A, se necesitan para formar la siguientes figuras?



Objetivos: Trabajar el área como el número de unidades que cubren la superficie y establecer algunas propiedades de la unidad de medida, como el hecho de que puede ser subdividida para realizar por completo el recubrimiento de la superficie a medir. Mostrar la disociación entre el área, la forma de la superficie y el número que la mide.

Descripción

El desarrollo de esta actividad fue de manera individual. Cada estudiante recibió una fotocopia con las tareas propuestas. Los estudiantes las afrontaron con iniciativa y mucha seguridad y, aunque la indicación de trabajo era de manera individual, no se restringió a los estudiantes el compartir con sus compañeros las ideas y procesos utilizados en la actividad. Con lo anterior se pudo observar cómo muchos de los estudiantes, a pesar de observar los procedimientos utilizados por sus compañeros, confiaban más en los suyos propios y afrontaban las tareas de manera personal y poniendo en juego las apreciaciones y conclusiones que se han venido construyendo en las diferentes sesiones de trabajo.

Análisis

La mayoría de los estudiantes no mostró dificultad en el conteo de los cuadritos que formaban cada una de las figuras, incluso en aquellas en las que había que recomponerlos. Todavía se mostraban prevenidos al momento de realizar inferencias al respecto del tamaño de las superficies, lo cual se pudo evidenciar en que la mitad de ellos, aproximadamente, señala la igualdad entre las superficies que están formadas por la misma cantidad de cuadritos. Solamente tres estudiantes negaron la igualdad de tamaños llevados por la diferencia entre la forma y el nombre de las figuras.

Ahora, al momento de proponer figuras de un área determinada, luego de relacionar la medición que hicieron de las figuras a través de cuadritos con los centímetros cuadrados (cm^2), fueron

pocos los estudiantes que lograron desprenderse del cuadrado de lado 1cm como figura con área de $1cm^2$ o de los cuatro cuadritos enteros para su construcción.

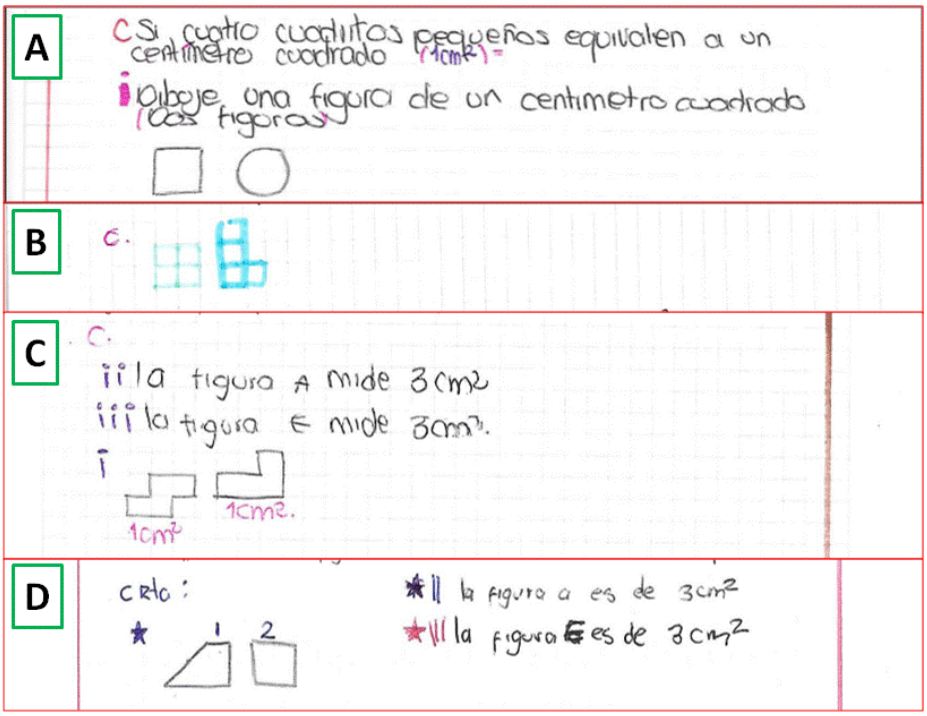


Figura 30. Propuestas de figuras de $1cm^2$ de área

En la figura 30se observan cuatro aspectos relacionados con la manera en que los estudiantes afrontaron el ejercicio de proponer dos figuras de $1cm^2$ de área:

A) El estudiante no se desprende de la forma cuadrada para organizar los cuatro *cuadritos* que equivalen al área pedida, e intenta con una figura circular para no perder dicha organización.

B) El estudiante logra desprenderse de la forma cuadrada y realiza una reconfiguración diferente de los cuatro *cuadritos* para obtener otra figura que cumpla las condiciones pedidas.

C) El estudiante no se limita a la forma cuadrada para su construcción, pero usa los cuatro *cuadritos* enteros para hallar las figuras.

D) El estudiante logra subdividir uno de los cuatro *cuadritos* que necesita para formar la figura con el área pedida, desprendiéndose del hecho de que los *cuadritos* tengan que estar enteros dentro de la figura, identificando la importancia de que estén completos, ya sea por reconfiguración o por partición.

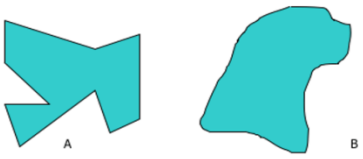
También en la parte D de la figura se observa la relación que establecieron entre la cantidad de cuadritos de las figuras planteadas y su equivalencia en cm^2, para calcular su área en esta unidad de medida, consiguiendo separar el área de su forma y del número que la mide.

En conclusión se puede señalar que, en el desarrollo de esta actividad, los estudiantes utilizaron adecuadamente el conteo de los *cuadritos* para determinar la medida de la superficie de las figuras, abarcando su totalidad incluso cuando los cuadritos dentro de la figura estaban *partidos*. Esto muestra un gran avance si se compara con los resultados obtenidos en la actividad 5, donde los estudiantes pasaban por alto las regiones de las superficies donde la unidad no se podía ubicar de manera exacta o entera. Sin embargo, teniendo en cuenta la diferencia en las formas y subdivisiones de las superficies planteadas en las dos actividades, se programó una socialización de la primera parte de la actividad 5, para una sesión posterior, donde también se trabajó en las relaciones entre área y perímetro, en busca de tratar de solucionar algunas dificultades encontradas en el trabajo de la actividad 8, y el desarrollo y los resultados de dicha sesión se mostrará más adelante.

3.2.7 Actividad 7: Observando la superficie en otros contextos

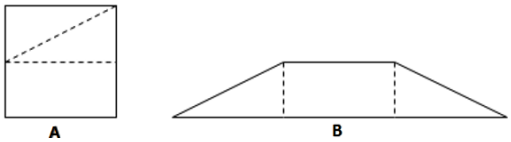
Tarea:

1. Compara estas dos figuras que representan dos estanques. ¿En cuál de los dos estanques hay más espacio para que los patos naden en él?

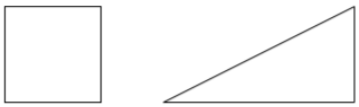


2. La figura A se recortó en 3 piezas que fueron reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura B.
   a) Compara el área de la figura A con el área de la de la figura B. ¿Qué podrías decir?
   b) Compara los perímetros de las dos figuras. ¿Qué relación hay entre el perímetro de la figura A y el perímetro de la figura B?

3. Las superficies que se muestran a continuación, ¿ocupan la misma cantidad de plano o diferente? ¿Alguna de ellas tiene mayor perímetro? Explica tus respuestas.



4. ¿Qué puedes decir del tamaño de los dos pasteles que están representados a través de las siguientes figuras?



***Objetivos**:* Realizar comparaciones entre superficies a través de la partición y recomposición, observando la conservación del área y la disociación entre ésta y la forma de la superficie. Mostrar la independencia entre área y perímetro.

Descripción

Para la realización de esta actividad los estudiantes contaron con diversos materiales como cartulina, tijeras, colbón, papel de colores, etc., de forma tal que podían cortar, deshacer y rehacer las figuras propuestas. Se les entregó una fotocopia con las tareas propuestas y se les motivó para que utilizaran el recorte y recomposición como herramienta útil para su desarrollo.

Análisis

En las cuatro situaciones planteadas se buscaba que los estudiantes transformaran una de las superficies en la otra, a través de procedimientos de recorte y recomposición, incluso en las superficies que contenían formas convencionales como rectángulos, sin embargo algunos estudiantes dedujeron la igualdad entre las figuras sin necesidad de realizar la recomposición de alguna de ellas. En este punto son muy pocos los estudiantes que recurren a la percepción visual o a las dimensiones lineales de las figuras como único medio de comparación, o para la emisión de juicios comparativos, con lo cual se nota el avance frente a la identificación de la superficie como magnitud y de la apropiación de la conservación de la superficie como propiedad básica de comparación de tamaños de figuras. Además se trabajó con la comparación de los perímetros de las figuras pensando en el trabajo simultáneo de los dos conceptos, lo cual hace parte fundamental de la adecuada conceptualización del área.

A continuación se describen algunas de las estrategias seguidas por los estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas de comparación.

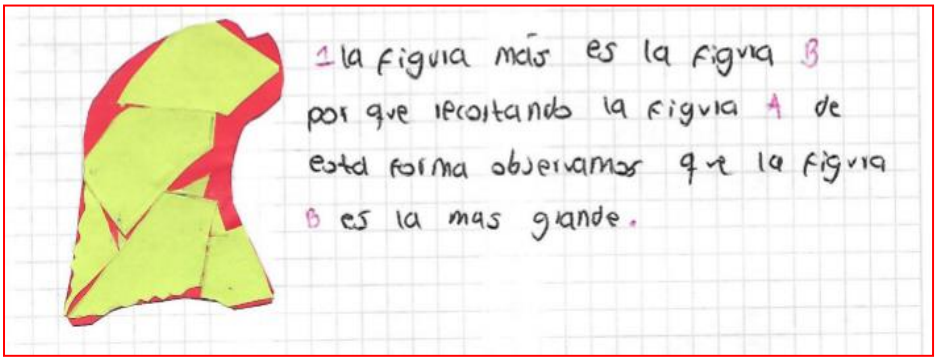


Figura 31. Comparación de superficies irregulares por recomposición

El recorte de una de las figuras y la superposición de las partes sobre la otra permite que el estudiante tenga la certeza de que la comparación que está realizando es precisa y confiable (Figura 31), evidenciando una efectiva apropiación de la conservación del área y de la consistencia del proceso de recomposición en la comparación de superficies.

