



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

# Algunos elementos de las dinámicas tipo Lorenz

Omar Eduardo Hernández López

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Matemáticas, Facultad de Ciencia y Educación  
Bogotá, Colombia  
2020

# ALGUNOS ELEMENTOS DE LAS DINÁMICAS TIPO LORENZ

Omar Eduardo Hernández López

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:  
**Matemático**

Director:  
Carlos Orlando Ochoa Castillo

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas  
Facultad de Ciencia y Educación  
Bogotá, Colombia



”Las matemáticas puras son, en su forma,  
la poesía de las ideas lógicas.”  
**Albert Einstein**

# Introducción

A mediados del siglo XX, con el fin de poder modelar el comportamiento del clima Edward Lorenz diseñó un modelo a partir de ecuaciones diferenciales, las cuales presentan un comportamiento caótico dando así origen a la conocida mariposa de Lorenz (o atractor extraño de Lorenz), con la introducción de este sistema se origina toda una nueva teoría acerca del caos, volviéndose este sistema un objeto de bastante estudio no solo en la matemática sino en diferentes campos de la ciencia como lo es la biología, física o economía y presentando así a través del tiempo diferentes investigaciones con modelos parecidos al de Lorenz.

Con el fin de adentrarnos en este tema, el objetivo de este trabajo es ver la teoría básica que se necesitara para poder comprender el comportamiento del sistema de Lorenz, así como un sistema de mayor dimensión que se deriva de este, pasando así por lo temas como estabilidad, bifurcación, la relación entre los exponentes de Lyapunov y el comportamiento de un sistema.

De igual , se tratara de ver desde la parte teórica que a pesar del comportamiento caótico que trae consigo el sistema de Lorenz, es posible crear cotas dentro de su espacio fase gracias a la implementación de las funciones de Lyapunov.

# Indice de figuras

2.1. Bifurcación de horca . . . . .	14
2.2. campo vectorial del sistema . . . . .	15
3.1. Atractor de Lorenz . . . . .	19
3.2. Atractores caóticos del sistema en tres dimensiones .	24

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>V</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1.</b>	<b>8</b>
1.1. Justificación . . . . .	8
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	8
1.3. Objetivos . . . . .	8
1.3.1. Objetivo General . . . . .	8
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	8
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Sistemas dinámicos . . . . .	9
2.2. Estabilidad . . . . .	11
2.3. Sistemas conservativos y disipativos . . . . .	12
2.4. Bifurcación . . . . .	13
2.4.1. Bifurcación de horquilla . . . . .	13
2.5. Exponentes de Lyapunov . . . . .	15
<b>3. El hipercaos en el sistema de Lorenz 4D</b>	<b>18</b>
3.1. Introducción a los sistemas de Lorenz . . . . .	18
3.2. Propiedades del sistema de Lorenz . . . . .	19
3.3. Conjuntos límites de los sistemas caóticos . . . . .	21
3.4. Variantes del sistema de Lorenz . . . . .	22
3.4.1. Conjuntos límites . . . . .	25
<b>4. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>30</b>

# Capítulo 1

## 1.1. Justificación

En 1963 *Edward Lorenz*, introdujo un sistema dinámico determinista no lineal, derivado de las ecuaciones producidas por la dinámica de la atmósfera terrestre.

Sin embargo, este sistema presenta diferentes comportamientos dependiendo de sus parámetros, lo que le generó el nombre de atractor extraño de Lorenz, es así que al introducir una nueva variable a este sistema, el comportamiento se hace impredecible con lo que se hace necesario el buscar una acotación del sistema.

## 1.2. Planteamiento del problema

¿Es posible acotar un sistema hipercaótico cuando este posee diferentes atractores?

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General

Estudiar el artículo *On the dynamics of new 4D Lorenz-type chaos systems*.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Estudiar la relación existente entre los exponentes de Lyapunov y los sistemas dinámicos.
2. Mostrar el comportamiento del sistema de Lorenz 4D en cada uno de sus subespacios.
3. Identificar las cotas de los atractores caóticos en los sistemas.



## Capítulo 2

# Preliminares

A continuación se introducirán los temas necesarios para el desarrollo de la idea central.

### 2.1. Sistemas dinámicos

**Definición 2.1.1** *Un **sistema dinámico** (ver[8]), es la forma de describir el paso en el tiempo de todos los puntos de un espacio dado  $S$ .*

El espacio  $S$  puede ser el conjunto de estados de algún sistema físico, y podría estar en un espacio euclidiano o en algún subconjunto abierto de un espacio euclidiano o en algún otro espacio como en una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Dada una posición inicial  $X$  en  $\mathbb{R}$ , y un sistema dinámico de  $\mathbb{R}$  se puede decir donde está ubicado  $X$  a través de las unidades del tiempo (con la medida en los enteros o reales), estas nuevas posiciones son denotadas por  $X_1, X_2, X_3, \dots$  los cuales describen una **trayectoria**.

