



# IMPLEMENTACIÓN Y GENERACIÓN DE UN ALGORITMO (TWD) NO DECIMADO PARA LA FUSIÓN DE IMÁGENES SATELITALES IKONOS

**Autor**

**Giselle Helena Toro Garay**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas**

**Maestría en Ciencias de la Información y las Comunicaciones**

**Énfasis en Geomática**

**Bogotá, Colombia**

**Septiembre de 2020**



# IMPLEMENTACIÓN Y GENERACIÓN DE UN ALGORITMO (TWD) NO DECIMADO PARA LA FUSIÓN DE IMÁGENES SATELITALES IKONOS

**Autor**

**Giselle Helena Toro Garay**

**Tutor**

**PhD. Rubén Javier Medina Daza**

**Tesis presentada como requisito para optar al título de:  
Msc. Ciencias de la Información y las Comunicaciones con Énfasis en Geomática**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Maestría en Ciencias de la Información y las Comunicaciones  
Énfasis en Geomática  
Bogotá, Colombia  
Septiembre de 2020**

## NOTA DE ACEPTACIÓN

---

---

---

---

---

Dirigida, revisada y aprobada por:

---

PhD. Rubén Javier Medina Daza  
Director

---

M.Sc. Hans Igor López Chávez  
Jurado

---

PhD. Marco Aurelio Alzate Monroy  
Jurado

*A mi esposo, por compartir las noches difíciles y hacer las mañanas radiantes... siempre que tuve que volver a empezar.*

*A mis padres y mi hermano, por enseñarme el valor de hacer las cosas con amor y responsabilidad siempre.*

*A todos quienes me dieron un consejo y me apoyaron en este camino o simplemente me escucharon cada vez que lo necesité.*

## Tabla de contenido

Introducción	10
1. Formulación de la investigación	12
1.1 Planteamiento del problema	12
1.2 Formulación del problema	14
2. Objetivos	15
2.1 Objetivo general	15
2.2 Objetivos específicos	15
3. Estado del arte	16
3.1 Fusión de imágenes	16
3.2 Filtros espaciales	18
3.3 Algoritmos de descomposición wavelet	18
3.4 Filtros wavelet	19
4. Marco Teórico	22
4.1 Fusión de imágenes	22
4.2 Transformada HSV	23
4.3 Transformada Wavelet	24
4.3.1. Wavelets ortogonales y de soporte compacto.	26
4.3.2 Pares de Wavelet biortogonales y de soporte compacto.	28
4.4 Métodos en el dominio espacial	29
4.4.1 Filtros suavizantes: promedio, gaussiano y mediana.	30
4.4.2 Promedio de vecinos.	30
4.4.3 Mediana.	30
4.4.4 Filtro b3 Spline.	32
4.5 Métodos en el dominio de la frecuencia	33
4.5.1 Filtros pasa-baja para el suavizado.	34
4.5.2 Filtros pasa-alta para la contrastación.	34
4.6 Índices de evaluación de las imágenes	34
4.6.1 ERGAS espectral.	35
4.6.2 ERGAS espacial.	35

4.6.3 RMSE.	35
4.6.4 Diferencia en varianza.	35
4.6.5 Calidad Universal.	36
4.6.6 RASE.	36
4.6.7 Bias.	36
5. Metodología	37
5.1 Materiales y métodos	38
5.1.1 Adquisición de las imágenes.	38
5.1.2 Pre procesamiento de la imagen.	39
5.2 Implementación de la TWD	40
5.2.1 Descomposición Mallat.	41
5.2.2 Descomposición À trous.	42
5.3 Generación de imágenes fusionadas con los algoritmos Mallat, À trous, y algoritmos para la riqueza espectral y espacial	47
5.4 Evaluación de las imágenes	48
5.5 Validación de resultados	48
6 Resultados	50
6.1 Resultados descomposición Mallat	50
6.2 Resultados descomposición À trous	56
6.3 Resultados filtro generado para riqueza espectral	58
6.4 Resultados filtro generado para riqueza espacial	60
7. Validación de resultados	66
7.1 Worldview 2	66
7.1.1 Fusión con el algoritmo Mallat.	66
7.1.2 Fusión con el algoritmo À trous.	67
7.1.3 Filtro generado para la riqueza espectral.	68
7.1.4 Filtro generado para la riqueza espacial.	70
7.2 Landsat 8	74
7.2.1 Fusión con la descomposición Mallat.	74
7.2.2 Fusión con el algoritmo À trous	75
7.2.3 Filtro generado para la riqueza espectral.	76
7.2.4 Filtro generado para la riqueza espacial.	77
8. Análisis de resultados	81

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

9. Conclusiones	83
10. Trabajo Futuro	85
11. Anexos	86
12. Bibliografía	92

## Lista de figuras

Figura 1. Algoritmo de descomposición.	17
Figura 2 Esquema del proceso wavelet.	18
Figura 3. Diagrama Wavelet aplicando descomposición Mallat.	26
Figura 4. Interpolación con un filtro $h(x)$ de orden cero con un factor de interpolación $T=2$ .	28
Figura 5. . Interpolación con un filtro $h(x)$ de orden cero con un factor de interpolación $T=2$ en dos dimensiones.	28
Figura 6. Imagen IKONOS.	36
Figura 7. Esquema general de Descomposición Wavelet	37
Figura 8. Esquema de descomposición para el nivel 2 por el algoritmo Mallat para una imagen IKONOS.	38
Figura 9. Diagrama de descomposición por el método a trous.	39
Figura 10. Esquema de descomposición por el algoritmo à trous para una imagen IKONOS.	40
Figura 11. Descomposición À trous con el filtro propuesto.	42
Figura 12. Descomposición À trous, con modificación de inyección de riqueza espacial y filtro propuesto	43
Figura 13. Wavelets con más alto índice de Calidad Universal	46
Figura 14. Imágenes fusionadas a partir de la descomposición Mallat e imagen original	47
Figura 15. Wavelets con más alto índice de calidad universal	49
Figura 16. Imágenes fusionadas a partir de la descomposición Mallat.	50
Figura 17. Descomposición À trous de la imagen de estudio.	52
Figura 18. Imagen fusionada a partir del algoritmo propuesto.	54
Figura 19. Comparación de las imágenes fusionadas resultantes de la aplicación del filtro propuesto modificado comparadas con la imagen de estudio.	56
Figura 20. Imagen Worldview 2 fusionada con el filtro generado para la riqueza espectral.	63
Figura 21. Comparación Imagen fusionada Worldview 2 con el filtro generado para la riqueza espacial.	65
Figura 22. Porción de la Imagen Landsat 8 de validación..	70
Figura 23. Comparación Imagen fusionada Landsat 8 con el filtro generado para la riqueza espacial..	72



## Lista de tablas

Tabla 1. Características de los sensores utilizados.	34
Tabla 2. Resultados de la descomposición para el método Mallat RGB para la riqueza espectral	45
Tabla 3. Resultados de la descomposición para el método Mallat RGB para la riqueza espacial.	48
Tabla 4. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando la descomposición à trous	52
Tabla 5. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando el filtro generado para la riqueza espectral utilizado en la descomposición à trous	55
Tabla 6. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando el filtro generado para la riqueza espacial con la descomposición à trous	57
Tabla 7. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda una de los métodos utilizados basados en À trous	58
Tabla 8. Matriz de ganancia espacial y espectral de los métodos de fusión utilizados	59
Tabla 9. Evaluación espectral de la fusión Worldview 2 utilizando la descomposición Mallat	60
Tabla 10. Evaluación espacial de la fusión Worldview 2 utilizando la descomposición Mallat	61
Tabla 11. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición À trous sin modificaciones	62
Tabla 12. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando el filtro generado para la riqueza espectral en la descomposición À trous	64
Tabla 13. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición à trous con el filtro generado para la riqueza espacial	66
Tabla 14. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda una de los métodos utilizados basados en à trous en la imagen Worldview 2	66
Tabla 15. Ganancia espacial y espectral de los métodos implementados para la fusión en una imagen Worldview 2	67
Tabla 16. Evaluación espectral de la fusión Landsat utilizando la descomposición Mallat	68
Tabla 17. Evaluación espacial de la fusión Landsat utilizando la descomposición Mallat	69
Tabla 18. . Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición à trous	69
Tabla 13. Evaluación espectral y espacial de la fusión Landsat utilizando el filtro propuesto para la riqueza espectral en la descomposición à trous	70
Tabla 20. Evaluación espectral y espacial de la fusión Landsat 8 utilizando en la descomposición À trous con el filtro propuesto modificado	72
Tabla 21. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda una de los métodos utilizados basados en à trous en la imagen Landsat 8	73
Tabla 22. Ganancia espacial y espectral de los métodos implementados para la fusión en una imagen Landsat 8	74

## Introducción

La resolución de las imágenes satelitales, es una de las características más importantes para la aplicación en diferentes disciplinas y estudios como: identificación de objetos, clasificación de coberturas y detección de cambios (Dong, Zhuang, Huang, & Fu, 2009). Sin embargo, no siempre se encuentran imágenes con las características específicas e ideales para tal propósito, dado que existen múltiples fuentes disponibles de varios países, agencias y compañías, y la cobertura para un área determinada no siempre está disponible a través de la misma fuente o resolución (Liu, 2014). Desde esta perspectiva, en la última década se ha estudiado la fusión de imágenes para mejorar la resolución espacial o espectral de una misma o diferentes fuentes, incorporando información entre ellas (Medina, Joyanes, & Pinilla, 2013). Al respecto, entre los métodos de fusión más conocidos actualmente se encuentran: el análisis de componentes principales (PCA), la transformada de Brovey (BT) (Rumora, Gašparović, Miler, & Medak, 2020) y la transformada Wavelet (WV) (Ouahab & Belbachir, 2020).

Por otro lado, cabe mencionar que dentro de las transformadas Wavelet existen dos algoritmos de descomposición para la inyección de información durante la fusión. El algoritmo de Mallat (Han, Hu, & Zhang, 2010), que realiza una descomposición piramidal de la información, proporcionando coeficientes de aproximación y de detalle. Dichos coeficientes, son utilizados para aumentar la información dentro de la imagen fusionada; su principal característica es el hecho de que a cada iteración su tamaño disminuye a la mitad. À trous, a su vez, realiza una descomposición rectangular, lo que la hace redundante y permite que a cada iteración la imagen siempre tenga el mismo tamaño, de manera que, como la información disminuye, se compensa aplicando ceros en cada espacio, lo cual aumenta su efectividad y mejora los resultados (Chibani & Houacine, 2002). A pesar de ello, las resoluciones espectral y espacial, son inversamente proporcionales; es por esto que sobre estos algoritmos, especialmente sobre: À trous, se han generado varias modificaciones (Lillo-Saavedra & Gonzalo, 2006), (Saavedra, Martin, Zambrano, & Merino, 2008), buscando equilibrar la proporcionalidad entre las resoluciones. En general, se busca una mayor resolución espacial con una menor pérdida espectral, aunque también es necesario aumentar la resolución espectral en algunos casos.

Con base en lo anterior, en este trabajo se realizó una revisión de los filtros actuales y su comportamiento respecto a la conservación de las riquezas espectral y espacial en siete partes. Las primeras cuatro partes, presentan la justificación y los objetivos planteados, así como la revisión del estado del arte, y el marco teórico con la fundamentación matemática del desarrollo de los filtros propuestos.

La quinta parte, presenta metodológicamente el desarrollo de los filtros, en los cuales se tomó la descomposición rectangular de À trous y se modificó el filtro que se aplica a cada plano. Asimismo, se utilizaron dos planos Wavelet de descomposición, generando una matriz que carece de la aplicación de ceros en la ampliación del filtro. A partir de esto, se buscó el equilibrio de las resoluciones con el fin de no perder la riqueza espacial, importante para las labores antes mencionadas, lo cual se logró mediante la aplicación de un factor

razón de las resoluciones de la imagen original y su posterior multiplicación por la matriz generada para la riqueza espectral.

En la sexta parte, se presentan los resultados aplicados a una imagen IKONOS en la zona Noroccidental de Bogotá, Colombia, que contiene varias coberturas de interés por su heterogeneidad; entre ellas, pastos, zonas urbanas, cuerpos de agua etc. La efectividad fue medida mediante varios índices que proporcionan información acerca de: los errores relativos globales, errores medios, ajuste de la luminancia, histograma, distorsión, y correlación de la imagen fusionada respecto a la imagen original. En consecuencia, se comprobó cualitativa y cuantitativamente el aumento significativo de la riqueza espacial y espectral para esta imagen.

Finalmente, y una vez comprobados los efectos positivos de la aplicación de estas propuestas, en la última parte, se validaron los resultados utilizando dos imágenes provenientes de los sensores Worldview 2 y Landsat 8, con la finalidad de constatar que los resultados obtenidos fueran extensibles a imágenes, con características de tamaño, temporalidad y resoluciones distintas.

## 1. Formulación de la investigación

La fusión de imágenes satelitales ha sido ampliamente utilizada en diferentes ámbitos del procesamiento digital como: reconocimiento de patrones, aumento de resolución espacial o espectral, y estudios multitemporales (Dong, Zhuang, Huang, & Fu, 2009). Dicha fusión, se realiza con diversos métodos los cuales se exponen a continuación: el análisis de componentes principales (PCA), la transformada de Brovey (BT) (Rumora et al., 2020) o las transformadas Wavelet. En estas últimas, se pueden utilizar los algoritmos de descomposición Mallat o À trous en busca de los coeficientes que guardan la mayor resolución espacial. Varios estudios al respecto, han sido realizados con el algoritmo de descomposición Mallat propuesto en 1989 (Félix et al., 2014), (Abdipour & Nooshyar, 2016) y (Singh et al., 2017). Sin embargo, autores como Tirupal et al., 2016 y Gambhir & Manchanda, 2015, han demostrado la eficiencia del uso del algoritmo de À trous' (Dutilleux, 1990) por sus propiedades matemáticas y su intento de conservación de riqueza espectral y espacial. Desde esta perspectiva, se considera fundamental una implementación y evaluación del algoritmo À trous' con un nuevo enfoque, a partir del filtro espacial, sobre diferentes imágenes de sensores remotos, para obtener una menor degradación espectral y conservar una mayor riqueza espacial en las imágenes.

### 1.1 Planteamiento del problema

La importancia de la obtención de imágenes con alta resolución espacial y espectral ha sido constantemente demostrada (Ranchin & Wald, 2000), en especial, en estudios de vegetación acerca del uso del suelo o agricultura de precisión, dado que la resolución espacial juega un papel primordial en la fidelidad de las formas y características de los diferentes objetos geográficos. Así mismo, cabe resaltar que la resolución espectral es indispensable para análisis según el nivel de la tierra o la complejidad de las coberturas (Ranchin & Wald, 2000).

En este contexto, el uso de las wavelets ha crecido en los últimos años, trayendo consigo importantes avances en el procesamiento de señales; para lo que, existen wavelets decimadas y no decimadas. En este sentido, el decimado o “diezmado de una señal corresponde a la reducción de tamaño de dicha señal, o a la eliminación de algunas muestras de la señal. A este proceso de diezmado y procesado sucesivo se le conoce como codificación en sub-bandas” (Carvajal, 2008), el cual “es equivalente a insertar  $2^j$  ceros antes de procesar el nivel  $j$ ” (Renza Torres, 2015). Por lo demás, se aclara que la wavelet no decimada no contempla esta reducción, sino que mantiene su tamaño, como el caso de À trous'.

Ahora bien, se han realizado diferentes estudios respecto a la utilización de À trous' como algoritmo de descomposición, a fin de obtener imágenes de mayor resolución por medio de

la fusión; concepto que se puede entender como la combinación de información proporcionada por varios sensores o por el mismo, en el sentido espacial, espectral y/ o temporal (Lillo-Saavedra & Gonzalo, 2008). De igual forma, dentro de la fusión de imágenes existen diferentes tipos de estrategias para lograr esta combinación deseable; allí se encuentran los métodos convencionales, aceptados por su simplicidad y por estar incluidos en la mayoría de paquetes de software de procesamiento de imágenes y de señales.

Complementando lo anterior, el trabajo de Tu, Su, Shyu, & Huang (2001) propone un modelo generalizado de IHS Intensidad, Tono y Saturación. Otros autores por su parte Naidu & Raol (2008), han implementado el análisis wavelet para potenciar la capacidad de los métodos, a tal punto que usando wavelets y analizando los componentes principales se logran resultados aceptables. Estos métodos, aunque simples, tienen algunas limitaciones como, por ejemplo, el hecho de realizar el procesamiento únicamente a partir de tres bandas de la imagen simultáneamente (Lillo-Saavedra & Gonzalo, 2008) o tener degradación espectral (Nunez et al., 1999).

Por otra parte, en las últimas décadas el análisis multiresolución se ha convertido en una de las técnicas más utilizadas en la fusión de imágenes, dada su capacidad para representar de forma conjunta la información y minimizar incertidumbre. La más común es la Transformada Discreta de Wavelet (Ranchin & Wald, 2000). Sin embargo, tiene desventajas en cuanto a la selección precisa de detalles en la imagen PAN, lo que minimiza la cantidad de información espectral, y la maximiza en la MULTI, asociada a bajas frecuencias espaciales (Lillo-Saavedra & Gonzalo, 2008). En este sentido, la fusión por medio de las wavelets en el análisis multiresolución y sus transformadas Wavelet, permiten extraer el detalle espacial que se pierde cuando se pasa de una resolución espacial a otra menor (Pérez & Martínez, 2003). Probablemente los algoritmos de TDW más usados son Mallat y 'À trous' (Pérez & Martínez, 2003).

Ahora, algunos análisis aproximados de los algoritmos exponen suficiente evidencia para mostrar estructuras estrechamente relacionadas. No obstante, además de las restricciones en su filtro, el algoritmo 'À trous' y Mallat son idénticos (Shensa, 1991). Aun así, se pueden encontrar resultados visuales y estadísticos que muestran diferencias entre ellos, su respuesta en diferentes sensores, y sus posibilidades de aplicación en diferentes estudios. De manera que, las fusiones necesarias para estos estudios requieren de un software con pocas limitaciones de memoria, dado el gran tamaño de las imágenes satelitales y la sencilla implementación de algoritmos propios.

Por esta razón, se ha elegido el software MATLAB en la caja de herramientas Wavelet; su herramienta para el tratamiento de señales e imágenes a partir de Wavelets (Martínez, Peris, & Rodenas, 2013) incluye un desarrollo de la transformada wavelet 'À trous'. Así las cosas, surge la necesidad de mejorar el algoritmo TWD no decimado, con el fin de obtener una imagen con mejor resolución espacial y que degrade en menor valor la riqueza espectral.

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

## **1.2 Formulación del problema**

¿La generación de un filtro para la fusión de imágenes satelitales mediante la transformada wavelet discreta, mejora la resolución espacial y espectral de las imágenes satelitales?

## **2. Objetivos**

Los objetivos planteados en el presente trabajo se dirigen a la implementación de un filtro que permita, mediante la descomposición 'À trous' obtener mejores resultados con la Transformada Wavelet Discreta (TDW), su posterior evaluación con otros filtros mediante la descomposición Mallat, y su validación con sensores de diferentes; esto con la intención de demostrar que el filtro generado permite obtener una fusión con menor pérdida de resolución espacial y espectral, luego de realizar la fusión de imágenes.

### **2.1 Objetivo general**

Generar un filtro para la fusión de imágenes, que conserve la mayor riqueza espectral y espacial posible, usando TDW no decimado.

### **2.2 Objetivos específicos**

Fundamentar matemáticamente el método para la construcción de un filtro que degrade en menor valor la riqueza espectral, usando TDW.

Evaluar la efectividad del filtro mediante la comprobación de las mejoras, en la calidad espectral y espacial de la imagen resultante de la fusión.

Validar el filtro obtenido usando imágenes provenientes de diferentes sensores.

### 3. Estado del arte

En relación con el estado actual de los diferentes avances que han inspirado esta investigación, inicialmente se presenta el método implementado, conocido como fusión de imágenes, en el cual se realiza una extracción e inyección de las características de mayor detalle de la imagen de más alta resolución espectral o espacial, a la de menor, para intentar mitigar la pérdida total de alguna de ellas. Posterior a ello, se evidencia el desarrollo wavelet, uno de los métodos de fusión multiresolución más eficientes y utilizados por sus características de soporte compacto. Cabe mencionar que dentro de este proceso de fusión se utilizan filtros lineales de paso-alto, paso-bajo o pasa-banda; los cuales se refieren principalmente a la cantidad de información que se toma de la señal. Finalmente se exponen los métodos de descomposición, piramidal o rectangular para este caso, y los tipos de filtros lineales y no lineales. En consecuencia, este apartado permite conocer el flujo de trabajo y los avances que se han realizado hasta el momento en el tema.

#### 3.1 Fusión de imágenes

La fusión de imágenes es un método utilizado para realizar combinación entre resoluciones espaciales y espectrales, diferentes del mismo sensor que compensan, o de otros sensores; dado que ningún sistema único ofrece ambos (Abdullah, Kalyankar, & Al-Zuky, 2011). Desde este punto de vista, la fusión de imágenes usualmente está dividida en dos pasos: primero, se extraen los detalles espaciales de la imagen pancromática (PAN) que tiene una alta información espacial; y segundo, se integran los detalles espaciales en la imagen de Multiespectral (MS) que tiene baja resolución, así se obtiene una imagen con ambas resoluciones espacial y espectral altas, mediante algoritmos (Wang, 2015). Dichos algoritmos de fusión de imágenes tienen dos grandes categorías. Una se refiere al método de reemplazo de componentes, algunos representativos son: (IHS) Tono, intensidad y saturación; análisis de componentes principales (PCA) y la transformada de Brovey (TB). La segunda categoría es el análisis multiresolución (MRA), los métodos clásicos son: Las pirámides laplacianas, transformada Wavelet y la transformada Wavelet discreta (Wang, 2015).