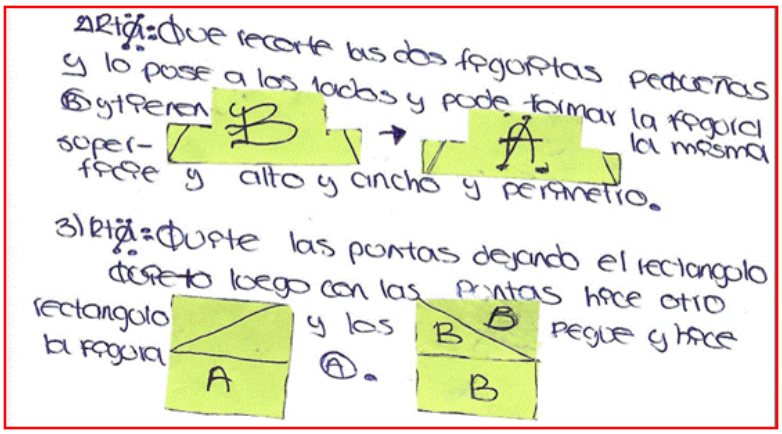


Figura 32. Comparación por transformación

De igual manera, el proceso de transformación de una figura en la otra, ofrece las mismas garantías señaladas anteriormente en su comparación (Figura 32). De igual manera se observa que el uso de material concreto facilita la realización de este tipo de procesos de comparación y ofrece garantías basadas en la propia experimentación y el trabajo de los estudiantes, asegurando que la conceptualización de las propiedades puestas en juego sea más efectiva.

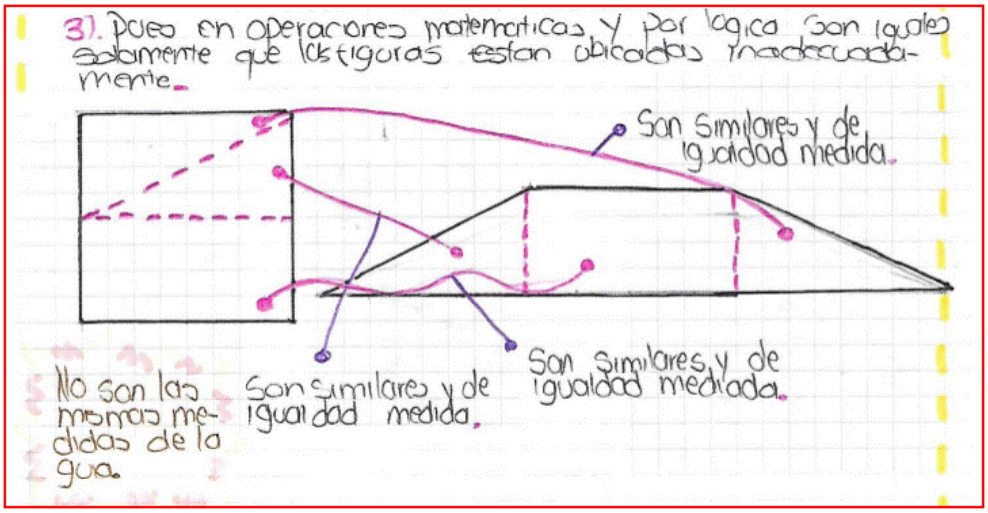


Figura 33. Comparación de superficies sin recomposición

Otra forma de comparación, en la que no se hizo uso del material concreto, fue a través de la comparación visual de las figuras, realizada a través de las partes que las componen, sin descomponerlas, pero equiparándolas (Figura 33). También se observa que el estudiante se apoya en la forma de las partes y en sus medidas lineales, empezando a observar que, cuando se quieren comparar superficies de figuras, lo importante es la cantidad de plano que hay en ellas más allá de la forma o la posición.

Con el desarrollo de esta actividad se pudo verificar que los estudiantes han avanzado de manera notable en la comparación de superficies. En la situación 3 de la tarea, los estudiantes no se detuvieron a analizar detenidamente los perímetros de las figuras propuestas, dejándose llevar por la comparación hecha entre las áreas y concluían de manera apresurada la igualdad entre ellos. Las tareas propuestas para la siguiente actividad pretendían que los estudiantes empezaran el trabajo con perímetros de figuras, no solo para su identificación, medición y conceptualización, sino también para que, con la diferenciación con el área, se afiance este concepto.

3.2.8 Actividad 8: Relacionando áreas y perímetros

Tarea:

En casa: Investiga qué es el perímetro de una figura geométrica y halla el perímetro de cada una de las figuras A, B, C y D de la tarea 1: ***Comparando y ordenando rectángulos.***
En clase:
1) ¿Dos figuras con igual área siempre tienen el mismo perímetro? Justifica tu respuesta.
2) a. Encuentre dos figuras de igual área pero diferente perímetro.

b. Encuentre dos figuras de igual perímetro pero diferente área
c. Encuentre dos figuras diferentes que tengan igual área e igual perímetro.
d. Encuentre dos figuras diferentes que tengan diferente área y diferente perímetro.

3) *a. ¿Qué pasa con el área de un cuadrado si se duplica la longitud de sus lados?*
b. ¿Qué pasa con el área de un cuadrado si se triplica la longitud de sus lados?

***Objetivos**: Identificar el perímetro de una figura y diferenciarlo de su área. Trabajar la independencia entre área y perímetro.*

Descripción

Esta actividad se propuso para ser realizada en dos partes: consulta para la casa sobre perímetro, y trabajo en clase a partir de la consulta. El trabajo en clase en la resolución de las preguntas propuestas fue de manera individual, y estas se fueron planteando de manera paulatina, dejando el tiempo necesario entre la formulación de una y otra, para que los estudiantes solucionaran cada una de ellas antes de afrontar la siguiente. Desafortunadamente no alcanzó el tiempo para que los estudiantes respondieran la totalidad de las preguntas, pues no fue fácil para ellos encontrar las figuras con las condiciones pedidas. Ante dicha situación se planteó la necesidad de realizar una actividad extra, antes de la siguiente (número 9), con el objetivo de tratar de resolver dichas dificultades en torno a las relaciones área perímetro y algunas sobre medición que se observaron en la actividad número 5.

Análisis

Los resultados de la primera parte mostraron que, en general, los estudiantes identificaron y midieron adecuadamente los perímetros de las figuras que se les pidieron, las cuales se les entregaron en una fotocopia en días anteriores a la sesión de trabajo. Ninguno de los estudiantes mostró algún tipo de confusión entre el perímetro pedido y la superficie o el área de las figuras. Además, teniendo en cuenta que se había determinado la igualdad entre las superficies de algunas figuras de la actividad 1, los estudiantes concluían que era posible que figuras de igual área pudieran tener perímetros diferentes, y lograron dibujar otras figuras que cumplían dichas condiciones (Figura 34).

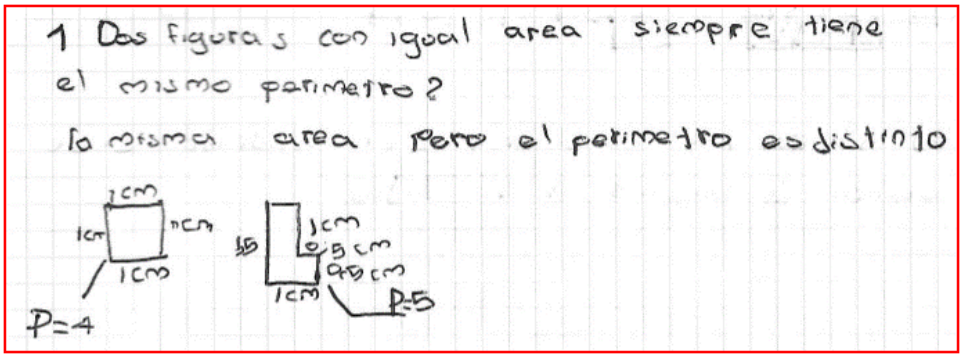


Figura 34. Ejemplo de dos figuras de igual área y diferente perímetro

Por otro lado, los resultados de las preguntas de la segunda parte mostraron que los estudiantes ya identificaban la superficie como una magnitud propia e independiente, que puede ser medida, y que su tamaño no depende de su forma, y, de esta manera empezaron a visualizar la independencia entre área y perímetro (Figura 34). Algunos ejemplos de otros resultados se muestran a continuación en la figura 35:

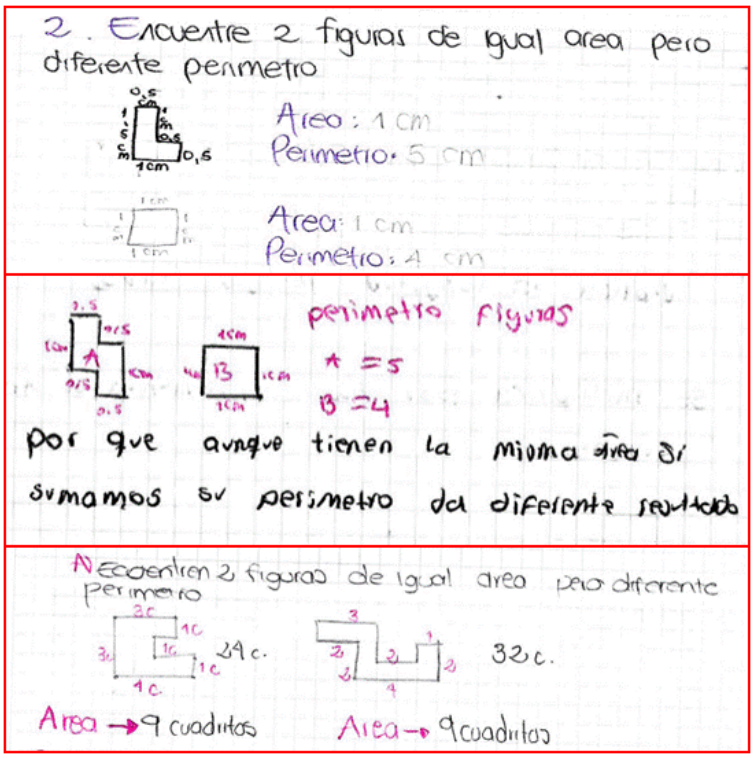


Figura 35. Propuestas de figuras de igual área y diferente perímetro

En la figura 35 se ve como los estudiantes construyen figuras que tienen áreas iguales y diferentes perímetros, pero al momento de intentar encontrar figuras con igual perímetro y diferente área, en general, no lo lograron.