Ahora bien si la medida del tiempo tiene valores enteros se dice que el sistema es un sistema dinámico **discreto**, un ejemplo bastante simple es la composición de una función con ella misma una y otra vez. Si la medida del tiempo es continua se dice entonces que el sistema dinámico es **y** representaremos el tiempo por la variable  $t$ . De esta forma es común representar los sistemas dinámicos continuos con ecuaciones diferenciales, mientras que los sistemas dinámicos discretos son normalmente representados por ecuaciones en diferencia. De esta manera los sistemas dinámicos continuos pueden ser representados de la siguiente manera,

$$x'(t) = \phi(x, t)$$

más conocida como flujo, y la cual se define como sigue.

**Definición 2.1.2** *Un flujo en  $\mathbb{R}^n$  (ver[2]), es una función continuamente diferenciable  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(x, t)$  es denotada por  $\phi_t(x)$  y satisface*

1.  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la función identidad.
2. La composición es  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  para cada  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Es así, como se puede imaginar el flujo de un sistema en  $\mathbb{R}$  por medio de la línea real y denotado por **flujo de fase**, y donde la línea real se le llama **línea de fase**(ver[2]), y en el caso de iniciar desde un punto inicial  $x_0$  se le conoce como **punto de fase**, de igual manera, para un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^n$  con condiciones iniciales puede ser visto como una curva continua dentro de su **espacio de fase**.

Otra forma de definir un sistema dinámico continuo es por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales de tamaño  $n$  y relacionadas como sigue

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde las  $f_i$  son funciones a valor real, y a menos que se haga otra especificación, se asume que  $f_i \in C^\infty$ , con lo cual las derivadas parciales de todos los órdenes de  $f_i$  existen y son continuas; para simplificar, se usa la notación vectorial, así,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

permitiendo que el sistema pueda ser escrito de la forma

$$X' = F(t, X)$$

donde

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es **autónomo** cuando las funciones  $f_j$  son independientes de  $t$ , como es el caso de

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x - \beta xy \\y' &= \gamma y + \delta xy\end{aligned}$$

conocido como el modelo de depredador presa de Lotka-Volterra. De igual manera, se dice que el sistema es **no autónomo** cuando tiene una explícita dependencia del tiempo como lo es el sistema

$$x'' + \alpha x' + \beta x = f \cos(\omega t).$$

A partir de este punto, el trabajo se enfoca en ecuaciones autónomas.

**Definición 2.1.3** *Sea  $\mathbb{S}$  un subespacio de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  es un **subespacio invariante** con respecto a una transformación lineal  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  si para todo  $s \in \mathbb{S}$  se tiene que  $T(s) \in \mathbb{S}$ .*

## 2.2. Estabilidad

El estudio del equilibrio y la estabilidad es esencial en las ecuaciones diferenciales ordinarias; con el objetivo de aclarar este tema, se da la siguiente definición,

**Definición 2.2.1** *Se dice que un sistema dinámico  $F(x)$  tiene un punto de equilibrio denotado por  $x^*$ , si se cumple que  $F(x^*) = 0$ .*

Sin embargo un punto de equilibrio debe cumplir ciertos criterios de estabilidad, con lo cual se ve la necesidad presentar los conceptos que vienen.

**Definición 2.2.2** *Un equilibrio se dice **estable**(ver[9]), si todas las soluciones cercanas a un punto de equilibrio de un sistema, permanecen en una vecindad alrededor de este punto bajo el comportamiento del sistema dinámico.*

De forma mas precisa, un punto de equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}^n$  es estable si para toda vecindad  $\mathcal{O}$  de  $x^*$  existe una vecindad  $\mathcal{O}_1$  de  $x^*$  en  $\mathcal{O}$ , tal que toda solución  $X(t)$  con  $x(0) = x_0$  (conocido como valores iniciales del sistema) que está definida en  $\mathcal{O}_1$  permanece en  $\mathcal{O}$ .

**Definición 2.2.3** *Un punto de equilibrio es **asintóticamente estable** si además de cumplir las propiedades de estabilidad se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

Un punto de equilibrio  $x^*$  que no es estable recibe el nombre de inestable, de igual manera, un punto de equilibrio que solo cumple la condición  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0)$  se dice que es cuasi-asintóticamente estable.

Así el estudio de la estabilidad se vuelve indispensable en el estudio de los sistemas dinámicos, pues la estabilidad puede ser local o global; una herramienta bastante útil para el estudio de la estabilidad global de un equilibrio son las **funciones de Lyapunov**, las cuales son aplicadas ocasionalmente en diferentes contextos, como lo puede ser el conjunto límite de un sistema dinámico, se da entonces su definición

**Definición 2.2.4** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales  $F(t, x)$  y sea  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable para alguna vecindad  $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x^*$ , se dice que es una **función de Lyapunov** si cumple

1.  $V(x^*) = 0$ ,
2.  $V(x) > 0$  si  $x \neq x^*$ ,
3.  $V(x) \circ F(t, x) \leq V(x)$ .