Al respecto del uso de estos algoritmos, Carper, Lillesand, & Kiefer (1990) proponen la utilización del método IHS, que corresponde a la transformación de Intensidad, Tono y Saturación, en la cual encuentra una indicación del cambio visual en los datos fusionados, basados en la correlación con las imágenes originales que proporcionan la posibilidad de evaluar la precisión del contenido espectral. Sin embargo, esta medida no es absoluta y además distorsiona las características espectrales de las imágenes.

Otro método que se ha tratado en diferentes trabajos es el PCA (Análisis de componentes principales). En el trabajo realizado por Wang, Ziou, Armenakis, Li, & Li (2005), se describe como un método similar al IHS; los datos de las bandas multiespectrales se utilizan como



entrada en el análisis, y los datos de la banda pancromática se alargan para obtener una varianza y promedio similar a la primera componente. Este método también presenta distorsión espectral de la imagen fusionada, aunque en menor medida con respecto al método IHS, dado que la primera componente principal tiene más correlación con la imagen original que la intensidad.

De otro lado, se han propuesto métodos mejorados para mitigar en algún sentido los inconvenientes de la resolución. En estudios recientes, un ejemplo es el caso del HPM (Sojasi & Maldague, 2017), u otro, la combinación con el análisis wavelet que se tratará con más detalle a lo largo de este documento (Gabriel & Virginia, 2017). Estos métodos se conocen como clásicos, y a partir de los mismos, se han generado nuevos desarrollos que puedan disminuir el problema de desviación; entre estos sobresalen: SVR (Synthetic Variable Ratio) presentado por Zhang (1999), en el cual se propuso estudiar las áreas urbanas, y obtuvo mejores resultados que los encontrados a partir de las transformaciones clásicas. Así mismo la GS (Gram Schmidt Transformation) por Laben Bernard Craig (1998), o también el SFMI (Smoothing Filter-Based Intensity Modulation), desarrollada con base en un modelo simplificado de radiación solar y reflexión de la superficie terrestre, ya que al usar una relación entre una imagen de resolución alta y la imagen filtrada con un paso bajo, se pueden obtener los detalles espaciales con mejor resultado (Liu, 2000) sin alterar sus propiedades espectrales y contraste.

De igual manera, es importante tener en cuenta que a pesar del modelo o técnica de fusión utilizada se encuentran limitaciones, una de ellas es que a menudo dependen de la experiencia del operador que realiza la fusión y del conjunto de datos. Sin embargo, resumiendo los diferentes estudios realizados se pueden encontrar diferentes pasos para el fortalecimiento de algunos de los métodos mencionados (Zhang, 2004). Por lo demás, para IHS coincide la banda Pancromática con la Intensidad y antes del reemplazo se estiran las bandas Saturación y Tono, previo a la transformación inversa con respecto a los conjuntos de datos individuales. La fusión PCA por su parte, estira las componentes principales para obtener una distribución esférica o descartar el primer componente principal. Así que, en los métodos de combinación aritmética más simples, la distorsión varía dependiendo de las bandas que fusionan y el éxito depende del factor humano (Zhang, 2004).

En conclusión, la fusión Wavelet permite utilizar técnicas de ajuste o mejoramiento de bordes, que logran algunos de los resultados más exitosos en fusión de imágenes. Evidencia de esto se puede hallar en el estudio de Li, Manjunath, & Mitra (1995), en el cual la transformada wavelet de imágenes de diferentes sensores es combinada en una nueva imagen construida, a partir de la transformada wavelet inversa de los coeficientes encontrados; sugiriendo con ello, una nueva forma de medida, con una regla de selección máxima basada en el área, y un paso de verificación de coherencia que se utilizan para la selección de características. Finalmente, se resalta que Toet & Hogervorst (2016) desarrollaron un esquema de fusión de imágenes multiresolución, basado en el filtrado guiado. El filtrado guiado puede reducir el ruido de manera efectiva y preservar los límites de los detalles. A su vez, el esquema de fusión de imágenes a escala múltiple logra

consistencia espacial usando el filtrado guiado tanto en la descomposición como en la etapa de recombinación del proceso de fusión multiescalar.

### **3.2 Filtros espaciales**

Los filtros espaciales están clasificados en general entre lineales y no lineales. Los primeros, se implementan mediante un proceso llamado convolución espacial, también conocido como filtro de respuesta finita al impulso. Se realiza con la técnica pixel a pixel y hay diferentes tipos de filtros lineales. Al respecto, Aldalur (2002) ha realizado una revisión de los filtros lineales y no lineales entre los que se incluyen pasos alto, bajo y realces. Asimismo, el trabajo de Srinivasa Rao & Ramesh Babu (2017) presenta una comparación entre la fusión a partir de la transformada Wavelet discreta, y dos especializaciones de la mismas: la transformada coseno discreta y la coseno varianza; todas estas tratadas con un filtro lineal conocido como paso bajo, usando la metodología de la transformada wavelet estacionaria. Esto arrojó como resultado que la técnica bajo la STW, logra evidencia espacial y espectral de la imagen mejorada (Srinivasa et al., 2017) en comparación con otros métodos de fusión.

Ahora bien, respecto a los filtros no lineales los cuales no son función lineal de los valores de brillo de los pixeles de una imagen, Latouche, Solarte, Ordoñez, & Sánchez (2017) estudiaron la aplicación del filtro no lineal de diferencia dividida, Kalman Cubature y de diferencia centrada, con filtrado multidirección, los cuales permitieron comprobar que estos filtros permiten la reconstrucción apropiada de la imagen con menos difuminación que cuando se realiza en una única dirección. Algunos de los filtros no lineales más utilizados son los filtros de mediana y de moda, en relación con ello Osio, Rapallini, Quijano, & Ocampo (2010) y Tao Chen, Kai-Kuang Ma, & Li-Hui Chen (1999) investigaron la reducción de ruido mediante una ventana de pixeles que se va desplazando a lo largo de la imagen, y un nuevo filtro no lineal respectivamente. En ambos casos, se encontró que la utilización del filtro de mediana permite menor costo de procesamiento, conservando los detalles espaciales y eliminando el ruido. Por su parte, Kass, & Solomon (2010) también se ocuparon de la aplicación de un filtro de moda dominante, eficiente para calcular derivados e integrales precisos de histogramas ponderados localmente en vecindarios grandes para aplicación en imágenes.

### **3.3 Algoritmos de descomposición wavelet**

Existen diferentes metodologías para realizar la descomposición, entre ellas, se encuentran los métodos aditivos y sustitutivos. Estos proveen pasos diferentes durante la descomposición que mejoran los resultados de la fusión según el tipo de Wavelet elegida. En Mamatha, Sumalatha, & Lakshmaiah (2015) se propone un FPGA (Arreglo de campo programable) a partir del método de fusión, utilizando reglas de fusión promedio, aditiva y

sustitutiva. En la regla sustitutiva, se utilizan los filtros Haar, Daubechies 3 (db3) y Cohen Daubechies Feauveau (CDF) para la descomposición y la reconstrucción de la imagen.

Así mismo, en Shahdoosti (2015) se explica el método sustitutivo teniendo en cuenta que los planos ondulados de la imagen multispectral (MS) se descartan. Esto implica que, la información local espacial de alta frecuencia, que es visible en la imagen MS puede faltar en la imagen fusionada. Por lo tanto, el método sustitutivo puede eliminar la información geométrica y radiométrica de la imagen MS, entonces, la inyección de planos de ondas de alta frecuencia en el algoritmo es un problema para este método.

Por otra parte, con respecto al método aditivo Núñez et al. (1999) muestra la agregación de los planos ondulados de alta resolución de la imagen a la imagen multispectral. Los pasos en este artículo del método "aditivo" son los siguientes.

Agregar a los componentes: la primera posibilidad es agregar la información de alta resolución directamente a las bandas R, G y B.

- Descomponer solo la imagen pancromática de alta resolución a wavelets en  $n$  planos (niveles de resolución). Generalmente  $n=2$  o 3.
- Agregar los planos ondulados de la descomposición pancromática a las bandas R, G y B de la imagen multispectral.
- Agregar los planos ondulados de la descomposición pancromática a la componente L. (Nunez et al., 1999, p.1206).

### 3.4 Filtros wavelet

En cuanto a los filtros específicos, dentro de la literatura se encontró que Lillo-Saavedra (2004) implementó el control de la calidad espacial y espectral de imágenes, mediante el algoritmo *À trous*. Este es un algoritmo que no disminuye el tamaño de las imágenes a diferencia de Mallat, otro popular algoritmo de descomposición que se realiza en forma piramidal.

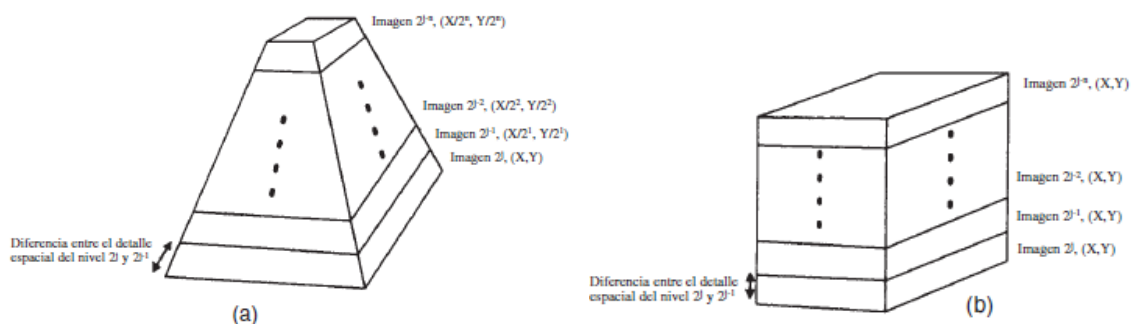


Figura 1. Algoritmo de descomposición. 1a) Descomposición Mallat. 1b) Descomposición *À trous*. Ajustado de Lillo-Saavedra (2004)

Es importante resaltar que mediante la descomposición Mallat (Mallat, 2009) es posible obtener imágenes de alta calidad, sin embargo, al ser un proceso de filtrado direccional se

tienen problemas con los bordes de objetos que se encuentren en diferentes direcciones a la horizontal (Lillo-Saavedra, 2004). En este sentido, el procesado rectangular por À trous tiene un coste computacional más alto, pero obtiene redundancia en la información, lo que permite mantener más datos durante la fusión. Al respecto, algunos autores muestran que la descomposición por el algoritmo de À trous presenta un resultado superior tanto en calidad espacial como espectral, en relación con la de Mallat, por realizar un análisis pixel por pixel de la imagen (Lillo-saavedra, 2004).

El proceso de filtrado por medio del algoritmo À trous se muestra a continuación:

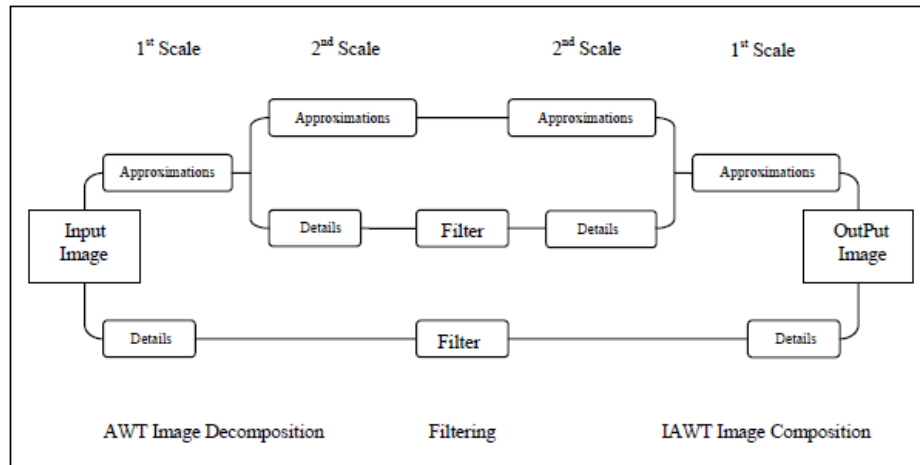


Figura 2 Esquema del proceso wavelet. Ajustado de Theodore et al. (2006)

De acuerdo con la figura, se puede observar que en cada nivel de descomposición se producen coeficientes de detalle y de aproximación, que luego serán adicionados o sustituidos según el método a utilizar, dentro de la imagen multispectral, a partir de una transformada Wavelet Inversa. Asimismo, cabe mencionar que el filtro de escalamiento más utilizado dentro del proceso (Figura 2) es la b3-spline, se puede representar como el filtro espacial de tamaño 5x5 (Lillo-Saavedra, 2004).

Por otro lado, la base de wavelets biortogonales fue realizada por Cohen, Daubechies, & Feauveau (1992) para obtener wavelets simétricas, regulares y soportadas de forma compacta. Esto es incompatible con la ortogonalidad. Las wavelets biortogonales construidas con splines son especialmente utilizadas por su apoyo corto y alta regularidad (Unser, 1997). Frente a ello, se han desarrollado otros estudios acerca del análisis de imágenes, como el de Hsieh Hou & Andrews (1978) y Kumar, Kartikeyan, & Majumdar (2000).

Se han presentado entonces diferentes estudios que abarcan desde los métodos tradicionales de fusión, hasta las más desarrolladas técnicas, a partir de algoritmos de descomposición basados en filtros espaciales. Sin embargo, no se ha encontrado aún la implementación de filtros que se usan actualmente en otro tipo de aplicaciones, lo que podría llevar a resultados con menor distorsión y pérdida de calidad espectral.

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

## 4. Marco Teórico

Dado que este trabajo se centra en la mejora de la riqueza espacial, con la menor pérdida de riqueza espectral, resulta fundamental dar cuenta de la definición que se le da en este trabajo. Para empezar, es esencial mencionar que dentro de las imágenes satelitales existen varios tipos de resolución, entre ellas, la espacial, que se refiere al tamaño de los píxeles en una imagen para los sensores de imágenes satelitales; este tipo de resolución es fija (Jong & Meer, 2004). Así mismo, la resolución espectral indica el número y anchura de las bandas espectrales que se pueden discriminar en el sensor (Pérez Gutiérrez & Muñoz Nieto, 2006), por tanto, a mayor cantidad de bandas, mayor será la resolución espectral. Complementando lo anterior, Wang & Zhou (2018), Gravey, Rasesa, & Mariethoz (2019) han realizado estudios asociados a la resolución espectral y su mejoramiento. Por su parte, la resolución temporal hace referencia al periodo de tiempo que tarda el sensor en tomar capturas de la misma porción de la superficie terrestre; esto realizado en términos de las características orbitales de la plataforma y el sensor tales como: altura, velocidad, ángulo de observación y abertura. Finalmente, la resolución radiométrica trata de “la sensibilidad de un sensor y su aptitud en una banda espectral dada, para diferenciar señales electromagnéticas” (Sobrino et al., 2000, p.43).

En términos generales, estas resoluciones se encuentran directamente relacionadas, es decir, a mayor resolución espacial, se disminuye la espectral y radiométrica, y esto se definirá según el tipo de estudio que se desee realizar; por ejemplo, en temas meteorológicos se magnifica la resolución temporal y se disminuye la espacial (Chuvienco, 1995). De igual forma, es frecuente adquirir imágenes de la misma zona, obtenidas de sensores que representan resoluciones espacial y espectral distintas. De hecho, es habitual que la resolución espacial sea diferente para algunas de las bandas espectrales de la imagen de un sensor, como, por ejemplo, la imagen multiespectral y pancromática, que tienen distintos tamaños de pixel (Pardo & Chica, 2005). Este último, es el caso de interés en el desarrollo de esta investigación, las imágenes utilizadas tienen diferentes resoluciones entre la multiespectral y la pancromática. En esta situación, se plantea un problema ampliamente tratado para el incremento o mejora de la resolución espacial de las bandas que poseen un menor detalle, su solución más común es la fusión de imágenes.

### 4.1 Fusión de imágenes

La fusión de imágenes provee una efectiva forma de reducir el creciente volumen de información, mientras que al mismo tiempo extrae toda la información importante desde las imágenes de origen. El objetivo de la fusión además de esta reducción de datos, es crear una única imagen mejorada más adecuada para la percepción visual y para el procesamiento en tareas de segmentación, detección de objetos o reconocimiento en

aplicaciones de teledetección e imágenes médicas (Wang et al., 2005). Para esta fusión, se utilizan diferentes técnicas, las cuales tal y como señalan Pohl & Van Genderen (1998):

se pueden agrupar en dos clases: (1) Técnicas relacionadas con el color y (2) Métodos estadísticos / numéricos. El primero comprende el color composición de tres canales de imagen en el espacio de color RGB, así como más transformaciones de color sofisticadas, por ejemplo, IHS y HSV. Los enfoques estadísticos son desarrollados sobre la base de las estadísticas del canal, incluida la correlación y técnicas como PCA y regresión pertenecen a este grupo. Los métodos numéricos siguen operaciones aritméticas tales como diferenciación de imágenes y proporciones, pero también suman de un canal a otras bandas de imagen (p. 830).

O bien, facilitan la realización de análisis multirresolución. Entre estos métodos, también se encuentra la transformación de componentes principales, que convierte las bandas multispectrales correlacionadas en un nuevo conjunto de componentes no correlacionados; la fusión con HSV y combinaciones aritméticas diferentes, entre ellas la transformada Brovey, radio sintético variable o mejora de radio.

#### 4.2 Transformada HSV

La transformada HSV es un sistema de color de uso frecuente en la fusión de imágenes, porque es más adecuado para la experiencia humana y percepción que otros sistemas de color (Jin et al., 2018). Se hace mediante un cambio de espacio de color en el cual, H, S y V, denotan el tono, la saturación y Valor o value (también llamado brillo), respectivamente (Jin et al., 2018). El tono se usa generalmente para distinguir un color particular y sus valores varían entre 0° a 360°; por su parte, la saturación representa la pureza de un color y su rango de valores es de 0 a 100; y el value, describe el brillo de un color con valores entre 0 y 100 (Jin et al., 2018). Por lo demás, su conversión del espacio de color RGB al espacio de color HSV se hace utilizando:

$$H = \begin{cases} 0, & (S = 0) \\ 60 \frac{G-B}{(S)(V)}, & (\max(R, G, B) = R \& G \geq B) \\ 60 \frac{2+(B-R)}{(S)(V)}, & (\max(R, G, B) = G) \\ 60 \frac{4+(B-R)}{(S)(V)}, & (\max(R, G, B) = B) \\ 60 \frac{6+(B-R)}{(S)(V)}, & (\max(R, G, B) = R \& G < B) \end{cases} \quad (1)$$

$$S = \frac{\max(R,G,B) - \min(R,G,B)}{\max(R,G,B)} \quad (2)$$

$$V = \max(R, G, B) \quad (3)$$

Donde RGB, corresponde a las bandas, roja, verde y azul de la imagen de entrada, respectivamente; y S, V corresponden a la saturación y el valor de la imagen de salida. Estos algoritmos son seleccionados porque su uso es relativamente simple y su tiempo de ejecución en los esquemas de fusión es eficiente (Stathaki, 2011), sin embargo, el uso de estas técnicas tiene como inconveniente el hecho de introducir distorsión espectral en la imagen producto de la fusión (Gonzalez-Audicana, Saleta, Catalan, & Garcia, 2004).

### 4.3 Transformada Wavelet

El análisis wavelet es una técnica matemática utilizada para representar datos o funciones y es considerada como otra estrategia para la fusión de imágenes, conocida como la transformada wavelet, un método de análisis multiresolución. El término “wavelet” proviene del hecho de que, durante el procesamiento de las señales, estas se integran a cero, y se agitan en el eje arriba o abajo (Gupta & Choubey, 2008). Las wavelets se han estudiado por primera vez en los trabajos de Grossman y Morlet (1984).

Es una técnica emergente de procesamiento que se utiliza para representar la vida real con señales no estacionarias con alta eficiencia. La wavelet es una onda de duración limitada que tiene un valor promedio cero. Muchas wavelets también poseen la propiedad ideal para la representación de una señal compacta: la ortogonalidad (Gupta & Choubey, 2008). Esta propiedad garantiza que los datos no estén representados en exceso. Cabe resaltar además que una señal se puede descomponer en muchas representaciones escaladas y desplazadas de la wavelet madre original. Es decir, se puede utilizar adicionalmente para descomponer la señal en wavelets componentes; una vez realizado, es posible diezmar para eliminar algunos detalles (Mozammel, Chowdhury, & Khatun, 2012).

Ahora bien, la Transformada Wavelet (WT) se usa principalmente en el procesamiento de señales y se ha demostrado su importancia en aplicaciones como cancelación de ruido, usando la transformada Wavelet Continua (CWT) (Youssef, Nasim, wasi, Khisal, & Khan, 2018). Matemáticamente son funciones generadas desde un prototipo simple de función  $\psi$  por dilataciones y traslaciones:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4)$$

Donde  $\psi$ , se conoce como la wavelet madre y cuando los parámetros  $a$  y  $b$  están restringidos a valores discretos, una nueva familia de ondículas discretas es derivada (Bhandari, Gadde, Kumar, & Singh, 2012).

La idea básica de la transformada wavelet es representar cualquier función  $f$  arbitrariamente como una superposición de wavelets. Esto es deseable porque permite reconstruir la función original desde la descomposición wavelet. Bajo la condición que  $\psi$  tiene suficiente decaimiento, esto es:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (5)$$



Donde  $\psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(t)$ . Para propósitos prácticos la transformada wavelet discreta es preferible, considerando que el principal interés es una señal como sucesivas resoluciones separadas por un factor de 2, la transformada discreta wavelet puede estar definida por  $a = 2^m$  y  $b = n2^m$  donde  $m$  y  $n$  son enteros (Li et al., 1995). Esto representa ventajas en la escala de las funciones y wavelets ortogonales. Las bases ortogonales de la función siguen un simple cálculo de expansión de los coeficientes y tienen el teorema de Parseval para particionar la señal de energía en el dominio de la transformada wavelet (Burrus, Gopinath, & Guo, 1998) (Abdullah et al., 2011).

El complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$  es definido como  $W_j$ . Esto requiere:

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,\ell}(t) \rangle = \int \varphi_{j,k}(t) \psi_{j,\ell}(t) dt = 0 \quad (6)$$

Para todo  $j, k, \ell \in Z$ .