La siguiente actividad fue planteada teniendo como punto de partida la necesidad de trabajar un poco más las relaciones entre áreas y perímetros y la medición de superficies a través de diferentes unidades bidimensionales de medida, con lo cual se pudiera ir pensando en el cierre de la intervención con la aplicación de la tarea 9 y el instrumento de indagación a manera de prueba de salida.

3.2.8.1 Relacionando áreas y perímetros 2

Esta sesión se desarrolló a manera de plenaria y tuvo dos partes: en la primera se socializó una de las tareas propuestas en la actividad 5, y en la segunda se desarrolló un trabajo guiado con material práctico, donde los estudiantes realizaron una construcción y luego respondieron algunas preguntas al respecto.

Descripción primera parte

A manera de plenaria se retomó el punto 3 de la actividad 5: *Midiendo figuras con otras figuras*; se realizó la medición de la figura S con las figuras A, B y C. Los estudiantes participaron de manera activa y mostraron gran interés por el desarrollo de la clase.

El docente expone las figuras A, B, C y S en el tablero, las cuales fueron llevadas impresas y se ubicaron de manera tal que podían ser apreciadas por todos los estudiantes. Y se planteó la siguiente pregunta, dando inicio a la participación de los estudiantes, quienes no solo respondían, sino también realizaban los procedimientos frente a la clase: *¿Cuántas veces caben las figuras A, B y C en la figura S?*

Uno de los estudiantes interviene con la siguiente apreciación.

- *La figura A cabe 29 veces en la figura S.*

El estudiante indica que el triángulo (figura A) se puede dibujar ese número de veces sobre la figura S y recubrirla completamente. Lo cual se realiza sobre una de las figuras expuesta,

mostrando el recubrimiento hecho con la figura A y la subdivisión de la figura S en 29 partes del tamaño y la forma de A. La primera conclusión que surge es que la medida de la figura S es 29 veces la figura A. Además se enfatiza en que el procedimiento realizado corresponde a una *medición*, es decir, se indica explícitamente que, lo que se está haciendo es medir la superficie de S.

Luego se propone la medición de la figura S usando la figura B. En el tablero hay otra figura S sin subdivisiones. Entonces, un estudiante pasa al tablero e intenta realizar la medición con una ficha que representa la figura B, ubicándola sobre la figura S y trazando sobre ella la ubicación de cada una de las posiciones de B. El recubrimiento fue inadecuado y el estudiante que lo realizó recibió algunas apreciaciones de los demás.

- *La figura B cabe tres veces en la figura S.*
- *No estoy de acuerdo, porque sobran espacios por recubrir.*
- *Entonces se deberían cubrir esos espacios que faltan. Se podrían unir.*
- *Pues contar los triángulos que sobran en la figura S (*pensando en la subdivisión anterior realizada sobre la figura S, a través de la figura A)*, unirlos para que formen la figura con que estamos recubriéndola.*

En ese momento y luego de que varios estudiantes sugirieran diferentes formas de realizar la medición, el docente muestra, usando las figuras del tablero, que con seis triángulos (figura A) se puede formar el hexágono (figura B), por lo tanto puede recubrir la figura S una vez más y todavía sobran cinco triángulos. Luego, al preguntar por la medida de la figura S en términos de la figura B, un estudiante interviene:

- *Se debe hacer una división de 29 entre 6.*

Y después de realizar la división concluye que la medida es 4,833. Después de realizar una observación sobre la expresión en forma de fracción del tamaño de la figura A respecto al de la figura B y algunas consideraciones sobre la importancia de señalar no solo la cantidad numérica como medida, sino que ésta debe ir acompañada del *algo* (unidad de medida) con que se está midiendo, se pudo realizar la conclusión de que la medida de S *es 4 veces B más 5/6 de* B.

Finalmente se propone calcular la medida de S en términos de la figura C, pero esta vez sin hacerlo de manera directa, algunas de las intervenciones fueron:

- *14,5.*
- *15.*
- *Mínimo 10 veces.*

- *Es 14,5 porque la figura A cabe dos veces en la figura C, es decir, que la figura C está compuesta por dos figuras A.*

Luego de estas intervenciones se les pregunta nuevamente a los estudiantes por la medida de la figura S y se les pide a algunos de ellos que la mencionen, y ante cada respuesta correcta se les pide que mencionen una diferente intentando que usen para ello las tres unidades utilizadas en la medición.

- *29 figuras A caben en la S.*
- *4,833 B.*
- *14,5 C.*

Análisis

En la figura 36 se muestra la forma en que uno de los estudiantes reporta la medición de la superficie S por medio de las unidades A, B y C: en primera instancia como la figura A *cabe* una cantidad entera de veces sobre ella, y se podía realizar un recubrimiento total de la misma, realiza el conteo y señala el número de veces que la una cabe en la otra, como determinación de la medida de la superficie. En segundo lugar se realiza la medición con una figura que, primero, no cabe una cantidad entera de veces y, segundo, no es posible ubicarla sobre la superficie sin tener que descomponerla; ante esta particularidad los estudiantes se ven precisados a realizar una subdivisión de la unidad de medida para poder establecer la cantidad de veces que ésta cabe sobre la superficie que se está midiendo a través de la unión de los pedazos que completan la unidad. Finalmente para la medición de la superficie con una tercera figura no se recurrió al recubrimiento directo, sino que se utilizó la relación de esta nueva unidad con una de las figuras ya usadas como unidad de medición, para concluir la cantidad de veces que ésta recubre la superficie.

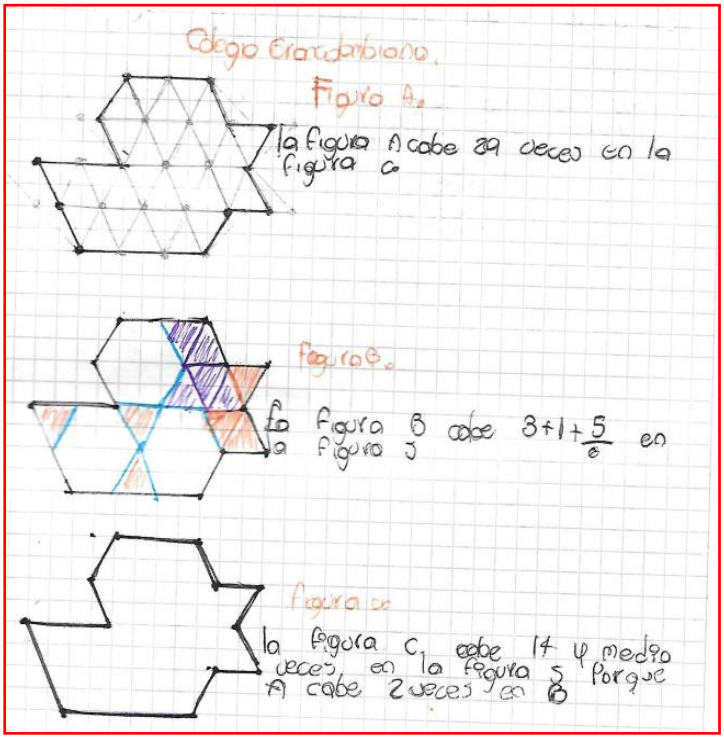


Figura 36. Medición de una superficie con tres unidades diferentes

Como conclusión de esta primera parte de la sesión se puede señalar que dos aspectos importantes que dan muestra del manejo de los estudiantes de la conservación del área bajo transformaciones y del avance en los procesos de medición de superficies, son el hecho de aceptar la reconstrucción de la figura B por medio de la figura A y realizar la medición de la superficie S con la figura C, a través de su relación con la figura A, con la cual ya se había realizado la medición.

Descripción de la segunda parte

En la segunda parte el docente le entregó a cada uno de los estudiantes un cuadrado de 6cm de lado hecho en cartulina, les pide que lo dibujen en una hoja y que calculen su perímetro. Algunos estudiantes pegan el cuadrado en sus hojas de trabajo, por lo tanto, para la siguiente parte de esta actividad, se les facilita otro cuadrado exactamente igual al anterior.

Una vez todos los estudiantes aseguran haber encontrado el perímetro, se les pide que dividan el cuadrado por la mitad de forma horizontal, lo recorten y unan las dos partes resultantes para

formar un rectángulo. Luego se les pide hallar el perímetro de esta nueva figura, para formularles algunas preguntas frente a las superficies y los perímetros de las dos figuras.

Análisis

Los resultados y análisis de cada una de las preguntas formuladas se muestran a continuación.

1. *¿Cómo son las superficies de las dos figuras?*

Catorce estudiantes respondieron que las superficies son iguales, doce que las superficies son diferentes y cuatro no realizan una conclusión.

2. *¿Cómo son los perímetros de las dos figuras?*

Dieciocho estudiantes miden, comparan e indican que los perímetros son diferentes, nueve presentan algún tipo de confusión al medir o al concluir frente a los perímetros y tres no responden.

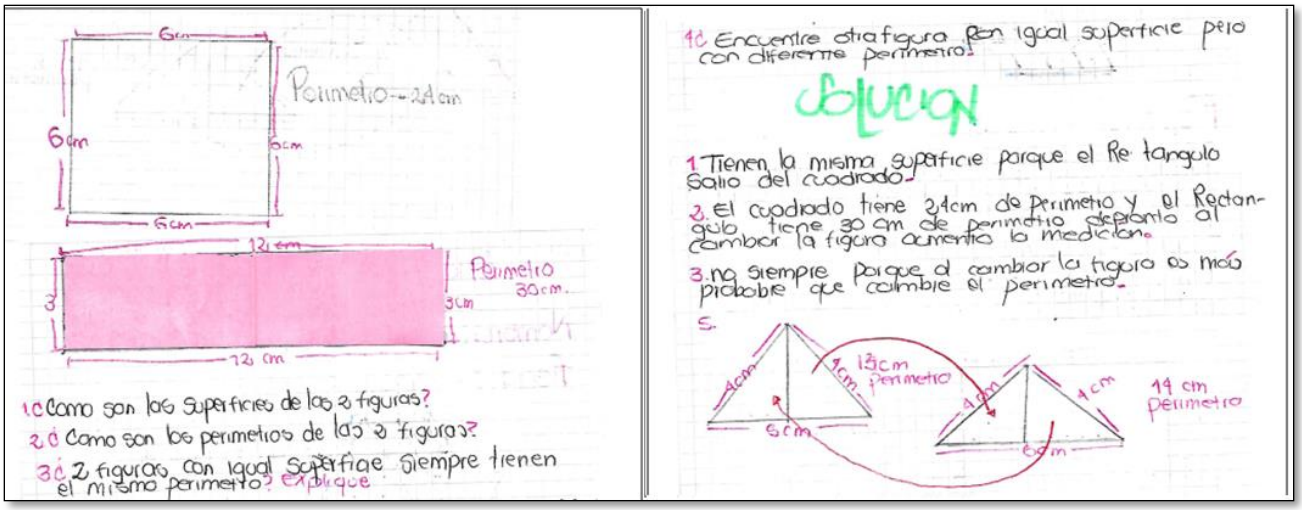


Figura37. Independencia entre área y perímetro

La forma de proceder de un estudiante se muestra en la figura 37, donde se observa la identificación de la conservación de la superficie y la manipulación de las figuras para conseguir diferentes medidas de perímetros, con lo cual comprobar la independencia entre la medida de la superficie y el perímetro de la misma.