Además se tiene las siguientes condiciones

$V'(x) \leq 0$  en  $W - x^*$  entonces  $x^*$  es estable.

$V'(x) < 0$  en  $W - x^*$  entonces  $x^*$  es asintóticamente estable.

### 2.3. Sistemas conservativos y disipativos

Los sistemas dinámicos tienden a poseer diferentes naturalezas relacionadas con la expansión de su volumen de fase, donde una de las clases más importantes son los sistemas disipativos, así bien, un sistema es **disipativo** (ver [2]) si la divergencia del campo vectorial del sistema  $\nabla F$  es negativo, lo que indica que el volumen de fase ocupado por el sistema gradualmente irá disminuyendo a través del flujo.

De igual manera, un sistema se dice **conservativo** si la divergencia es igual a 0, lo que indica que el volumen de fase es constante a través del flujo, y en el caso que la diferencia sea mayor a cero se tiene que el sistema es de volumen expansivo, de esta manera para hallar la naturaleza del sistema solo necesitamos las ecuaciones del sistema más no sus soluciones.

## 2.4. Bifurcación

Las dinámicas de los sistemas continuos  $X'$  dependen de un parámetro  $a \in \mathbb{R}$ , dado que a menudo este se vuelve un valor crucial para las propiedades de la evolución del sistema, como lo es su estabilidad, puntos fijos, periodicidad, y la creación de nuevas órbitas. Con lo cual, un sistema estructuralmente inestable incluye el concepto de **bifurcación**(ver[9]). Así las bifurcaciones proporcionan interesantes dinámicas que generan un gran rango de aplicaciones en la biología y la física. Se presenta de esta forma una definición formal.

**Definición 2.4.1** *Sea una familia de sistemas*

$$X' = F_a(X)$$

*donde  $a$  es un parámetro real, se asume que  $F_a$  depende de  $a$  in  $C^\infty$ ; una **bifurcación** ocurre cuando existe un cambio significativo en la estructura de soluciones del sistema tanto como  $a$  varía.*

Los tipos más simples de bifurcaciones ocurren cuando el número de puntos de equilibrio cambian tanto como  $a$  varía.

**Ejemplo 2.4.1** *Considere la siguiente familia de ecuaciones diferenciales*

$$x' = g_a(x) = x(x - a),$$

*el cual depende de  $a$ , los puntos de equilibrio son  $x = 0$  y  $x = a$ , si se evalúa  $g'(0) = -a$ , entonces  $0$  es un sumidero si  $a > 0$  y una fuente si  $a < 0$ , similarmente  $g'_a(a) = a$  entonces  $x = a$  cumple las mismas características dependiendo el valor de  $a$ .*

*Por lo tanto se tiene una bifurcación en  $a = 0$  pues existe un único punto de equilibrio; además, cuando  $a$  pasa por  $0$  de forma creciente este pasa de ser una fuente a un sumidero y al pasar  $a$  por  $0$  de forma decreciente, pasa de un sumidero a una fuente.*

### 2.4.1. Bifurcación de horquilla

Cuando un sistema es simétrico entre sus direcciones, de tal manera que los puntos de equilibrio del sistema aparecen y desaparecen en parejas se dice que la bifurcación es una **Bifurcación de horquilla**, con el fin de comprender esta definición se presentan los siguientes ejemplos

**Ejemplo 2.4.2** *Sea el sistema 1-dimensional  $x'(t) = f(x, a) = ax - x^3$ , entonces aplicando la transformación*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

al sistema se tiene

$$-x'(t) = -ax + x^3,$$

entonces

$$x'(t) = ax - x^3,$$

por lo tanto el sistema es invariante bajo la transformación  $S$ , y los puntos de equilibrio son obtenidos de la siguiente forma

$$0 = ax - x^3,$$

entonces

$$x = 0, \pm\sqrt{a},$$

ahora bien, si  $a \leq 0$  solo se posee un punto de equilibrio estable, caso contrario cuando  $a > 0$ , dado que se generan dos puntos estables  $\pm\sqrt{a}$  y un punto inestable en  $x = 0$ , y al observarse la gráfica de bifurcación se puede apreciar una horquilla, de ahí el nombre.

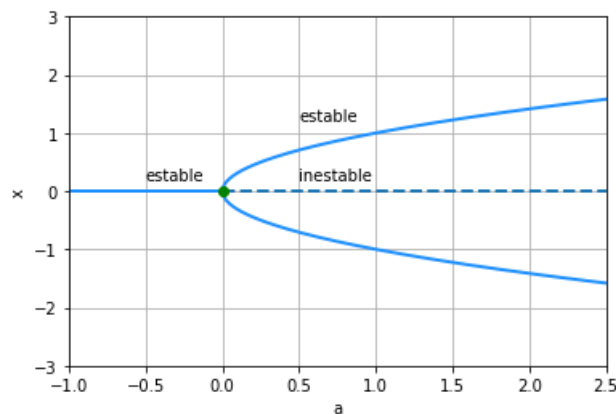


Figura 2.1: Bifurcación de horca

En general una bifurcación tipo horquilla, se da cuando dependiendo del parámetro aparecen o desaparecen puntos de equilibrio en parejas.