La relación de varios subespacios puede ser vista desde la siguiente expresión. Partiendo de  $V_j, j = 0$ :

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2 \quad (7)$$

Se define la wavelet abarcando el subespacio  $W_0$  como:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \quad (8)$$

En general se ve como:

$$L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (9)$$

Siendo:

$$L^2 = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots \quad (10).$$

Ahora bien, sea

$$h_n = 2^{t/2} \int \phi(t-n) \phi(2t) dt \quad (11)$$

$$g_l = (-1)^l h_{1-l} \quad (12)$$

Entonces se puede demostrar que existen las siguientes relaciones recursivas entre coeficientes:

$$c_{m,n} = \sum_k g_{2n-k} a_{m-1,k} \quad (13)$$

$$\mathbf{a}_{m,n} = \sum_k \mathbf{h}_{2n-k} \mathbf{a}_{m-1,k} \quad (14)$$

Estas dos operaciones representan la operación de filtrado utilizada como, filtro paso bajo  $h$  y filtro paso alto  $g$ .

Las wavelets tienen como ventaja la capacidad de separar los detalles finos de una señal, entonces, las wavelets muy pequeñas pueden usarse para aislar detalles muy finos de una señal, mientras que las wavelets muy grandes pueden identificar detalles gruesos. Adicionalmente hay gran variedad de wavelets para elegir, una en particular puede generar una representación más escasa de una señal en relación con otra (Mozammel et al., 2012).

#### 4.3.1. Wavelets ortogonales y de soporte compacto.

En este trabajo, se han utilizado diferentes tipos de wavelet con la intención de evaluar las diferencias con el método propuesto, y la descomposición, que se explicará posteriormente. Estas Wavelets fueron escogidas por sus características de ortogonalidad que permiten la descomposición están divididas así:

##### 4.3.1.1. Haar.

Las wavelets fueron utilizadas en este contexto por primera vez, por Alfred Haar. La wavelet conocida como Haar, fue la primera y más simple wavelet creada; es una función escalonada (Bhandari et al., 2012) así:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1 \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \psi(x) &= -1 \text{ si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \psi(x) &= 0 \text{ si } x \notin [0,1] \\ \phi(x) &= 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ \phi(x) &= 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{aligned} \quad (15)$$

##### 4.3.1.2. Daubechies.

La wavelet db1, es la misma que Haar (Bhandari et al., 2012):

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k \quad (16)$$

Donde  $C_k^{N-1+k}$  denota los coeficientes binomiales:

$$|m_0(\omega)|^2 = (\cos^2(\frac{\omega}{2}))^N P((\sin^2(\frac{\omega}{2})) \quad (17)$$

Donde  $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\omega}$

La longitud de soporte de  $\psi$  es  $2N - 1$ . El número de los momentos de fuga de  $\psi$  es  $N$ , además la mayoría de los dbN no son simétricos. Para algunos, la asimetría es muy pronunciada; la regularidad aumenta con el orden. Cuando  $N$  es muy grande,  $\psi$  pertenece a  $C^{\mu N}$  donde  $\mu$  es aproximadamente igual a 0.2. Finalmente, el análisis es ortogonal (Bhandari et al., 2012).

#### 4.3.1.3. *Symlets.*

Es una familia de wavelets hecha mediante una versión modificada de la wavelet Daubechies con mayor simetría y modificaciones a la familia db. Las propiedades de las dos familias son similares. Hay siete funciones Symlet diferentes de sym2 a sym8. En SymN,  $N$  es el orden. Entre sus características, son simétricas y están diseñadas para tener menor asimetría y número máximo de momentos de desvanecimiento para un soporte compacto dado (Yadav, Roy, Kumar, Kumar, & Dhakad, 2015), La idea consiste en reusar la función  $m_0$  introducida en dbN, considerando  $|m_0(\omega)|^2$ , como una función  $W$  de  $z = e^{i\omega}$ . Entonces es posible factorizar  $W$  de varias maneras diferentes en forma de:

$$w(z) = U(z) \overline{U(\frac{1}{z})} \quad (18)$$

Donde las raíces de  $W$  con módulo no son iguales, aun si una de las raíces es  $z^1$ , entonces  $\frac{1}{z^1}$  también es una raíz. Si  $U$ , un filtro de fase mínima; cuando se elige un  $U$  tal que el módulo de todas sus raíces es estrictamente menor a 1, entonces se obtiene la construcción de las wavelets Daubechies dbN. En su lugar si se elige  $U$  diferente, se obtienen más filtros simétricos, adquiriendo así las symlets (Bhandari et al., 2012).

#### 4.3.1.4. *Coiflets.*

Estas wavelets son más simétricas que las wavelets Daubechies. La wavelet madre tiene un tamaño de soporte de  $3q-1$  en lugar de  $2q-1$  como en el caso de las Daubechies (Dogra, Goyal, & Agrawal, 2016). Las dos funciones tienen un soporte de longitud  $6N-1$ . La coifN  $\psi$ , es mucho más simétrica que las dbNs (Bhandari et al., 2012).

#### 4.3.2 Pares de Wavelet biortogonales y de soporte compacto.

##### 4.3.2.1 Wavelets Biortogonal y Biortogonal Inversa.

Esta familia de wavelets cuenta con la propiedad de fase linear, necesaria para el análisis y reconstrucción de la señal de la imagen. Primero,  $\psi$  es usado en el análisis, y los coeficientes de una señal  $s$  son:

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (19)$$

Por otro lado,  $\psi$  es usado en la síntesis:

$$S = \sum_{j,k} \tilde{c}_{j,k} \psi_{j,k} \quad (20)$$

Además, las wavelets  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$  están relacionados por dualidad en el siguiente sentido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx = 0 \quad \text{tan pronto como } j \neq j' \text{ or } k \neq k' \text{ e incluso } (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_{o,k}(x) \phi_{o,k'}(x) dx = 0 \quad \text{tan pronto como } k \neq k' \quad (5)$$

Cuando se usan dos wavelets (una para descomposición y otra para reconstrucción), se derivan propiedades interesantes; su diseño permite grados de libertad adicionales que las wavelets ortogonales no poseen, por ejemplo, la construcción de wavelets simétricas. El nombre de la wavelet representa los momentos de fuga. La wavelet biortogonal inversa se obtiene a partir de pares de wavelets biortogonales; estas dos familias son wavelets estriadas biortogonales de soporte compacto con las que se obtiene simetría, y reconstrucción exacta, usando filtros de respuesta de impulso finito (Stoilojescu, Railean, Moga, & Isar, 2010).

Otros algoritmos de fusión de imágenes, son los basados en el marco multiresolución a partir de la Transformada Wavelet Discreta (TWD), Kim, Lee, Han, Kim, & Kim (2011) y Marcello, Medina, & Eugenio (2013) utilizaron este método en su análisis de diferentes técnicas de distorsiones espaciales y espectrales. La fusión TWD es un método mediante el cual se calculan los coeficientes wavelet de la imagen pancromática, para extraer información espacial y luego son combinados con los coeficientes de la imagen multispectral. Esta combinación se realiza mediante diferentes reglas de fusión como la adición, sustitución, selección máxima o promedio. El método elegido es un aspecto fundamental en el mejoramiento de la imagen (Jinju, Santhi, Ramar, & Sathya Bama, 2019).

Al ser la descomposición de la transformada wavelet necesaria para realizar la fusión de imágenes (Nunez et al., 1999), (Lillo-Saavedra & Gonzalo, 2007), se tienen dos metodologías ampliamente investigadas y utilizadas. Una es la descomposición con el algoritmo Mallat (Amolins, Zhang, & Dare, 2007), y la otra es la descomposición con el algoritmo À trous (González-Audicana, Otazu, Fors, & Seco, 2005); siendo este último el que presenta un mejor comportamiento (Medina, Carrillo, & Upegui, 2018).

Al hilo de todo lo anterior, en el presente estudio se utilizará la Transformada Wavelet Discreta (TWD), una versión muestreada de la CWT (Youssef et al., 2018), la cual representa en esencia una alteración lineal que funciona en un vector de datos. Es calculada de forma efectiva con una cascada de filtrado, seguido de un submuestreo de factor de 2, como los filtros de paso alto y bajo, correspondientes. El componente de alta frecuencia de la señal se representa como descomposición a baja escala, que se denota como coeficientes detallados. Mientras que el componente de baja frecuencia de las señales, se determina como una descomposición de gran escala denominada como los coeficientes de aproximación. Luego, las señales deben normalizarse para disminuir la dificultad debida a las magnitudes de las líneas (Mohan & Kiran, 2018).

Estas wavelets se representan con 1-D y formas 2-D y generan componentes de frecuencia LL, LH, HL y HH. Esta metodología simplificada se muestra en la siguiente imagen:

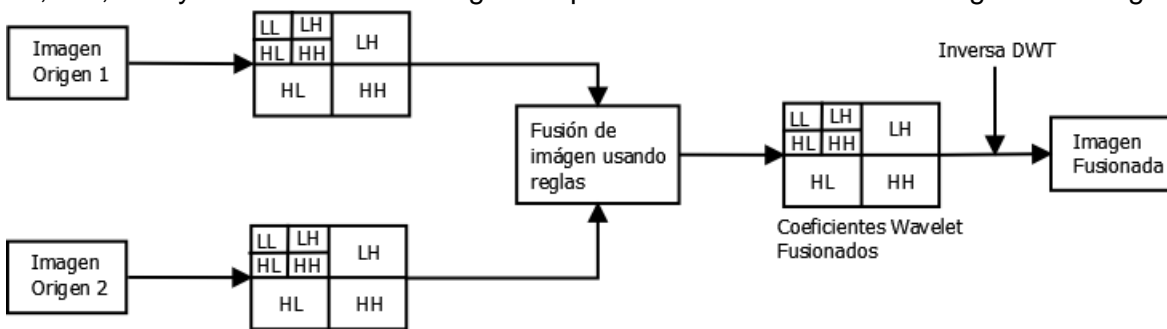


Figura 3. Diagrama Wavelet aplicando descomposición Mallat. Ajustado de Mohan & Kiran (2018)

La Figura 3, representa el diagrama de fusión Wavelet simplificado con dos imágenes de origen, en donde se hallan los coeficientes de aproximación y detalle en sucesivas iteraciones con potencias de 2. El proceso termina con la aplicación de la transformada Wavelet inversa, la cual permite la reconstrucción de una nueva imagen fusionada. Estos filtros que se aplican a las imágenes dentro del proceso de descomposición se pueden agrupar en dos grandes tipos: métodos en el dominio espacial y métodos en el dominio de la frecuencia.

#### 4.4 Métodos en el dominio espacial

El dominio espacial hace referencia al conjunto de puntos que componen la imagen, sus métodos son procedimientos que operan directamente sobre los píxeles. Las transformaciones se pueden expresar como:

$$g(x, y) = T\{f(x, y)\} \quad (23)$$

Donde  $f(x, y)$  es la imagen de entrada,  $g(x, y)$  es la imagen procesada y T es el operador definido sobre alguna vecindad del punto  $(x, y)$  (González & Wintz, 1977).

#### 4.4.1 Filtros suavizantes: promedio, gaussiano y mediana.

En el suavizado se utilizan varias operaciones cuyo objetivo principal es disminuir algunos efectos negativos de las imágenes que pueden ser provocados por un sistema de muestreo o de canal de transmisión pobre (González & Wintz, 1977).

#### 4.4.2 Promedio de vecinos.

Dada una imagen  $f(x, y)$  de tamaño  $N \times N$  el valor del nivel de gris de la imagen suavizada  $g(x, y)$  en el punto  $(x, y)$ , se obtiene promediando los valores de nivel de gris de los puntos de  $f$  contenidos en una cierta vecindad de  $(x, y)$  (González & Wintz, 1977, p.451):

$$g(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{(n,m) \in S} f(n, m) \quad (24)$$

Donde  $x, y = 0, 1, \dots, N - 1$ .  $S$  es el conjunto de coordenadas de los puntos vecinos a  $(x, y)$ , incluyendo el propio  $(x, y)$ , y  $M$  es el número de puntos de la vecindad.

#### 4.4.3 Mediana.

Con métodos como el anterior se puede presentar una difuminación de los bordes, por esto, un método alternativo son los filtros de mediana, en ellos se reemplaza el valor de gris de un punto por la mediana de los niveles de gris de cierta vecindad. Su función principal es forzar los puntos con valores de intensidad muy diferentes a sus vecinos próximos, a tener valores más cercanos a sus vecinos; de esta forma se logra eliminar los picos de intensidad que aparecen en áreas aisladas (González & Wintz, 1977). A continuación, se caracterizan los filtros mencionados:

1. Filtro pasa baja: Atenúan las altas frecuencias (ruido).  
La idea es reemplazar el valor de cada pixel de una imagen con el valor promedio de sus vecinos, incluyéndose el mismo; esto elimina valores de pixeles poco representativos de sus vecinos (Escalante, 2006).
2. Filtro pasa alta: Atenúan las bajas frecuencias (realzan detalles).  
El objetivo es destacar detalles finos de una imagen o intensificar detalles que han sido difuminados. El perfil de respuesta a un impulso indica que debe poseer coeficientes positivos cerca de su centro y negativos en la periferia.
3. Filtro pasa banda: Atenúan bajas y altas frecuencias.
4. Filtro rechaza banda: Atenúan una banda específica de frecuencias (Escalante, 2006).

### 4.5 Interpolación

La interpolación o “unsampling” es un proceso relacionado con el cambio de la tasa de muestreo de una señal discreta, a una tasa menor o mayor con la que se muestreó

originalmente (Escalante, 2006). Esta junto con el “downsampling”, son las tareas básicas de conversión de la frecuencia de muestreo. La frecuencia se modifica mediante un proceso en el cual se aumenta la tasa de muestreo de la señal discreta, por medio de un factor entero  $T$ , esto se denomina interpolación (Escalante, 2006). Las opciones para realizar este proceso son numerosas, entre ellas, se encuentra: interpolación lineal, cuadrática, splines, splines bicúbicas, etc. Todas se basan en añadir información simulada a la señal; adicionalmente se usa un procedimiento para preservar el contenido espectral de una señal (Martínez, Gómez, Serrano, Vila, & Gómez, 2009).

Ahora bien, en este proceso se añaden  $T-1$  ceros entre muestras sucesivas de la señal, con lo que el espectro se mantiene mientras aumenta la frecuencia de muestreo (Martínez et al., 2009). Una de las más simples formas para esta interpolación es elegir la amplitud de un pixel de salida como la amplitud de su vecino más cercano; esta forma es conocida como interpolación de orden cero. Por su parte, el factor de interpolación  $T$  indicará cuántos pixeles se desean interpolar, entonces, la señal interpolada será el resultado de hacer la convolución de la señal original con sobremuestreo; es decir, ceros agregados con el filtro interpolador (Escalante, 2006).

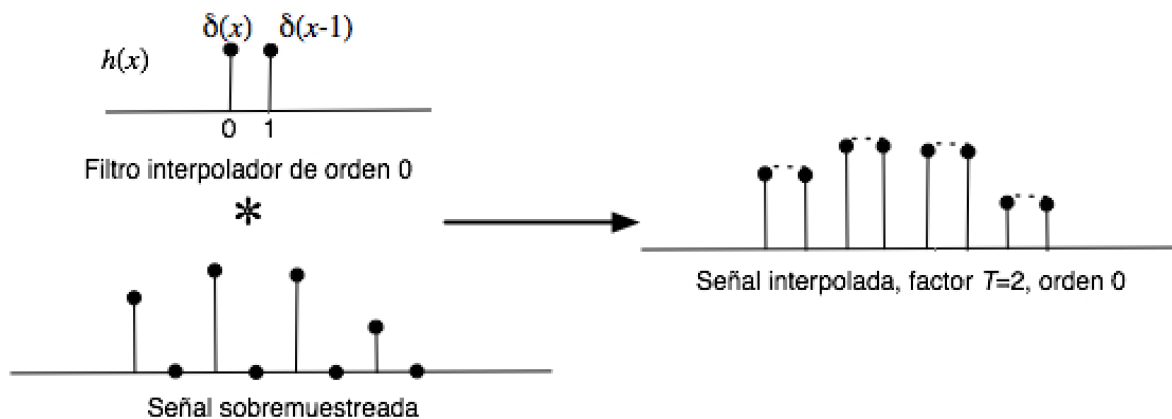


Figura 4. Interpolación con un filtro  $h(x)$  de orden cero con un factor de interpolación  $T=2$ . Ajustado de Escalante (2006)

La Figura 4 muestra el proceso de interpolación para una señal con un factor 2; se puede observar el proceso de convolución realizado entre un filtro interpolador de orden cero, y la señal sobremuestreada, esto genera una señal suavizada. El factor de interpolación, entonces, indica cuántos elementos se desean interpolar; en el caso de imágenes, este factor muestra cuánto se quiere amplificar una imagen. Para esto se hace un proceso similar al descrito en una dimensión en la Figura 4.

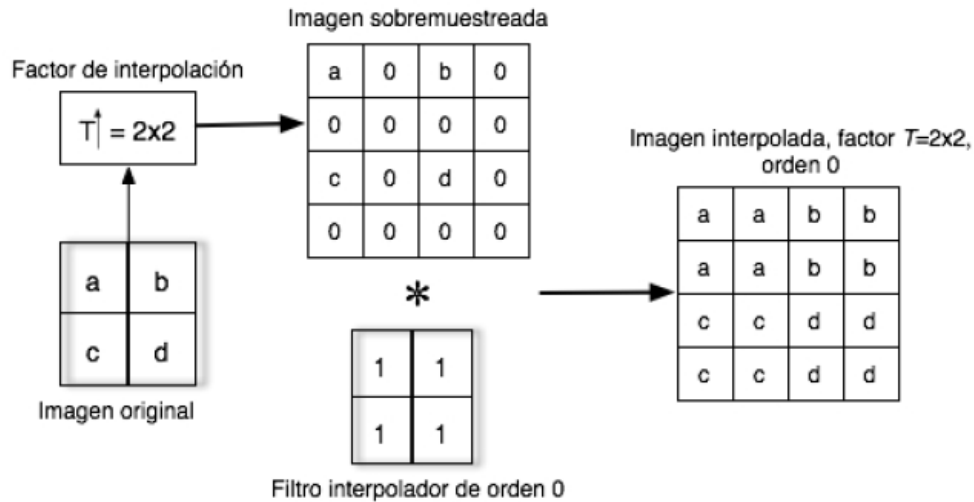


Figura 5. Interpolación con un filtro  $h(x)$  de orden cero con un factor de interpolación  $T=2$  en dos dimensiones. Ajustado de Escalante (2006)

En la figura 5 se observa la imagen remuestreada con un filtro de orden cero. El orden del filtro indica la forma en cómo se aproxima a través de un polinomio a la función representada por las muestras. Hay varios filtros interpoladores para las imágenes, se obtienen discretizando, en valores deseados, estos polinomios interpoladores. Los que se usan con mayor frecuencia son: lineales, cúbicos o bicúbicos. Por su parte, la respuesta para uno de orden cero, es un zoom duplicado; mientras que uno lineal realiza un zoom asignando el promedio de dos muestras a la muestra interpolada.

#### 4.4.4 Filtro b3 Spline.

El filtro b3 spline ha sido utilizado en la literatura como filtro interpolador, en los planos sucesivos de la descomposición  $\hat{A}$  trous (Lillo-Saavedra, 2004). Como se mencionó anteriormente, es uno de los filtros interpoladores utilizados con mayor frecuencia, porque tienen propiedades de aproximación de datos deseables (Starck, Murtagh, & Bijaoui, 1998). Cuando se usa como función de escala se utiliza el polinomio (Scherzer, 2010):

$$\phi(x) = \frac{1}{12} (|x - 2|^3 - 4|x - 1|^3 + 6|x|^3 - 4|x + 1|^3 + |x + 2|^3) \quad (25)$$

Según Dutilleux (1990) se puede realizar una secuencia  $s(n)$  de convolución basada en una wavelet  $g(n)$ :

$$(K_g s)(n) = \sum_m g(m - n)s(n) \quad (26)$$

Y se relaciona  $F$  como el primer factor pre integrador que será dilatado posteriormente con los ceros durante la interpolación:

$$F = (1/2, 1/2) \quad (27)$$



$$A = (F) \otimes (F) = (1/4, 1/2, 1/4) \quad (28)$$

$$B = (A) \otimes (A) = (1/8, 3/8, 3/8, 1/8) \quad (29)$$

$$h_{1D} = (B) \otimes (B) = (1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16) \quad (30)$$

Obteniendo la máscara de convolución en una dimensión así (Scherzer, 2010):

$$h_{1D} = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \right\} \quad (31)$$

Realizando el producto de Kronecker entre el vector y su traspuesta se puede obtener (Maisinger et al., 2004):

$$B_3 = (1/16 \ 1/4 \ 3/8 \ 1/4 \ 1/16) \otimes \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/4 \\ 3/8 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Finalmente, el filtro de interpolación de la  $B_3$  spline:

$$B_3 = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1/256 & 1/64 & 3/128 & 1/64 & 1/256 \\ 1/64 & 1/16 & 3/32 & 1/16 & 1/64 \\ 3/128 & 3/32 & 9/64 & 3/32 & 3/128 \\ 1/64 & 1/16 & 3/32 & 1/16 & 1/64 \\ 1/256 & 1/64 & 3/128 & 1/64 & 1/256 \end{pmatrix} \quad (33)$$

El filtro en su primera expansión aplicando las condiciones de À trous se ve como:

$$B_3 = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1/256 & 0 & 1/64 & 0 & 3/128 & 0 & 1/64 & 0 & 1/256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/64 & 0 & 1/16 & 0 & 3/32 & 0 & 1/16 & 0 & 1/64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/128 & 0 & 3/32 & 0 & 9/64 & 0 & 3/32 & 0 & 3/128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/64 & 0 & 1/16 & 0 & 3/32 & 0 & 1/16 & 0 & 1/64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/256 & 0 & 1/64 & 0 & 3/128 & 0 & 1/64 & 0 & 1/256 \end{pmatrix} \quad (34)$$

#### 4.5 Métodos en el dominio de la frecuencia

Estos métodos procesan la imagen en el dominio de la frecuencia, para ello es necesario procesar la transformada de Fourier de la imagen, que se multiplicará por una función filtro, y al hacer la inversa o anti transformada, se implementa en el dominio espacial si y solo si hay un kernel de convolución simple.

