ANEXOS

ANEXO 1. ACTIVIDAD: "EL VOLUMEN MÁXIMO DE UNA CAJA SIN TAPA"

En esta actividad los estudiantes tienen acceso a un archivo en CaRMetal, en donde se encuentra la construcción del modelo de la caja. Allí mismo se muestra la medida de las aristas de la caja y el valor del volumen.

Exploración previa para la familiarización con el modelo

El propósito de esta familiarización es que el estudiante explore el modelo y verifique cada una de las condiciones expuestas en el enunciado del problema. En esta exploración se le presenta al estudiante el modelo con el valor del volumen de la caja y las medidas de la base y la altura de la lámina rectangular de la que se parte para realizar la construcción, como se muestra en la figura 1.

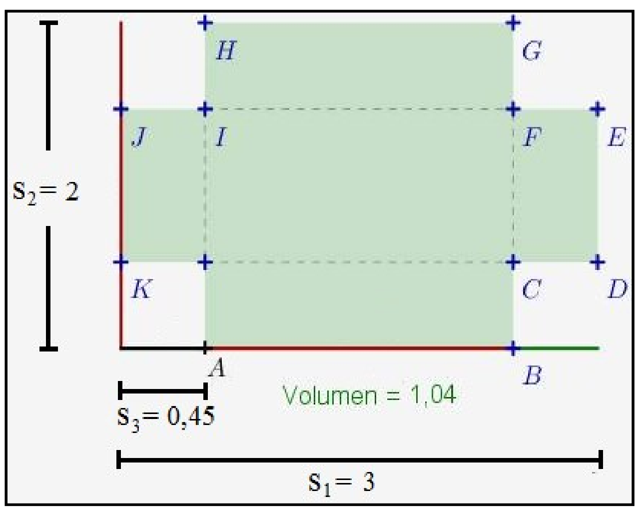


Figura 1. Medidas de la lámina rectangular.

El estudiante intenta arrastrar todos los vértices y se da cuenta que el único que tiene la posibilidad de arrastre es el vértice **A**, al arrastrar el vértice el tamaño de la caja se modifica, pero se mantiene las condiciones del problema.

Si el estudiante no relaciona el modelo con la forma de una caja, el profesor debe sugerirle que utilice una hoja de papel que cumpla las condiciones de la lámina rectangular de tres metros de largo por dos metros de ancho y que recordé un cuadrado en cada esquina y lo doble de tal manera que quede en forma de caja, reconociendo que se trata de una figura tridimensional y por lo tanto tiene un largo, ancho y alto.

Tarea 1. Encontrar el volumen máximo de la caja utilizando el modelo

Después de verificar que el modelo si corresponde con las condiciones del problema, se les pide a los estudiantes que si utilicen dicho modelo para resolver el problema. Es posible que en esta actividad el estudiante no use las estrategias perceptivas para tratar de hallar el volumen máximo de la caja, dado que en la actividad Nº1 encontró que al hacer zoom y arrastrar un vértice o aumentar la cantidad decimales en el campo de área siempre encontraba un área más grande, por lo que al aplicar dicha estrategia en esta actividad encontrará un volumen más grande. En caso de que los estudiantes a pesar de haber hecho la actividad Nº1 se queden en lo perceptivo buscando un valor máximo en el campo de volumen, el profesor debe intervenir mostrando posibles acciones para invalidar la estrategia (hacer zoom y arrastrar el vértice A y aumentar la cantidad de decimales).

Estrategias del estudiante

El estudiante intentara replicar las etapas propuesta por el profesor en la actividaddel hexágono, se espera que el estudiante haya interiorisado estas etapas y las use como estrategias para resolver el problema.

Etapa 1. Observación del movimiento de un punto P21que relacione la variación del segmento S3 y el volumen de la caja

El estudiante ha identificado una variación en el tamaño de la caja y en el volumen. Se espera que recuerde que para poder obtener en una sola vista todas esas variaciones del volumen, puede determinar un punto **P21** que represente el volumen para cada longitud deS_3.En caso que no las recuerde, el profesor debe intervenir proponiendo construir un punto que relacione la longitud de una arista de la caja con el valor del volumen.El punto

P21tiene coordenadas (x (A); E1) siendo x (A)[1] la abscisa de A que representa la longitud de $\mathbf{S_3}$ y E1 es la ordenada que representa el volumen de la caja.

Etapa 2. Utilizar la traza para observar las distintas posiciones del punto P21

Construido el punto **P21** el estudiante quien ha interiorizado las etapas propuestas por el profesor en la actividad Nº1 selecciona la traza del punto y mueve el vértice **A** obteniendo una curva como se muestra en la figura 2.

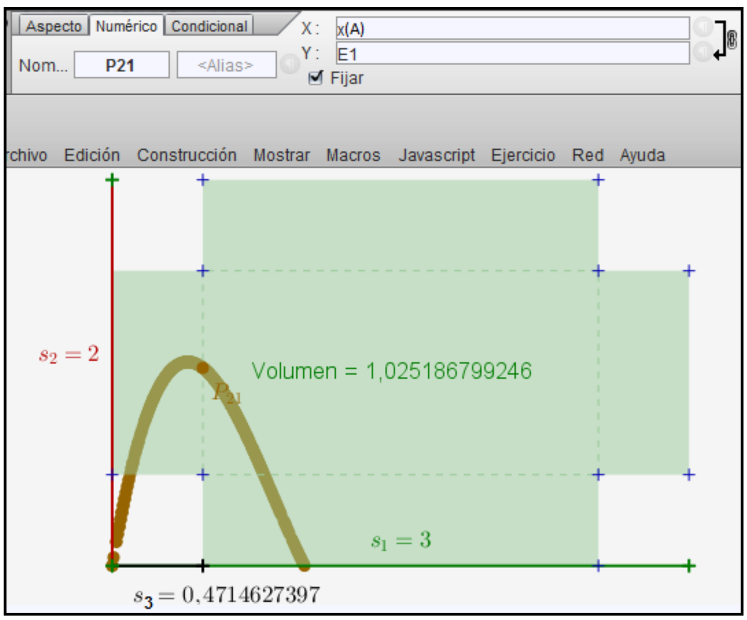


Figura 2. Traza del punto **P21** que representa la variación del volumen dela caja

Si el estudiante no recuerda como activar la traza, el profesor debe intervenir mostrando cómo usar esta herramienta. Una estrategia perceptiva que puede utilizar el estudiante es ubicar el punto **P21** en la parte más alta de la curva que describe la huella e indicar que ese es el volumen máximo de la caja; sin embargo, una retroacción del software es que al hacer zoom o al mover la construcción, la traza desaparece impidiendo verificar si éste es o no el punto máximo.

[1]Si el estudiante presente dificultad frente a la interpretación que se le da a la ordenada (x (A)), el profesor debe proponerle usar la macro ***abscisapunto***.

Por otro lado, el estudiante al observar la huella que deja el punto**P21** puede inferir que la gráfica que modela el volumen de la caja tiene forma de parábola. Si asume que la huella que deja la traza tiene dicha forma, puede notar que la traza corta en las coordenadas (0,0) y (1,0), lo que le permite calcular el punto medio entre estas dos coordenadas con el fin de aplicar la estrategia de simetría de la parábola presentada en la actividad Nº1; no obstante, al observar dicho punto medio, concluye que la curva no es simétrica como se muestra en la figura 3.