En el caso de un sistema 2-dimensional se tienen dos tipos de bifurcación de horquilla supercrítico y subcrítico, ahora, se trata de ilustrar esta terminología con los ejemplos que siguen,

**Ejemplo 2.4.3** Se considera un sistema dos dimensional representado por

$$\begin{aligned} x' &= ax - x^3 \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Obteniendo como puntos de equilibrio  $(\sqrt{a}, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{a}, 0)$ . Al calcular el jacobiano en estos puntos se tiene

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J(\sqrt{a}, 0) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J(-\sqrt{a}, 0) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene que los autovalores de  $J(0, 0)$  son de signos opuestos, lo que indica que el punto de equilibrio  $(0, 0)$  es una fuente, en cambio los autovalores de los otros dos jacobianos son de signo negativo lo que indica que son puntos estables, dando así los siguientes diagramas.

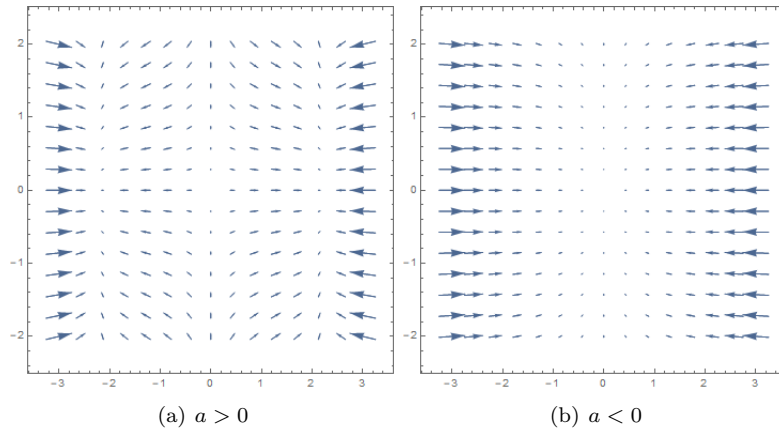


Figura 2.2: campo vectorial del sistema

Con lo cual, cuando  $a$  se aproxima al punto de bifurcación el punto de origen pasa de ser un punto estable a uno tipo fuente con la aparición de dos puntos estables.

## 2.5. Exponentes de Lyapunov

Dado un sistema dinámico continuo en un espacio  $n$ -dimensional, se puede estudiar el comportamiento del sistema a partir de las condiciones iniciales por medio de

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log_2(\Lambda_i^N),$$

donde  $\Lambda_i^N$  son los autovalores de  $J^N$  donde  $J$  representa el Jacobiano del sistema, a los  $\lambda_i$  se les conoce como los exponentes de Lyapunov, la ventaja de estos exponentes es su estrecha relación con la

expansión o contracción en el espacio fase (o bien alrededor de las orbitas del sistema). Así, es posible hablar del conjunto de los exponentes de Lyapunov de un sistema dinámico comúnmente conocido como **espectro de Lyapunov**, y al mismo tiempo la suma de los exponentes de Lyapunov nos pueden dar algunas características del sistema, como lo son:

1. Si la suma de los exponentes de Lyapunov es negativa el sistema es disipativo.
2. Si el sistema es un flujo entonces habrá al menos un exponente nulo.
3. Si el sistema tiene un exponente positivo existe un atractor caótico.
4. Un sistema disipativo tendrá al menos un exponente positivo.
5. Un exponente negativo indica puntos de equilibrio y/o atractores.

Estas características se deben a que los exponentes de Lyapunov brindan información respecto a la convergencia o divergencia de las trayectorias del sistema, así, un exponente negativo indica que dos trayectorias cercanas convergen hacia un atractor, en cambio, un exponente positivo indicara la divergencia de estas trayectorias respecto a un atractor dado que la expansión exponencial de este exponente no es compatible con el movimiento sobre un atractor.

Así, cada exponente positivo refleja una dirección y experimenta un repetido estiramiento traducido como estados del atractor. generando que el comportamiento de estados iniciales no pueda predecirse, a esto se le conoce como **caos**, de esta forma un atractor para un sistema disipativo con uno o mas exponentes de Lyapunov positivos se dice que es extraño o caótico.

Dada esta información es posible dar una estructuración de los comportamientos de los sistemas, en el caso unidimensional, un exponente positivo indicara caos, uno negativo una orbita periódica y uno nulo una orbita estable. En tres dimensiones un sistema continuo y disipativo tendrá un único posible espectro  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , de esta manera si representando cada uno de sus exponentes por el signo que lleva se obtendría(ver[1]).

1.  $(+, 0, -)$  indica un atractor extraño.
2.  $(0, 0, -)$  un dos-toro.



3.  $(0, -, -)$  un ciclo limite.

4.  $(-, -, -)$  un punto fijo.