El representar la información de la imagen en el dominio de la frecuencia tiene ventajas a la hora de aplicar algunos algoritmos y de determinar ciertas propiedades de la imagen. Cada armónico va a recoger un nivel de detalle, de cómo es la variación de los niveles de gris espacialmente (González & Wintz, 1987, p.57).

#### 4.5.1 Filtros pasa-baja para el suavizado.

El filtro pasa baja más simple es conocido como el filtro pasa bajos. Suprime todas las frecuencias más altas que la frecuencia de corte  $D_0$  y no modifica las frecuencias bajas (González & Wintz, 1987).

$$H(u, v) = 1 \text{ si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq D_0 \quad 0 \text{ si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_0 \quad (35)$$

$D_0$  se especifica como una fracción de la frecuencia mas alta representada en el dominio de Fourier (Aldalur, 2002).

#### 4.5.2 Filtros pasa-alta para la contrastación.

Las bajas frecuencias de una imagen pueden ser atenuadas a través de un filtro pasa alto especificado en la frecuencia. Para esto, se multiplica la transformada de Fourier de la imagen con la función del filtro, y luego, se aplica al resultado la transformada inversa de Fourier para obtener la imagen en el dominio espacial filtrada (Aldalur, 2002).

El filtro pasa alta ideal está representado por:

$$H(u, v) = 1 \text{ si } \sqrt{u^2 + v^2} < D_0 \quad 0 \text{ si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_0 \quad (36)$$

Durante la implementación de los filtros previamente descritos es necesario realizar un proceso de interpolación. Esta es una técnica comúnmente usada para mejorar la imagen, se utiliza en múltiples aplicaciones como la reconstrucción facial, codificación de descripción múltiple y súper resolución. Algunas de las técnicas de interpolación conocidas son interpolación del vecino más cercano, interpolación bilineal e interpolación bicúbica (Demirel & Anbarjafari, 2011).

## 4.6 Índices de evaluación de las imágenes

Una vez realizada la fusión de las imágenes, debe someterse a un proceso de evaluación para determinar la pérdida de resolución espacial, espectral, para ello se utilizaron los índices.

#### 4.6.1 ERGAS espectral.

El índice ERGAS espectral (del francés Erreur Relative Globale Adimensionnelle de Synthèse) (Vaiopoulos, 2011) viene dada por:

$$ERGAS_{Espectral} = 100 \frac{h}{l} \sqrt{\frac{1}{N_{bandas}} \sum_{i=1}^{N_{bandas}} \left[ \frac{(RMSE_{Espectral}(Banda^i))^2}{(MULTI^i)^2} \right]} \quad (37)$$

Donde h y l representan la resolución espacial de las imágenes pancromáticas (PAN) y multiespectrales (MULTI); NBands es el número de bandas de la imagen fusionada; MULTI<sup>i</sup> es el valor de la radiancia e la banda i – ésima de imagen (Vaiopoulos, 2011).

#### 4.6.2 ERGAS espacial.

Está basado en el ERGAS espectral y se define como:

$$ERGAS_{Espacial} = 100 \frac{h}{l} \sqrt{\frac{1}{N_{bandas}} \sum_{i=1}^{N_{bandas}} \left[ \frac{(RMSE_{Espacial}(Banda^i))^2}{(MULTI^i)^2} \right]} \quad (38)$$

Donde h y l representan la resolución espacial de las imágenes pancromáticas (PAN) y multiespectrales (MULTI); NBands es el número de bandas de la imagen fusionada; PAN<sup>i</sup> es el valor de la radiancia e la banda i – ésima de imagen (Vaiopoulos, 2011).

#### 4.6.3 RMSE.

El error medio cuadrático está dado por:

$$RMSE(Banda^i) = \frac{1}{NP} \sqrt{\sum_{j=1}^{NP} (MULTI^i(j) - FUS^i(j))^2} \quad (39)$$

Siendo NP el número de píxeles de la imagen  $FUS^i(x, y)$  (Vaiopoulos, 2011).

#### 4.6.4 Diferencia en varianza.

Es la diferencia entre las varianzas de la imagen original y la imagen fusionada, su valor ideal es 0 (Vaiopoulos, 2011):

$$Div = 1 - \frac{Varianza(Imagen\ fusionada)}{Varianza(Imagen\ original)} \quad (40)$$

#### 4.6.5 Calidad Universal.

Este índice identifica cualquier distorsión como una combinación de tres factores: pérdida de correlación, distorsión de iluminancia y contraste de distorsión (Vaiopoulos, 2011). Los mejores valores en este índice se obtienen cuando el valor está más cerca de uno (Vaiopoulos, 2011):

$$Q = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{2 \bar{x} \bar{y}}{(\bar{x})^2 + (\bar{y})^2} \cdot \frac{2 \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (41)$$

Este factor utiliza las medias de  $x$  e  $y$ ; mientras que  $\sigma$  representa sus desviaciones estándar.

#### 4.6.6 RASE.

El índice RASE es expresado como un porcentaje (Vaiopoulos, 2011):

$$RASE = 100 \frac{h}{l} \sqrt{\frac{1}{N_{bandas}} \sum_{i=1}^{N_{bandas}} \left[ \frac{(rmse(Banda^i))^2}{(MULTI^i)^2} \right]} \quad (42)$$

Donde  $h$  es la resolución de alta resolución espacial (PAN) y  $l$  es la baja resolución espectral (MUL), el valor ideal es cero.

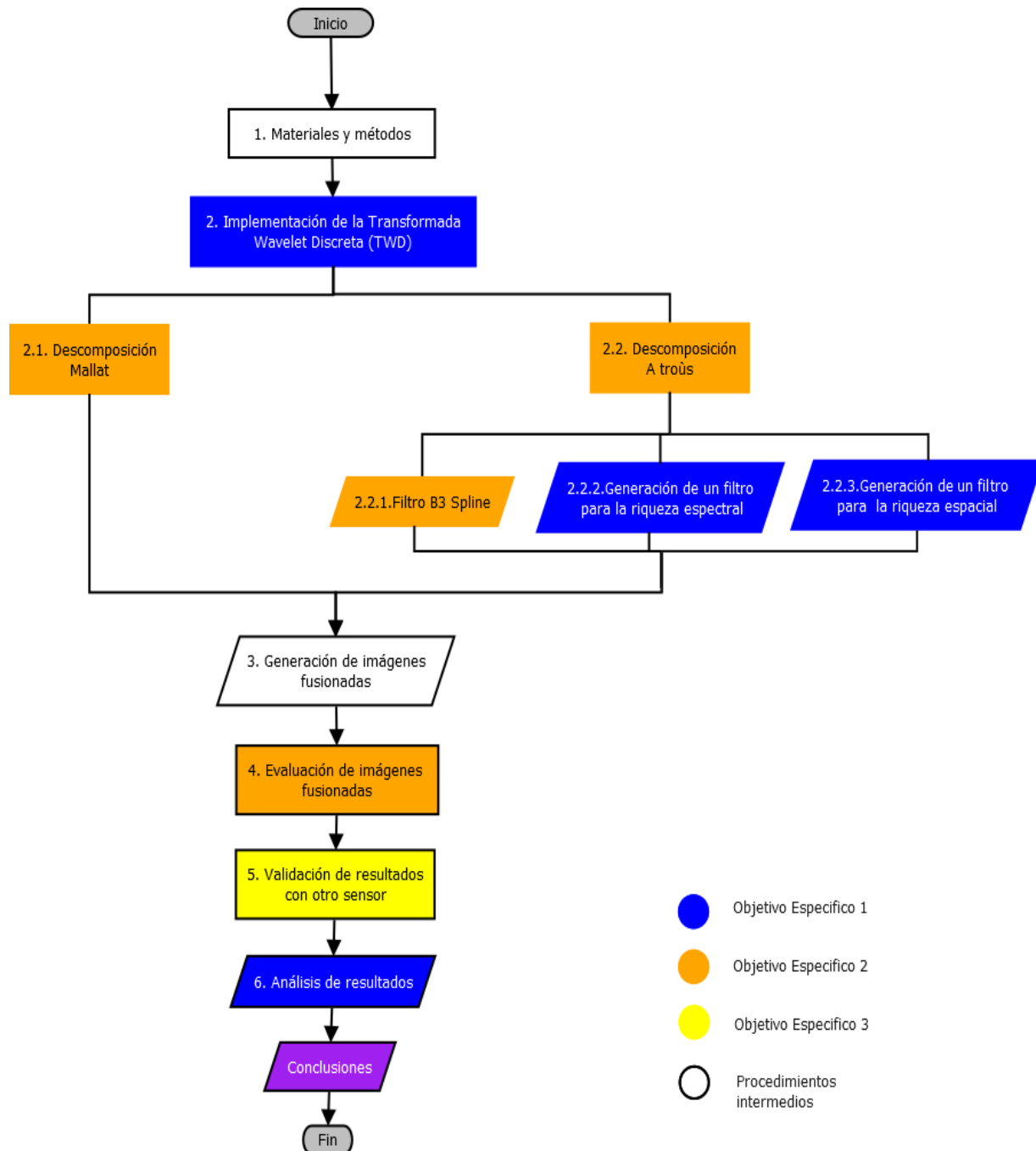
#### 4.6.7 Bias.

El índice Bias de media, está representado por la diferencia entre las medias de la imagen original multiespectral (MUL) y la imagen fusionada, este valor está dado por la relación Div con la imagen original. El valor ideal es cero (Vaiopoulos, 2011):

$$BM = 1 - \frac{Media(Imagen\ fusionada)}{Media(Imagen\ original)} \quad (43)$$

## 5. Metodología

A partir de la metodología aquí presentada, la presente investigación se propuso, mediante tres grandes procesos, llegar a una imagen fusionada con menor pérdida de resolución espectral y espacial. El diagrama de flujo a continuación muestra el desarrollo de los diferentes procesos:



Fuente: Elaboración propia

## 5.1 Materiales y métodos

Para la aplicación del proceso metodológico y la validación de resultados, fue necesario adquirir y pre procesar una imagen Ikonos tomada como imagen principal del estudio, y dos imágenes Worldview 2 y Landsat 8, de características de resolución diferentes y zonas con coberturas similares.

### 5.1.1 Adquisición de las imágenes.

El primer proceso realizado para encontrar la imagen fusionada final fue la adquisición de la imagen satelital. Para el presente estudio se utilizaron tres imágenes, el resumen de las características de los sensores para la obtención de las mismas se encuentran en la (Tabla 1), en ella se describen la resolución espectral, radiométrica y la longitud de las bandas de cada uno de los sensores utilizados, así como la cantidad de bandas.

*Tabla 1. Características de los sensores utilizados. Ajustado de Poscolieri & Parcharidis (2007), Oguz (2016) y Qian, Zhou, Yan, Li, & Han (2015)*

Sensor	Resolución Espacial (m)		Bandas Espectrales	Resolución Radiométrica	Longitud de onda (nm)	
	MUL	PAN				
IKONOS	4	1	4	11bit	Blue Green Red NIR	445 – 516 506 – 595 632 – 698 757 – 853
Landsat 8 OLI	30	15	6	12bit	Coastal Blue Green Red NIR SWIR1 SWIR2 PAN	443.0 482.6 561.3 654.6 864.6 1609.1 2201.3 591.7
WorldView 2	2	0.5	8	16bit	Coastal Blue Green Yellow Red Red-Edge NIR1 NIR2 PAN	400-450 450-510 510-580 585-625 630-690 705-745 770-895 860-1040 450-800

El satélite IKONOS se caracteriza por realizar recolección de imágenes pancromáticas de 1m y multispectral de 4m, con una notable mejora en resolución espacial sobre las imágenes satelitales anteriores. La órbita de IKONOS proporciona cobertura global, tiempos

constantes y ángulos de visión cercanos al punto más bajo. Es capaz de realizar mapeo a escala 1:10.000. Produce, imágenes georectificadas, ortorectificadas, pares estéreo y modelos de elevación digital para análisis de imágenes (Dial, Bowen, Gerlach, Grodecki, & Oleszczuk, 2003). En consecuencia, la imagen IKONOS se utilizó como principal para este estudio. De igual forma, las imágenes Landsat 8 y Worldview 2 se utilizaron en el proceso de validación.

Landsat 8 OLI contiene dos instrumentos: Operational Land Imager (OLI) y el sensor de infrarrojos térmicos (TIRS), los cuales se complementan entre sí en la cobertura espectral. OLI es un sensor multispectral visible e infrarrojo cercano (VNIR); opera desde 400-2500nm y TIRS el sensor térmico de dos bandas que opera desde 10,6–12,5  $\mu\text{m}$ . Entre sus características notables se encuentran, un ancho de franja de 185km y un terreno de 30m. Además, tiene un campo de visión instantáneo GIVOF para las bandas multispectrales y 15m para la banda pancromática (Czapla-Myers et al., 2015). La configuración de la escoba tiene una SNR mucho más alta, la calibración radiométrica es más compleja debido a los aproximadamente 7000 detectores en cada una de las bandas multispectrales (Czapla-Myers et al., 2015).

Así mismo, el satélite WordView-2 (WV-2) es considerado el primer satélite comercial en obtener datos en muy alta resolución en 8 bandas espectrales. Las bandas mutiespectrales cubren un rango espectral entre 400nm y 1050nm con una resolución espacial de 1.84m, mientras que la banda pancromática, cubre el espectro desde 450nm- 800nm con una resolución espacial de 0.46 (Padwick et al., 2010).

### 5.1.2 Pre procesamiento de la imagen.

La imagen principal IKONOS fue remuestreada a 1 metro, que es su resolución espacial en la banda PAN, esto con la intención de inyectar las características de esta, en la imagen multispectral (MUL).

La Figura 6. Imagen IKONOS. a) Combinación RGB 431 b) Imagen Pancromática muestra la imagen en composición RGB 431 IKONOS original,

el área de estudio fue determinada por la presencia de vegetación y cuerpos de agua en el contexto de la estructura ecológica principal, por tanto, se seleccionó una imagen satelital que cubre el parque Simón Bolívar, ubicado en el noroccidente de la ciudad de Bogotá Colombia, con coordenadas 4°39'27,2" N, 74°05'43,3" W. Fue recortada a un tamaño  $2n \times 2n$  donde  $n \in \mathbb{Z}$ , siendo esta la condición diádica (Toro & Medina, 2019, p.232).

En el caso de esta imagen, dicho tamaño es de 2048x2048 píxeles, RGB verdadero color, 4 m de resolución espacial y la Figura 6 una imagen pancromática IKONOS de 1 m de resolución espacial.



Figura 6. Imagen IKONOS. a) Combinación RGB 431 b) Imagen Pancromática

## 5.2 Implementación de la TWD

La implementación de la Transformada Wavelet se realizó mediante la fusión por adición, este método tiene procedimientos comunes tanto para la descomposición Mallat como  $\hat{A}$  trous, estos son:

1. Se aplica la transformación de espacio de color HSV a la composición RGB multiespectral para obtener el componente de Value.
2. Se genera una nueva imagen pancromática, en donde los histogramas de esta y de la imagen de Value coincidan.
3. Se aplica la descomposición por medio del algoritmo Mallat o  $\hat{A}$  trous, obteniendo los detalles espaciales de la imagen.
4. La información espacial de la imagen pancromática es insertada en la imagen multiespectral a partir de la transformación inversa de HSV (González-Audícana et al., 2005).

Generalmente se utiliza el cambio de espacio de color para utilizar el componente de intensidad o value, en el presente trabajo, se utilizó el value porque el espacio de color HSV es más adecuado para la percepción humana del color, en relación con el sistema de color RGB (Jin et al., 2018).

El proceso de descomposición mencionado, se evidencia en la Figura 7, en donde la imagen multiespectral inicia con una combinación RGB, esta imagen es transformada al espacio HSV donde se separa la componente value, entra la descomposición junto con la imagen pancromática; y luego, según el método, se inyectarán detalles de una en la otra y se reconstruirá para encontrar una nueva imagen de value con mayor detalle, y finalmente, esta se unirá a las bandas HS para hacer nuevamente un cambio de espacio de color a la imagen RGB mejorada.



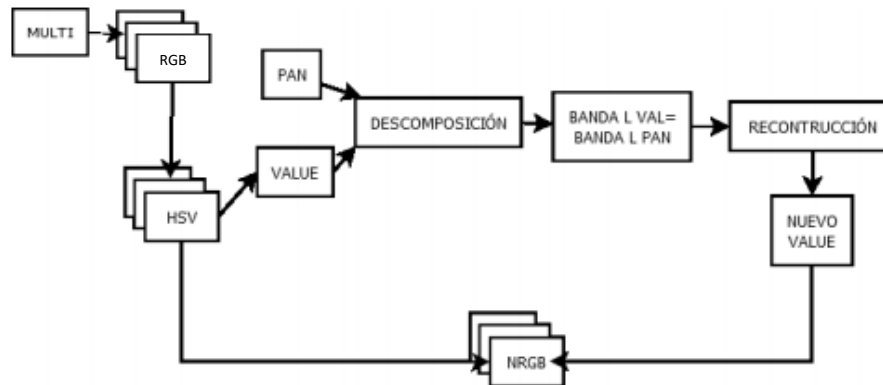


Figura 7. Esquema general de Descomposición Wavelet (Toro, 2016)

Adicionalmente, se incluye la evaluación de varias familias Wavelet para mejorar la imagen de entrada. Para este estudio, la mejor respuesta se obtuvo al utilizar la Wavelet Symlet 5 en nivel de descomposición 5 y se realizó en el software Matlab 2019b.

### 5.2.1 Descomposición Mallat.

La descomposición Mallat se realizó tal cual se muestra en la Figura 3. Se utilizaron cinco niveles de descomposición para las wavelets: Daubechies (4, 7, 9,11), Haar, Coiflet (2, 3, 4, 5) y Symlet (3, 5, 8, 10), biortogonal (1.5, 2.6, 4.4, 6.8), biortogonal inversa (1.3, 2.4, 5.5). Se escogieron cinco niveles de descomposición dado que muy pocos niveles de descomposición dan como resultado imágenes fusionadas de mala calidad espacial. Pero, demasiados niveles reducen la similitud espectral entre el MS original y las imágenes obtenidas (Pradhan, King, Younan, & Holcomb, 2006). Además, Pradhan et al. (2006) sugieren mediante la evaluación sobre un sensor con longitudes de onda similares a IKONOS sobre un sensor Quickbird, una cantidad de información adecuada entre los niveles 1 y 5.

Ahora bien, el proceso de descomposición para Mallat por el método aditivo se realiza de la siguiente forma:

- Se implementan los pasos generales de la TWD 1) y 2) descritos en el apartado 5.2, es decir, el cambio de espacio de color RGB a HSV extrayendo la componente V y ajustándola a la imagen PAN.
- Se aplica el algoritmo de descomposición Mallat a la imagen Value y a la pancromática. Ambas descomposiciones se calculan utilizando la base de Wavelet de 4 coeficientes de Symlet.
- Extraer los coeficientes wavelets horizontal, vertical y diagonal, en donde se encuentra el detalle espacial de la imagen de Value.
- Agregar la información del detalle espacial en la imagen de Value aplicando la transformada Wavelet Inversa al conjunto de los coeficientes de aproximación del Value y la suma de los coeficientes Wavelet del Value Inicial y las imágenes pancromáticas (González-Audicana et al., 2005).

- Aplicar el paso 4) del método general 5.2 que hace referencia la inserción de información en la imagen multispectral aplicando la transformada inversa de HSV a RGB.

La Figura 8 muestra el flujo de los pasos señalados en el párrafo anterior, allí se observa los planos de descomposición piramidal representados por cuadrículas en donde los coeficientes disminuyen a cada iteración, después de múltiples descomposiciones la posición 1 contendrá los detalles espaciales de la imagen.

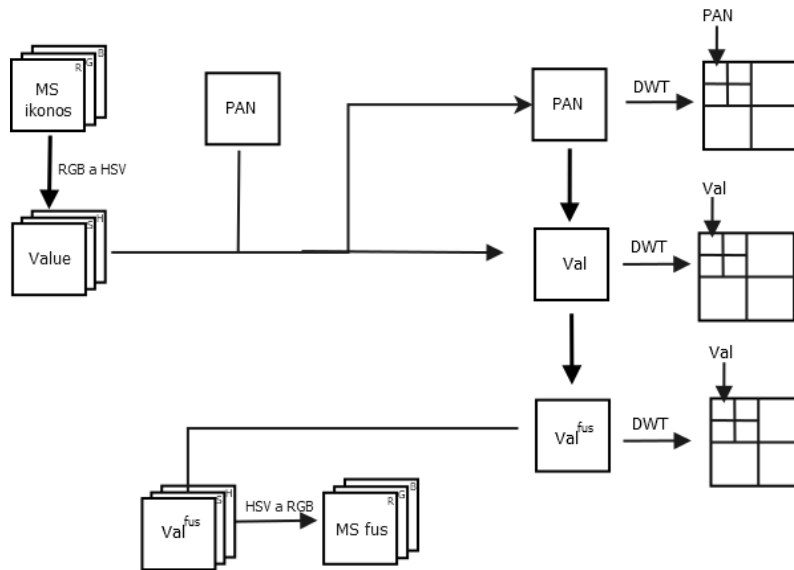


Figura 8. Esquema de descomposición para el nivel 2 por el algoritmo Mallat para una imagen IKONOS. Ajustado de González-Audícana et al. (2005)

### 5.2.2 Descomposición À trous.

La descomposición À trous se realiza mediante el método aditivo mencionado anteriormente. En él se generan diferentes planos wavelet, estos planos mantienen su tamaño a través de los diferentes niveles de descomposición y se recomiendan porque producen redundancia en la información.

La Figura 9 muestra el esquema general de descomposición de los planos wavelet a través de los diferentes niveles de descomposición, h representa la utilización de un filtro mediante el cual, la imagen panchromática es modificada para encontrar los mejores niveles de detalle mediante un producto tensor.