3. *¿Dos figuras con igual superficie siempre tienen el mismo perímetro? Explique.*

Dieciséis estudiantes responden negativamente, tres responden positivamente o su respuesta no es suficientemente clara y once estudiantes no dan una conclusión.

4. *Encuentre otra figura con igual superficie que las anteriores pero con diferente perímetro.*

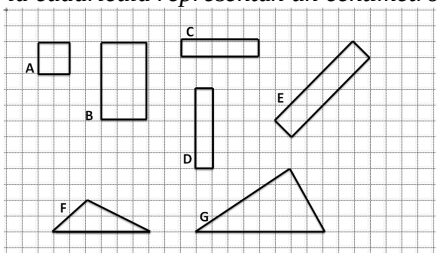
Cuatro estudiantes la hallaron correctamente, seis propusieron otra figura pero era incorrecta y veinte estudiantes no pudieron hallarla.

Esta segunda parte de la actividad confirma que, en general, los estudiantes han podido establecer la conservación de la superficie, ven el perímetro y el área como conceptos independientes que no guardan relaciones estrictas de dependencia y que el uso de material concreto facilita la observación de dichas relaciones.

La siguiente actividad fue la última de las programas para la intervención. Se llevo a cabo de manera tal que, para su realización, los estudiantes no contaran con la intervención del docente, con lo cual pudieran tener libertad en sus formas de proceder.

3.2.9 Calculando áreas y perímetros

Tarea:
Calcula el área y el perímetro de cada una de las figuras que se presentan a continuación, teniendo en cuenta que cuatro cuadritos de la cuadricula representan un centímetro cuadrado (1cm^2).



Objetivo*: Trabajar en la medición de áreas y perímetros y diferenciar estos dos conceptos.*

Descripción

En la realización de esta actividad los estudiantes trabajaron de manera individual, contaron con un tiempo limitado, aunque podían comparar sus procedimientos y resultados con sus compañeros. Debían completar la tabla con las áreas y perímetros de las figuras que se les plantearon. En el desarrollo de esta actividad los estudiantes recibieron poca ayuda del docente. La idea fue que lo realizaran de manera individual y contestaran con base en lo que se había trabajado en las sesiones anteriores.

Análisis

Los resultados muestran que se requiere un poco más de trabajo en la medición de áreas a través de las unidades convencionales de medida en diversos contextos y situaciones, para lograr que los estudiantes logren su correcta apropiación y puedan realizar un manejo adecuado. También se pudo apreciar que el hecho de desprenderse del material concreto trajo consigo algunas confusiones en la medición de las figuras, aunque también puede que la conversión propuesta haya generado cierto tipo de dificultad al momento de expresar la medida del área a través de un número y una unidad predeterminados.

Lo anterior se puede concluir puesto que ocho estudiantes mostraron una gran cantidad de aciertos en sus resultados, nueve estudiantes mostraron cantidades similares entre aciertos y desaciertos, mientras que quince estudiantes mostraron más desaciertos que aciertos en sus respuestas.

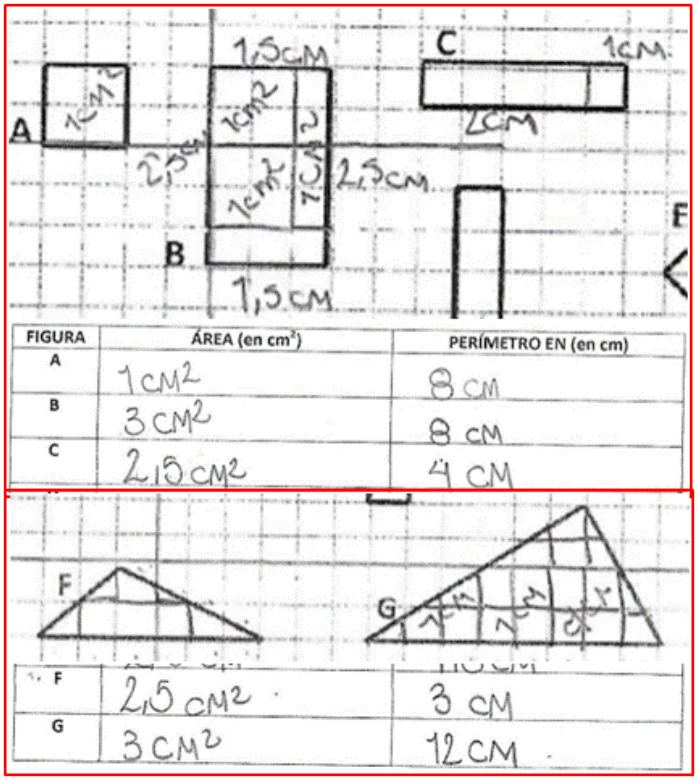


Figura 38. Estrategias y resultados de la medición de áreas y perímetros

En la figura 38 se aprecia la estrategia de un estudiante para el cálculo de las áreas y perímetros: Él agrupa los cuadritos de las figuras teniendo en cuenta que cuatro de ellos conforman un

centímetro cuadrado e intenta dar un resultado aproximado de acuerdo al conteo que realiza. La forma en que agrupa los cuadritos dentro de las figuras muestra que ha desligado la forma de la superficie de su medida, aunque todavía omite algunos de las regiones de las figuras donde los cuadritos están fraccionados.

En general los estudiantes acuden al recubrimiento y al uso de unidades bidimensionales para medir las superficies que se les presentaron, a pesar de que eran figuras convencionales como triángulos y rectángulos. Esto muestra que se han apropiado de los recursos entregados en el conjunto de tarea, pues ya no acuden a recordar fórmulas para el cálculo de las áreas, lo cual puede indicar que este puede ser un momento indicado para la introducción de dichas fórmulas, lo cual puede ser el paso a seguir en la conceptualización del área, aunque eso no hace parte de la planeación y reporte de esta intervención.

En la última sesión de la intervención se aplicó nuevamente el instrumento de indagación, con la idea de poder realizar el contraste, de manera general, de los cambios observados en las formas de responder de los estudiantes y poder concluir la intervención.

3.2.10 Instrumento final. Resultados y comparación

Este instrumento fue aplicado como salida de la intervención para tener un comparativo entre el inicio de la investigación y los cambios y/o avances mostrados por los estudiantes frente al concepto de área en los aspectos previstos, así como el alcance de los propósitos planteados. El test que se aplicó fue el mismo que sirvió como diagnóstico de la investigación. A continuación se reportan, de manera general, los aspectos relacionados con la superficie donde se aprecian cambios significativos en los resultados dados por los estudiantes.

En el primer punto se pasó de 18 a 25 estudiantes que respondieron que la figura A es mayor que la figura B, y la mayoría de éstos coincidieron en señalar que la razón estaba dada por el *pedazo* que le falta a la figura B, mientras que en el instrumento inicial solamente 3 estudiantes se apoyaron en la forma de la superficie para realizar la inferencia y los demás habían acudido a la percepción y/o las longitudes de los lados.

En el segundo punto se pasó de un alto porcentaje a la totalidad de los estudiantes, que afirmaron que las superficies de las figuras son iguales. Mientras que el tercer punto el incremento fue más significativo, pues se pasó de 16 a 32 estudiantes que observaron la conservación de la superficie, cuando de la figura K se genera la figura L por medio del recorte y la recomposición. En el cuarto punto también se obtuvo cambio substancial en los resultados, se pasó de cinco estudiantes que habían contestado correctamente a dieciocho que lo hicieron al final.

4. CONSIDERACIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

Esta sección está dedicada a realizar algunas apreciaciones del investigador luego de la experimentación, referidas tanto a los aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza del concepto de área, como al desarrollo de las actividades y a la aplicación del conjunto de tareas; y también a particularidades del proceso investigativo referentes a su postura personal, aprendizajes y oportunidades al respecto. Teniendo en cuenta que dentro del análisis del desarrollo de las actividades se han realizado conclusiones puntuales en los diferentes aspectos abarcados por la investigación, no se profundizará en ellas, sino más bien se enunciarán a manera de logro y cierre de la intervención.

Este proceso de intervención duró aproximadamente dos meses y medio, contados desde el día en que se realizó la actividad número uno hasta el día en que se aplicó el instrumento de salida. Aunque el instrumento de indagación fue aplicado dos meses antes de dicho inicio, este tiempo sirvió para adecuar y precisar los objetivos de las actividades y para preparar a los estudiantes respecto a las dinámicas que se iban a requerir en el desarrollo de las sesiones de clase, dado que este era un grupo nuevo para el docente y, al parecer, estaban acostumbrados a otro tipo de formas de actuar en las clases de matemáticas, donde, al parecer, se daba poca o ninguna cabida a la participación de los estudiantes o al trabajo en equipo. Paulatinamente, por medio de estrategias de trabajo en clase donde se promovía la participación y el trabajo en equipo, los estudiantes fueron cambiando sus maneras de interacción con sus compañeros y con el profesor, aprendiendo a darse la oportunidad de escuchar al otro y enriquecerse de las diferencias entre las distintas perspectivas, como punto de partida para el aprendizaje, siendo responsables con sus opiniones y teniendo en cuenta que todos, en determinado momento, tenemos algo que aportarle a los demás.

Cabe aclarar que las apreciaciones que en adelante se describen están enmarcadas en la mirada final de la investigación, a manera de conclusiones, sin ser del todo rigurosas en los aspectos que se señalan, pues estos ya han sido analizados con mayor profundidad en la sección 3 de este documento; más bien hacen parte de las sensaciones que en el docente investigador dejó esta experiencia y que, de muchas maneras, han modificado para bien sus prácticas pedagógicas y didácticas dentro y fuera del aula de clase.