En el caso de sistemas de dimensión 4, al buscarse sistemas que tengan atractores extraños, existirán tres posibles configuraciones:  $(+, +, 0, -)$ ,  $(+, 0, -, -)$  y  $(+, 0, 0, -)$ .

## Capítulo 3

# El hipercaos en el sistema de Lorenz 4D

### 3.1. Introducción a los sistemas de Lorenz

En 1963 Edward Lorenz introdujo un sistema de ecuaciones diferenciales para explicar algunos de los comportamientos del clima, formulando ecuaciones diferenciales que representaban el comportamiento de las partículas en la atmósfera terrestre.

Una manera de aproximarse a este modelo es la siguiente: imagínese un planeta cuya atmósfera consiste de una única partícula fluida, tan pronto se acerca a la superficie se calienta y es elevada, donde es enfriada y vuelve a bajar, ahora bien, el problema radica en que un climatólogo experto no es capaz de predecir el comportamiento de la partícula. Para el caso de la atmósfera terrestre, no se tiene una sola partícula, lo que hace prácticamente imposible la predicción.

Sin embargo, Lorenz se dio cuenta que en una celda de fluidos dos dimensional donde una partícula es calentada desde abajo y enfriada desde arriba, se hace posible describir el movimiento de este flujo por una gran cantidad de variables (relacionadas con la difusión del calor interno o externo de una partícula o su movimiento en el espacio), así, generó una tremenda simplificación al suponer tres de estas variables como constantes, y reorganizando las variables independientes como lo son la tasa de convección y los cambios de temperatura horizontales y verticales desarrolló un modelo de sistemas de ecuaciones diferenciales tridimensional (llamado posteriormente el atractor extraño de Lorenz).

Este modelo envuelve tres parámetros: El número de Prandtl  $\sigma$  proporcional al cociente entre la velocidad de difusión de la cantidad de momento (viscosidad) y la difusividad térmica; el número de Rayleigh  $r$  asociado con la transferencia de calor interno, y otro parámetro  $b$  que se le relaciona con el tamaño físico del sistema, generando así el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales envuelto en solo dos términos no lineales:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\y' &= rx - y - xz \\z' &= xy - bz\end{aligned}$$

donde  $r, \sigma, b > 0$ .

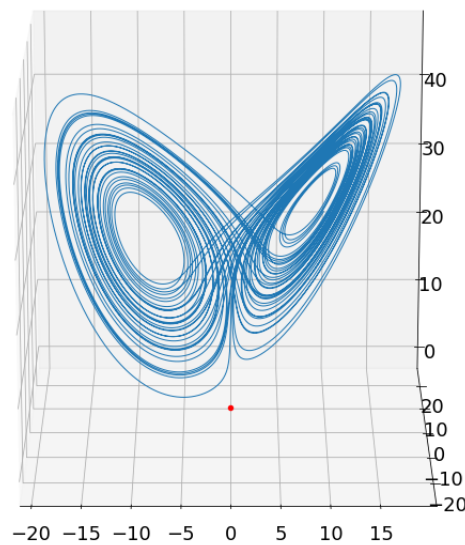


Figura 3.1: Atractor de Lorenz

### 3.2. Propiedades del sistema de Lorenz

**Teorema 3.2.1** *El sistema de Lorenz es simétrico con respecto al eje  $x$  y el eje  $y$ .*

**Demostración:**

Se define la función  $S$  como sigue

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, z)$$

Ahora aplicando  $S$  al sistema de Lorenz se tiene

$$\begin{array}{lcl} x' = \sigma(y - x) & & -x' = \sigma(x - y) \\ y' = rx - y - xz & \xrightarrow{S} & -y' = -rx + y + xz \\ z' = xy - bz & & z' = xy - bz \end{array}$$

Y por lo tanto la transformación  $S$  deja invariante el sistema. ■

**Teorema 3.2.2** *El eje  $z$  es invariante frente al sistema de Lorenz.*

**Demostración:**

Sea  $x = y = 0$ , entonces se tiene que en un tiempo futuro  $x' = y' = 0$ , además el sistema queda

$$z' = -bz.$$

Y resolviendo esta ecuación diferencial a través del tiempo se tiene

$$z'(t) = -bz(t) \longrightarrow z(t) = e^{-bt}.$$

Por lo tanto cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $z(t) \rightarrow 0$ , lo que implica que el eje  $z$  sea invariante y todas las soluciones que inicien en este van a tender al origen cuando el tiempo tienda a infinito. ■

**Teorema 3.2.3** *Es de naturaleza disipativa*

**Demostración:**

Se tiene que para el sistema

$$\begin{array}{l} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{array}$$

El jacobiano es

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto el laplaciano es  $-(\sigma + 1 + b)$ , y dado que el laplaciano indica la divergencia del campo vectorial se obtiene que el sistema es disipativo. ■

**Teorema 3.2.4** *El sistema Lorenz muestra una bifurcación de horquilla en el origen cuando  $r \rightarrow 1$ .*

### Demostración:

Los puntos de equilibrio del sistemas de Lorenz se encuentran por medio del sistema

$$\begin{aligned}0 &= \sigma(y - x) \\0 &= rx - y - xz \\0 &= xy - bz\end{aligned}$$

