Una Mirada a la paradoja de San Petersburgo

Trabajo de Grado
Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación

Presentado por: Leady Marcela Cely Prieto

Director: Milton Lesmes

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2018

A mi madre con mucho cariño le dedico todo el esfuerzo y empeño puesto en la realizaciónde este trabajo, a mis amigos, gracia a cada uno de ellos por brindarme su apoyo

Agradecimientos

Los resultados de este trabajo se los dedico a cada uno de las personas que estuvieron presentes brindándome su apoyo incondicional.

A todos mis profesores quienes resolvieron cada una de las dudas que se generaron durante su realización.

Gracias a Dios...

Índice general

INTRODUCCIÓN

Dentro de los muchos conceptos que se pueden estudiar en un curso básico de teoría de la probabilidad uno de los conceptos mas importantes y que da pie a una gran cantidad de resultados y aplicaciones de esta teoría a la vida cotidiana es el concepto de valor esperado. La utilidad de este concepto se centra en la generación de argumentos teóricos los cuales permitan hacer una descripción o predicción sobre el comportamiento de un conjunto de datos, los cuales sean intuitivamente coherentes con la naturaleza de la situación que es objeto de estudiando.

La forma en que el concepto de valor esperado es manejado se basa en hipótesis las cuales siempre deben ser respetadas con el fin de obtener resultados coherentes y acordes con la naturaleza del fenómeno o situación que es objeto de estudio. Pero no solo el concepto se ve restringido de alguna manera, también las situaciones que son estudiadas se ven restringidas para poder cumplir los supuestos necesarios para la utilización de este concepto.

Una de las posibles preguntas que se pueden hacer sobre el valor esperado es *¿bajo que condiciones el valore esperado falla?*, es decir, que omisiones o que suposiciones deben ser hechas dentro de una situación para que el valor esperado no sea acorde con las ideas intuitivas que se tienen sobre el fenómeno y de ser así como puede ser resuelta dicha inconsistencia. Este es el objetivo que se persigue con el estudio de la paradoja de San Petersburgo, esta paradoja fue planteada dentro de las discusiones epistolares de dos grandes matemáticos como Pascal y Fermat, la paradoja se centra en torno a un juego el cual cuenta con un par de reglas muy sencillas las cuales generan una dinámica en la cual es imposible que un jugador pierda, es ahí en donde se encontrara la paradoja, ese punto de inflexión con la idea que Pascal y Fermat tienen sobre una lotería y que no es muy diferente más de 350 años después.

La solución al problema que se plantea en la paradoja de San Petersburgo encontraria una solución a través de otra de las mentes más importantes de las matemáticas como Nicolas Bernoulli, en este documento se presentara la forma de deducir la solución propuesta por Bernoulli y un par de resultados al rededor de está.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

A continuación se presentan a modo de repaso los conceptos y definiciones de la teoría de probabilidad que son necesarios para el desarrollo y comprensión de las temáticas y resultados tratados en cada una de las secciones precedentes. Los conceptos aquí expuestos pueden ser tratos de forma discreta o continua, pero para efectos del trabajo que se desarrollará nos enfocaremos en el caso discreto. Además se supone que ya se cuenta con un conocimiento básico sobre la forma en que se asocian probabilidades a través del uso de los métodos de conteo básico.

1.1. Definiciones

Definición 1.1. Con cada experimento $\mathscr{E}$ de tipo determinístico, definimos el *espacio muestral* como el conjunto de todos los resultados posibles de $\mathscr{E}$, dicho conjunto será notado con la letra Ω. Además a todo $A \subseteq \Omega$ se consideran como conjuntos de resultados posibles a los que denominaremos como *suceso* o *evento*.

Observación. Dos eventos A y B de Ω se dice *mutuamente excluyentes* si $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.2. Sea $\mathscr{E}$ un experimento y Ω su respectivo espacio muestral. Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada variable *aleatoria de valor real* o simplemente *variable aleatoria*.