4.1 Sobre el aprendizaje de los estudiantes

A continuación se describen algunas apreciaciones respecto al proceso de aprendizaje, a la forma en que los estudiantes afrontaron el desarrollo de la experiencia y a sus resultados. Esto será descrito de acuerdo a los aspectos relacionados con el área y su enseñanza y aprendizaje, y las categorías de análisis expuestas anteriormente en la sección 2.2.

4.1.1 *La magnitud superficie*

Con el desarrollo de las primeras tareas se pudo apreciar que los estudiantes necesitan que se les haga caer en la cuenta de la superficie como magnitud, a pesar de que parece algo con poco sentido para alguien que, con la experiencia, ya lo ha hecho y en el proceso no recibió ayuda para que este fuera más afortunado, el cual, luego de ser realizado, no reconoce las dificultades por las que tuvo que transitar.

Para los estudiantes no era fácil desprenderse de las dimensiones lineales de las figuras para abordar las situaciones referidas a la comparación, medición u ordenamiento de superficies, lo cual puede deberse a que en el estudio de las figuras lo que los profesores acostumbran es a hacer énfasis al respecto. De igual manera la percepción visual que tienen los estudiantes frente a las figuras es una de las herramientas que más utilizan en este tipo de tareas y actividades, por lo tanto es necesario saber aprovecharla para enfocarlos hacia la observación de las características de las figuras que conllevan a la identificación de la superficie y a la posterior conceptualización del área.

4.1.2 *Conservación del área, composición y descomposición de superficies.*

Todos los procesos realizados sobre las diferentes superficies, tanto con material concreto, es decir, con fichas que representaban las figuras planteadas en las diferentes tareas, así como sobre los dibujos de las figuras mismas, ayudaron a consolidar en los estudiantes la idea de que la superficie se conserva bajo diferentes transformaciones, así como su medida. Los estudiantes usaron continuamente esta propiedad para ordenar, comparar, medir y emitir juicios en diferentes contextos donde se ponía en juego la superficie, lo cual les asegura mejores resultados en aspectos de la medición y del trabajo con áreas en diversos contextos de las matemáticas.

4.1.3 *Procesos de medición y unidades de medida.*

Parte fundamental en la conceptualización del área está en el manejo de las unidades de medida y en los procesos de medición que esto conlleva. Para los estudiantes es muy difícil empezar a realizar procesos de medición a partir del recubrimiento con unidades de medida no convencionales, pues piensan que dichos procesos ya están determinados a través de algoritmos o fórmulas y, por lo tanto, desestiman sus propias formas de proceder. Es claro que las concepciones arraigadas en ellos acerca de la rigurosidad de las matemáticas como ciencia y de las maneras de actuar dentro de ella, no han dejado lugar para sus propios argumentos.

En la medida en que transcurrieron las sesiones de trabajo, los estudiantes se dieron cuenta que el proceso de medir, visto como la comparación de un *algo* a través de *otro algo* de la misma naturaleza o con características similares que permiten dicho proceso de comparación, indicando la cantidad de veces que el *uno* cabe en el *otro*, está determinado por quien está realizando el proceso y debe obedecer y dar cuenta de las necesidades propias del contexto en el que se enmarca la situación.

4.1.4 *Áreas y perímetros.*

El trabajo con el área y su conceptualización implica trabajar con perímetros, en el sentido en que estos dos conceptos están estrechamente ligados y deben servirse de apoyo para el trabajo en el aula de clase; desligarlos y asumirlos por separado puede generar confusiones, falsas relaciones, usos inapropiados de las unidades de medida de cada uno, entre otras dificultades apreciadas en el desarrollo de esta investigación. Los estudiantes están en la capacidad de asumir el trabajo con estos dos conceptos de manera conjunta sin que esto implique algún tipo de dificultad extra para ellos, la cual puede residir especialmente en la parte operativa o de cálculo.

Algo importante que se debe señalar en este aspecto hace referencia a las falsas relaciones que se suelen establecer entre área y perímetro, y que, por lo realizado en esta experiencia, son fáciles de desestimar en los estudiantes mediante el trabajo práctico con figuras no convencionales, con lo cual se enriquezcan las concepciones de los estudiantes al respecto.

4.2 Sobre el trabajo en el aula

Desde el diseño de esta investigación, durante su desarrollo y hasta la construcción del informe final, el aprendizaje del docente investigador ha sido permanente, por lo cual puede ser de

utilidad presentar algunas apreciaciones sobre esta experiencia, en particular las relacionadas con la aplicación y el desarrollo de las tareas y actividades en el aula de clase.

Inicialmente se puede señalar la importancia de brindar a los estudiantes seguridad y confianza en sí mismos y en las formas de proceder surgidas desde sus propias iniciativas, lo cual es fundamental para contar con su interés y compromiso con el trabajo en clase y su aprendizaje. El hecho de mostrarles que su propio trabajo, en cuanto a procedimientos y formas de razonar, tiene la misma consistencia que podría tener el realizado por el docente, hace que sus apreciaciones de los conceptos trabajados sean mejor asimiladas.

Por otro lado, el lenguaje utilizado en las tareas y en el desarrollo de las clases es importante al momento de ir conceptualizando los objetos matemáticos abordados, en particular el área. Se debe iniciar con un lenguaje sencillo, acorde al contexto y nivel de los estudiantes y poco a poco ir pasando, de manera gradual, al uso del lenguaje propio de las matemáticas, sin que este cambio implique ruptura en las concepciones formadas en los estudiantes. De igual manera es importante la realización de trabajo con material práctico con lo cual los estudiantes puedan reconocer de manera real los diferentes aspectos que, del área y de la superficie en este caso, se han propuesto como objetivo de trabajo, para pasar luego a las abstracciones requeridas como parte de la *matematización* (Freudenthal, 1983) de los conceptos trabajados.

4.3 Limitaciones, recomendaciones y reflexión final

Finalmente, como en la mayoría de los procesos, se encontraron limitaciones en el desarrollo de la investigación, algunas de ellas ligadas al trabajo propio en el aula y otras externas pero que también tenían incidencia en el alcance de los propósitos.

Fue necesario, durante las primeras sesiones, realizar un esfuerzo mayor en busca de que los estudiantes entraran en las dinámicas de trabajo en el aula requeridas para el desarrollo de la investigación, teniendo en cuenta que no eran las acostumbradas para ellos. Lo anterior implicaba un desgaste mayor al habitual por parte del docente, pues se requería que los estudiantes mantuvieran el interés en el trabajo, en el análisis de sus procedimientos y razonamientos, que valoraran sus formas de asumir las tareas y las formas de proceder en su resolución así como las que venían de sus compañeros. Además, los estudiantes muchas veces caían en la falta de compromiso, olvidando sus materiales o incumpliendo con las tareas, por lo

cual era necesario estar siempre preparado para afrontar este tipo de situaciones sin llegar a desmotivarlos con algún tipo de aislamiento en el trabajo.

Algo importante y que se debe resaltar fue que los estudiantes, en su mayoría y durante gran parte del tiempo de trabajo, lograron olvidarse de las calificaciones, o por lo menos desprenderse un poco de la rigurosidad de recibir una calificación por cada tarea o actividad realizada; por el contrario se pudo generar en ellos el compromiso de asumir el trabajo como parte de su crecimiento y aprendizaje y, que el hecho de asumirlo así, traería consigo buenos resultados académicos, lo cual se evidenció con las notas aprobatorias de la totalidad de los estudiantes.

Por otro lado se encontraban todas las actividades académicas propias de una institución educativa que, muchas veces, interferían con el desarrollo de las sesiones de clase, llegando, incluso, a estar separadas por más de una semana. Lo anterior hacía que se requiriera la realización de refuerzos o *recordatorios* con el objetivo de que todos los estudiantes afrontaran las tareas propuestas bajo las mismas condiciones y con las herramientas necesarias. Muchas veces, incluso, se debía ser flexible con plazos de entrega y condiciones de trabajo en busca, precisamente, de que se mantuvieran las dinámicas propias de la intervención.

Las tareas y actividades aquí propuestas generan una buena forma de conceptualizar la superficie y el área, y propician una excelente introducción a la deducción y uso de fórmulas de cálculo de áreas de figuras planas. Se debe ser riguroso en la institucionalización de las nociones y los procesos relacionados con la conceptualización del área, no dar por hecho la adquisición de las nociones ni desestimar las apreciaciones y los razonamientos de los estudiantes, con el propósito de lograr que la propuesta llegue a cumplir los objetivos trazados, tanto en cada actividad como de manera general. Una nueva aplicación de las tareas implica observar y particularizar el grupo de trabajo de acuerdo a sus características, realizar los ajustes necesarios, enfatizar en los procesos pertinentes de acuerdo al estado del grupo respecto al manejo del área y, sobre todo, permitir que el trabajo práctico de los estudiantes los lleve a visibilizar la importancia del compromiso y la responsabilidad en la adquisición del conocimiento.

Muchas otras cosas podrían señalarse al terminar un proceso como este, durante el cual se generaron todo tipo de sensaciones y aprendizajes, no solo por parte de los estudiantes que participaron en la investigación, sino del docente que hizo las veces de investigador, pues

afrontar y asumir el reto de enseñar y aprender trae consigo sensaciones de duda, inconformidad o desazón, en los momentos en que las cosas parecen lejanas o fuera de los parámetros trazados, pero también esperanza, gratificación y convicción cuando se siente que el esfuerzo valió la pena, no solo porque los resultados sean acordes a los esperado, sino porque los demás puedan recibir un poco de lo que hemos decidido poner en su beneficio.

REFERENCIAS

Bohórquez, L. (2004). *Aprendizaje del concepto de área. Incidencia del trabajo en colaboración, la resolución de problemas y el Cabry-Geometry en la comprensión de aspectos asociados al concepto de área* (tesis de maestría). Universidad de los Andes, Bogotá.

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la geometría. *Revista colombiana de educación, (60)*, 41-60.

Chamorro, M., (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas, (3)*, 31-53.

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la Universidad* (tesis de doctorado). Universidad de Valencia. Valencia.

Corberán, R. (1998). *El área. Recursos didácticos para su enseñanza en primaria*. Recuperado de http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf

D'Amore, B. y Fandiño M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime, 10* (1), 39-68.