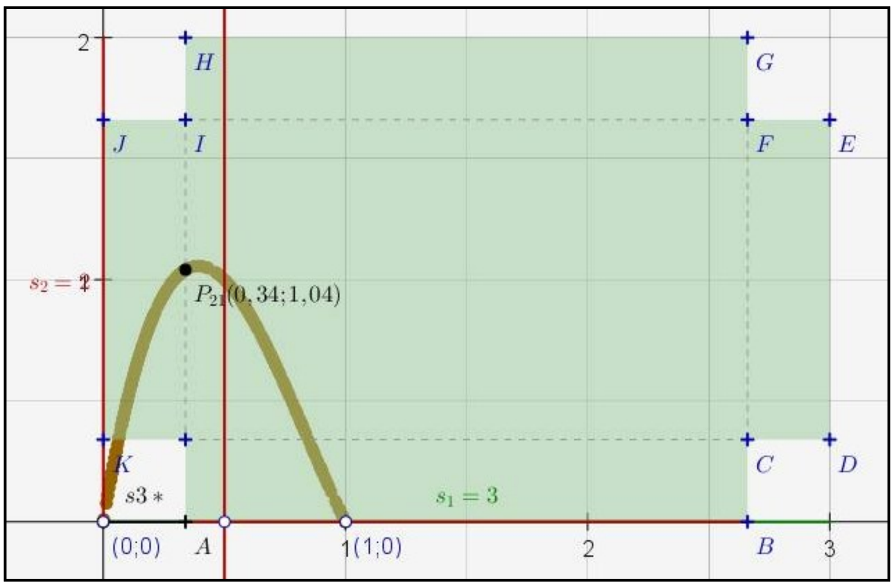


Figura 3. Invalidación de la estrategia de la simetría de la parábola

Etapa 3. Construir la gráfica de la función a partir de una ecuación

El estudiante expresa la necesidad de construir la gráfica de la función de tal manera que no desaparezca al hacer zoom o mover la construcción, entonces el profesor le propone la siguiente tarea:

Tarea 2. Determinar la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función

En esta tarea el profesor sugiere al estudiante identificar las dimensiones de la caja (largo, ancho y alto), revisando nuevamente las condiciones del problema, buscando que reconozca que $\mathbf{S_1}$ representa los 3 metros de largo y $\mathbf{S_2}$ representa los 2 metros de ancho;

por lo tanto, $\mathbf{S_3}$ representa el alto de la caja. Como el volumen de la caja se obtiene a partir del producto de sus dimensiones:

$$Largo * Ancho * Alto$$

Por lo anterior, es posible que el estudiante indique que el volumen de la caja se obtiene al multiplicar: $\mathbf{S_1 * S_2 * S_3}$

Si el estudiante realiza dicha acción, es necesario que el profesor intervenga recordándole que en la actividad Nº1 el área del hexágono se determinó a partir de una sola variable, por lo cual el volumen de la caja se debe expresar teniendo en cuenta la variación del segmento $\mathbf{S_3}$ y en su caso está utilizando tres variables.

A partir de esta observación el estudiante debe identificar que se debe restar dos veces $\mathbf{S_3}$ en la base de la lámina rectangular y dos veces en la altura, llegando a establecer la siguiente fórmula que representa el volumen de la caja cuando el segmento $\mathbf{S_3}$varía.:

$$\textbf{E1: Volumen: } [(\mathbf{3-2} * (\boldsymbol{S_3})) * (\mathbf{2-2} * (\boldsymbol{S_3}))] * \boldsymbol{S_3}$$

Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo

El profesor recuerda que es necesario establecer la expresión del volumen de la caja como una función. Si el **volumen: (3-2*(*S₃*)) *(2-2*(*S₃*)) * *S₃*** y el segmento que varía es $\mathbf{S_3}$ entonces éste se toma como la variable $\boldsymbol{x}$; es decir que la función **f1** que modela el volumen de la caja es: ***Función Volumen:*** $\boldsymbol{x[(3-2x)(2-2x)]}$

El estudiante usa la herramienta que permite graficar funciones ingresando dicha función como se muestra en la figura 4.

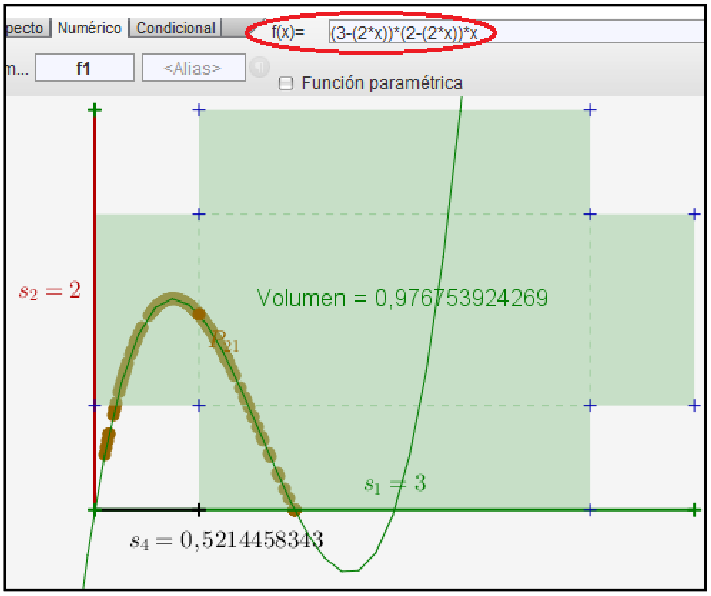


Figura 4. Gráfica de la función que modela el volumen de la caja

El estudiante puede realizar el desarrollo algebraico para confirmar que la gráfica de la función un es una cuadrática, sino una función cúbica.

$$\boldsymbol{f(x) = x[(3-2x)(2-2x)]}$$
$$\boldsymbol{f(x) = x(6-6x-4x+4x^2)}$$
$$\boldsymbol{f(x) = 6x-6x^2-4x^2+4x^3}$$
$$\boldsymbol{f(x) = 4x^3-10x^2+6x}$$

<u>Estrategia del estudiante para determinar el punto máximo utilizando la gráfica de la función.</u>

La siguiente estrategia es posible que la realice el estudiante que no haya verificado que la curva de la función que modela el problema no es simétrica (estrategia implementada con la traza en la tarea 2).

Si el estudiante no interpreta que en una función cubica no se cumple la propiedad de simetría (propiedad que si se cumple en una parábola); es posible que ubique un punto P23 como punto medio entre el punto de origen (0,0) y P22 (1,0), con el fin de trazar una recta perpendicular al eje x, por P23 que al intersectarse con la curva genere el punto más alto de ésta, para así obtener el volumen máximo de la caja.

El estudiante invalida esta estrategia al notar de manera perceptiva que la recta perpendicular al eje de las abscisas por el punto P23 no genera una simetría como en el caso de la parábola (ver figura 5).

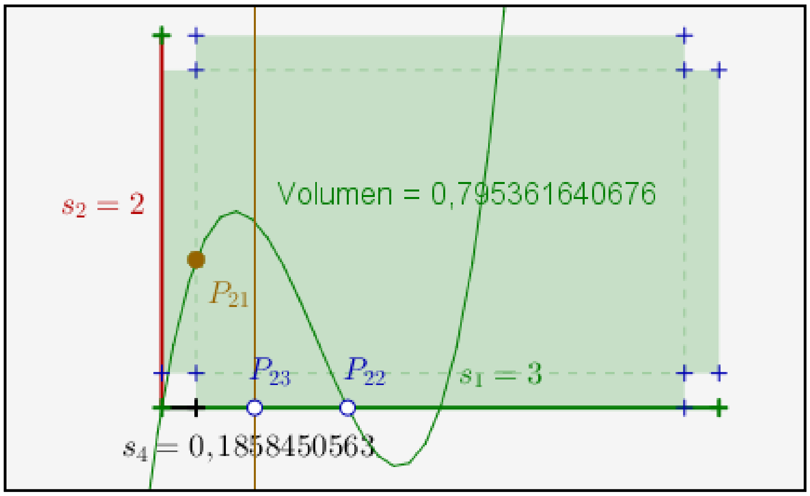


Figura 5. Estrategia de punto medio para calcular el punto máximo
de la gráfica de la función.

<u>*Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática*</u>

Si el estudiante realizo la actividad Nº2, el profesor propone tener en cuenta que "para calcular la altura máxima de una curva se debe trazar una recta que sea paralela al eje de las abscisas y toque a la curva en un solo punto".Si el estudiante resolvió el problema del hexágono sin tener en cuenta la anterior condición, el profesor le propone realizar la actividad Nº2 antes de pasar a la tarea 4.

Tarea 3.Trazar una recta tangente a la curva de la función cubica que sea paralela al eje de las abscisas.

En esta tarea se espera que el estudiante use estrategias perceptivas y las pueda validar o invalidar con las herramientas del software; con esta tarea el estudiante debe hallar el punto máximo de la gráfica de la función, teniendo en cuenta las condiciones establecidas en la actividad Nº2.