Definición 1.3. Sea $\mathscr{E}$ un experimento. Sea Ω un espacio muestral asociado con $\mathscr{E}$. A cada evento A asociamos un número real, designado por $P(A)$ y llamado la *probabilidad* de que A satisfaga las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Si A y B son sucesos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son eventos mutuamente excluyentes dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i).$$

Observación. (a) Teniendo en cuenta que Ω y $\emptyset$ son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

junto con la condición 1. de la definición anterior se tiene que $P(\emptyset) = 0$.

(b) Tomando la condición 3 como el paso base de una demostración por inducción con $k = 2$, supongamos que la afirmación es valida para $k = n$, es decir, dados n eventos A_i mutuamente excluyentes dos a dos se cumple que

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Veamos que es cierto para $k = n + 1$, supongamos que se tienen $n + 1$ eventos A_i mutuamente excluyentes dos a dos entonces se tiene que lo eventos $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y A_{n+1} son mutuamente excluyentes, así que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right] = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}),$$

usando la hipótesis de inducción se concluye que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(c) Dos eventos A y B se dicen independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definición 1.4. Sea X una variable aleatoria discreta. Con cada resultado posible x_i le asociamos $f(x_i) = P(X = x_i)$ llamado *probabilidad de* x_i, los números $f(x_i)$ con $i = 1, 2, \ldots$ deben satisfacer las siguientes condiciones:

(a) $f(x_i) \geq 0$ para todo i.

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Dicha función f es llamada *distribución de probabilidad* de la variable aleatoria X, por ser este un caso discreto la función f también es llamada *función de probabilidad puntual* o *función de densidad*. La colección de pares $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1, 2, \ldots$ en ocasiones es llamada *distribución de probabilidad discreta*.

Observación. En algunos casos estas definiciones están acompañadas de la definición de "σ-álgebra" la cuál nos permite definir un espacio de probabilidad, este enfoque usado en [1] esta directamente relacionado con teoría de la medida, en este trabajo se está usando un enfoque similar al presentado en [2].

Definición 1.5. Sea X una variable aleatoria discreta y f la distribución de probabilidad asociada a X, se dice que X tiene un *valor esperado* o *esperanza matemática* si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f(x_i) < \infty.$$

En tal caso, el *valor esperado* $E(x)$ de X esta definido como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i), \tag{1.1}$$

donde cada x_i es un posible valor de X.

El número $E(X)$ no necesariamente es un valor de la función de distribución que se esta considerando, pero según sea el caso puede darse le una interpretación la cual depende del experimento al que esta asociada la variable aleatoria X.

Definición 1.6. Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado $E(X)$existe, definimos la *varianza* de X notada por $V(X)$ como

$$V(X) = E[x - E(X)]^2. \tag{1.2}$$

La raíz cuadra positiva de $V(x)$ se llama *desviación estándar* de X y se nota por σ_X.

Los siguientes ejemplos son muy comunes en un curso básico de teoría de la probabilidad ya que dichos ejemplos nos permitirán ilustrar la forma en que están involucradas cada una de las definiciones anteriormente presentadas.

Ejemplo 1.7. Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire y observar el lado que cae hacia arriba, los resultados de dicho experimento pueden ser cara (C) o sello (S) así que el espacio muestral correspondiente al experimento se puede escribir como

$$\Omega = \{C, S\},$$

donde Ω resulta siendo un espacio muestral discreto, así que cualquier variable aleatoria asociada a esté espacio sera también discreta.

Definimos la variable aleatoria X como "el número de caras en el resultado", así que la variable aleatoria quedaría definida como $X(S) = 0$ y $X(C) = 1$. Si suponemos que la moneda esta totalmente balanceada, es decir, que la posibilidad de que uno de los lados sea observado es la misma para ambos lados, podemos definir la probabilidad P como $P(\Omega) = 1$, $P(\{C\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}$ y $P(\emptyset) = 0$, la función P así definida satisface las condiciones expuestas en la definición 1.3.