Freudenthal, H. (1983). Chapter 1: As an example: Length. En *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (pp. 1-27). Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Del Olmo, M., Moreno, M., y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 19, Editorial síntesis, Madrid 1993.

Elliott, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Madrid: Ediciones Morata.

Glinz, P. (2005). Un acercamiento al trabajo colaborativo. *Revista Iberoamericana De Educación*, *36*(7), 1-14. Recuperado a partir de https://rieoei.org/RIE/article/view/2927

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* Granada. Universidad de Granada.

Héraud, B. (1989). L'intégration de la compréhension de l'aire au curriculum. *Actes de la 44 Rencontre International de la CIEAEM* (pp.1-12).

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2013). *Colombia en PISA 2012, Principales resultados.* Bogotá: ICFES.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2016). *Saber 11, Resultados nacionales 2011-2014.* Bogotá: ICFES.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Matemáticas, Serie de lineamientos curriculares.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional, (2005). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Perrin-Glorian, M. J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* (tesis doctoral). Université Paris 7, París.

Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. (1948). *La geometria spontanea del bambino.* Paris: Giunti.

Popoca, M. y Acuña, C. (2008). *Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales.* México: CINVESTAV-IPN.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.).*La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

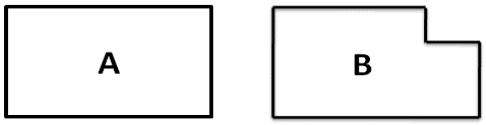
ANEXOS

Anexo 1: Instrumento de indagación

NOMBRE:_____ CURSO: _____

FECHA: _____ EDAD: _____

1. Observe las siguientes figuras:



Diga si la superficie de A es menor, igual o mayor que la superficie de B: _____

¿Por qué? _____

_____

_____

Diga si el perímetro de A es menor, igual o mayor que el perímetro de B: _____

¿Por qué? _____

_____

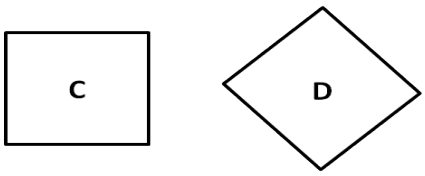
2. ¿Son iguales los perímetros de las figuras C y D?

☐ Sí ☐ No

¿Por qué? _____

_____

_____



¿Son iguales las superficies de las figuras C y D?

☐ Sí ☐ No

¿Por qué? _____

_____

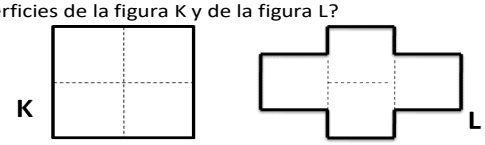
3. Si a la figura K le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las 4 piezas obtenidas formamos la figura L, ¿qué puede decir del tamaño de las superficies de la figura K y de la figura L?

Señale la opción más indicada:

☐ K tiene más superficie.

☐ L tiene más superficie.

☐ K y L tienen igual superficie.

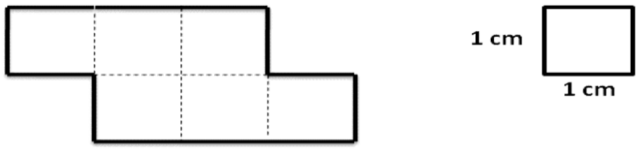


¿Por qué?

_____

_____

4. La siguiente figura está formada por cuadrados que miden un centímetro de lado:

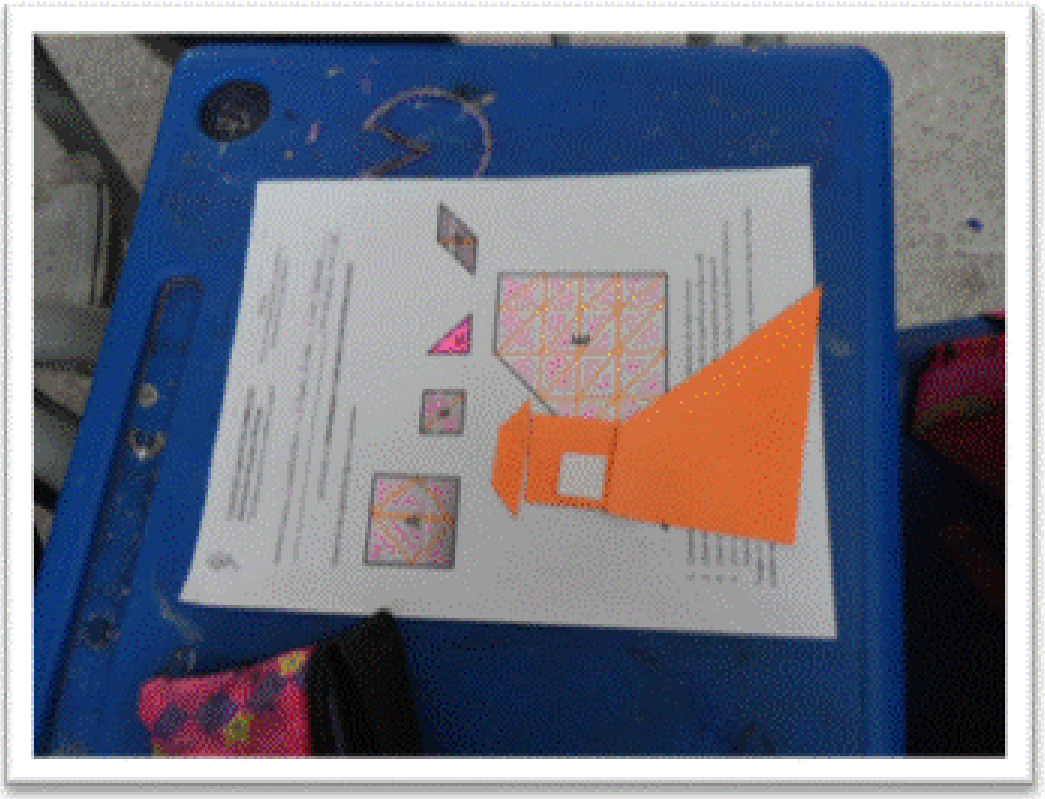


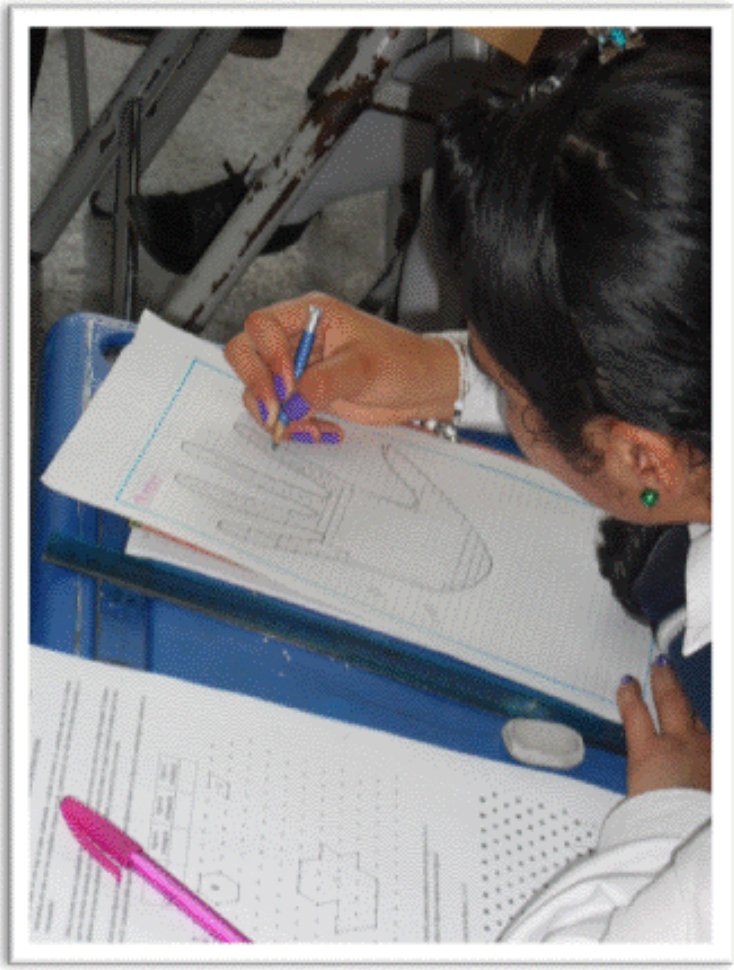
Calcule el área y el perímetro de esta figura, colocando las uniddes de medida en cada caso.