Donde se obtiene para  $r > 1$

$$\begin{aligned}E_1 &= (0, 0, 0) \\E_2 &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \\E_3 &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que el origen es un punto de equilibrio, además cuando  $r \rightarrow 1$ , los otros dos puntos que son simétricos respecto al eje  $x$  y  $y$  coinciden con el punto de origen, lo cual genera una bifurcación de horquilla. ■

### 3.3. Conjuntos limites de los sistemas caóticos

El caos es un fenómeno muy interesante en lo que respecta a los sistemas pues éste nos brinda comportamientos no periódicos de las soluciones. Por lo cual se vuelve una parte fundamental en el estudio de sistemas dinámicos caóticos encontrar acotamientos de dichos sistemas dado que esto permite obtener información sobre sus equilibrios y su estabilidad global.

De esta forma en muchos casos es posible acotar el comportamiento de los sistemas dinámicos, muchas veces usando las funciones de Lyapunov, es así como se presentara a lo largo del documento conjuntos limites para los sistema de Lorenz, representado por medio de orbitas, comenzando con el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1** *Para algún  $\lambda > 0, m > 0, a > 0, b > 0, c > 0$  el siguiente conjunto*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \lambda x^2 + my^2 + m \left( z - \frac{\lambda a + mc}{m} \right)^2 \leq R^2, \forall \lambda > 0, \forall m > 0 \right\}$$

*es un conjunto limite y positivamente invariante para el sistema de*

Lorenz, donde

$$R^2 = \begin{cases} \frac{b^2(\lambda a + mc)^2}{4m(b-1)} & \text{si } a \geq 1, b \geq 2 \\ \frac{b^2(\lambda a + mc)^2}{4m(b-a)} & \text{si } a \leq 1, b \geq 2a \\ \frac{(\lambda a + mc)^2}{m} & \text{si } b < 2a, b < 2 \end{cases}$$

La demostración se encuentra en Further Results on Ultimate Bound on the Trajectories of the Lorenz System[3].

### 3.4. Variantes del sistema de Lorenz

Dado que se conoce la estructura de Lorenz y algunas de sus propiedades, se da a continuación un nuevo sistema caótico el cual se deriva del sistema de Lorenz, de esta forma se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x' &= a(y - x) \\ y' &= xz - y \\ z' &= b - xy - cz \end{aligned}$$

donde  $a, b, c$  son coeficientes mayores a cero, este sistema fue construido en el 2009 por Xian-Feng li, de igual manera es fácil comprobar que cumplen propiedades de Lorenz como lo son la simetría por medio de la transformación  $S(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, x)$ , lo que indica la simetría respecto al eje  $z$ .

De la misma forma tomando el Jacobiano

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ z & -1 & x \\ -x & -y & -c \end{pmatrix}$$

Se obtiene que el laplaciano es  $-(a + 1 + c) < 0$ , por lo tanto el sistema es de naturaleza disipativa. Ahora bien con el fin de crear un sistema hipercaótico es necesario aumentar la dimensión del sistema, para esto debemos introducir una variable de retroalimentación  $w$  en la primera ecuación y añadir una ecuación diferencial no lineal de  $w$ , obteniendo así

$$\begin{aligned} x' &= a(y - x) - ew \\ y' &= xz - hy \\ z' &= b - xy - cz \\ w' &= ky - dw \end{aligned}$$

Se procede entonces a hallar el comportamiento del sistema.

**Teorema 3.4.1** *El sistema de Lorenz 4D es simétrico con respecto a los ejes  $x, y, w$ .*

**Demostración:**

Se define la función  $S$  como sigue

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (-x, -y, z, -w) \end{aligned}$$

Ahora aplicando  $S$  a el sistema de Lorenz se tiene

$$\begin{array}{lcl} x' = a(y - x) - ew & & -x' = a(x - y) + ew \\ y' = xz - hy & \xrightarrow{S} & -y' = -xz + hy \\ z' = b - xy - cz & & z' = b - xy - cz \\ w' = ky - dw & & -w' = -ky + dw \end{array}$$

Y por lo tanto la transformación  $S$  deja invariante el sistema. ■

De igual forma se tiene que los puntos de equilibrio para el sistema son:

$$E_1 = \left(0, 0, \frac{b}{c}, 0\right)$$

$$E_2 = \left(\frac{f}{a}, \frac{df}{ad - ek}, \frac{adh}{ad - ek}, \frac{kf}{ad - ek}\right)$$

$$E_3 = \left(-\frac{f}{a}, -\frac{df}{ad - ek}, \frac{adh}{ad - ek}, -\frac{kf}{ad - ek}\right)$$