Con la probabilidad P definida de esa manera definimos la función de distribución de probabilidad f como $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$, usando la formula (1.1) que el valor esperado de X seria

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como ya se menciono anteriormente el número $E(X)$ no necesariamente es un posible valor de X, en este caso el valor esperado obtenido podría interpretarse como que se puede esperar que de cada dos lanzamientos en uno se observara cara.

Ejemplo 1.8. Supongamos que tenemos un dado en el cual ninguna cara es más propensa a salir que otra, el experimento consiste en lanzar el dado y observar el número en la cara superior del mismo, el espacio muestral asociado a este experimento seria

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

dicho espacio muestral es discreto.

A este espacio muestral se pueden definir diferentes variables aleatorias sobre este espacio muestral, una podría ser X la cual representa *el valor observado en la cara superior*, esta variable hace al símbolo en la cara superior del dado con el valor al que representa, así los posibles valores de esta variable serian los números naturales del 1 al 6. Como ninguno de los resultados tiene mayor chance de salir que cualquier otro, definimos la función de distribución p_X como $p_X(x) = \frac{1}{6}$ para todo valor de la variable aleatoria X. El valor esperado de esta variable aleatoria sería

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_X(x_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{7}{2} \approx 3{,}5,$$

es decir, que se espera que salga el número 3 o 4.

También podemos definir las variable aleatoria Y como *la cantidad de números pares que se observan en la cara superior del dado*, esta variable aleatoria solo puede tomar dos valores $y_0 = 0$ o $y_1 = 1$, $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ está definida como $Y(1) = Y(3) = Y(5) = 0$ y $Y(2) = Y(4) = Y(6) = 1$, la distribución de probabilidad p_Y estaría definida como $p_Y(0) = \frac{1}{2}$ y $p_Y(1) = \frac{1}{2}$. El valor esperado de Y esta dado por

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{1} y_0 p(y_0) + y_1 p(y_1) = \frac{1}{2},$$

este valor se puede interpretar como que de cada dos lanzamientos se espera que en uno se observe un número par.

Este valor esperado coincide con el calculado en el ejemplo 1.7 a pesar de que ambas variables aleatorias están asociadas a espacios de probabilidad distintos, esta coincidencia se debe a que la variable aleatoria Y toma los 6 posibles valores del dado y los reduce a observar sólo dos haciendo que el proceso sea similar al de la moneda.

1.2. Distribución Geométrica

Supongamos que estamos realizando un experimento $\mathscr{E}$ y estamos interesados sólo en la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento A, también supongamos que el experimento $\mathscr{E}$ esta siendo repetido varias veces y que dichas repeticiones son independientes lo que quiere decir que los resultados y probabilidades de cada repetición no se ven afectado por las demás repeticiones y que en cada una de las repeticiones $P(A) = p$ y $P(A^c) = 1 - p = q$. Supongamos que el experimento $\mathscr{E}$ es repetido hasta que obtenemos la primera observación de A.

Definamos la variable aleatoria X como "el número de repeticiones necesarias para observa a A por primera vez", así que X toma los valores de $1, 2, 3, \ldots$ y teniendo en cuenta que $X = k$ si y solo si las primeras $k-1$ repeticiones de $\mathscr{E}$ dieron como resultado a A^c y la k-ésima resulto en A, recordemos que al ser rodas las repeticiones independientes lo anterior implica que

$$f(k) = P(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Cuando una variable aleatoria X satisface las condiciones mencionadas y su distribución de probabilidad esta dada por (1.3) se dice que X tiene una distribución *geométrica* y se nota como $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Veamos que en efecto la formula (1.3) corresponde a una función de distribución, para empezar como $0 \leq p \leq 1$ entonces $q^{k-1}p \geq 0$, por otro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} f(i) &= p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \\
&= p\left(\frac{1}{1-q}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por tanto la formula (1.3) en efecto es una distribución.

Ejemplo 1.9. (a) La variable aleatoria X puede asociarse a los dos ejemplo vistos en la sección anterior, en el caso de las monedas podríamos definir X como "el número de lanzamientos necesarios para que caiga una cara", en dicho caso la probabilidad de cara es $p = \frac{1}{2}$, así que $X \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{2})$.