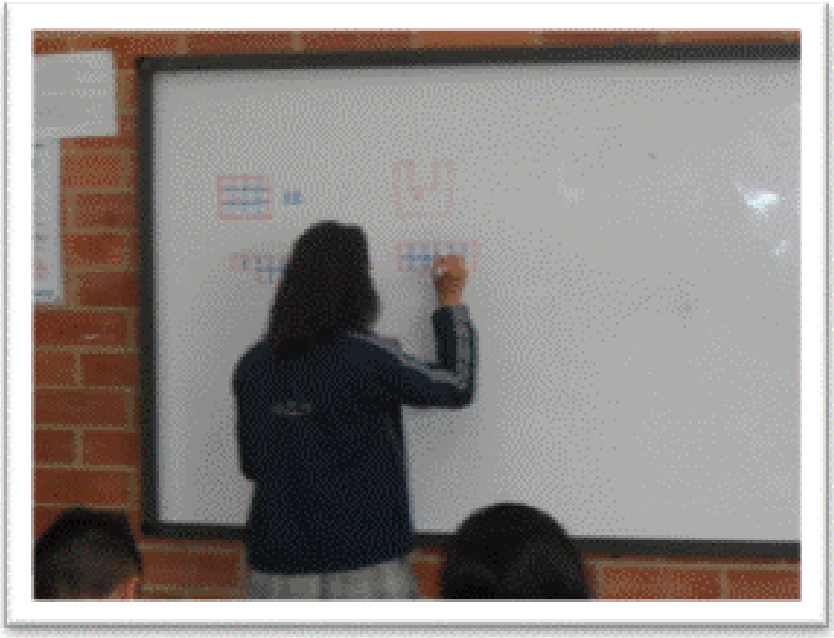
Área: _____

Perímetro:_____

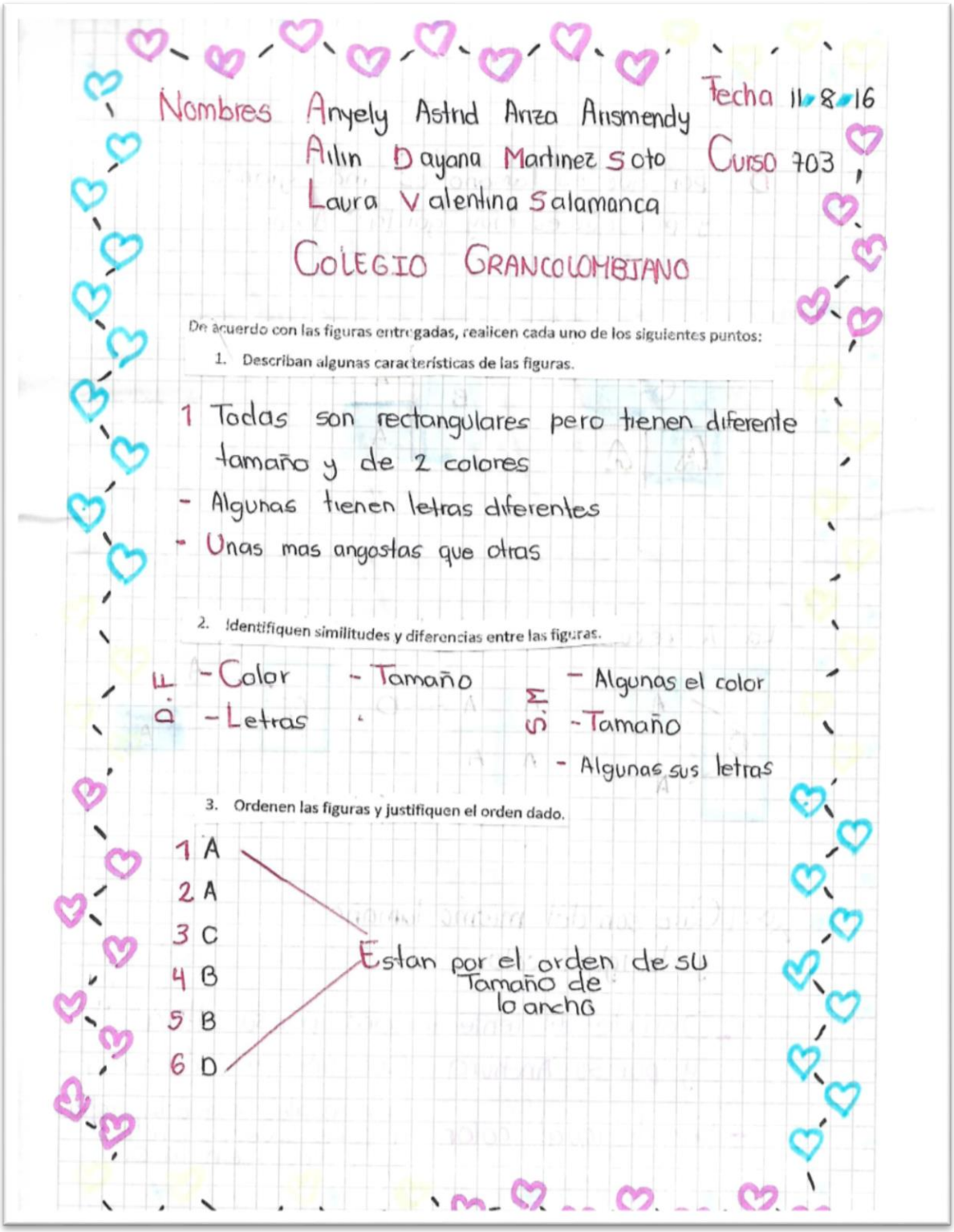
Anexo 2: Fotografías del trabajo en el aula







Anexo 3: Productos realizados por los estudiantes



Nombres Anyely Astrid Anza Arismendy
Ailin Dayana Martinez Soto
Laura Valentina Salamanca

Fecha 11-8-16
Curso 703

COLEGIO GRANCOLOMBIANO

De acuerdo con las figuras entregadas, realicen cada uno de los siguientes puntos:

1. Describan algunas características de las figuras.

1 Todas son rectangulares pero tienen diferente tamaño y de 2 colores
- Algunas tienen letras diferentes
- Unas mas angostas que otras

2. Identifiquen similitudes y diferencias entre las figuras.

DIFERENCIAS
- Color
- Letras
- Tamaño

SIMILITUDES
- Algunas el color
- Tamaño
- Algunas sus letras

3. Ordenen las figuras y justifiquen el orden dado.

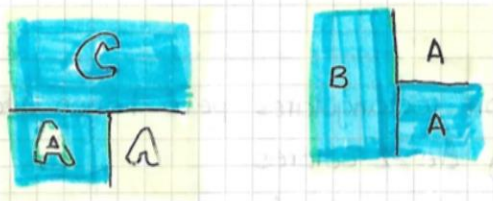
1 A
2 A
3 C
4 B
5 B
6 D

Estan por el orden de su Tamaño de lo ancho

4. ¿Cuál de las figuras tiene mayor superficie? Expliquen su respuesta

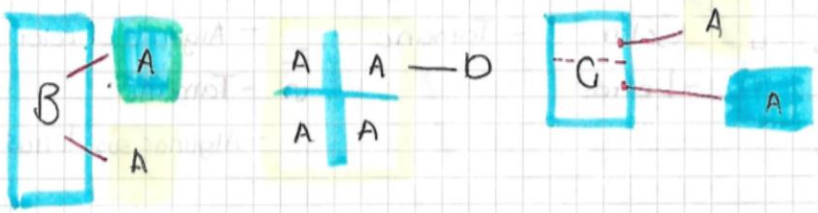
D por que su tamaño es mas grande y por que es muy gorda Ancha

5. Recubran la figura D de dos maneras diferentes.



6. ¿Con cuál de las figuras se puede recubrir completamente cada una de las demás? Expliquen su respuesta.

La A recubre a todas las fichas



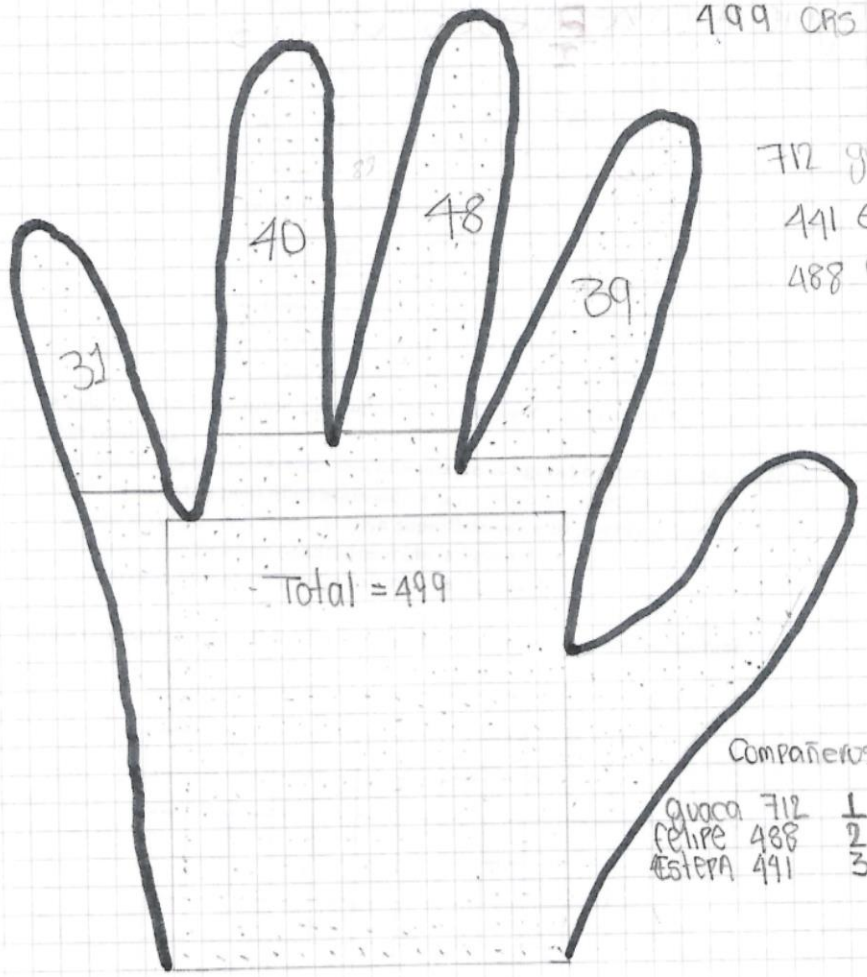
7. ¿Qué pueden concluir de las superficies de las figuras B y C?

Rta: (Que son del mismo tamaño) y de igual color

- Son de diferente tamaño por su altura y por su Anchura Que una es más ancha
- Son de igual color Son iguales x que la ficha a cabe 2veces en la b y 2 veces en la C.

Actividad

1 Mi mano



499 CRS

712 gua
441 este
488 feli

Compañeros

guaca	712	1
felipe	488	2
ESTEFA	491	3

3.

A Que relacion, en cuanto a su tamaño podemos establecer entre la figura A B y C

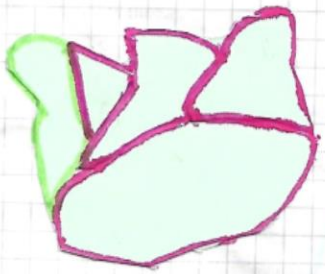
B Como le asignaríamos una medida la la figura S usando las otras figuras

A = podemos establecer que en todas las figuras caben triangulos de iguales medidas

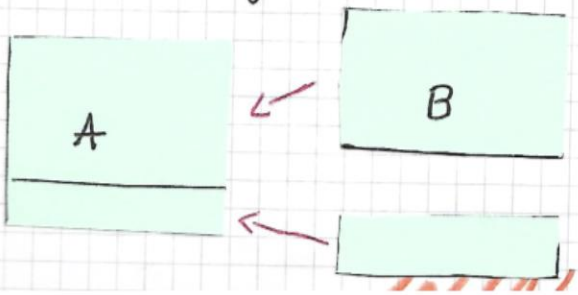
Comparando Regiones

Solución

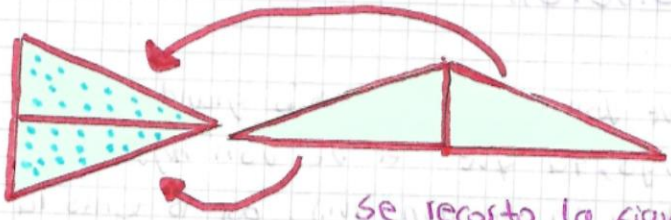
1 El corral de don luis es más grande que el de don Hugo, ya que el de don Hugo no puede recubrir la de don luis, por lo tanto la de don luis es mas grande, por que si alcanza a recubrir "la región" el corral de don Hugo.