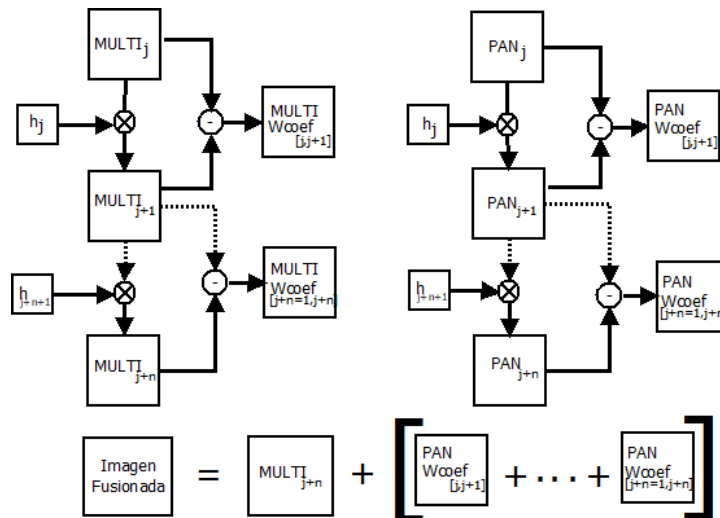


Figura 9. Diagrama de descomposición por el método À trous. Ajustado de Lillo-Saavedra (2004)

Además de la ampliación del mismo en la siguiente iteración, que es la característica de la descomposición À trous, la diferencia entre el filtro aplicado a la PAN y PAN original, generarán el primer plano y se hará sucesivamente. Finalmente, a la imagen original se le sumarán los diferentes planos generados para obtener la imagen fusionada. La metodología para esto es la siguiente:

- Se implementan los pasos generales de la TWD 1) y 2), apartado 5.2, el cambio de espacio de color RGB a HSV extrayendo la componente V y ajustándola a la imagen PAN.
- Descomponer solo la imagen pancromática, utilizando À trous, obteniendo el primer y segundo plano wavelet que recogerán los detalles espaciales o componentes de alta frecuencia que serán incorporados a la imagen multiespectral.
- Los planos obtenidos son adicionados a la imagen de Value.
- Aplicar el paso 4) del método general (González-Audicana et al., 2005).

### 5.2.2.1 Filtro B3 Spline.

Realizando la implementación del método bajo el filtro B3 Splines con la Ecuación 33 y 34:

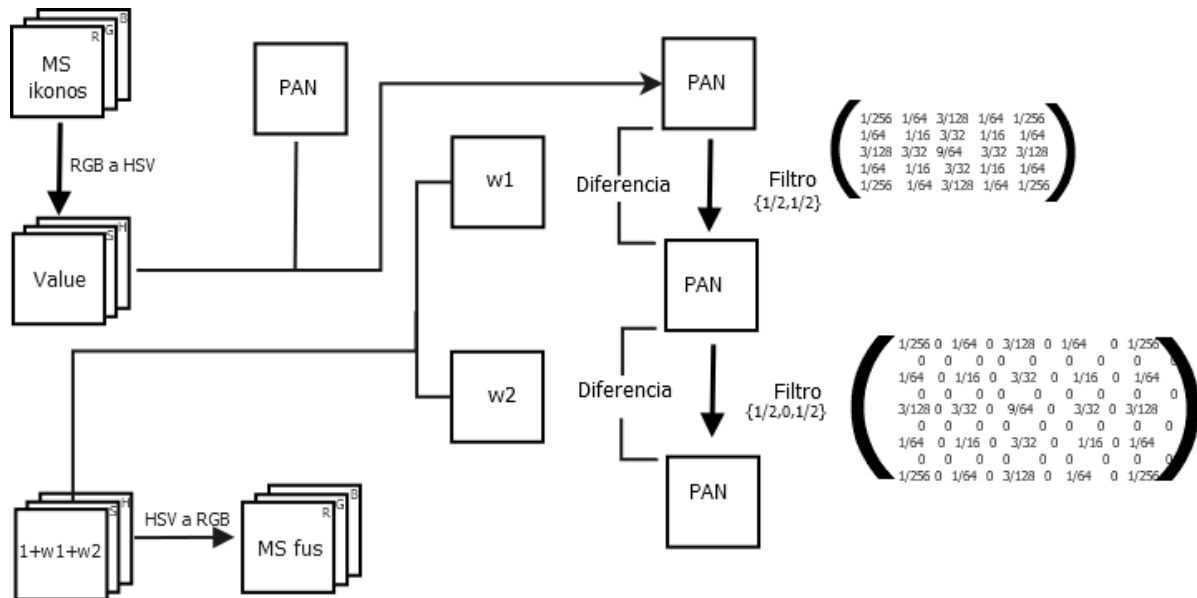


Figura 10. Esquema de descomposición por el algoritmo à trous para una imagen IKONOS. Ajustado de González-Audícana et al. (2005)

Sobre una imagen IKONOS el esquema modificado con el filtro b3 Spline (Ecuación 33); se puede observar en la Figura 10, que la descomposición TWD se mantiene, por tanto, interviene la PAN y el Value obtenido del cambio de espacio de color de la imagen RGB. La imagen PAN se descompone en dos planos por medio del filtro B3 spline, el primero de tamaño 5X5; el siguiente realiza la expansión con el método À trous, generando ceros y un filtro de 9X9 (Ecuación 34), para mantener el tamaño del plano y generar redundancia. La diferencia entre una imagen filtrada y la siguiente genera un plano Wavelet, estos planos se suman al Value produciendo una nueva imagen que, concatenada con matiz y saturación, permite el cambio a una imagen fusionada RGB.

Ahora bien, la dilatación para el segundo plano se hizo mediante la inclusión de T-1 ceros por lo que se conserva el espectro aumentando la frecuencia de la señal. De esta manera, la dilatación para el segundo plano surge de la convolución del vector inicial de la (Ecuación 27) así:

$$F = (1/2, 0, 1/2) \quad (44)$$

### 5.2.2.2 Generación de un filtro para la riqueza espectral.

El filtro propuesto para la mejora de la riqueza espectral, se basa en una modificación del vector presentado en la Ecuación 45, por tanto, como se mencionó anteriormente, este vector es utilizado para la dilatación del factor de escala del filtro B3 spline, en el segundo plano Wavelet.

La operación de dilatación se puede realizar varias veces, sin embargo, esto produce degradación de la calidad espectral y espacial. En este sentido, se opta por obtener pocos planos wavelet para la descomposición.

$$F = (1/2, 1, 1/2) \quad (45)$$

De esta forma se utiliza la misma dilatación de T-1, pero en este caso de unos, la razón de utilizar este factor, es que al cambiar los valores que estaban en cero, se mantiene el rango de modificación sobre toda la imagen. Es decir, si se aplicara un factor 2 o 3 se aumentarían los valores de los pixeles y por tanto, el color y la calidad espacial sufrirían un deterioro significativo respecto a la imagen original, situación similar a los factores entre 0 y 1, la cual se comprobó experimentalmente. Asimismo, al aplicar 1, sin embargo, se produce una variación de la riqueza espectral de la señal, aun así, se comprobó que dicha modificación no afecta en grandes proporciones la información contenida en la imagen, incluso mejora con relación a Mallat y el filtro b3 spline dilatado con ceros.

Aplicando la convolución de las Ecuaciones 28, 29 30 y 31, se obtiene el vector en una dimensión del filtro modificado para el segundo plano wavelet:

$$h_{1D} = \{0.062, 0.500, 1.750, 3.500, 4.375, 3.500, 1.750, 0.500, 0.062\} \quad (46)$$

Posterior a ello realizando la convolución por el producto de Kronecker para ampliar el vector a dos dimensiones se obtiene finalmente:

$$\begin{pmatrix} 0.0039 & 0.0313 & 0.1094 & 0.2188 & 0.2734 & 0.2188 & 0.1094 & 0.0313 & 0.0039 \\ 0.0313 & 0.2500 & 0.8750 & 1.7500 & 2.1875 & 1.7500 & 0.8750 & 0.2500 & 0.0313 \\ 0.1094 & 0.8750 & 3.0625 & 6.1250 & 7.6563 & 6.1250 & 3.0625 & 0.8750 & 0.1094 \\ 0.2188 & 1.7500 & 6.1250 & 12.250 & 15.312 & 12.250 & 6.1250 & 1.7500 & 0.2188 \\ 0.2734 & 2.1875 & 7.6563 & 15.312 & 19.140 & 15.312 & 7.6563 & 2.1875 & 0.2734 \\ 0.2188 & 1.7500 & 6.1250 & 12.250 & 15.312 & 12.250 & 6.1250 & 1.7500 & 0.2188 \\ 0.1094 & 0.8750 & 3.0625 & 6.1250 & 7.6563 & 6.1250 & 3.0625 & 0.8750 & 0.1094 \\ 0.0313 & 0.2500 & 0.8750 & 1.7500 & 2.1875 & 1.7500 & 0.8750 & 0.2500 & 0.0313 \\ 0.0039 & 0.0313 & 0.1094 & 0.2188 & 0.2734 & 0.2188 & 0.1094 & 0.0313 & 0.0039 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Las características de campana gaussiana también fueron conservadas para el filtro de la riqueza espectral, de esta manera se garantiza simetría en la aplicación del filtro en el que el punto máximo de modificación se encuentra en el centro de la matriz. Este plano obtenido en la Ecuación 47, fue sustituido en la dilatación que se observa en la Figura 10 de la siguiente manera:

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

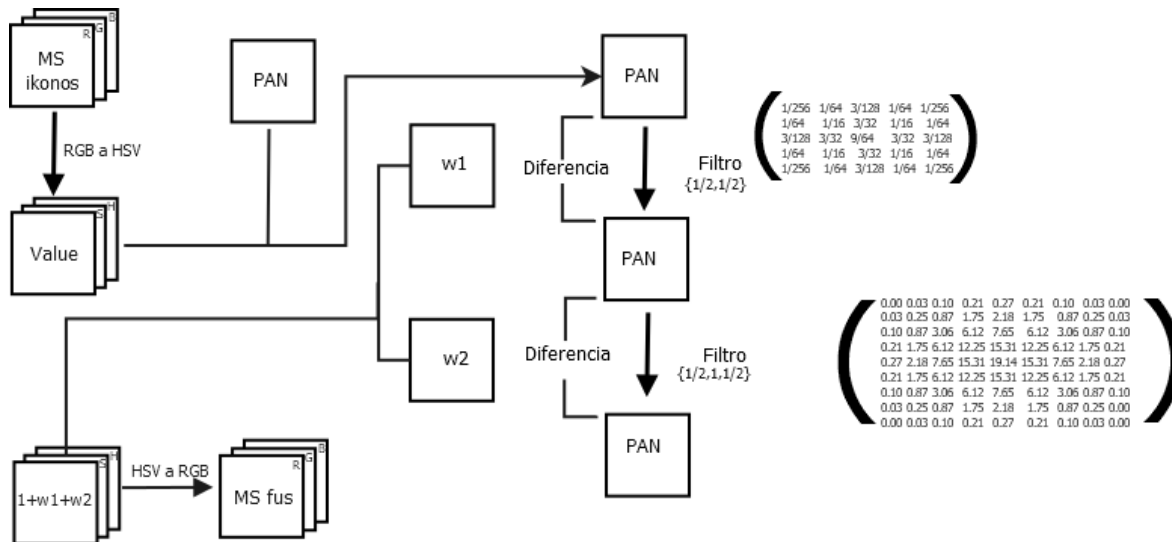


Figura 11. Descomposición À trous con el filtro propuesto. Ajustada de González-Audicana et al. (2005)

La Figura 11 muestra el modelo de descomposición utilizado con la aplicación del filtro propuesto en el segundo plano Wavelet.

### 5.2.2.3 Generación de un filtro para la riqueza espacial.

La conservación de riqueza espectral puede aumentarse con el método propuesto anterior, pero al ser resoluciones de crecimiento inverso, la resolución espacial puede verse afectada. Trabajos ya mencionados anteriormente como el de Lillo-Saavedra (2004), indican que se puede utilizar un factor para controlar el cambio entre las dos resoluciones, el cual está dado por el factor en el que el ERGAS se cruza para las dos imágenes (original y fusionada). Sin embargo, este valor puede ser grande y cambiar de manera abrupta la imagen; por ello, se generó la siguiente propuesta que incluye dos cambios significativos en el filtro generado para la riqueza espectral.

1. La inclusión del factor de equilibrio que básicamente multiplica el filtro propuesto por el valor resultante de la división entre la resolución espacial (PAN) y (MUL), factor presente en la evaluación del índice ERGAS. Sumado a la unidad, esto significaría que se esperaría aumentar los valores de cada coeficiente dentro del filtro como muestra la Ecuación 48.

$$1 + \frac{h}{l} \begin{pmatrix} 0.0039 & 0.0313 & 0.1094 & 0.2188 & 0.2734 & 0.2188 & 0.1094 & 0.0313 & 0.0039 \\ 0.0313 & 0.2500 & 0.8750 & 1.7500 & 2.1875 & 1.7500 & 0.8750 & 0.2500 & 0.0313 \\ 0.1094 & 0.8750 & 3.0625 & 6.1250 & 7.6563 & 6.1250 & 3.0625 & 0.8750 & 0.1094 \\ 0.2188 & 1.7500 & 6.1250 & 12.250 & 15.312 & 12.250 & 6.1250 & 1.7500 & 0.2188 \\ 0.2734 & 2.1875 & 7.6563 & 15.312 & 19.140 & 15.312 & 7.6563 & 2.1875 & 0.2734 \\ 0.2188 & 1.7500 & 6.1250 & 12.250 & 15.312 & 12.250 & 6.1250 & 1.7500 & 0.2188 \\ 0.1094 & 0.8750 & 3.0625 & 6.1250 & 7.6563 & 6.1250 & 3.0625 & 0.8750 & 0.1094 \\ 0.0313 & 0.2500 & 0.8750 & 1.7500 & 2.1875 & 1.7500 & 0.8750 & 0.2500 & 0.0313 \\ 0.0039 & 0.0313 & 0.1094 & 0.2188 & 0.2734 & 0.2188 & 0.1094 & 0.0313 & 0.0039 \end{pmatrix}$$

Donde h y l representan la resolución espacial de las imágenes pancromáticas (PAN) y multispectrales (MULTI) respectivamente.

- Para la riqueza espectral en el apartado anterior los planos wavelet se obtenían de la pancromática y eran inyectados al value (Figura 8 y Figura 9). Es decir, de forma inversa. La inclusión de la riqueza espacial dentro de la imagen fusionada, se realizó aplicando los planos wavelet sobre la componente Value e inyectando los detalles a la imagen pancromática (Figura 12):

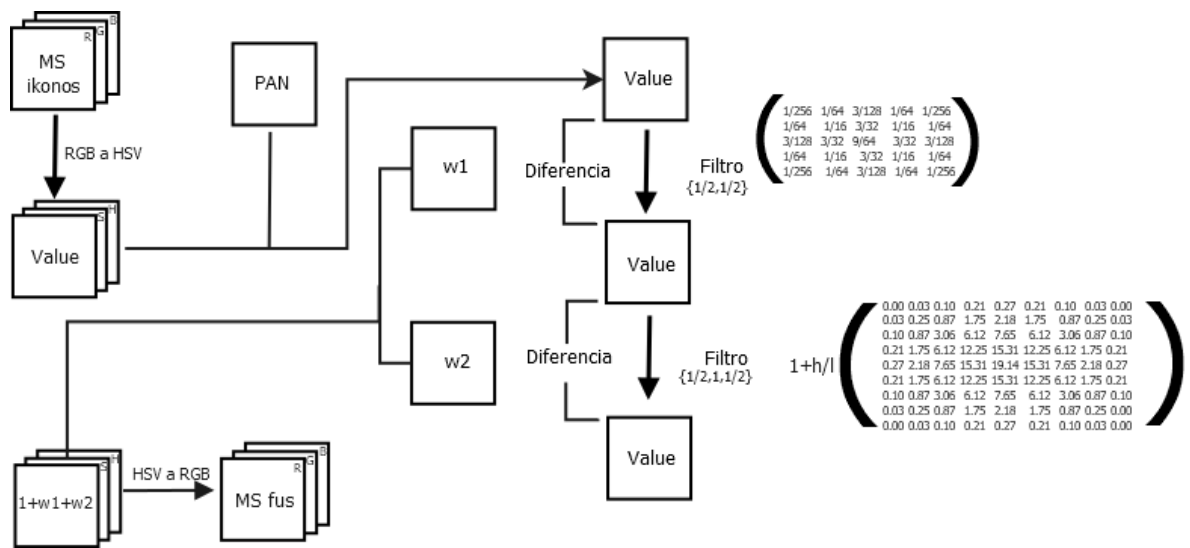


Figura 12. Descomposición À trous, con modificación de inyección de riqueza espacial y filtro propuesto

### 5.3 Generación de imágenes fusionadas con los algoritmos Mallat, À trous, y algoritmos para la riqueza espectral y espacial

Para la evaluación y los análisis respectivos se generaron las siguientes imágenes fusionadas:

1. Imagen fusionada usando la descomposición Mallat con las wavelets Daubechies, Coiflet, Symlet, haar biortogonal y biortogonal inversa descritas en los apartados 4.2.1 y 4.2.2.
2. Imagen fusionada usando la descomposición À trous.
3. Imagen fusionada usando la metodología À trous con el filtro generado para la riqueza espectral.
4. Imagen fusionada usando la metodología À trous con el filtro generado para la riqueza espacial.

Estas imágenes fueron evaluadas comparando cada filtro generado con las imágenes resultantes de los métodos de Mallat y À trous.

#### **5.4 Evaluación de las imágenes**

La evaluación de las imágenes se realizó mediante varios índices de calidad de la imagen. Estos permiten medir la pérdida de la resolución espacial y espectral, así como la comparación entre la pérdida; específicamente se tuvieron en cuenta los algoritmos ERGAS Espacial, ERGAS espectral, RMSE, Diferencia en varianza (Div) y Calidad universal (Q), descritos en el marco teórico. Para ello, se ha comparado la imagen RGB evaluando la pérdida o ganancia de la riqueza espectral; y la imagen pancromática evaluando la dinámica de la riqueza espacial.

Para encontrar el mejor resultado, se utilizó un promedio entre los resultados del índice de correlación entre la evaluación espectral y espacial, considerando el valor más cercano a 1 como el mejor, que es el ideal para este índice. También se generó una matriz de ganancia comparando la imagen original y las ganancias espectrales y espaciales alcanzadas en cada método, lo cual se realizó mediante la evaluación del coeficiente de correlación para la imagen original y la posterior resta a los valores obtenidos en el mismo índice para cada método implementado.

#### **5.5 Validación de resultados**

La validación de resultados fue realizada en los sensores Worldview 2 y Landsat 8, la elección de estos, se dedujo por sus características. El primero, tiene una resolución espacial más alta que la imagen IKONOS original de este estudio; y la segunda, tiene una resolución espacial más baja, también comparada con la imagen principal, esto permitió revisar el comportamiento de los filtros en condiciones diferentes. Adicionalmente se buscaron zonas con coberturas similares a las estudiadas, en las que se incluyeron vías, zonas urbanas, vegetación y cuerpos de agua.

Las zonas elegidas están cerca al área original para la imagen Worldview 2, tomando un área cercana al aeropuerto El Dorado en Bogotá D.C. Para la imagen Landsat 8 se eligió una zona que tiene un cubrimiento mayor de la ciudad, incluyendo el parque Simón Bolívar,



que está dentro de la zona de estudio original. Esta validación se hizo tanto con el filtro propuesto para la mejora de la riqueza espectral y el filtro propuesto mejorado para la riqueza espacial. Los resultados fueron divididos en dos secciones, la primera se refiere a los resultados sobre la riqueza espectral; y la segunda sobre la riqueza espacial.

## 6. Resultados

A continuación, se muestran los resultados producto de las aplicaciones de la descomposición por medio de los algoritmos de Mallat, À trous y los filtros generados para la riqueza espectral y espacial.

### 6.1 Resultados descomposición Mallat

Para la descomposición por el método Mallat se utilizaron las Wavelets descritas en el marco teórico que permiten análisis discreto, estas son: Biorotogonal, Coiflet, Daubechies, Haar, Biorotogonal Inversa y Symlet, cada una con varios valores que corresponden al orden de la Wavelet, es decir los momentos de desvanecimiento (Gao & Yan, 2010).

Los resultados de la utilización de los diferentes índices se presentan en la Tabla 2 y 3; de igual forma, todas las wavelets evaluadas tanto para la riqueza espectral como espacial se encuentran en los Anexos 1 y 2. Por su parte, la Tabla 2 muestra los valores de los diferentes índices calculados (Bias, Diferencia en varianzas (Div), Coeficiente de correlación (CC), Entropía, ERGAS, Calidad Universal (Q), RASE y RMSE), para las diez wavelets con los niveles más altos en la calidad universal. Esto dado que este índice muestra el cambio en tres diferentes aspectos: pérdida de correlación, distorsión de iluminancia y contraste de distorsión. Lo que lo hace un buen referente de los resultados esperados. Los valores presentados son el promedio de las bandas RGB.

*Tabla 2. Resultados de la descomposición para el método Mallat RGB para la riqueza espectral*

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
1	db 11	-5,704E-05	-0,076	0,938	5,914	6,184	0,937	12,367	6,191
1	Coif 5	-5,810E-05	-0,076	0,938	5,914	6,194	0,937	12,387	6,201
1	sym 10	-5,918E-05	-0,076	0,938	5,914	6,203	0,937	12,405	6,210
1	db 9	-5,645E-05	-0,077	0,938	5,914	6,211	0,937	12,423	6,219
1	Coif 4	-5,671E-05	-0,077	0,937	5,914	6,213	0,937	12,426	6,221
1	Bior 68	-5,685E-05	-0,077	0,937	5,914	6,222	0,937	12,444	6,230
1	sym 8	-6,105E-05	-0,077	0,937	5,915	6,224	0,937	12,447	6,231
1	Coif 3	-6,259E-05	-0,077	0,937	5,915	6,246	0,936	12,491	6,253
1	db 7	-6,243E-05	-0,077	0,937	5,915	6,246	0,936	12,493	6,254
1	Bior 44	-7,009E-05	-0,078	0,936	5,915	6,285	0,935	12,571	6,293

La Tabla 2 muestra que el mejor resultado, considerando mejor como el valor más alto de calidad universal que se espera sea cercano a 1, es para la wavelet Daubechies 11, sin

embargo, se presentan valores similares para las wavelets Coiflet 5, Symlet 10 y Daubechies 9, esto puede ser un indicador de que bajo este algoritmo es posible obtener varias familias que podrían ser susceptibles de interpretación una vez se ha realizado la fusión.