(b) Supongamos que se tiene las condiciones del ejemplo 1.8 para le lanzamiento de un dado, ahora supongamos que el evento de interés en este experimento es "observar un resultado múltiplo de 3 en la cara superior del dado" dicho evento se puede expresar como $A = \{3, 6\}$ donde $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, definimos la variable aleatoria X "número de lanzamientos necesarios para observar a A por primera vez" así que $X \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{3})$.

CAPÍTULO 2

La Paradoja de San Petersburgo

2.1. El Juego

En la paradoja de San Petersburgo el jugador participa en un juego con la siguiente dinámica: al jugador se le entrega una moneda perfectamente balanceada la cual debe lanzar para observar el resultado en la parte superior de la moneda al caer, los lanzamientos presentan el siguiente comportamiento:

- Primer Lanzamiento: Si se obtiene cara se le paga al jugador \$1, si se obtiene sello el jugador tiene un nuevo lanzamiento.
- Segundo Lanzamiento: Si se obtiene cara se le paga al jugador \$2, si se obtiene sello el jugador tiene un nuevo lanzamiento.
- n-ésimo Lanzamiento: Si se obtiene cara se le paga al jugador $\$2^{n-1}$, si se obtiene sello el jugador tiene un nuevo lanzamiento.

En conclusión el juego continuará hasta que el jugador reciba un premio en alguno de los turnos.

2.2. Lotería y Pago Esperado

La paradoja de San Petersburgo fue planteada en 1713 por Nicolaus Bernoulli, el considero una lotería la cual funciona de la siguiente manera, se toma una "moneda justa" (como la descrita en el ejemplo 1.7) y se hace un primer lanzamiento con dicha moneda, si la moneda cae en cara la lotería paga \$1 y el juego termina, si cae sello la moneda es lanzada de nuevo. De ser necesario un segundo lanzamiento, si el resultado es cara la lotería paga \$2 en caso contrario la moneda es lanzada de nuevo. En general, para el n-ésimo lanzamiento, si el resultado es cara la lotería tendrá que pagar $\$2^{n-1}$ y el juego termina, si por el contrario el resultado es sello se realizara otro lanzamiento.

En este caso la variable aleatoria X que nos interesa esta definida como "el número de lanzamientos necesarios para que termine el juego", teniendo en cuenta las reglas del juego estamos interesados en saber cuántos lanzamientos son necesarios para obtener cara por primera vez, es decir, que $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$ y los pagos se están incrementando de forma exponencial.

Si definimos $u(n)$ como el pago en el n-ésimo lanzamiento, la "ganancia esperada" para el jugador se cálcula como la suma de los productos entre la probabilidad de ganar y la ganancia al ganar en dicho turno, así que

$$\begin{aligned} \$\sum_{n=1}^{\infty} u(n)P(\text{Cara}) &= \$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &= \$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

claramente esta sucesión diverge.

N. Bernuolli decía que teniendo en cuenta este resultado cualquier persona debería estar dispuesta a participar en esta lotería sin importar el costo que tenga, de hecho por como la lotería está planteada cualquier persona puede participar en ella sin importar la inversión inicial que realice y entre mas pequeña sea la cantidad invertida menor sera la cantidad de turnos en la cual puede recuperar su inversión inicial.

Esta dinámica de ganancia segura para el apostador es lo que constituye la paradoja dentro de la situación que se plantea, ya que en el correcto funcionamiento de una lotería se esperar que la ganancia esperada siempre esta a favor de quien organiza la lotería mas no de quien la juega.

Que el valor esperado sea infinito implica que la lotería debe contar con una cantidad de dinero infinita para poder realizar el pago de cada uno de los premios que puede llegar a conseguir cualquiera de los apostadores que deciden participar en la lotería, lo cual es imposible y hace que la lotería planteada no sea realista. Para hacer que la lotería cuente con características mucho más realistas, podríamos restringir la máxima cantidad de dinero que puede llegar a ganar cualquiera de los apostadores, esto quiere decir que quienes organizan la lotería deben tener un capital finito fijo para financiar los premios ofertados por la lotería.