Una dificultad que puede presentar el estudiante en esta tarea, es entender la definición de recta tangente y recta secante; ya que, al intentar trazar una recta tangente a un punto de la gráfica, puede notar que ésta corta a la curva en dos puntos (ver figura 6).

Para enfrentar esta dificultad se debe explicar al estudiante que cuando se calcula la pendiente de la tangente en una curva se realiza de manera local.

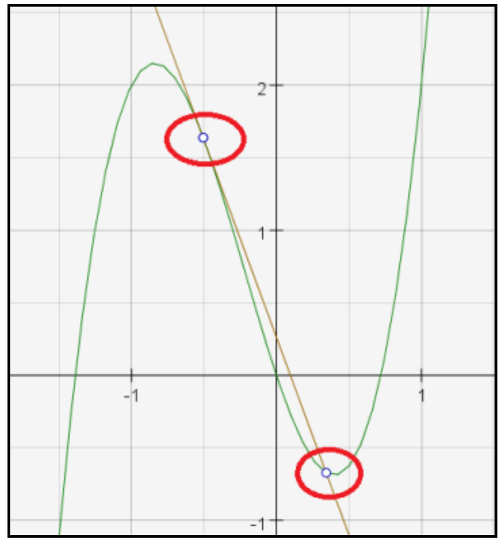


Figura 6. Recta tangente a una función cúbica

Se espera que con el trabajo realizado en la actividad Nº2, el estudiante intente determinar el punto máximo a partir de la construcción de una recta tangente a la curva y que sea paralela al eje de las abscisas.

El profesor recuerda al estudiante la estrategia de generalización que consiste en: *"calcular la tangente en todos los puntos y una vez que se tengan todas las tangentes se busca en cuales puntos esa tangente es cero"*. Sugiere al estudiante usar la macro ***TangenteCúbica*** construyendo una recta tangente a la curva que pasa por un punto **I,** y usar la macro ***PendienteRecta*** con referencia a la recta que pasa por el punto **I** obteniendo el valor de la pendiente **E3**.

Teniendo en cuenta la estrategia de generalización propuesta por el profesor, el estudiante construye un punto **A** cuya abscisa está dada por el punto **I** y cuya ordenada es la pendiente de la recta tangente. Se ha caracterizado el punto **A** con las siguientes coordenadas:

A: abscisa: x(**I**) y ordenada: **E3**.

Activando la traza de **A**, el estudiante puede observar que el *lugar geométrico* de ese punto, corresponde a una parábola, como se muestra en la figura 7.

El estudiante debe deducir que la traza del punto **A** muestra las pendientes de las rectas tangentes a la curva y recordar que la ordenada del punto **A** representa la pendiente de la recta tangente; por lo tanto, cuando la traza corta al eje ***x*** se determina el punto de la curva cuya abscisa tendrá como pendiente 0; sin embargo, la traza de un punto no permite determinar su intersección con otro objeto geométrico.

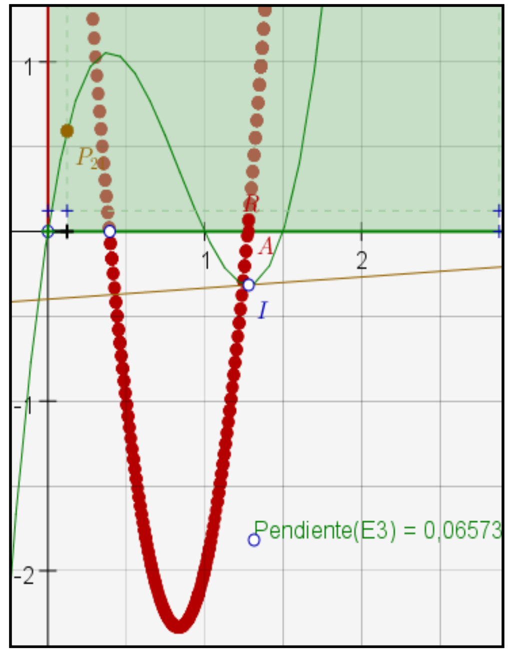


Figura 7. Generalización, pendiente de todas las tangentes a la curva

El profesor le señala al estudiante que hay una macro disponible para construir una parábola a partir de tres puntos y por lo tanto debe construir dos puntos más con las mismas características del punto **A**. De esta manera, el estudiante construye dos puntos más y determina dicho lugar geométrico; sin embargo, aún no ha resuelto el problema puesto que debe encontrar un punto donde la tangente a la gráfica de la función cúbica tenga como pendiente cero; para ello, el estudiante encuentra la intersección entre la parábola y el eje de las abscisas, pues es allí donde la pendiente es cero.

Al marcar ese punto de intersección **Z**, el estudiante utiliza la macro ***TangenteCúbica*** construyendo la recta tangente a la curva que pasa por el punto **Z** por donde la recta tangente tiene pendiente cero, es decir que dicha tangente será paralela al eje de las abscisas lo cual genera la solución al problema.

Cabe decir que en la actividad Nº2 se encontró que, para calcular la altura máxima de una curva, es necesario construir una recta tangente a la curva, que sea paralela al eje de las abscisas; es decir, que su pendiente sea igual a cero. Al hallar el punto máximo de la curva se está determinando el volumen máximo de la caja.

Para validar esta estrategia, se sugiere al estudiante usar la herramienta *Test (¿Rectas paralelas?)* aplicando a la recta tangente y al eje de las abscisas, verificando el paralelismo, como se muestra en la figura 8.

Otra forma de verificar es calculando la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **Z**, usando la macro ***PendienteRecta,*** encontrando que la pendiente de la recta es igual a cero.

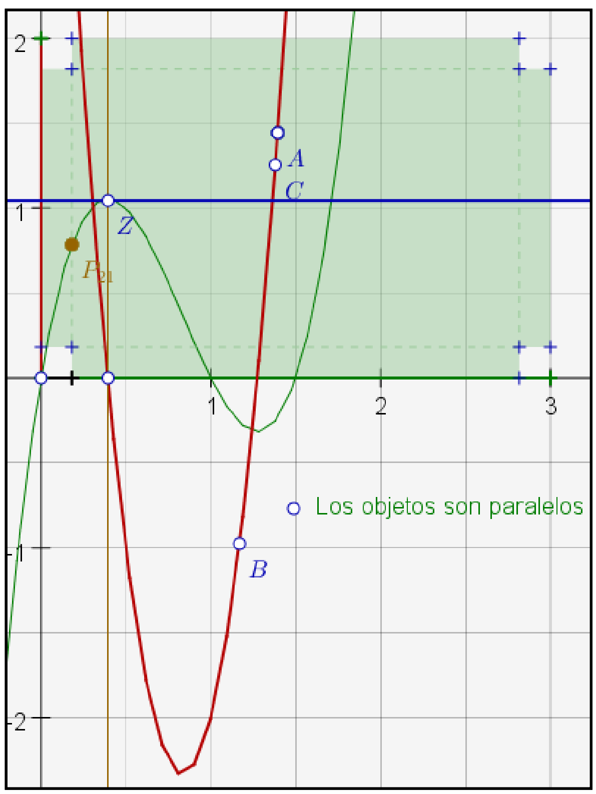


Figura 8. Punto máximo de la curva Z

Tarea 4.Construir la recta tangente a la función que modela el problema, sin usar la macro TangenteCúbica

El objetivo de esta tarea es introducir la noción de límite mostrando la imposibilidad de calcular directamente la pendiente de una recta tangente a una curva y mostrando la posibilidad de encontrar el limite usando el lugar geométrico; se propone está tarea adicional después que el estudiante ha resuelto el problema de encontrar el volumen máximo de la caja.

La presente tarea no tiene un carácter a didáctico pues el profesor debe intervenir de manera constante para que el estudiante realice ciertas acciones que le permitan llegar a la solución; no obstante, con dichas intervenciones se busca que el estudiante le dé sentido a la estrategia que el profesor le está proponiendo y no simplemente esté siguiendo instrucciones.

Se espera que el estudiante pueda construir una recta tangente a una función cúbica utilizando las herramientas del software excepto la macro ***Tangentealacurva***. En esta tarea el estudiante tiene acceso a un archivo en CaRMetal donde aparece la función cúbica $\boldsymbol{f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x}$, la cual modela el problema de la caja y un punto **T** sobre la curva.