Es importante también notar que todas las wavelets presentadas se encuentran en el nivel de descomposición 1, esto significa que la descomposición piramidal solamente se realizó una vez. No obstante, puede tener dos interpretaciones importantes: la primera es que la imagen no tiene altos grados de degradación, considerando que al tener una descomposición piramidal el tamaño de los planos disminuye  $n/2$ ; el segundo punto es que al solo haber filtrado una vez, pueden existir detalles o aproximaciones importantes en la mejora de la imagen. Aun así, también se pueden observar otros índices indicativos, por ejemplo, Bias tiene diferencias entre cada familia con calidad universal igual; este al indicar la diferencia entre las medias y la imagen original y sintetizada, tiene para todas las familias valores negativos, lo que denota un sesgo en el valor medio del histograma de la imagen fusionada; representado en un cambio a gris de la imagen fusionada (Pohl & Van Genderen, 2016). Este cambio es mínimo y cercano a 0, por tanto, no podría percibirse con una interpretación visual de las imágenes obtenidas.

La Figura 13 muestra las diez wavelets halladas en la Tabla 2 con su respectivo índice de calidad universal, así mismo se puede observar el nivel de descomposición de dichas wavelets en el que se presentaron los valores más cercanos a 1.

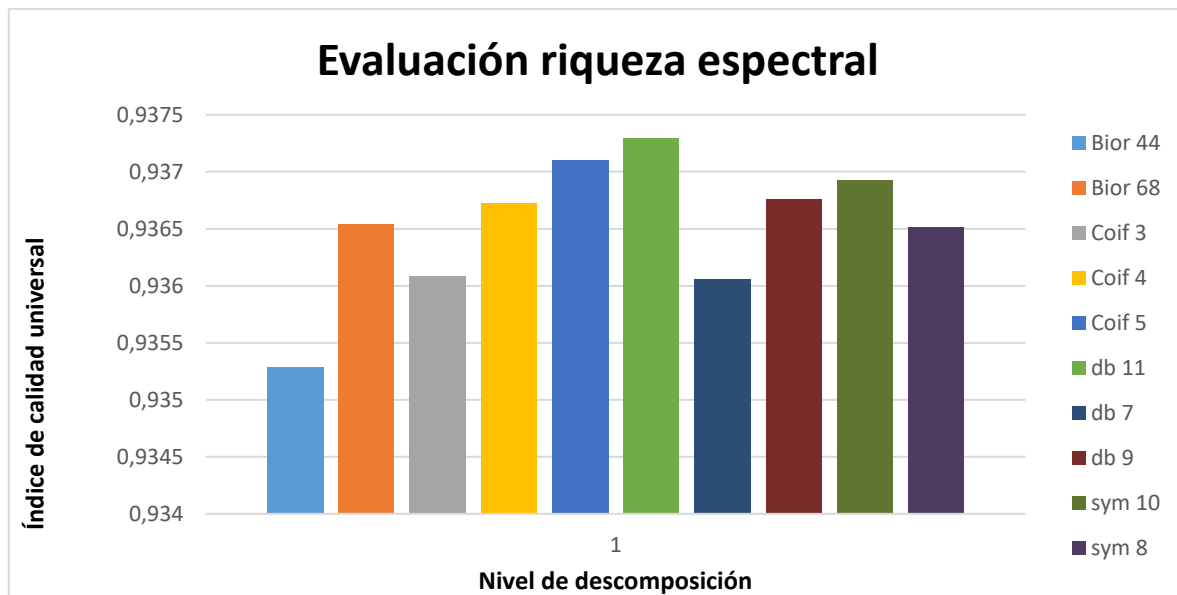


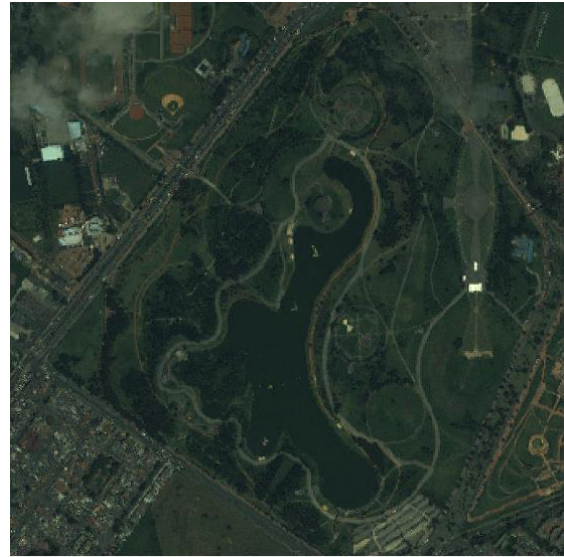
Figura 13. Wavelets con más alto índice de Calidad Universal

En la Figura 14 se muestran la imagen original, y partes de las imágenes fusionadas con Mallat para los mejores valores encontrados.

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada



a)



b)



c)



d)



e)

Figura 14. Imágenes fusionadas a partir de la descomposición Mallat e imagen original a) Imagen Daubechies 11. Nivel de descomposición 1. b) Coiflet 5 Nivel de descomposición 1. c) Acercamiento a vías interiores del parque en la imagen original. Acercamiento a vías interiores del parque, d) Db11, e) Coif5

A pesar de que hay mejoras respecto a la calidad espectral según la evaluación, sus diferencias resultan imperceptibles a simple vista. Sin embargo, una comparación con la imagen original mediante un acercamiento, muestra mejoras en bordes y definición para objetos como: vías internas del parque Simón Bolívar, en especial en intersecciones y curvas; construcciones y en la difuminación del color al final del objeto; también la vegetación en forma y color, Figura 14 b y c. Además, se puede notar que, a pesar de tener una mejora en la definición de los bordes de los objetos, aun se evidencia un efecto diente de sierra en las imágenes fusionadas con Mallat y algún efecto pimienta en la vegetación.

Dentro del proceso de fusión, es importante evaluar tanto los cambios en resolución espacial como espectral, la resolución espacial fue mostrada en la Tabla 2 y Figura 13. Esta evaluación se hizo usando como base la imagen de composición RGB original. Los siguientes resultados se obtuvieron con el uso de la imagen Pancromática para evaluar el cambio en la resolución espacial respecto a la imagen original.

Así las cosas, la Tabla 3 muestra los resultados de la evaluación de la riqueza espacial para las 10 wavelets con calidad universal mayor, midiendo los índices ya mencionados con anterioridad. Los valores presentados son el promedio de las bandas RGB.

*Tabla 3. Resultados de la descomposición para el método Mallat RGB para la riqueza espacial.*

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
5	haar	0,163	0,041	0,783	6,075	13,730	0,761	27,459	16,433
5	rbio 13	0,163	0,032	0,773	6,070	13,929	0,752	27,858	16,671
5	sym 3	0,162	0,019	0,770	6,078	14,022	0,748	28,044	16,783
5	Bior 44	0,162	0,018	0,769	6,077	14,032	0,748	28,064	16,795
5	Bior 26	0,162	0,018	0,769	6,078	14,039	0,748	28,078	16,804
5	Coif 2	0,162	0,018	0,769	6,078	14,040	0,747	28,081	16,805
5	db 4	0,162	0,023	0,769	6,075	14,031	0,747	28,063	16,794
5	rbio 24	0,162	0,016	0,768	6,082	14,055	0,747	28,111	16,823
5	Bior 68	0,162	0,019	0,768	6,077	14,054	0,747	28,108	16,822
5	Coif 3	0,162	0,020	0,768	6,076	14,052	0,747	28,103	16,818

La riqueza espectral y espacial son inversamente proporcionales, por tanto, se espera que el aumento de la primera disminuya la segunda. En efecto, la Tabla 3 muestra estas diferencias presentando nuevamente las diez wavelets con valores mayores para el coeficiente de correlación (CC). En general se observan valores por debajo de 0.77 tanto en este índice como en coeficiente de correlación; el índice Bias es mayor y positivo comparado al de la evaluación espectral, es decir un cambio a blanco. Respecto a otros índices como el RMSE hay valores mayores para la evaluación espacial en relación a la espectral. Por tanto, el error en la fusión es más del doble entre los dos resultados, concluyendo que la riqueza espacial obtenida, se aleja en mayor proporción de la imagen original, en todos los índices.

Adicionalmente las imágenes con mejor evaluación se obtienen en el último nivel de descomposición utilizado, el 5, lo que puede tener sentido, dado que como se mencionó anteriormente en cada nivel se obtienen detalles y aproximaciones diferentes. Esto significa que el mejor nivel de detalle comparando la imagen pancromática, se obtiene con mayores niveles de descomposición. Pero es probable que a más descomposiciones la información de la imagen en cuanto a su conservación espacial y espectral, se vea mayormente afectada, o que no haya grandes diferencias de un nivel a otro.

La Figura 15, presenta los valores del índice de calidad universal para las mismas wavelets, en las que se evidencia la distribución de las diferencias entre la evaluación de las diferentes familias. Haar tiene el valor más alto de correlación sin superar el 0.8; mientras que las demás familias tienen una tendencia homogénea, a diferencia de la evaluación espectral Figura 14, en donde se observa una distribución normal con menos diferencias entre las familias wavelets generadas.

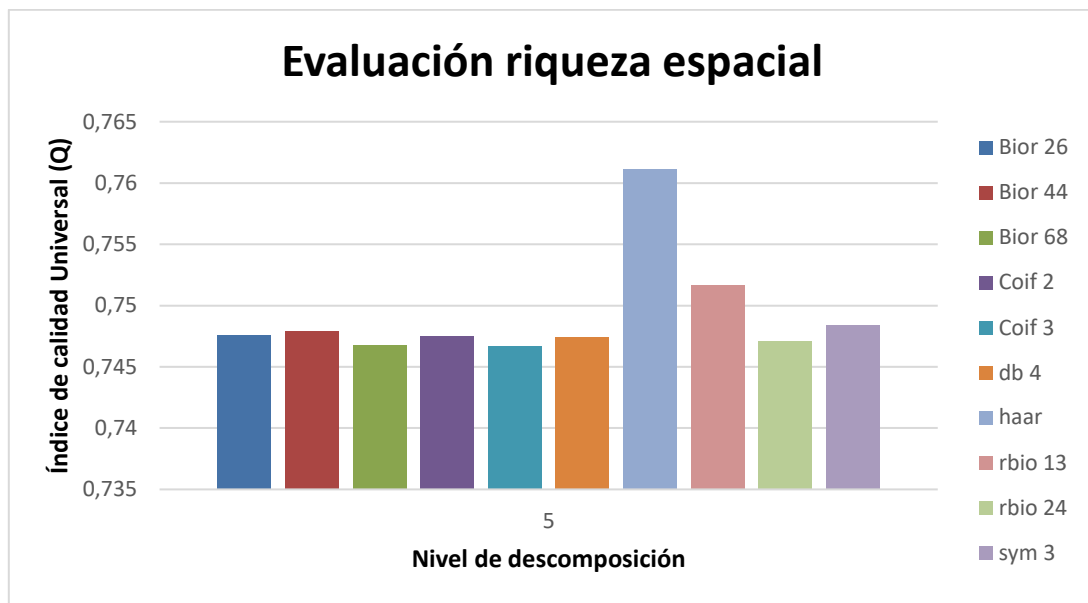


Figura 15. Wavelets con más alto índice de calidad universal

La Figura 16, muestra las dos wavelets con mayor índice de calidad universal Haar y Biortogonal inversa, en donde se pueden observar diferentes coberturas que proporcionan un análisis de la misma zona en diferentes fusiones.

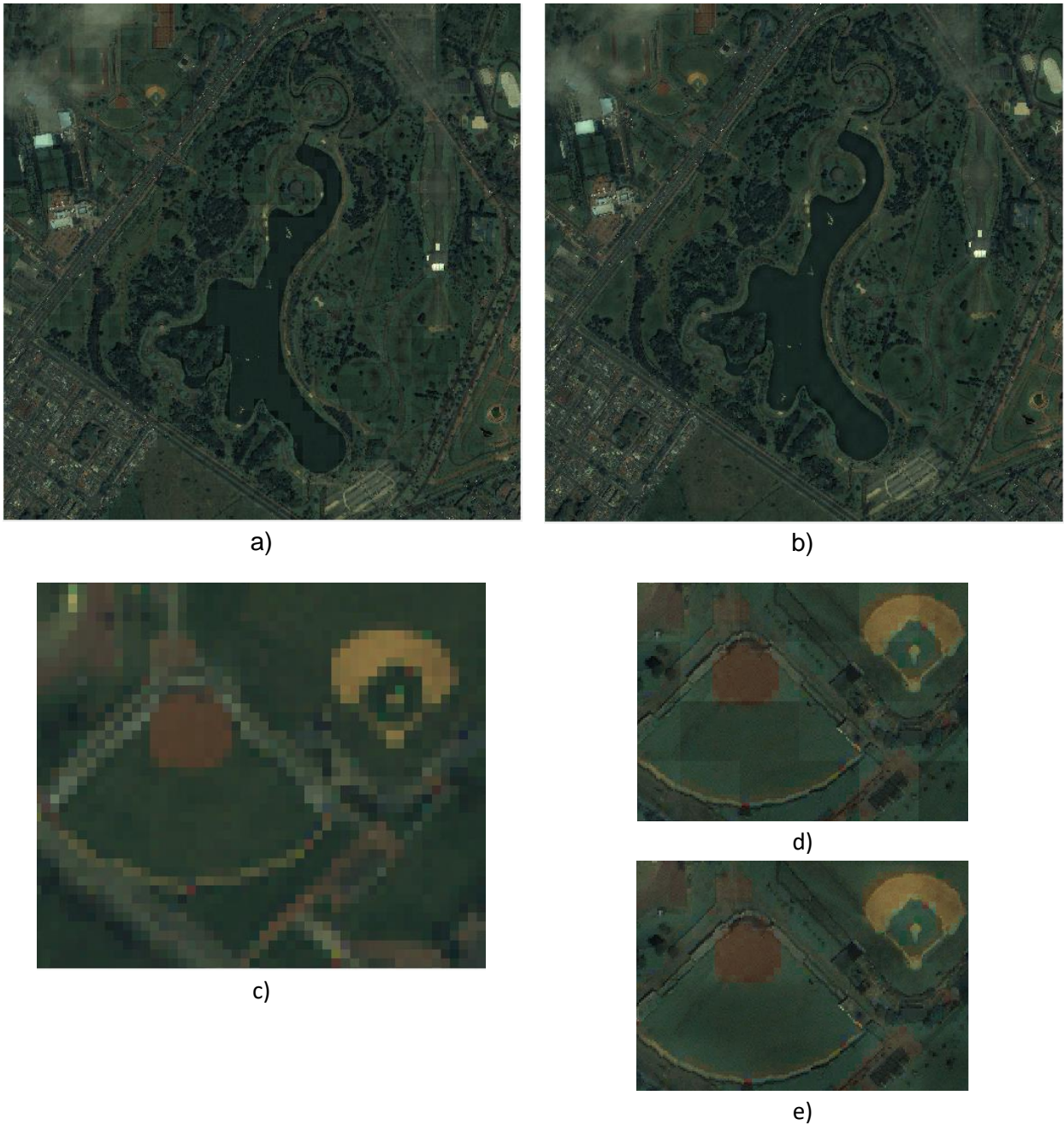


Figura 16. Imágenes fusionadas a partir de la descomposición Mallat. a) Imagen Haar Nivel de descomposición 5. b) Biortogonal Inversa 1.3 Nivel de descomposición 5, c) Acercamiento a escenario deportivo cercano imagen original. Acercamiento a escenario deportivo cercano del parque, d) Haar, e) rbio1.3

A diferencia de los cambios poco perceptibles en la validación visual de la evaluación espectral, en la Figura 16 a y b, se encuentran las imágenes fusionadas para las wavelets haar y biortogonal inversa 1.3, hay un acercamiento para comparar diferentes objetos en las imágenes de respuesta y la imagen original Figura 16c), Figura 16d) y Figura 16e), en donde se evidencia un cambio notable en la definición de los objetos y el color, se presentan coberturas como suelo pavimentado, vías, vegetación y pastos. De hecho, en la imagen

original solo algunas vías son identificadas por tener un grosor característico; por ejemplo, en las imágenes fusionadas, se pueden identificar incluso vías internas de conexión entre los diferentes escenarios deportivos y gradas. Sin embargo, se puede ver un error en la combinación RGB de los píxeles de la imagen fusionada con Haar (Figura 16d), los valores más afectados son los correspondientes a la vegetación, y a pesar de que dichos errores son corregidos con la imagen rbior 1.3, esta presenta una difuminación al blanco en los bordes, que corresponde con los resultados del índice Bias de la Tabla 3.

## 6.2 Resultados descomposición À trous

La descomposición À trous fue realizada sobre la imagen IKONOS original en composición RGB 431.

La Figura 17 muestra la imagen resultante a partir de la descomposición con el algoritmo À trous. Se ha hecho un acercamiento sobre varias canchas deportivas y una vía principal, buscando una comparación de las modificaciones generadas a partir de la imagen original.



a)

b)



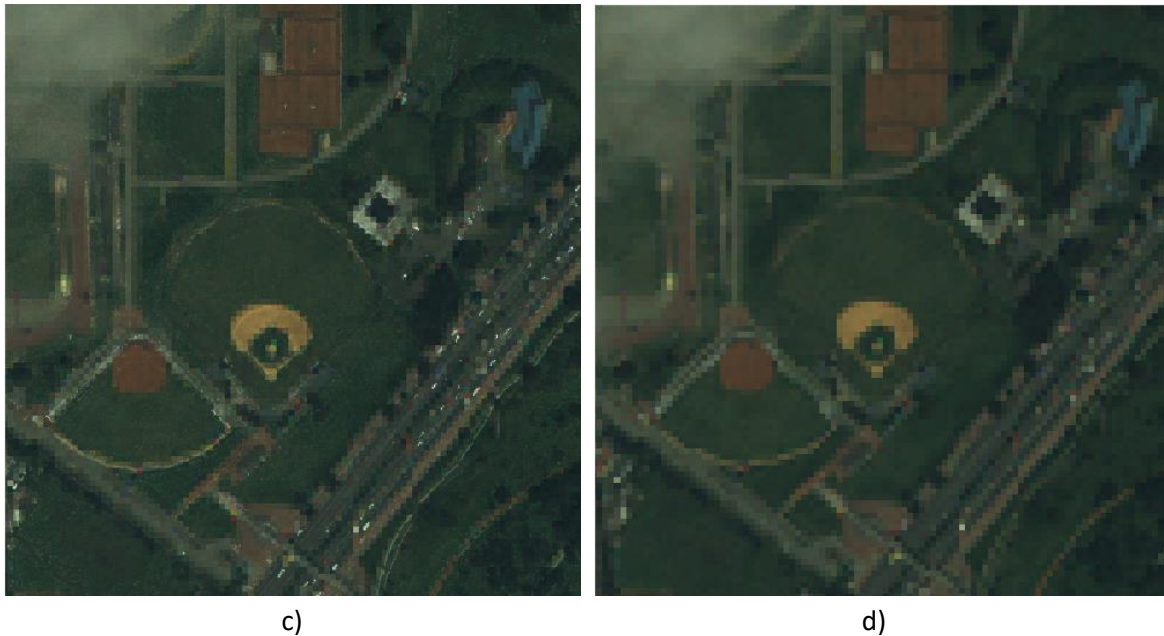


Figura 17. Descomposición À trous de la imagen de estudio. a), c) Imagen fusionada À trous, b), d) imagen original.

Al respecto, es importante recordar que la fusión con el método de descomposición À trous, considera planos rectangulares del mismo tamaño, que permiten, entre otras cosas, la redundancia de la información, obteniendo así mejores resultados que con la descomposición piramidal de Mallat. Por tanto, se esperaría una mejora en los resultados al aplicarla.

La Tabla 4 muestra los resultados por banda para esta descomposición, en donde la calidad universal y el coeficiente de correlación son mayores en la evaluación espectral comparados con la descomposición Mallat. Estos valores superan el 0.9 lo que es un buen indicador de que durante la fusión se perdió poca información en cada una de las bandas, siendo la menos afectada la banda roja; a su vez, es la banda con mayor pérdida de riqueza espacial.

Tabla 4. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando la descomposición À trous

Band a	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	9,82	0,54	0,56	23,51	-0,42	39,29	3,81	0,95	0,96	6,79	-0,25	15,25
G	7,23	0,64	0,64	17,31	-0,27	28,92	3,52	0,93	0,94	8,11	-0,32	14,09
B	7,72	0,57	0,58	18,49	0,27	30,91	3,48	0,91	0,92	6,75	-0,35	13,95

Como conclusión preliminar con este método, es posible obtener mejores resultados espectralmente hablando que con el método Mallat, considerando mejores, los efectos más

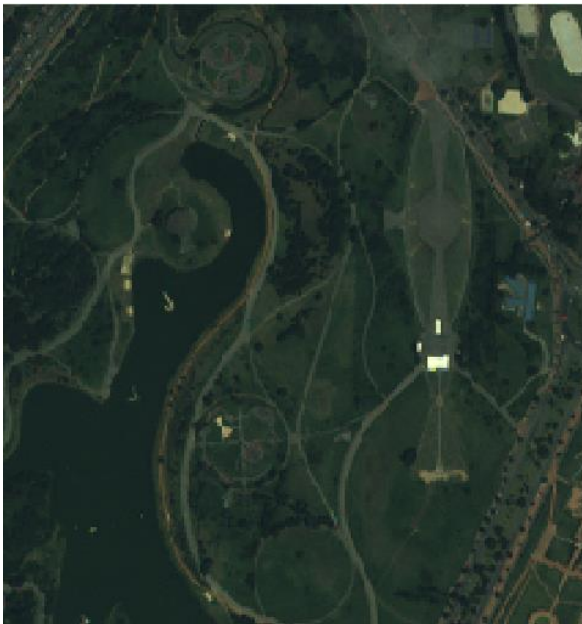
cercanos según el criterio de cada índice para conservación de la riqueza de la imagen original. En contraste, el método Mallat ofrece mejores resultados espacialmente hablando, la pérdida de riqueza espacial es menor respecto a la imagen original, comparado con À trous.