El siguiente código[1] permite saber la cantidad máxima de turnos que puede llegar a soportar una cierta cantidad de capital fijado para esta lotería.

[1] Elaborado en Python 3.0

```
def g(c):
    P=0
    t=0
    while c>P:
        P=2**t
        if c>=P:
            t=t+1
    return t
```

A continuación se muestra una tabla en la cual se consideran algunos capitales con los que podría contar quien organiza la lotería y utilizando el código anterior, se muestra la máxima cantidad de turnos que podría llegar a jugar un apostador sin que el capital con que cuenta la lotería sea excedido y la ganancia esperada por el apostador en la última columna.

Capital	Cantidad máxima de turnos	Ganancia esperada	Máximo premio
\$1	1	0,5	2
\$10	4	2	16
\$100	7	3,5	128
\$1,000	10	5	1024
\$10,000	14	7	16384
\$100,000	17	8,5	131072
\$1,000,000	20	10	1048576
\$1,000,000,000	30	15	1073741824

Cuadro 2.1: Capitales para la lotería junto con la cantidad de turnos tolerados y la respectiva ganancia esperada.

Como es posible deducir de la tabla, la ganancia esperada de quien apuesta se reduce drásticamente en el momento en que el organizador de la lotería decide fijar la cantidad de dinero por la que está dispuesto a responder. Supongamos que la lotería no pagara más de $\$10^9$ en un lanzamiento, según la tabla esto hace que cualquier apostador no pueda realizar más de 30 lanzamientos, por tanto, bajo estas nuevas condiciones la ganancia esperada estaría dada por

$$\begin{aligned}
\$\sum_{n=1}^{30} u(n)P(\text{“el resultado es cara”}) &= \$\sum_{n=1}^{30} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \$\sum_{n=1}^{30}\frac{1}{2} \\
&= \$15
\end{aligned}$$

Los valores en la tabla permiten ver que la ganancia esperada crece mucho más lento que el capital que está dispuesto a arriesgar quien organiza la lotería, es así que, para $\$10^9$ la ganancia esperada es de \$15, dicha ganancia se encuentra entre los primeros 5 turnos, lo que sugiere que el apostador no debería esperar obtener alguno de los premios del turno 6 en adelante.

2.3. La Solución de Bernoulli

Bernoulli decía que la "ganancia financiera" que una persona obtenía en un juego de azar no podía depender únicamente de la ganancia que el juego pudiera garantizarle si no que también depende de la riqueza de la persona que esta haciendo la ganancia. En base a lo anterior Bernoulli propone que en vez de calcular la ganancia esperada se calcule la utilidad esperada. Para tal fin Bernoulli propone añadir una función utilidad $u(w)$ la cual representa la utilidad de una riqueza $\$w$.

Bernoulli nota que es necesario que la función $u(w)$ sea consecuente con el hecho de que una ganancia de \$1 no es lo mismo para una persona pobre que para una que es rica, así siempre que esta suposición pueda mantenerse, se espera que la función $u(w)$ sea cóncava así que $\frac{du(w)}{dw}$ debe ser monótonamente decreciente. Bernoulli además supone que el crecimiento de la utilidad respecto al crecimiento de la riqueza debe ser inversamente proporcional a la riqueza misma, es decir, $\frac{du}{dw} = \frac{1}{w}$, haciendo uso del método de variables separables la función solución de esta ecuación seria $u(w) = \ln(w)$, dicha función es la que Bernoulli propondría como la función de utilidad.

Teniendo en cuenta el razonamiento propuesto por Bernoulli, la ganancia en cada uno de los turnos cambia radicalmente con respecto a la obtenida en la lotería planteada originalmente ya que ahora haremos uso de una función utilidad la cual depende de la riqueza del apostador, al igual que en al calcular el valor esperado anteriormente en este caso se calculara la utilidad esperada de cada posible lanzamiento y luego se sumaran para obtener la utilidad esperada de todo el juego.