El profesor señala el punto **T** sobre la curva y le propone al estudiante construir una recta tangente que pase por dicho punto sin usar la macro ***TangenteCúbica***, para lograr construir dicha recta tangente, sugiere al estudiante construir un punto **S** sobre la curva para trazar una recta secante a la función cúbica por los puntos **T** y **S**, y luego calcula la pendiente de la secante por medio de la macro ***PendienteRecta*** y le pregunta al estudiante ¿cómo lograr que la recta secante a la curva pase a ser una recta tangente por el punto **T**?

Se espera que el estudiante identifique que para que la recta secante que pasa por **T** y **S** sea tangente, los dos puntos tienen que coincidir; sin embargo, cuando **S** está superpuesto en **T** la recta secante desaparece y por tanto no se puede conocer la pendiente de la recta tangente por el punto **T** como se muestra en la figura 9.

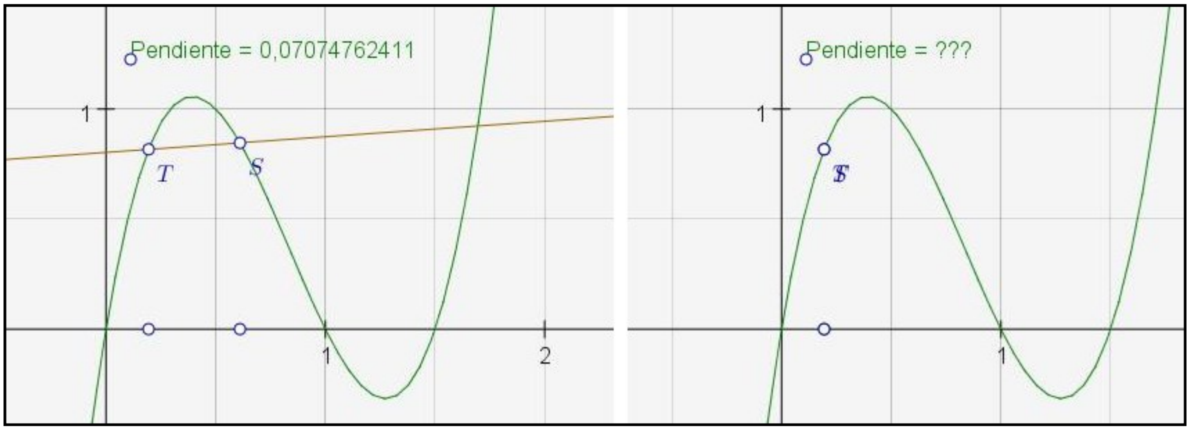


Figura 9. Calculo de la pendiente de la recta tangente a partir de la recta secante

El estudiante debe reconocer que para hallar la pendiente de una recta es necesario conocer dos puntos. En esta situación el estudiante encuentra que cuando **S** esta superpuesto en **T**, tienen las mismas coordenadas. El profesor le propone al estudiante realizar el cálculo aritmético para encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente y así poder justificar porque le software no puede generar un valor cuando **S** esta superpuesto en **T**.

Se espera que el estudiante pueda inferir que esto no funciona porque queda una indeterminación al asumir que **T** y **S** tiene las mismas coordenadas.

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y(S) - y(T)}}{\boldsymbol{x(S) - x(T)}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

Para poder avanzar en la solución del problema, el profesor propone al estudiante aplicar la estrategia de generalización donde se calcule la pendiente de todas las rectas secantes que pasen por el punto **T** y así poder encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva a partir de la construcción del lugar geométrico (pendiente de todas las rectas secantes) lo es equivalente a calcular el límite de la pendiente de todas las rectas secantes.

El profesor indica al estudiante que debe construir un punto **G** cuya posición muestre la pendiente de todas las rectas secantes que pasen por el punto **T**. Dicho punto se caracteriza por: *abscisa:* la diferencia de las abscisas de los puntos **S** y **T**, *ordenada:* la pendiente de la recta secante que pasa por el punto **T**.

Luego de construir el punto **G** y activar la traza, el estudiante observa el movimiento del punto y contesta las siguientes preguntas hechas por el profesor: ¿cómo está caracterizado el punto **G**? ¿En qué posición del punto en la traza es posible encontrar la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **T**? ¿Por qué se debe tener en cuenta la diferencia de las abscisas de los puntos **S** y **T**en la construcción del punto **G**?

Se espera que con estas preguntas y al observar la traza del punto **G**, el estudiante reconozca que cuando la posición de este punto está sobre el eje ***y*,** se halla el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **T**. Como el estudiante sabe que no se puede hacer intersección de una traza con un objeto geométrico, siente la necesidad de construir la curva que describe la huella del punto **G**.

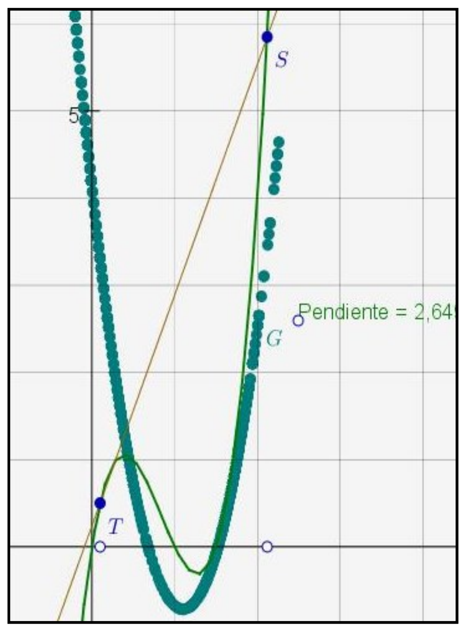


Figura 10. Huella del punto **G** que representa la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por el punto **T**

Es posible que el estudiante identifique que la huella que deja este punto tiene forma de parábola, dado que en el problema del hexágono trabajó con la gráfica de una función cuadrática (ver figura 10).

Puesto que el estudiante en la tarea 5 de la actividad Nº3, utilizo la macro ***Parábola3ptos*** para construir una parábola, se espera que nuevamente haga uso de dicha macro, construyendo dos puntos más con las mismas características del punto **G** como se muestra en la figura 11.

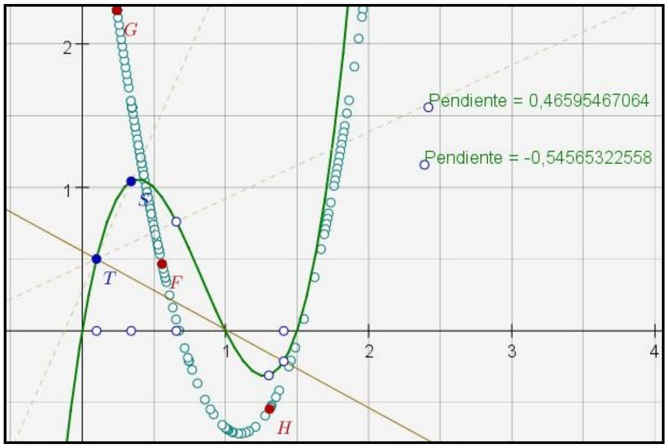


Figura 11. Puntos **H** y **F** que hacen parte de la traza del punto **G**

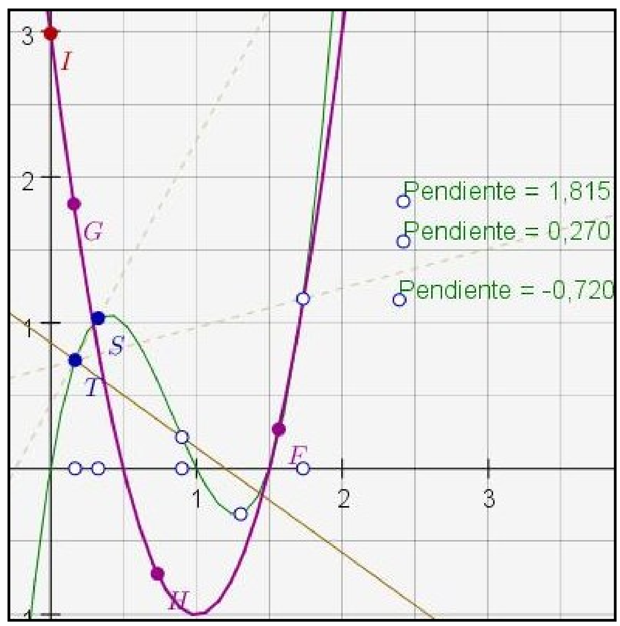


Figura 12.Parábola que pasa por los puntos **F**, **H**, **G** y se intersecta con el eje y en el punto **I**

El estudiante utiliza la macro ***Parábola3ptos*** obteniendo la gráfica de la parábola que describe la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por el punto **T.** No obstante, reconoce que al determinar el punto **I** como punto de intersección entre la parábola y el eje ***y***, se halla el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **T**a partir de la ordenada del punto **I** como se muestra en la figura 12.