Con base en lo anterior, al comparar la pérdida de riqueza espacial y espectral, dentro de la fusión À trous, se puede observar que la riqueza espectral es alta, tiene valores de calidad universal (Qu) y de correlación (CC) muy cercanos a uno; por su parte, en valores bajos en ERGAS, que también se espera que se acerquen a 1, del índice RASE, se encuentra un error más alto que los encontrados en la imagen en general; sin embargo, al compararlo con la pérdida de riqueza espacial es menor. Aun así, es importante notar que, aunque los resultados crean una pérdida de riqueza espacial mayor los valores no son inaceptables.

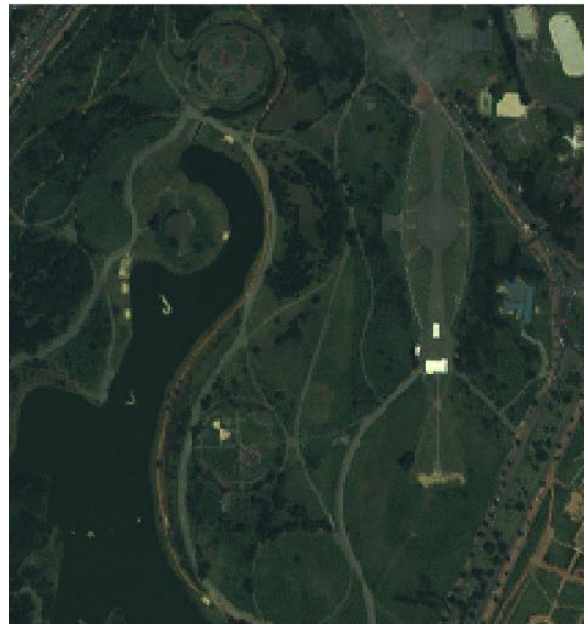
### 6.3 Resultados filtro generado para riqueza espectral

La generación del filtro para la riqueza espectral igualmente se probó sobre la imagen original. A continuación, se muestran las imágenes y la evaluación sobre las mismas para comprobar su efectividad.

La Figura 18 muestra fragmentos de la imagen original y su fusión por medio del algoritmo propuesto. Se han hecho acercamientos al parque Simón Bolívar, para identificar cuerpos de agua, zonas artificializadas y vegetación. Asimismo, con respecto a la respuesta visual en las imágenes, se puede observar una mejora en la definición de los objetos, y también en el color de las imágenes.



a)



b)

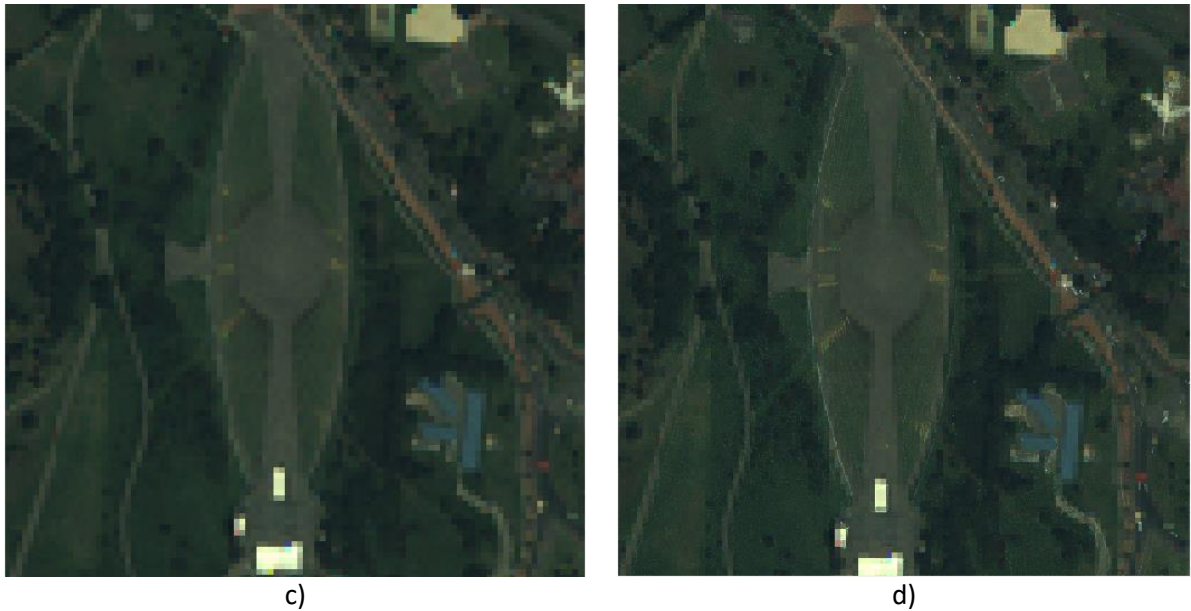


Figura 18. Imagen fusionada a partir del algoritmo propuesto. a), c) Imagen original. b), d) imagen fusionada

La Figura 18 b y Figura 18 d, muestran un acercamiento a la zona de estudio en el interior del parque Simón Bolívar, en ella se pueden diferenciar objetos como vías internas y construcciones. Adicionalmente, en la esquina superior derecha, se encuentra un avión, el cual tiene un mejor contorno en las dos imágenes analizadas. La vegetación a su vez, muestra mejoras en el tamaño de las copas de los árboles y las sombras de la misma; el efecto de diente de sierra, se mantiene en algunos lugares de la imagen, sin embargo, se suaviza en la mayoría de los bordes de la imagen. Así mismo, los tonos de la vegetación son también diferenciables dentro del resultado

Por otro lado, también se pueden ver algunos objetos pequeños dentro del cuerpo de agua, estos pueden ser embarcaciones que hacen recorridos turísticos dentro del parque. En ellos se observa partes que no aparecen en la imagen original, mejorando su definición real dentro de la imagen. Por su parte, el color de los mismos también tiene un cambio significativo entre la imagen original (Figura 18 a y Figura 18 c) y la fusionada (Figura 18 b y Figura 18 d).

La Tabla 5 muestra los valores de los estadísticos principales, para la evaluación espectral y espacial de la imagen ikonos fusionada, con filtro generado para la riqueza espacial que se propone en este trabajo.

Tabla 5. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando el filtro generado para la riqueza espectral utilizado en la descomposición À trous

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	9,92	0,52	0,54	23,76	-0,31	39,70	2,89	0,97	0,97	5,16	-0,15	11,58
G	7,19	0,62	0,62	17,22	-0,14	28,78	2,70	0,95	0,96	6,23	-0,19	10,83
B	7,94	0,53	0,55	19,02	0,35	31,78	2,69	0,94	0,95	5,21	-0,20	10,76

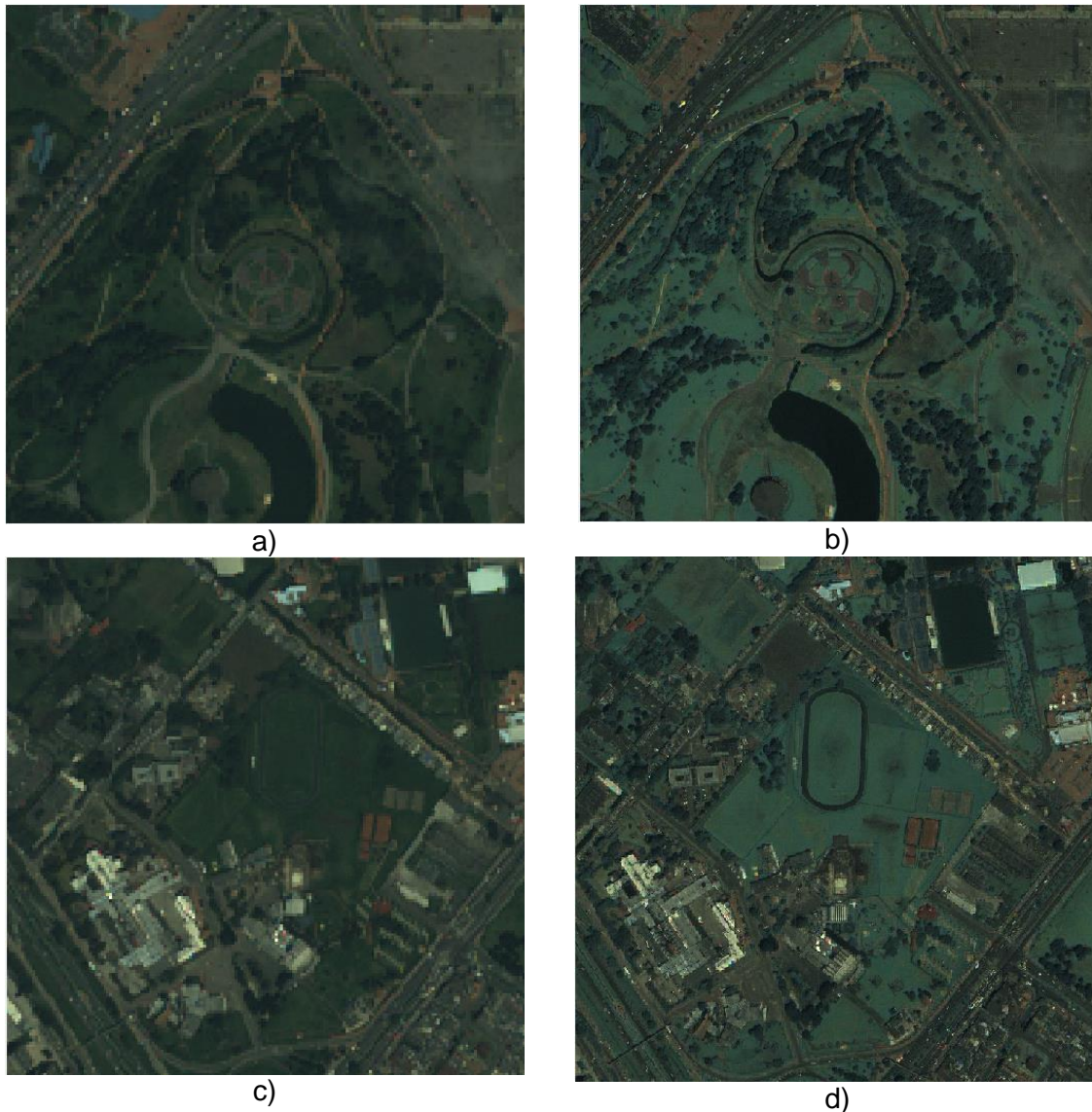
Cuando se realizan pruebas con el algoritmo propuesto (Tabla 5) se observa que la riqueza espectral tiene los mejores resultados comparados con Mallat y À trous sin modificaciones; su coeficiente de correlación alcanza valores hasta del 97%, para la banda R, además todas las bandas de la composición RGB tienen valores mayores al 90%. Su error representado en el índice RMSE, también es el menor que se ha obtenido con los tres métodos generados, el ERGAS a su vez, es el más cercano a 1 en todas las imágenes fusionadas.

Ahora bien, la evaluación de la riqueza espacial tiene dos hallazgos importantes. El primero es que los valores de pérdida de riqueza se asemejan mucho a los obtenidos con la imagen À trous sin modificaciones, pero la riqueza espectral es mayor. Lo que significa que se obtienen mejores resultados, al obtener mayor riqueza espectral y aun así no aumentar la pérdida espacial. El segundo, es que la riqueza espectral, este tiene valores más cercanos a los ideales en todos los índices estudiados, y adicionalmente, los índices que miden el error de la fusión en términos espaciales y espectrales o en varianzas (RASE) y (ERGAS), son los más bajos considerados en todas las fusiones generadas. De manera que, cuando se analiza la Diferencia en varianzas (Div), que mide la varianza entre la imagen original y la fusionada, en el algoritmo sin modificación y el propuesto, hay una respuesta negativa para las bandas R y G y positivo para la banda B. Esto puede indicar que hay una diferencia en el ajuste de cada banda a la distribución original de la imagen; no obstante, estos valores están cerca al valor ideal de 0, así que la diferencia en las distribuciones no es significativa para la calidad global de la imagen fusionada espacialmente hablando. En síntesis, llevando este análisis a la riqueza espectral, todos los valores son negativos, también cercanos a cero y adicionalmente menores a la resolución espacial. Esto comprueba nuevamente un mejor resultado en la riqueza espectral de las imágenes.

#### 6.4 Resultados filtro generado para riqueza espacial

El filtro generado para la riqueza espacial se implementó siguiendo la Ecuación 48, para el caso de la imagen Ikonos el factor  $1+h/l$  propuesto. La Figura 19 muestra la comparación de los resultados de la fusión con el filtro propuesto aplicando el factor de equilibrio de 1.25 dadas las características del sensor (Ver Tabla 1) y la imagen original.

La Figura 19 muestra la comparación de los resultados de la fusión con el filtro propuesto, aplicando el factor de equilibrio de 1.25 y la imagen original.



*Figura 19. Comparación de las imágenes fusionadas resultantes de la aplicación del filtro propuesto modificado comparadas con la imagen original. a) y c) Imagen original. b) y d) Imagen fusionada*

Visualmente existe una gran mejoría espacial en la determinación de objetos dentro de la imagen la Figura 19 b) y 19 d) tiene el detalle del parque Simón Bolívar, en donde se puede distinguir claramente la vegetación y los caminos internos de la zona, los colores presentan cambios también notables en especial en la cobertura de pastos, respecto a la imagen original; esto puede deberse a la alta inyección de información espectral que se logra con este método, y que está basado en una imagen que el ojo humano percibe mejor, el "value". Las edificaciones también se encuentran mejor definidas espacialmente, y en este tipo de coberturas, se conservan mejor el tono y la saturación de la imagen como muestra la Figura 19 d), aquí incluso se revelan elementos imperceptibles en la figura original, como escenarios deportivos o pequeñas edificaciones (Figura 19 c) comparada con la Figura 19 d).

De otro lado, la Tabla 6 muestra los resultados de la fusión aplicando el método propuesto modificado, en ellos se incluye evaluación espectral y espacial con relación a la imagen original, para los índices de ERGAS, calidad universal, coeficiente de correlación, Diferencia en varianzas (Div) RASE y RMSE.

*Tabla 6. Evaluación espectral y espacial de la fusión ikonos utilizando el filtro generado para la riqueza espacial con la descomposición À trous*

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	6,74	0,83	0,85	16,13	-0,08	26,96	7,31	0,80	0,80	13,03	0,04	29,24
G	2,73	0,95	0,96	6,54	-0,19	10,93	7,66	0,63	0,64	17,65	-0,23	30,64
B	4,19	0,91	0,94	10,04	0,33	16,77	7,67	0,53	0,54	14,86	-0,26	30,71

En esta tabla, se puede observar que los resultados de los índices evaluados para la imagen fusionada con el filtro generado, en cuanto a la riqueza espacial, en general tienen un comportamiento cercano al ideal. Por ejemplo, el ERGAS y RMSE son cercanos a 1, lo que indica que el error general de la imagen y el error medio cuadrático es bajo, si se compara con el resultado del filtro generado para la riqueza espectral (Tabla 5); es notable que la evaluación espacial mejora, mientras se pierde un poco más de información espectral. Sin embargo, esta pérdida presenta un mejor equilibrio entre las bandas, es decir, para la banda R, ERGAS tiene un valor de 6,74 espacial mientras que espectralmente es de 7,31. Cuando se realiza la misma comparación en el filtro para la riqueza espectral, los valores respectivamente son 9,92 y 2,89, lo que denota menos proporcionalidad en los resultados de la imagen. Así mismo, son comparables los valores de RMSE donde se observa el mismo comportamiento. Esto podría ser un primer indicio de un mejor equilibrio entre las resoluciones.

Ahora, con respecto al coeficiente de correlación no se alcanzan valores espectralmente tan altos como en filtro espectral, sin embargo, se encuentra este mismo concepto de proporcionalidad; aun así, la banda R en la comparación espacial obtiene valores sobre el 80%. Esto no sucede con las bandas G y B, las cuales alcanzan valores mayores al 90% en la evaluación espacial y por debajo del 65% para la riqueza espectral. En este sentido, no necesariamente lleva a un mal resultado, porque dependerá de las intenciones del investigador y de si están en la consecución de mayor riqueza espacial o espectral. Entonces, dicho índice es similar y comparable con la calidad universal que mide la distorsión de la imagen, en donde también se encuentran más altos resultados espaciales. En consecuencia, se presentan algunos hallazgos importantes, entre ellos, el hecho de que se obtienen resultados espaciales más altos, pero la disminución de los valores espectrales es menor, o más equilibrada entre las dos resoluciones, lo que podría considerarse un resultado más adecuado en general sobre la fusión. Cuando se compararon con los resultados de las fusiones y los métodos convencionales como Mallat o À trous, se comprobó que el filtro espectral, conserva valores similares espacialmente; pero mejora la riqueza espectral al aplicar el filtro espacial, la riqueza espacial mejora, la disminución de la espectral es menor.

En el análisis de la Diferencia en varianzas (Div) se encuentra que todos los valores están cercanos al cero a diferencia del análisis del filtro espectral, en este caso, los valores para la riqueza espectral no son todos negativos; además, la mayoría para las dos evaluaciones son mejores cuando se aplica el filtro espacial generado, esto significa que el ajuste de cada banda a la imagen original es mucho más exacto que en los otros métodos implementados. Es por esto que puede concluirse preliminarmente que este filtro generado para la riqueza espacial, es mejor que los anteriores aplicados, dado que, aunque conserva la proporción inversa entre las resoluciones espectral y espacial; esta proporción es mucho más equilibrada que en los otros métodos, en donde se observa una clara pérdida de alguna de las dos resoluciones, o esta es en todo caso mayor.

Resumiendo, el método aquí presentado por cada una de las bandas estudiadas, comparado con el método actual, y los filtros generados para la riqueza espacial y espectral, se pueden ver en la Tabla 7, basado en los promedios del índice de correlación.

*Tabla 7. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda una de los métodos utilizados basados en À trous*

Método	Coeficiente de correlación (CC)									
	Evaluación Espacial			Evaluación espectral			Promedio			Total
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	
Algoritmo À trous	0,56	0,64	0,58	0,96	0,94	0,92	76,75%	79,63%	75,75%	77,38%
À trous con filtro generado para la riqueza espectral	0,54	0,62	0,55	0,97	0,96	0,95	76,32%	79,46%	75,49%	77,09%
À trous con filtro generado para la riqueza espacial	<b>0,87</b>	<b>0,97</b>	<b>0,95</b>	<b>0,78</b>	<b>0,60</b>	<b>0,49</b>	<b>82,96%</b>	<b>79,02%</b>	<b>72,39%</b>	<b>78,12%</b>

La Tabla 7 muestra una comparación del coeficiente de correlación de los métodos utilizados basados en el algoritmo À trous, en ella se incluyó un promedio de conservación entre el resultado espacial y espectral, para cuantificar la mejora por banda y total de la imagen.

Se evidencia que cuando se evalúan sobre el algoritmo À trous y À trous con el filtro para riqueza espectral, los resultados espaciales disminuyen y los espectrales aumentan significativamente, situación esperada por el comportamiento inverso de las mismas. Como se mencionó previamente, se puede ver que espectralmente con el filtro se obtienen valores más altos que la aplicación del algoritmo original, pero menores espacialmente hablando. Los promedios en ambos casos resultan aceptables, pero bajos, con una ponderación de 77.38% y 77,09% respectivamente, dado la gran diferencia que hay entre los valores de cada banda para las dos resoluciones. Es importante mencionar que globalmente el algoritmo À trous original tiene una conservación mejor, pero como en el presente trabajo se busca mejorar las resoluciones y se obtiene en ambos casos valores por 77%, podría considerarse más adecuado utilizar el filtro espectral propuesto. Sin embargo, cuando se

revisan los resultados con el filtro para riqueza espacial, los resultados espaciales aumentan significativamente en comparación con los otros dos métodos, aproximadamente 0.3 puntos; no sucede lo mismo con la riqueza espectral, esta no alcanza los valores que se obtuvieron con dichos algoritmos.

No obstante, al revisar la cercanía entre los valores por banda, se obtienen diferencias menores. Para el algoritmo À trous original, la banda R tiene una diferencia de 0.40 entre la riqueza espacial y espectral, pero el filtro para riqueza espacial tiene una diferencia de 0,09, y aunque para las bandas G y B esta diferencia es mayor, y la banda B es la que más pérdida espectral presenta; globalmente se obtiene un 78,12%.

Tabla 8. Matriz de ganancia espacial y espectral de los métodos de fusión utilizados

Método	Coeficiente de Correlación Espacial			Coeficiente de Correlación Espectral			Ganancia Espacial			Ganancia Espectral		
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	R	G	B
Imagen original	<b>0,47</b>	<b>0,53</b>	<b>0,45</b>	<b>0,47</b>	<b>0,53</b>	<b>0,45</b>	-	-	-	-	-	-
Mallat Haar	0,74	0,84	0,77	0,83	0,72	0,66	0,27	0,31	0,32	0,36	0,19	0,22
Mallat db11	0,54	0,62	0,54	0,96	0,93	0,92	0,07	0,08	0,09	0,49	0,40	0,47
Algoritmo à trous	0,56	0,64	0,58	0,96	0,94	0,93	0,10	0,12	0,14	0,49	0,41	0,48
À trous con filtro generado para la riqueza espectral	0,54	0,62	0,55	0,97	0,96	0,95	0,07	0,09	0,11	0,50	0,43	0,50
À trous con filtro generado para la riqueza espacial	0,87	0,97	0,95	0,78	0,60	0,49	<b>0,40</b>	<b>0,44</b>	<b>0,50</b>	<b>0,31</b>	<b>0,07</b>	<b>0,04</b>

La Tabla 8 muestra un resumen de la ganancia por banda de cada uno de los métodos implementados en el presente trabajo. Se debe recordar que se realizó evaluando el coeficiente de correlación de la imagen original y restándolo a los valores obtenidos mediante las imágenes fusionadas. En tal sentido, antes de incluir los filtros propuestos generados, el método de Mallat con la wavelet Haar obtenía la más alta ganancia espacial y la más baja espectral; así mismo, À trous presentaba la mayor ganancia espectral y la más baja espacial. En este sentido, se presentaron los dos filtros generados, uno modificado con respecto al otro en el que se obtuvieron dos resultados importantes.