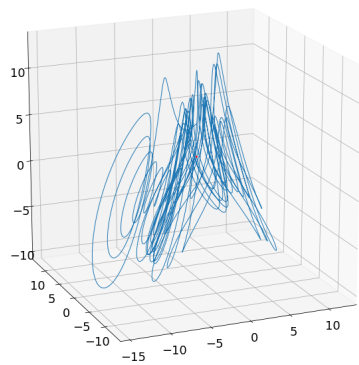
donde

$$f = \sqrt{\frac{-a(bek - abd + acdh)}{d}}$$

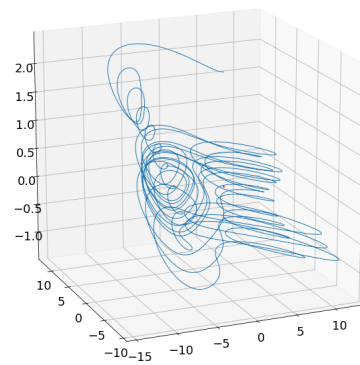
De esta forma podemos darnos cuenta de que no necesariamente la cantidad de puntos de equilibrio debe ser igual a la dimensión del sistemas, así como que en este caso el origen no es un punto de equilibrio.

Además debido a la relación entre los exponentes de Lyapunov y los atractores extraños se calculan los exponentes de Lyapunov de este sistema con los siguientes parámetros  $a = 5, b = 20, c = 1, d =$

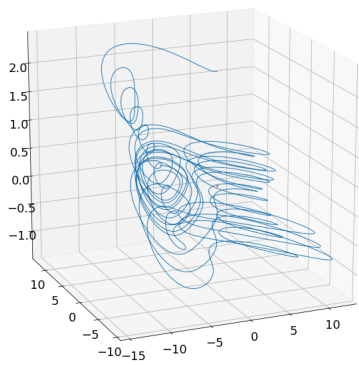
$0.1, k = 0.1, e = 20.6, h = 1$  con los estados iniciales  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (3.2, 8.5, 3.5, 2.0)$ , obteniendo  $\lambda_1 = 0.24, \lambda_2 = 0.23, \lambda_3 = -7.56$  y  $\lambda_4 = 0$ , con lo cual el sistema es disipativo, y la dimensión del sistema es fraccional. Además se tiene dos exponentes positivos lo que indica un comportamiento complejo caótico, y un atractor hipercaótico como se puede apreciar a continuación en cada uno de los espacios.



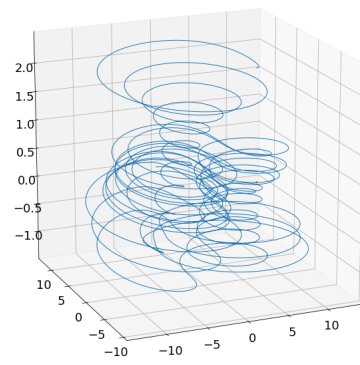
(a) Espacio xyz



(b) Espacio xyw



(c) Espacio xzw



(d) Espacio yzw

Figura 3.2: Atractores caóticos del sistema en tres dimensiones



De igual manera se obtiene que el eje  $z$  es también invariante, es decir es invariante positivamente sobre el flujo generado por el sistema, para esto se toma  $x = y = w = 0$  obteniendo el sistema

$$z' = b - cz,$$

y al solucionar esta ecuación tenemos

$$z(t) = \frac{b}{c} + k_1 e^{-ct},$$

por lo cual, para todas las soluciones que inicien en el eje  $z$ , van a pertenecer a este eje cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.4.1. Conjuntos límites

Ahora bien, el sistema de Lorenz previamente estudiado también se encuentra acotado por un conjunto límite, de esta forma se presenta el siguiente teorema

**Teorema 3.4.2** *Suponga que  $a, h, c, d > 0$ . Sea  $(x(t), y(t), z(t), w(t))$  una solución arbitraria del nuevo sistema de Lorenz, entonces el conjunto*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z, w) \mid x^2 \leq \frac{(ad + ke)^2 R^2}{a^2 d^2}, y^2 + z^2 \leq R^2, w^2 \leq \frac{k^2 R^2}{d^2} \right\}$$

*Es una cota para el sistema caótico, donde*

$$R^2 = \frac{b^2}{\theta c}, \quad \theta = \min\{h, c\}$$

**Demostración:**

Se construye la función

$$f(z) = -cz^2 + 2bz, \quad c > 0,$$

entonces para hallar su valor máximo se deriva e iguala a cero se obtiene

$$z = b/c,$$

y por lo tanto

$$\max_{z \in \mathbb{R}} f(z) = \frac{b^2}{c},$$

ahora se crea la función de Lyapunov

$$V(X) = V(y, z) = y^2 + z^2,$$

al derivar la función de Lyapunov y analizándola en la trayectoria del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dV(y, z)}{dt} &= 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} \\ &= 2y(xz - hy) + 2z(b - xy - cz), \\ &\leq -hy^2 - cz^2 - cz^2 + 2bz \end{aligned}$$

se toma  $\theta = \min\{h, c\}$  se tiene

$$\begin{aligned} &\leq -\theta(y^2 + z^2) + f(z) \\ &= -\theta V(y, z) + f(z) \\ &\leq -\theta V(y, z) + \frac{b^2}{c} \\ &\leq -\theta \left( V(y, z) - \frac{b^2}{\theta c} \right) \\ &= -\theta (V(y, z) - R^2), \end{aligned}$$

integrando a ambos lados se obtiene

$$V(x, y) \leq V(X(t_0))e^{-\theta(t-t_0)} + R^2(1 - e^{-\theta(t-t_0)})$$

$$[V(x, y) - R^2] \leq [V(X(t_0)) - R^2]e^{-\theta(t-t_0)}$$

entonces al tomar el límite superior cuando  $t \rightarrow \infty$  se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(y, z) \leq R^2.$$