Para trazar la recta tangente que pase por el punto **T** conociendo su pendiente, el profesor interviene sugiriendo al estudiante ubicar otro punto de la recta tangente teniendo como estrategia que la diferencia de las abscisas entre los dos puntos de la recta sea igual a la unidad.

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y(P10) - y(P32)}}{\boldsymbol{x(P10) - x(P32)}} = \frac{\boldsymbol{Pendiente}}{\boldsymbol{1}}$$

El estudiante debe tomar la distancia del punto de origen **(0,0)** al punto **I.** Esta distancia representa la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto fijo **T**; dicha distancia se traslada sobre el punto fijo **T** mediante la herramienta *Compás*; posteriormente se traza una perpendicular al eje $\boldsymbol{x}$ desde el punto **T** y se marca el punto de intersección **W** entre la perpendicular y la circunferencia; seguido a esto, el estudiante desde el punto **W** construye una circunferencia con radio igual a la unidad y traza una perpendicular al eje $\boldsymbol{y}$ como se muestra en la figura 13.

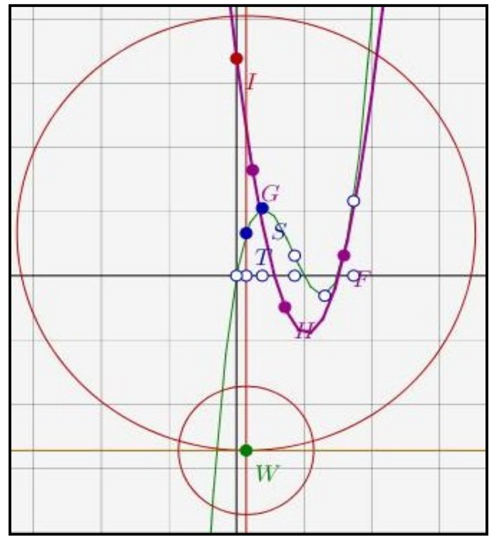


Figura 13. Traslado de la distancia de la pendiente sobre el punto fijo **T**

Se espera que el estudiante construya un punto **Z** a partir de la intersección entre la perpendicular al eje $\boldsymbol{y}$ que pasa por el punto **W** y la circunferencia de radio 1 que tiene como centro **W**. De esta manera la recta que se traza del punto **T** al punto **Z**, representa la recta tangente a la función cúbica que pasa por el punto **T**. El estudiante puede validar esta construcción con la herramienta *Intersección*, entre la gráfica de la función y la recta que pasa por los puntos **T** y **Z** y verificar mediante el zoom que el único punto de intersección con la curva es el punto **T** (ver figura 14).

Con esta actividad se espera que el estudiante concluya que al calcular la pendiente de una recta tangente a una curva a partir de la estrategia de la construcción de un lugar geométrico (pendiente de todas las rectas secantes que pasan por un punto de la curva) se encuentra que la forma de este lugar geométrico tiene un grado menor respecto a la gráfica de la función por donde se quiere calcular la pendiente de la recta tangente, que en otras palabras representa la gráfica de la derivada de la función por un punto de la curva.

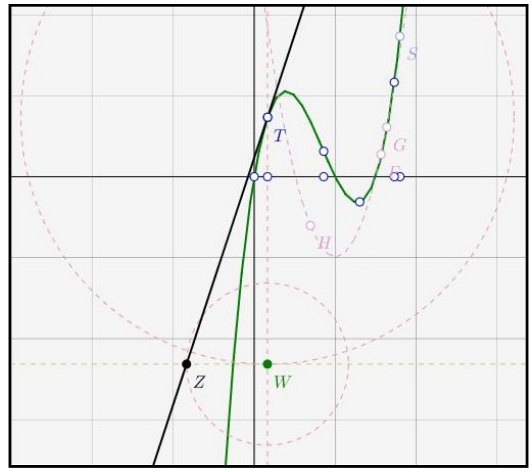


Figura 14. Recta tangente a la gráfica de una función cúbica por el punto **T**

ANEXO 2. CONSTRUCCIÓN DEL HEXÁGONO EN FORMA DE "L"

Condiciones: *"Un lado debe tener como longitud 1 metro, los dos lados adyacentes a éste deben ser uno el doble del otro y el perímetro debe ser 20 metros".*

Construcción de la simulación: Para construir el hexágono en forma de "L" se hace necesario determinar los siguientes objetos:

Ejes: Abscisas: **X axis** y Ordenadas: **Y axis**

A: Punto de intersección entre **X axis** y **Y axis**

Z: Punto con coordenadas (20,0)

S1: Segmento entre **A** y **Z** (Este segmento representa el perímetro fijo de 20 cm)

P1: Punto medio de $\overline{AZ}$

S2: Segmento entre **A**y **P1**

P2: Punto con coordenadas (1,0)

B: Punto medio entre **P1** y **P2**

Per1: Recta por **B** perpendicular a **S2**

S3: Segmento entre **A** y **B**

S4: Segmento entre **P1** y **P2**

P4: Punto medio entre **P1** y **B**

C1: Círculo de centro **B** por **P4**

C: Punto de intersección entre

Per2: Recta por **C** perpendicular a **Per1**

P3: Punto de intersección entre**Per2** y **Y axis**

C2: Círculo de centro **P3**con radio 1

D: Punto de intersección entre**Per2** y**C2**

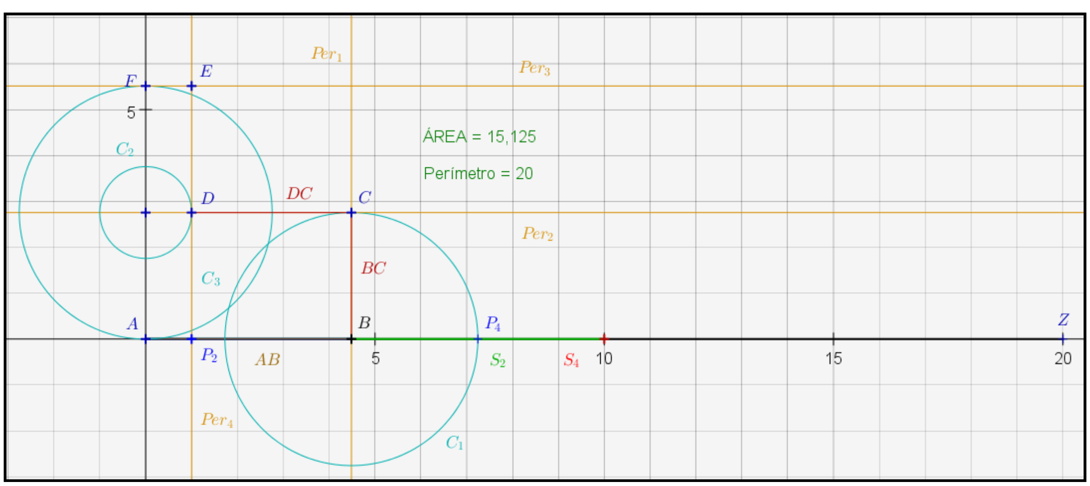
C3: Círculo de centro **P3** por **A**

F: Punto de intersección entre **Y axis** y **C3**

Per3: Recta por **F** perpendicular a **Y axis**

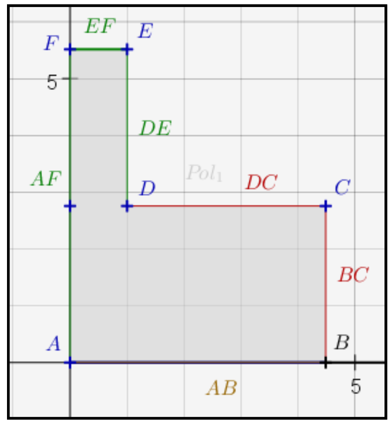
Per4: Recta por **D** perpendicular a **Per2**