Supongamos que el apostador inicia con una riqueza $\$w$ y que el costo por participar en la lotería es $\$c$ entonces, para el primer lanzamiento si cae cara el jugador tendrá una ganancia de $\$w - c + 1$, así que la diferencia entre la utilidad del capital inicial del apostador y la utilidad de la fortuna luego de ganar el juego en el primer turno sera

$$\ln(w - c + 1) - \ln(w).$$

lo anterior implica que la utilidad esperada del primer lanzamiento es

$$\frac{1}{2}\left(\ln(w - c + 1) - \ln(w)\right).$$

Para el segundo turno, si cae cara la ganancia sera $\$\ln(w - c + 2) - \ln(w)$ y si cae sello la moneda sera lanzada de nuevo, así que la utilidad esperada del segundo turno es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln(w - c + 2^2) - \ln(w)\right).$$

Para el n-ésimo lanzamiento, si cae cara la ganancia sera $\$w - c + 2^{n-1}$ y si cae sello la moneda será lanzada nuevamente, así que la utilidad del n-ésimo lanzamiento es $\ln(w - c + 2^{n-1}) - \ln(w)$ y la utilidad esperada de este lanzamiento será

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\ln(w - c + 2^{n-1}) - \ln(w)\right).$$

Por tanto, la utilidad esperada del jugador (notada como $\langle \Delta u_B \rangle$) estará dada por

$$\langle \Delta u_B \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\ln(w - c + 2^{n-1}) - \ln(w)\right]. \tag{2.2}$$

Para ver la convergencia de esta serie se utiliza el criterio de la razón, siempre y cuando todos los términos de $\langle \Delta u_B \rangle$ sean finitos.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\ln\left(w-c+2^{n}\right)-\ln\left(w\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\ln\left(w-c+2^{n-1}\right)-\ln\left(w\right)\right)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(w-c+2^{n}\right)-\ln\left(w\right)}{\ln\left(w-c+2^{n-1}\right)-\ln\left(w\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{w-c+2^{n}}\left(2^{n}\ln 2\right)}{\frac{1}{w-c+2^{n+1}}\left(2^{n-1}\ln 2\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2}\left(\frac{w-c+2^{n-1}}{w-c+2^{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n-1}\ln 2}{2^{n}\ln 2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.4. Propiedades de la Solución

Una forma de representar la forma en que va cambiando la fortuna del jugador desde el principio hasta el i-esimo turno en el que obtiene un premio es usando una tasa de crecimiento exponencial. Esta puede ser calculada considerando los un factor r_i el cual se interpreta como el cambio de la riqueza de un jugador en el i-ésimo turno de la lotería, este factor se define como

$$r_i = \frac{w-c-m_i}{w} \tag{2.3}$$

Donde w es la riqueza inicial del jugador, c el costo que debe asumir el jugador para poder participar del juego y m_i es el premio que recibe el jugador en el i-esimo turno. Por último la tasa de crecimiento del i-esimo turno, definamosla g_i se obtiene al calcular el logaritmo de este factor, es decir, $g_i = \ln(r_i)$.

Teorema 2.10. *El promedio conjunto de la tasa de crecimiento exponencial en la lotería de San Petersburgo es*

$$\langle g \rangle = \ln\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{w-c+2^{n-1}}{w}\right]$$

Demostración. Para hacer el calculo del crecimiento promedio se inicia por calcular el crecimiento promedio sobre un conjunto de N posibles resultados de la lotería, el cambio en la fortuna del jugador involucrado con el i-ésimo resultado posible sera notado como r_i con $i = 1, 2, \ldots$, es posible suponer que algunos de los resultados sean iguales entre si o puedan repetirse mas de . El promedio de esta muestra estara dado por

$$\langle r \rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta la posibilidad de que uno o más resultados se repitan mas de una vez se puedan repetir, es posible crear el conjunto de números k_n los cuales indican la cantidad de veces que se repite el resultado

r_n el cual expresa la utilidad neta que se obtiene dentro del turno n, esta nueva sucesión permite reescribir la ecuación (2.4) de la siguiente manera

$$\langle r\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{n_N^{max}} k_n r_n \tag{2.5}$$