De esta desigualdad se obtiene  $|y| \leq R$ ,  $|z| \leq R$ ; ahora bien se toma la función

$$g(w) = -dw^2 + 2kR|w|, \quad \forall d > 0,$$

se tiene entonces que

$$\max_{w \in \mathbb{R}} g(w) = \frac{k^2 R^2}{d},$$

construyendo otra función de Lyapunov se tiene

$$V_1(w) = w^2,$$

derivando la función de Lyapunov y analizándola en la trayectoria se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{V(w)}{dt} &= 2w \frac{dw}{dt} \\
&= 2w(ky - dw) \\
&= 2wky - 2dw^2 \\
&\leq 2|w|k|y| - 2dw^2 \\
&\leq 2|w|kR - dw^2 - dw^2 \\
&\leq -dw^2 + \frac{k^2 R^2}{d} \\
&\leq -d \left( V_1(w) - \frac{k^2 R^2}{d^2} \right),
\end{aligned}$$

de igual manera que la anterior al integrar y aplicar el límite superior se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(w) \leq \frac{k^2 R^2}{d^2}.$$

De donde se obtiene que  $|w| \leq kR/d$ ; por último se crea la siguiente función

$$h(x) = -a|x|^2 + 2R \left( a + \frac{ek}{d} \right) |x|, \quad \forall a > 0.$$

de donde se puede obtener

$$\max_{x \in \mathbb{R}} h(x) = \frac{(ad + ke)^2 R^2}{ad^2},$$

se construye la función de Lyapunov

$$V_2(x) = x^2,$$

de igual manera se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{V(x)}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} \\
&= 2x(ay - ax - ew) \\
&= 2x(ay - ew) - 2ax^2 \\
&\leq 2|x|(a|y| - e|w|) - 2ax^2 \\
&\leq 2|x|(a + \frac{ek}{d}) - ax^2 - a|x|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq h(x) - ax^2 \\ &\leq \frac{(ad + ke)^2 R^2}{ad^2} - ax^2 \\ &\leq -a \left( V_2(x) - \frac{(ad + ke)^2 R^2}{a^2 d^2} \right), \end{aligned}$$

y al integrar y tomar límite superior obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_2(x) \leq \frac{(ad + ke)^2 R^2}{a^2 d^2}.$$

Lo que completa la prueba. ■

## Capítulo 4

# Conclusiones

1. Los exponentes de Lyapunov son un instrumento útil para estudiar el comportamiento de un sistema; permitiendo estudiar los sistemas cuya dimensión es mayor a tres.
2. El comportamiento del atractor de Lorenz o de sistemas de este tipo, aunque son caóticos es posible acotarlo gracias a que sus soluciones se encuentran establecidas dentro de órbitas.
3. La cantidad de puntos de equilibrio no necesariamente tienen que ser iguales al tamaño de la dimensión del sistema, como se pudo evidenciar en el último sistema estudiado.

# Bibliografía

- [1] A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY, J. VASTANO, *Determining Lyapunov exponents from a time series.*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 1985, pp. 285-317.
- [2] G. C. LAYEK, *An introduction to dynamical systems and chaos.* New Delhi. Springer, 2015.
- [3] G. ZHANG, F. ZHANG, *Further results on ultimate bound on the trajectories of the Lorenz system*, Qualitative theory of dynamical systems, vol. 15, no 1, 2016, pp. 221-235.
- [4] G. ZHANG, F. ZHANG, X. LIAO, D. LIN, P. ZHOU, *On the dynamics of new 4D Lorenz-type chaos systems*, Advances in Difference Equations(2017), vol. 2017, no 1, p. 217.
- [5] H. W. LORENZ, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 334, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] LI, XIAN-FENG, CHLOUVERAKIS, E. KONSTANTINOS, D. L. XU, *Nonlinear dynamics and circuit realization of a new chaotic flow: A variant of Lorenz, Chen and Lü*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 10, no 4, 2009, pp. 2357-2368.
- [7] M. LAKSHMANAN, MUTHUSAMY, S. RAJASEEKAR, *Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns*, Science & Business Media, Springer, 2012.
- [8] R. L. DEVANEY: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [9] W. HIRSCH. MORRIS, SMALE STEPHEN; ROBERT L. DEVANEY, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic press, 2012.