E: Punto de intersección entre**Per3** y **Per4**



Pol1: Polígono determinado por los puntos

F, **E**, **D**, **C**, **B**, **A**



AB: Segmento entre **A** y **B**

BC: Segmento entre **B** y **C**

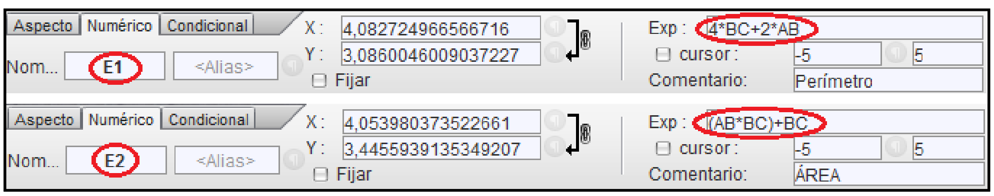
EF: Segmento entre **F** y **E**

AF: Segmento entre **F** y **A**

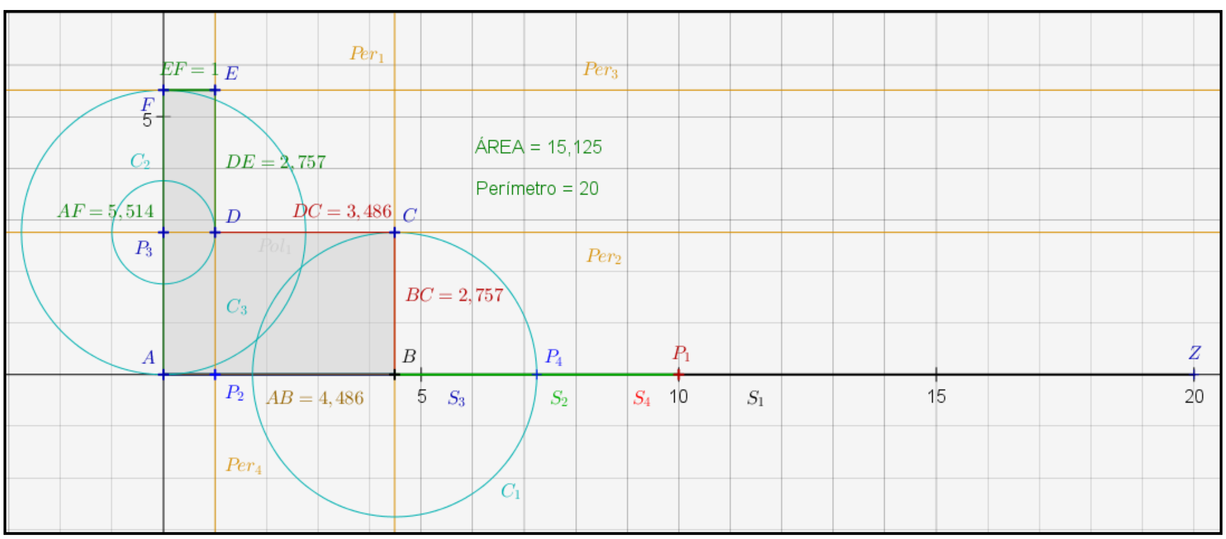
DE: Segmento entre **E** y **D**

E1: Fórmula "**4*BC+2*AB**"

E2: Fórmula "**(AB*BC)+BC**"

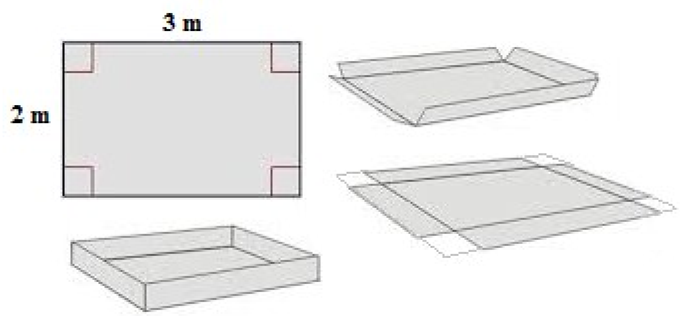


Modelo en CaRMetal del hexágono:



ANEXO 3. CONSTRUCCIÓN DE LA CAJA SIN TAPA

Condiciones: *Se parte de una lámina rectangular de tres metros de largo por dos metros de ancha. Para ello se recorta un cuadrado en cada esquina y se dobla.*



Construcción de la simulación: Se construye un segmento **S1** que represente los 3 metros (se ubica en el eje ***x***) y otro segmento **S2** que represente 2 metros en el eje ***y***. Para construir la lámina rectangular se hace necesario determinar los siguientes objetos:

Ejes: Abscisas: **Xaxis** y Ordenadas: **Yaxis**

P1: Punto que representa el largo del rectángulo 3 metros y por tanto se ubica en la coordenada (3,0)

P2: Punto con coordenadas (0,2)

S1: Segmento entre **P3** y **P1**

S2: Segmento entre **P3** y **P2**

Posteriormente se realiza se construyen los cuadrados que se ubican en las esquinas utilizando circunferencias y a partir de rectas perpendiculares y rectas paralelas se construye el rectángulo que representará el molde de la caja sin tapa. Para tal fin, se determinan los siguientes objetos:

P4: Punto medio entre **P2** y **P3**

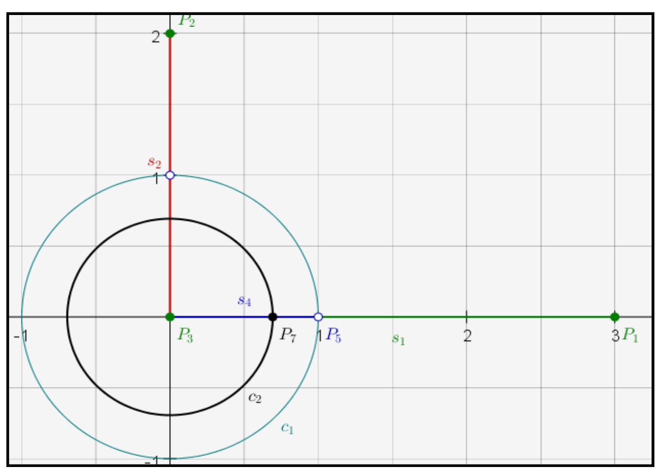
C1: Círculo de centro **P3** por **P7**

S3: Segmento entre **P3** y **P5**

P7: Punto sobre **S4**

C2: Círculo de centro **P3** por **P7**

S4: Segmento entre **P3** y **P7** (este segmento representa el alto de la caja)