2 Si porque la figura B es un rectangulo grande y uno pequeño si recortamos el rectangulo pequeño de el grande y se lo colocamos encima de el cuadrado "figura A" son igual de grandes.

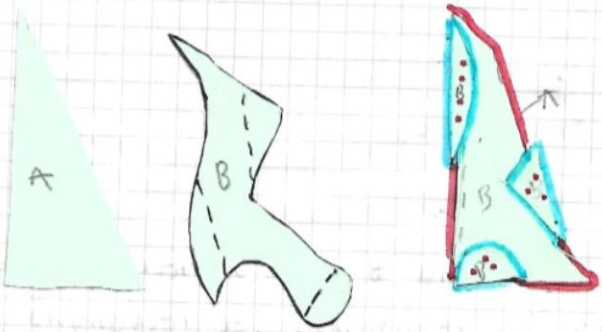


3 se requiere igual cantidad de pintura por que las 2 figuras son del mismo tamaño pero estan en orden diferente



se recorto la figura B y se se puso encima de la figura A asi se comprobo que son iguales

4 Son iguales por que si las recortamos las partes que sobran encajan en las partes faltantes.



se le quitaban las partes sobrantes y se le colocaban a las partes faltantes y las figuras son del mismo tamaño

1 la figura más es la figura B por que recortando la figura A de esta forma observamos que la figura B es la mas grande.

2 a). las figuras A y la figura B son iguales

b). que se les suma el rededor pero no hay una más grande que la otra la figura no A es más grande que la figura B. son iguales

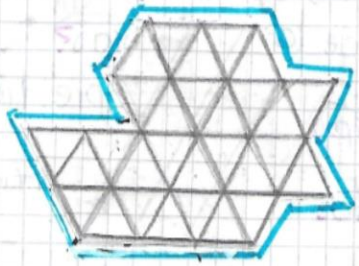
3 son iguales por que si se acomodan las figuras ambas podrian formar las dos figuras.

20 10 16

Colegio Grancolombiano I.E.D

Nombre: Dayana Nicol Ramos Cortés Curso: 703

figuras → figura A



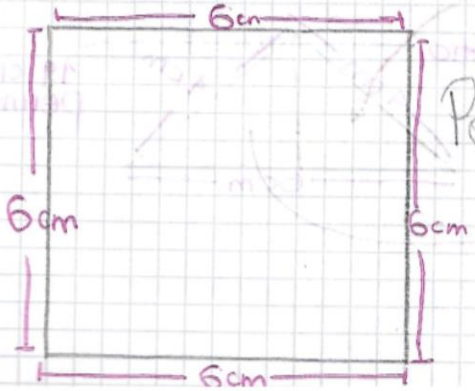
29 Figuras A

Figuras → figura B

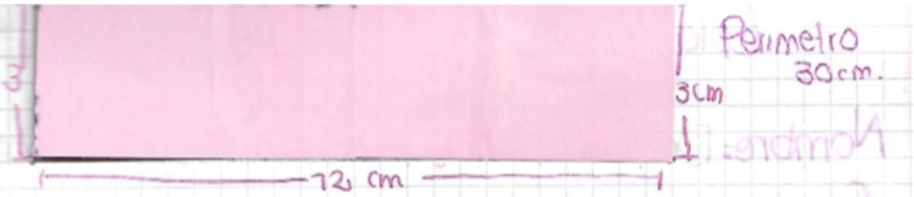
Caben 3 hexagonos pero sobran 11 triangulos de ellos forman otro hexagono y quedan 4 hexagonos y falta 1 triangulito para formar otro hexagono.

figuras → figura C

Caben 14 veces y media porque en la figura C caben 2 veces la figura 1 y si se divide da como resultado 14,5.



Perimetro → 24 cm



Perimetro
30cm.

1.¿Como son las superficies de las 2 figuras?

2.¿Como son los perimetros de las 2 figuras?

3.¿2 figuras con igual superficie siempre tienen el mismo perimetro? Explique

4.¿Encuentre otra figura con igual superficie pero con diferente perimetro.

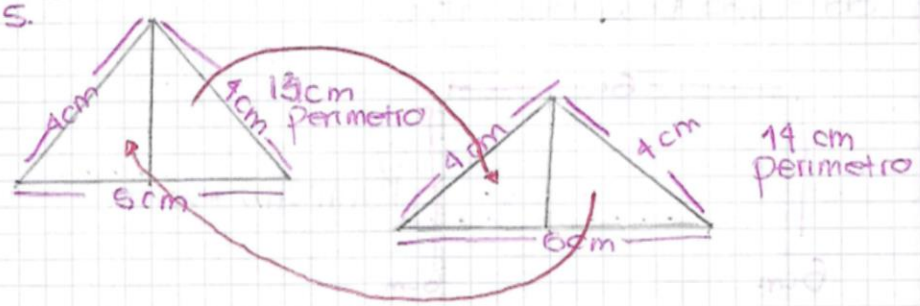
SOLUCION

1. Tienen la misma superficie porque el Rectangulo salio del cuadrado.

2. El cuadrado tiene 24cm de perimetro y el Rectangulo tiene 30 cm de perimetro de pronto al cambiar la figura aumenta la medicion.

3. no siempre porque al cambiar la figura es más probable que cambie el perimetro.

5.



COLEGIO GRANCOLOMBIANO
Institución educativa Distrital.
"Tu espacio para crecer y realizar los sueños"

P.E.G:
Hacia una comunidad incluyente, productiva y respetuosa de los derechos humanos

Nombre: Dayana Ramos cortes Fecha: 28 10 16 Curso: 703

ACTIVIDAD 9: **CALCULANDO ÁREAS Y PERÍMETROS**

Calcula el área y el perímetro de cada una de las figuras que se presentan a continuación, teniendo en cuenta que cuatro cuadritos de la cuadricula representan un centímetro cuadrado ($1cm^2$).

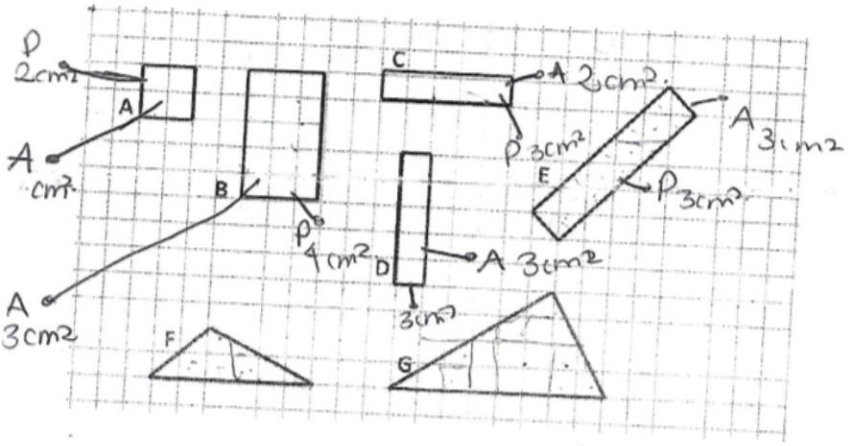
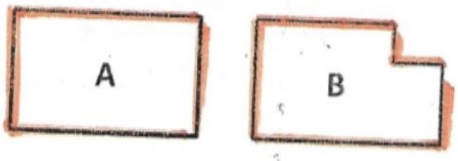


FIGURA	ÁREA (en cm^2)	PERÍMETRO EN (en cm)
A	1 cm^2	4cm
B	3 cm^2 y 3,4.	8cm
C	2,5 cm^2.	6cm
D	2,5 cm^2	6cm
E	10 cm^2	8cm.
F	5,1 cm^2.	6,5cm.
G	7,5 cm2	10 cm.

NOMBRE: Laura Valentina Salamanca CURSO: 703

FECHA: Nov-10-16 EDAD: 13

1. Observe las siguientes figuras:



Diga si la superficie de A es menor, igual o mayor que la superficie de B: Mayor

¿Por qué? por que a la figura B le ase falta una parte y esa parte ase que sea menor la superficie B.

Diga si el perímetro de A es menor, igual o mayor que el perímetro de B: igual

¿Por qué? por que si se le suman sus lados la suma de sus lados da el mismo resultado.

2. ¿Son iguales los perímetros de las figuras C y D?

☒ Sí ☐ No

¿Por qué? por que es la misma figura sino que la D esta bolteada y se be como un rombo pero son iguales.

¿Son iguales las superficies de las figuras C y D?

☒ Sí ☐ No

¿Por qué? miden igual si se le da "buelta" buelta a la figura D los dos figuras se van igual y miden igual.

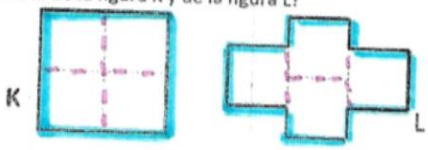
3. Si a la figura K le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las 4 piezas obtenidas formamos la figura L, ¿qué puede decir del tamaño de las superficies de la figura K y de la figura L?

Señale la opción más indicada

☐ K tiene más superficie.

☐ L tiene más superficie.

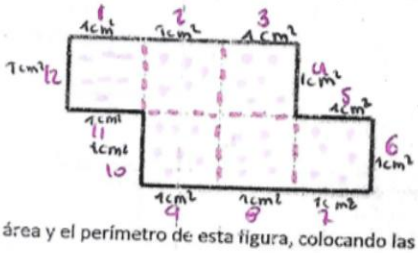
☒ K y L tienen igual superficie.

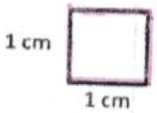


¿Por qué?

por que si organizamos nuevamente las figuras ambas tienen la misma cantidad de cuadrados lineados y ambas miden igual y si se organizan ambas forman la misma figura

4. La siguiente figura está formada por cuadrados que miden un centímetro de lado:





Calcule el área y el perímetro de esta figura, colocando las uniddes de medida en cada caso.

Area= se suman o se cuentan los cuadritos de adentro de la figura

Área: 6 cm²