Donde n_N^{max} representa la máxima cantidad de resultados diferentes que fueron considerados dentro del conjunto de muestras inicial. El número $\frac{k_n}{N}$ se aproxima a la probabilidad de que el premio sea obtenido en el n-ésimo turno, al hacer tender a N a infinito se tiene

$$\begin{aligned}\langle r\rangle &= \lim_{N\to\infty}\langle r\rangle_N\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{n_N^{max}}\frac{k_n}{N}r_n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}p_n r_n\end{aligned}$$

El logaritmo de $\langle r\rangle$ expresa la tasa promedio de crecimiento exponencial. Teniendo en cuenta que la probabilidad de obtener un premio en el n-esimo turno tiene una distribución geométrica de parámetro $\frac{1}{2}$ y la formula (2.3) de r_n se concluye que

$$\langle g\rangle = \ln\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{w-c+2^{n-1}}{w}\right]$$

$\square$

Este teorema da la forma en que se puede calcular el tasa de crecimiento exponencia toal dentro de la lotería de San Petersburgo, teniendo en cuenta las condiciones que asume el jugador para participar dentro de la lotería.

Teorema 2.11. *La tasa de crecimiento exponencial promedio en el tiempo en la lotería de San Petersburgo es*

$$\bar{g} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\ln\left(w-c+2^{n-1}\right)-\ln\left(w\right)\right]$$

Demostración. Después de una cantidad T de turnos dentro de la lotería, la fortuna que podría alcanzar un jugador seria

$$\prod_{i=1}^{T} r_i.$$

La T-esima raíz del cambio total en la riqueza seria

$$\bar{r}_T = \left(\prod_{i=1}^{T} r_i\right)^{1/T} \tag{2.6}$$

Lo cual define el tiempo medio finito $\bar{r}_T$, este factor expresara el crecimiento promedio de la fortuna dentro de una cantidad T de intentos. Usando un termino k_n similar al de la demostración del teorema 2.10, el termino en (2.6) se puede reescribir como

$$\bar{r}_T = \left(\prod_{n=1}^{n_T^{max}} r_n^{k_n} \right)^{1/T}, \tag{2.7}$$

Como el termino $\frac{k_n}{T}$ se aproxima a la probabilidad de r_n para N grandes, entonces el tiempo medio de la lotería estaría dado por

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \lim_{T\to\infty} \bar{r}_T \\ &= \lim_{T\to\infty} \prod_{n=1}^{n_T^{max}} r_n^{k_n/T} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} r_n^{p_n}. \end{aligned}$$

Al calcular el logaritmo del termino anterior se obtiene el tiempo medio de la tasa de crecimiento exponencial y usando (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{g} &= ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} r_n^{p_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln r_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\ln(w - c + 2^{n-1}) - \ln(w) \right). \end{aligned}$$

□

[]Peters4913

CONCLUSIONES

- Bajo situaciones poco realistas el valor esperado de un conjunto de posibles ensayos diverge así cada uno de los posibles resultados tenga un valor esperado finito.
- Es posible solventar los problemas que se puedan tener con el valor esperado, haciendo uso de condiciones restrictivas que no afecten de forma significativa el fenómeno estudiado.
- La paradoja de San Petersbugo ilustra la forma en que se puede diseñar un experimento aleatorio para el cual el valor esperado no existe.
- Una solución sencilla a la paradoja de San Petersburgo se encuentra al restringir la cantidad de turnos que puede tener un jugador o la cantidad máxiam de dinero que se puede ganar en la loteria.
- La solución planteada por Nicolas Bernoulli es totalmente funcional siempre y cuando se apliquen las restricciones necesarias sobre la participación del jugador.

Bibliografía

[1] L. Blanco. *PROBABILIDAD*. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias, 2 edition, 2010.

[2] P.L. Meyer. *Probabilidad y Aplicaciones Estadisticas*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. de C.V., 1973.

[3] Ole Peters. The time resolution of the st petersburg paradox. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 369(1956):4913–4931, 2011.