P8: Intersección entre **S2** y **C2**

Per 1: Recta por **P7** perpendicular a **S4**

Par 1: Recta por **P2** paralela a **S1**

Per 2: Recta por **P1** perpendicular a **S1**

P10: Intersección entre **par1** y **per 2**

Par 2: Recta por **P8** paralela a **S1**

P11: Intersección entre **par 1** y **per2**

C3: Círculo de centro **P1** por **P11**

P12: Intersección entre **S1** y **C3**

Par 4: Recta por **P12** paralela a **per 2**

P13: Intersección entre **par 1** y **par 4**

C4: Círculo de centro **P10** por **P13**

P14: Intersección entre **per 2** y **C4**

Per3: Por **P14** perpendicular a **per 2**

P15: Intersección entre **par 4** y **per 3**

P16: Intersección entre **par 2** y **par 4**

P17: Intersección entre **per 1** y **per 3**

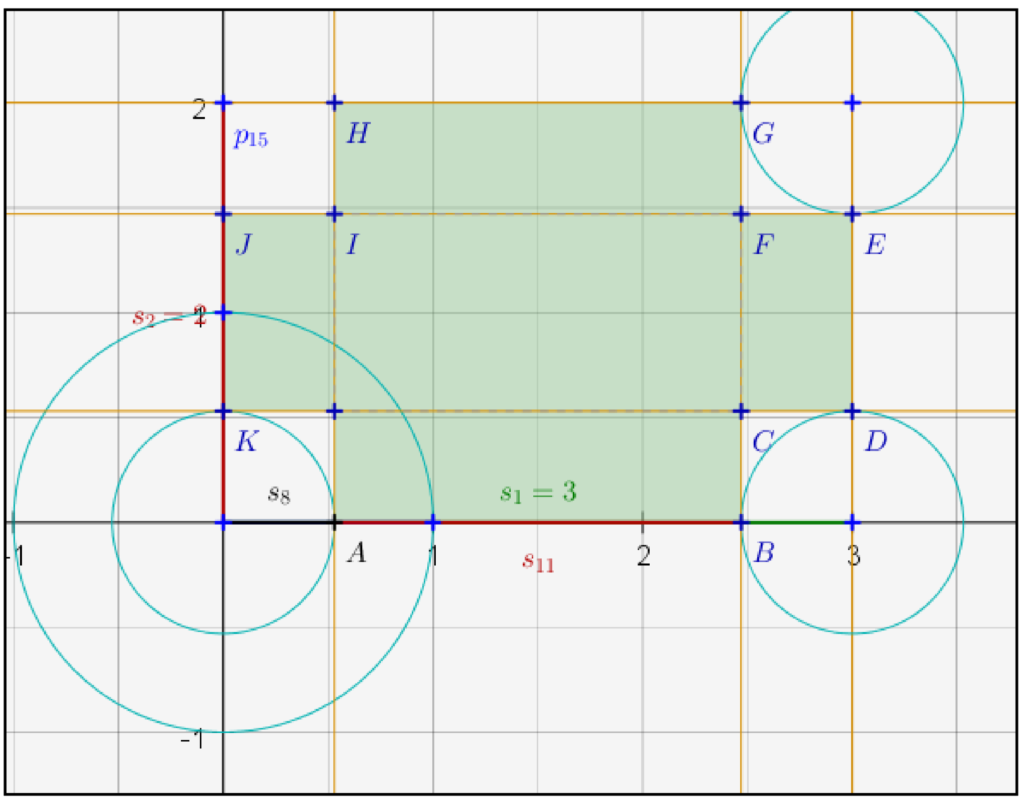
P18: Intersección entre **per 1** y **par 1**

P19: Intersección entre **per 1** y **par 2**

Pol 1: Polígono que representa en molde de la caja sin tapa

P20: Intersección entre **Yaxis** y **per 3**

Finalmente, los puntos se cambian por letras como se muestra en la siguiente imagen:

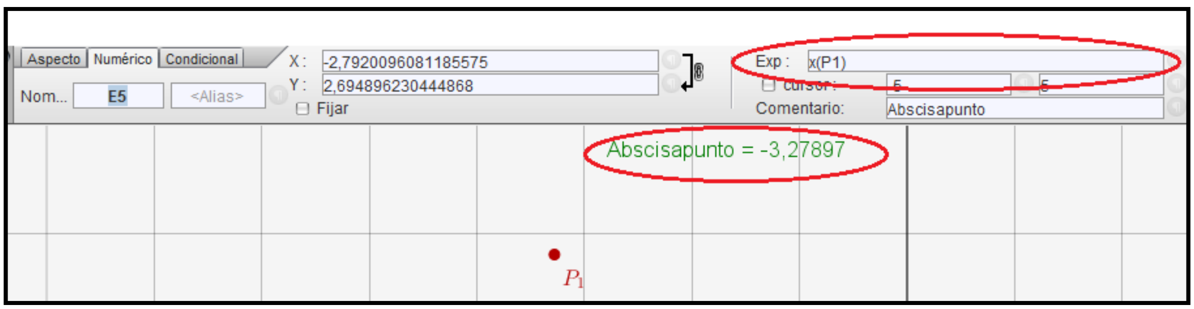


ANEXO 4. MACROS

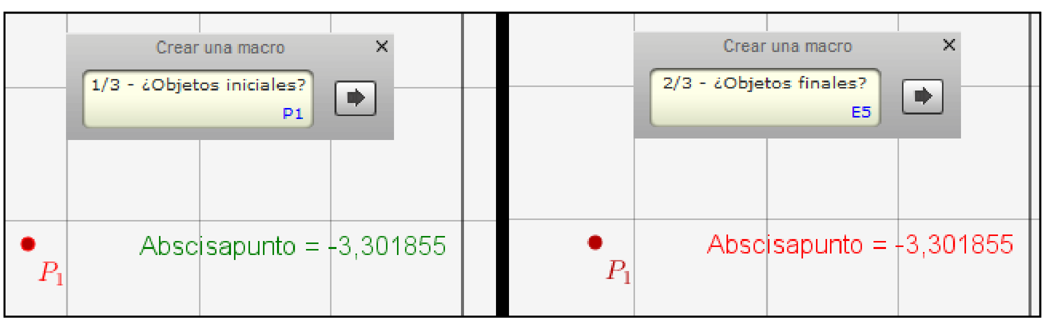
Abscisapunto: Permite conocer la abscisa de un punto sobre el plano. Esta macro es construida si el estudiante llega a presentar como dificultad reconocer en la escritura del software que *x(P1)* se está considerando como el valor de la abscisa del punto P1.

Paso 1: Ubicar un punto P1 sobre el plano

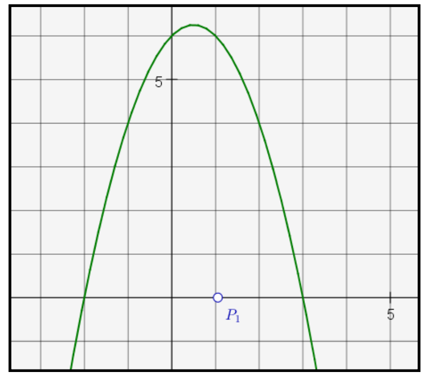
Paso 2: Con la herramienta *Fórmula* se muestra el valor de la abscisa del punto P1.



Paso 3: Seleccionar la herramienta *Macro* y colocar como objetos iniciales el punto P1 y como objetos finales el texto llamado Abscisapunto que se da a partir de la herramienta *Fórmula.*

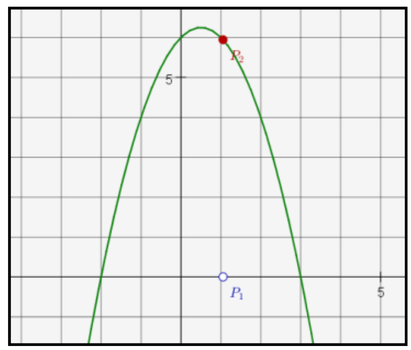


Puntosobrelacurva: Permite construir un punto sobre una curva dada. Esta macro se construye ya que al colocar un punto de manera directa con las herramientas del software se da de manera aproximada.



Paso 1: Dada una curva, ubicar un punto **P1** sobre el eje de las abscisas.

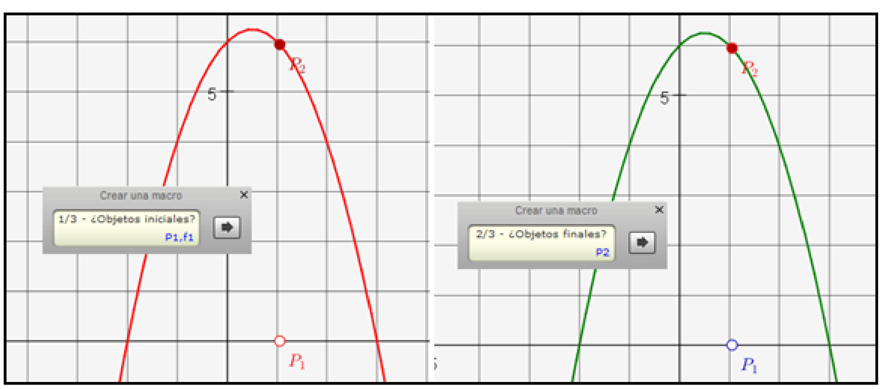
Paso 2: Construir un punto **P2** con abscisa del punto **P1** y con ordenada igual a la imagen del punto **P2** en la gráfica de la función dada.



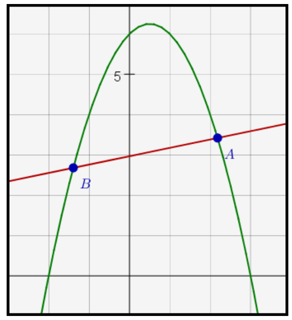
Abscisa: x(P1)

Ordenada: f1(x(P1))

Paso 3: Seleccionar la herramienta *Macro* y colocar como objetos iniciales el punto **P1** y la gráfica de la función **f1** y como objetos finales el punto **P2** que representa la imagen del punto **P1** en la gráfica de la curva.

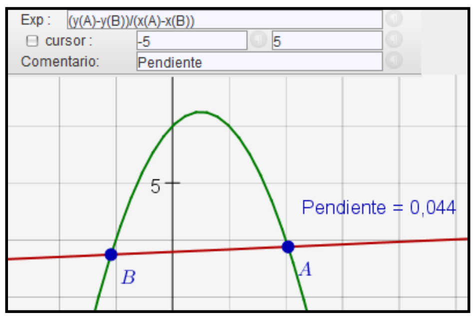


PendienteRecta: Permite conocer la pendiente de una recta a partir de un punto dado que pasa por dicha recta. Esta macro se construye para validar o invalidar las estrategias propuestas por el estudiante y/o el profesor en la resolución de los problemas.

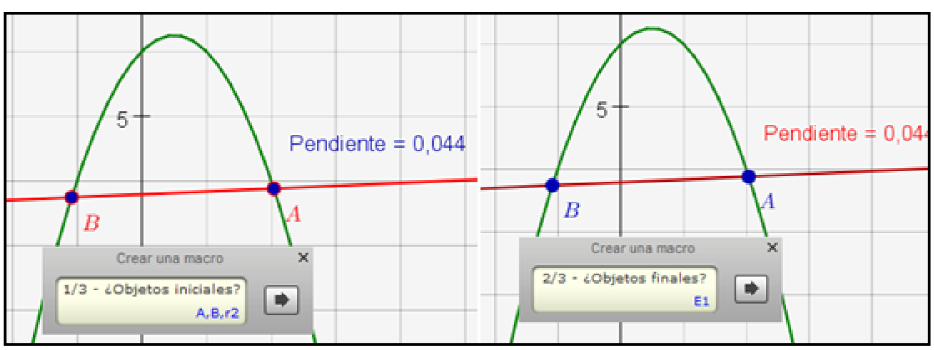


Paso 1: Dada la gráfica de una función f1, trazar una recta por los puntos A y B.

Paso 2: Con la herramienta *Fórmula*s se calcula la pendiente de la recta AB

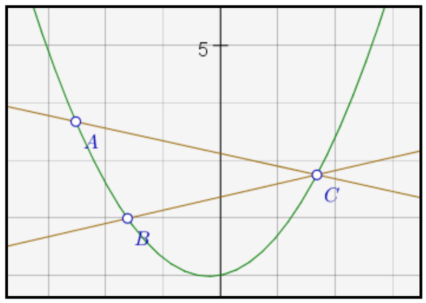


Paso 3: Seleccionar la herramienta *Macro* y colocar como objetos iniciales los puntos A, B y la recta r2 y como objetos finales el texto llamado *Pendiente* que se da a partir de la herramienta *Fórmula.*



Tangentealacurva / TangenteCúbica*[2]*: Dada la gráfica de la función y un punto sobre el eje ***x***, crea la tangente a la curva en el punto de abscisa dada.

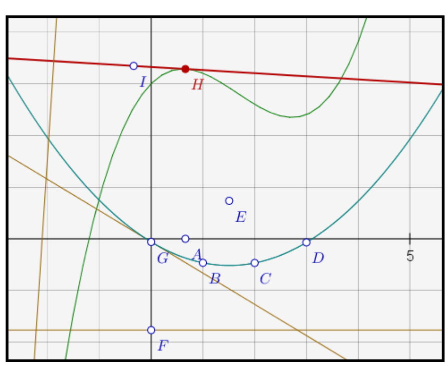
Paso 1: Dada la gráfica de una función f1, trazar una recta por los puntos A-C Y C-B

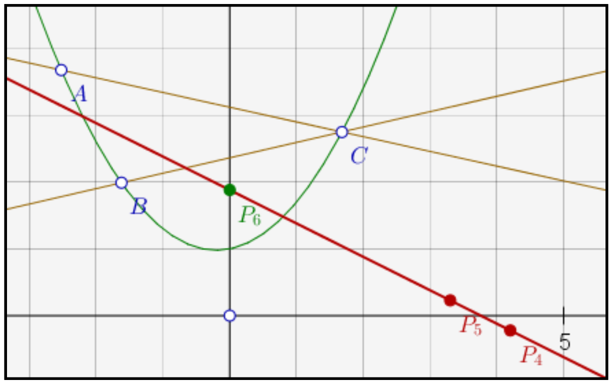


Paso 2: Con la herramienta *Fórmula*s se calcula la pendiente de la recta AC y BC. Posterior a ello se determinan dos punto que tenga como coordenadas: Punto P4 (diferencia de las abscisas de los puntos A y C; y como ordenada la pendiente de la recta AC). Punto P5 (diferencia de las abscisas de los puntos B y C; y como ordenada la pendiente de la recta BC).

La recta P4P5 muestra la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por C. La intersección de la recta P4P5 con el eje *y*, determina la pendiente de la recta tangente que pasa por C.

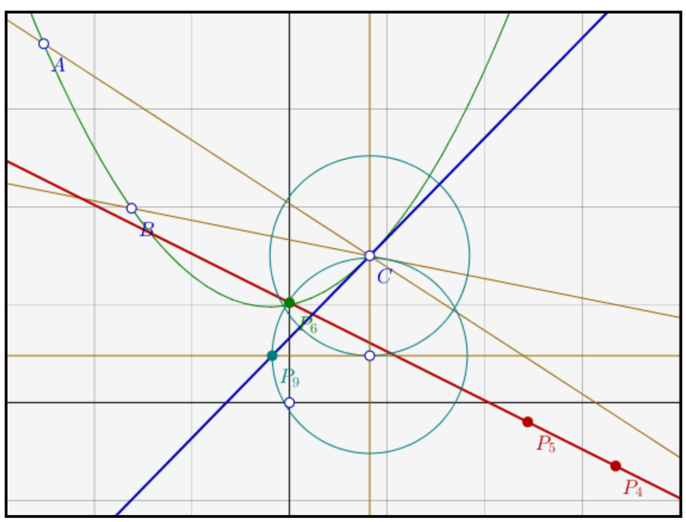
[2] Para construir la Macro ***TangenteCúbica*** se realizan los mismos pasos que en la macro ***Tangentealacurva****;* no obstante, a diferencia de la función cuadrática es necesario que en el paso 1; trazar tres rectas secantes a la curva que pasen por un punto dado. Y en el paso 2; el lugar geométrico que representa la pendiente de todas las rectas secantes es una parábola por tal motivo es necesario usar la macro ***Parabola3ptos.***





Paso 3: Teniendo la pendiente de la recta (Ordenada del punto P6) y un punto (C) de ésta, se construye la recta tangente a la curva teniendo como estrategia determinar un segundo punto de la recta tangente que tenga como pendiente la ordenada del punto P6. Para trazar la recta tangente que pase por el punto C conociendo su pendiente, el profesor interviene sugiriendo al estudiante ubicar otro punto de la recta tangente teniendo como estrategia que la diferencia de las abscisas entre los dos puntos de la recta sea igual a la unidad.

$$\boldsymbol{Pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Pendiente}{1}}$$



Paso 4: Seleccionar la herramienta *Macro* y colocar como objetos iniciales el punto C y la grafica de la función y como objetos finales la recta tangente a la curva que pasa por el punto C y el punto de intersección de la recta tangente con el eje *y*.

Parabola3ptos: Crea una función cuadrática que pasa por los tres puntos dados.

Para su construcción fue necesario hacer un sistema de solución de ecuaciones de 3x3 por medio de la herramienta *fórmula,* en donde se registro una división de determinantes con el fin de obtener la ecuación de la parábola.