Primero, el filtro generado para la riqueza espectral, en efecto, produce la mayor ganancia espectral comparado con los algoritmos originales de À trous y Mallat. La ganancia espacial es poca, por tanto, si el objetivo del investigador es obtener mayor riqueza espectral el filtro propuesto en este trabajo es el más adecuado. Segundo, el filtro generado para riqueza espacial a su vez, proporciona la ganancia espacial más alta de todos los métodos utilizados, si el objetivo del investigador tiene relación con tareas de clasificación, extracción



Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

de objetos, morfología matemática, estudios temporales, entre otros, con la utilización de este filtro obtendrá la más alta riqueza espacial y casi conservará las características espectrales de la imagen original; lo que significaría una muy baja distorsión en la información original y por tanto un aporte significativo durante la fusión.

## 7. Validación de resultados

El proceso de validación se realizó con dos imágenes de sensores diferentes Worldview 2 y Landsat 8, con la intención de probar el algoritmo propuesto, en sensores de diferentes resoluciones espaciales y temporales; y de esta forma, verificar la efectividad del mismo, así como las diferencias que se presentan al utilizar los diferentes métodos seleccionados. De manera que, se generaron imágenes fusionadas con los métodos de Mallat y À trous, para ser posteriormente comparadas con las fusiones a partir de los filtros generados de la riqueza espectral y espacial.

### 7.1 Worldview 2

Para esta imagen se generó un recorte de 4096X4096 pixeles de una zona cercana al área de estudio, en donde se pueden observar coberturas similares en diferentes dimensiones, como cuerpos de agua, vegetación y áreas urbanas.

#### 7.1.1 Fusión con el algoritmo Mallat.

La Tabla 9, muestra las familias wavelet con los diez resultados más altos en los índices de calidad universal (Q) y coeficiente de correlación (CC) en la evaluación espectral; los valores presentados son el promedio de las bandas RGB.

*Tabla 9. Evaluación espectral de la fusión Worldview 2 utilizando la descomposición Mallat*

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
1	db 11	0,000	0,008	0,993	5,827	2,037	0,993	8,147	2,395
1	coif5	0,000	0,008	0,993	5,826	2,058	0,993	8,230	2,419
1	sym10	0,000	0,008	0,993	5,826	2,068	0,993	8,273	2,431
1	coif4	0,000	0,008	0,993	5,826	2,069	0,993	8,276	2,432
1	db 9	0,000	0,008	0,993	5,826	2,072	0,993	8,290	2,436
1	Bior 68	0,000	0,008	0,993	5,824	2,073	0,993	8,291	2,437
1	sym8	0,000	0,008	0,993	5,825	2,081	0,993	8,324	2,446
1	coif3	0,000	0,008	0,993	5,825	2,088	0,993	8,353	2,455
1	db7	0,000	0,008	0,993	5,824	2,097	0,993	8,388	2,465
1	db 4	0,000	0,008	0,993	5,827	2,105	0,993	8,420	2,475

La Tabla 9 contiene los resultados de la aplicación del algoritmo Mallat sobre la imagen Worldview 2. Aquí se encuentran dos aspectos importantes: el primero es que los resultados tienen valores más altos que la imagen original estudiada; como se ha

mencionado anteriormente, puede deberse a la resolución espacial de la imagen validada; aun así, el algoritmo propuesto tiene valores más cerca a los ideales que Mallat. En particular, los índices Q y CC, son bastante altos en ambos casos son de 0,99, solamente están diferenciados por decimales en tercer orden.

Por su parte, la Tabla 10 muestra las familias wavelet con los diez resultados más altos en los índices de calidad universal (Q) y coeficiente de correlación (CC) en la evaluación espacial, los valores presentados son el promedio de las bandas RGB.

Tabla 10. Evaluación espacial de la fusión Worldview 2 utilizando la descomposición Mallat

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
4	sym10	0,130	-0,583	0,873	5,841	10,118	0,798	40,471	13,912
4	Bior 68	0,130	-0,581	0,873	5,841	10,115	0,798	40,459	13,908
4	sym8	0,130	-0,582	0,873	5,841	10,117	0,798	40,467	13,911
4	db 9	0,130	-0,582	0,873	5,842	10,118	0,798	40,472	13,912
4	coif5	0,130	-0,583	0,873	5,841	10,119	0,798	40,474	13,913
4	db7	0,130	-0,581	0,873	5,841	10,116	0,798	40,463	13,909
4	coif3	0,130	-0,581	0,873	5,841	10,115	0,798	40,461	13,909
4	coif4	0,130	-0,582	0,873	5,841	10,117	0,798	40,469	13,911
4	db 11	0,130	-0,583	0,873	5,842	10,120	0,798	40,478	13,915
4	Bior 44	0,130	-0,577	0,873	5,841	10,107	0,798	40,429	13,898

En cuanto a la riqueza espacial (Tabla 10), se encuentra una situación similar, no hay grandes diferencias en varias familias estudiadas cuando se aplica, la descomposición piramidal la cual espacialmente es alcanzada en el nivel 4. Los valores son similares para algunas de las bandas del método propuesto, comparado con Mallat en los índices de correlación y calidad universal.

A diferencia de los índices RASE, ERGAS y RMSE, estos varían para las diferentes bandas en el filtro propuesto y solo son mejores en la banda R; en promedio se obtiene menor pérdida en Mallat, aunque los errores por ejemplo son bastante altos. La banda que más se ve afectada en relación con Mallat es la banda B.

### 7.1.2 Fusión con el algoritmo À trous.

La Tabla 11, muestra los resultados de la evaluación espectral y espacial de la fusión con el algoritmo À trous para la imagen Worldview 2, presentando los resultados por banda de la combinación RGB.

Tabla 11. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición À trous sin modificaciones

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	9,266	0,797	0,837	12,741	-0,797	37,064	3,353	0,984	0,988	3,907	- 0,151	13,412
G	12,041	0,774	0,890	16,556	-1,682	48,163	3,138	0,983	0,986	5,098	- 0,153	12,553
B	12,473	0,708	0,797	17,150	-0,091	49,891	3,583	0,986	0,989	2,859	- 0,144	14,333

Finalmente, al aplicar la descomposición À trous, se encuentran varios puntos importantes. Uno de ellos, es que esta prueba no supera los valores calculados para Mallat, su distorsión y correlación con la imagen original de los índices Q y CC, llegan al 0.98 (Tabla 11). Así mismo, su error representado en el RASE y el RMSE es similar al hallado con Mallat, pero con À trous hay valores más altos a los ideales en las bandas G y B. Dentro de la imagen los valores de ERGAS y RMSE para la riqueza espectral, son bajos y cercanos a los ideales; en el caso del análisis espacial, el RASE sí es bastante mayor al ideal, lo que implica una distorsión mayor respecto a la imagen original en este aspecto. A pesar de ello, se puede respaldar la conclusión de que en proporción, la pérdida espacial, aunque sea mayor que en otros algoritmos, comparado con la riqueza espectral ganada es aceptable.

### 7.1.3 Filtro generado para la riqueza espectral.

Todos los filtros se generaron con la imagen recortada descrita previamente. La Figura 20 muestra la imagen fusionada con el algoritmo propuesto y también, un acercamiento a una zona del aeropuerto el Dorado, en el que se puede observar la definición de algunas coberturas como vías y vegetación. También la presencia de objetos como aviones y estructuras de diferentes tamaños.

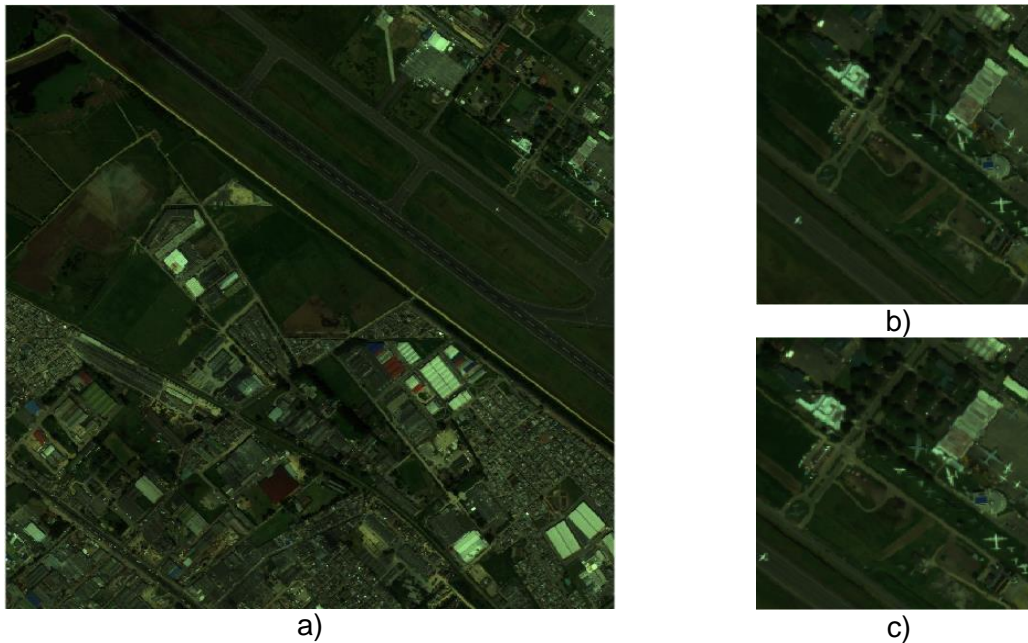


Figura 20. Imagen Worldview 2 fusionada con el filtro generado para la riqueza espectral. A) Imagen fusionada del área total. b) Porción de la imagen RGB sin fusionar. c) Porción de la imagen RGB fusionada.

La imagen fusionada del satélite Worldview 2, mostró un buen resultado en definición de objetos, tras una evaluación visual. La zona norte de la Figura 20 a), permite diferenciar zonas de suelo desnudo de zonas de pastos bajos, así como áreas pavimentadas vacías, también es posible ver la delimitación de vías, la estructura y color de los objetos. Igualmente sucede con pequeñas estructuras en la ampliación proporcionada por la Figura 20 b) y Figura 20 c); otro elemento se diferencia en la parte inferior izquierda Figura 20 c), una vía circular y dentro de ella un avión, el cual no es fácilmente diferenciable en la imagen original Figura 17 b); considerando que esta imagen tiene mayor resolución que la imagen Landsat 8 e Ikonos. Esto permite concluir parcialmente que el filtro para la riqueza espectral se comporta bien en resoluciones pequeñas, al menos desde una perspectiva visual.

La Tabla 12 muestra los resultados de la evaluación espectral y espacial en la imagen fusionada Worldview 2, utilizada durante el proceso de validación de resultados, para los principales índices ERGAS, Q, CC, RMSE, Div, RASE, para cada banda de la imagen en combinación verdadero color RGB.

Tabla 12. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando el filtro generado para la riqueza espectral en la descomposición À trous

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	9,26	0,79	0,82	12,73	-0,67	37,04	1,92	0,99	0,99	2,24	-0,075	7,71
G	11,50	0,77	0,87	15,81	-1,50	46,01	1,81	0,99	0,99	2,95	-0,075	7,27
B	12,72	0,69	0,78	17,50	-0,02	50,91	2,05	0,99	0,99	1,63	-0,074	8,20

Cuando se analizan cuantitativamente los resultados sobre la imagen Worldview 2 (Tabla 12), se obtienen valores bastante cercanos al ideal en todos los índices presentados para la evaluación espectral. El error de la fusión (RASE) es uno de los más cercanos, encontrados en las diferentes imágenes fusionadas con un valor mínimo de 7.2; así mismo el coeficiente de correlación (CC) y la calidad universal (Q) tienen valores de 0.99, esto significa que la distorsión de la imagen y su relación respecto a la original son muy cercanos. En consecuencia, se ha recogido la riqueza espectral sin afectar la información que se encontraba en la imagen MUL.

Del mismo modo, la Diferencia en varianzas (Div) tiene para la varianza valores negativos tanto en la riqueza espectral como espacial, e igualmente cercanos a 0, en especial en la evaluación espectral. Especialmente la banda G, se aleja del resultado deseado, aun así, sus valores en RASE y ERGAS son consistentes con los de las demás bandas, sin ningún dato atípico. De modo idéntico, la distorsión presentada en la evaluación espectral es menor, esta fue medida con el índice ERGAS; mientras que sus valores son cercanos en las dos evaluaciones, lo que indica que en efecto la pérdida espacial no es desproporcionada en relación a la ganancia espectral.

Los resultados sobre la imagen Worldview 2 apoyan la conclusión preliminar de tener buenos resultados con imágenes de mayor resolución, lo que tiene sentido, conociendo que la imagen PAN tiene una resolución mayor comparada con la MUL, y al inyectar mediante la fusión dichos detalles, se encuentra una imagen con mayor calidad según la evaluación.

#### 7.1.4 Filtro generado para la riqueza espacial.

La Figura 21 muestra un acercamiento a la zona del aeropuerto internacional el Dorado, zona cercana al área de estudio principal de este trabajo, así como las diferencias entre la imagen original y la imagen fusionada con el filtro propuesto para la riqueza espacial.



Figura 21. Comparación Imagen fusionada Worldview 2 con el filtro generado para la riqueza espacial. a) Imagen original. b) Imagen fusionada

Respecto a la validación espacial, la Figura 21 muestra el resultado de la aplicación del filtro generado para la riqueza espacial. Visualmente se pueden notar varios cambios, uno de ellos es la definición de estructuras, en cuanto al borde y la forma de las mismas; en la zona presentada hay una serie de hangares, razón por la que se observan dentro de la imagen varios aviones. Incluso hay uno sobre la pista, que es casi imperceptible en la imagen original (Figura 21 a), pero en la imagen fusionada se puede observar con una mayor facilidad.

Ahora bien, en el centro de la imagen, hay presencia de estructuras que no podían diferenciarse en la imagen original (Figura 21 b). Todas estas observaciones también se relacionan con la respuesta de la imagen ikonos, lo que podría ser un indicio de que existe una respuesta adecuada a la aplicación del filtro en escalas pequeñas. Vale la pena recordar que la imagen Worldview 2 tiene una resolución espacial menor a la de ikonos, por tanto, los objetos en general se pueden observar mejor. A pesar de ello, la aplicación del filtro generado también proporciona información adicional a la imagen original en la validación.

Por otro lado, al continuar la comparación con el sensor Ikonos, uno de los resultados notables, es que los tonos del color dentro de la imagen se ven modificados, posiblemente por los cambios espectrales que sufre durante la fusión, aunque como se ha dicho la pérdida es muy baja. A su vez, se puede observar que para la imagen Worldview 2, la imagen sufre pocos cambios al menos visuales, de la tonalidad y la saturación de la respuesta, con respecto a la imagen original, lo que es un buen indicio de conservación de la información. Desde esta perspectiva, la Tabla 13 contiene los resultados de la evaluación espacial y espectral por medio de los diferentes índices utilizados de la fusión obtenida en la Figura 22.

Tabla 13. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición À trous con el filtro generado para la riqueza espacial

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	8,30	0,86	0,90	11,41	0,09	33,19	7,80	0,89	0,93	9,09	0,42	31,20
G	3,79	0,96	0,97	5,21	-0,28	15,16	7,63	0,85	0,90	12,39	0,45	30,51
B	13,87	0,67	0,88	19,07	0,49	55,48	8,81	0,88	0,94	7,03	0,46	35,24

Cuando se evalúan los resultados cuantitativos sobre la imagen de validación Worldview 2 en la Tabla 13, los índices ERGAS y RASE en donde se esperan valores cercanos a 0, se encuentran un ERGAS similar para la riqueza espectral y espacial; pero un RASE alto para ambos. Además, para la riqueza espacial existe una diferencia entre los valores de las tres bandas, si comparamos estos resultados con el sensor Ikonos, la banda R obtenía los valores más cercanos al ideal, mientras que la banda B, los menores; sin embargo, en este caso los más cercanos pertenecen a la banda G. Esto resulta interesante en el sentido de que, a pesar de ser similares los resultados, en general, la particularidad muestra diferencias en la respuesta de cada sensor.

Ahora, respecto al coeficiente de correlación y la calidad universal (Q), es notable que existe equilibrio entre los valores, es decir, la evaluación espectral y espacial no muestran valores diametralmente opuestos; de hecho, todos son mayores al 85% excepto la banda B, en la que también se obtuvieron los valores menos cercanos al ideal en los demás índices y únicamente en el ámbito espacial. Así mismo, otros índices importantes como la Diferencia en varianzas (Div) muestran valores muy cercanos a 0, y solo uno negativo, esto representa un correcto equilibrio entre negros y blancos dentro de la imagen. De igual forma el error medio cuadrático de la imagen RMSE, tiene valores bajos y equilibrados entre las dos resoluciones.

En consecuencia, la Tabla 14 presenta el promedio de los valores espectrales y espaciales de las fusiones realizadas mediante el algoritmo À trous, con los dos filtros generados; utilizando el coeficiente de correlación.

Tabla 14. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda, uno de los métodos utilizados basados en À trous en la imagen Worldview 2

Método	Coeficiente de correlación (CC)									
	Evaluación Espacial			Evaluación espectral			Promedio			Total
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	
Algoritmo à trous	0,840	0,893	0,800	0,987	0,986	0,989	91,37%	93,91%	89,46%	91,58%
À trous con filtro generado para la riqueza espectral	0,827	0,880	0,786	0,996	0,995	0,996	91,15%	93,75%	89,14%	91,35%
À trous con filtro generado para la riqueza espacial	<b>0,910</b>	<b>0,983</b>	<b>0,895</b>	<b>0,924</b>	<b>0,890</b>	<b>0,936</b>	<b>91,71%</b>	<b>93,67%</b>	<b>91,56%</b>	<b>92,31%</b>



Al analizar el comportamiento de las diferentes modificaciones a los planos del algoritmo À trous y el original en la Tabla 14, se obtiene que el plano modificado propuesto tiene los más altos valores para la riqueza espacial. Globalmente se obtiene un 92.31% de conservación de la relación espacial- espectral, esto se da básicamente por la cercanía de los valores, que es posible interpretar como un equilibrio. Ejemplificando la situación, la banda G en el algoritmo À trous sin modificaciones, tiene una diferencia de 0.17 puntos, mientras que la misma operación para la imagen con el filtro generado para la riqueza espacial es de 0,09; esto proporciona un mejor resultado general de la imagen, lo cual también se pudo comprobar visualmente.

De esta manera, la Tabla 15 contiene la matriz de ganancia espectral y espacial de los métodos utilizados en este trabajo y que han sido validados sobre una imagen Worldview 2.

Tabla 15. Ganancia espacial y espectral de los métodos implementados para la fusión en una imagen Worldview 2

Método	Coeficiente de Correlación Espacial			Coeficiente de Correlación Espectral			Ganancia Espacial			Ganancia Espectral		
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	R	G	B
Imagen original	<b>0,81</b>	<b>0,86</b>	<b>0,77</b>	<b>0,81</b>	<b>0,86</b>	<b>0,77</b>	-	-	-	-	-	-
Mallat db11	0,82	0,87	0,78	0,993	0,992	0,994	0,01	0,01	0,01	0,18	0,13	0,22
Algoritmo à trous	0,840	0,893	0,800	0,987	0,986	0,989	0,03	0,08	- 0,01	0,18	0,18	0,18
À trous con filtro generado para la riqueza espectral	0,827	0,880	0,786	0,996	0,995	0,996	0,02	0,07	- 0,02	0,19	0,19	0,19
À trous con filtro generado para la riqueza espacial	<b>0,910</b>	<b>0,983</b>	<b>0,895</b>	<b>0,924</b>	<b>0,890</b>	<b>0,936</b>	<b>0,10</b>	<b>0,17</b>	<b>0,09</b>	<b>0,11</b>	<b>0,08</b>	<b>0,13</b>

Con respecto a la ganancia espacial y espectral de la imagen de validación Worldview 2, en la Tabla 15 se encuentra evidencia de que los mejores resultados en cuanto a ganancia espacial se encuentran con el filtro para riqueza espacial. El coeficiente de correlación está por encima del 89% en todas las bandas, al respecto, es importante mencionar que sobre esta validación se encuentra un equilibrio muy alto, y cercano a 1; posterior a la aplicación del método propuesto, dado que los valores altos se encuentran espectral y espacialmente. Ahora, en los demás métodos incluyendo Mallat la ganancia es mínima, y a pesar de que para el caso presentado los valores no son muy altos, son mayores a los de otros métodos. Así mismo la ganancia espectral se mantiene en los valores más bajos, lo que indica que se conservó la riqueza espectral de forma similar a la imagen original y además se ganó riqueza espacial.

Es posible concluir de forma preliminar entonces, que la aplicación del filtro para la riqueza espacial, se comporta adecuadamente sobre el sensor Worldview 2, con resultados cercanos al ideal, lo que podría ser extensible a otros sensores de mayor resolución

espacial o espectral. Sin embargo, es importante tener en cuenta que los resultados podrían variar por banda y valdría la pena realizar una investigación más exhaustiva al respecto, en especial, si se requiere hacer una combinación RGB con propósitos específicos como los índices de vegetación en donde la banda G tiene una gran importancia.

## 7.2 Landsat 8

La imagen seleccionada para este sensor, tiene un tamaño de 1024X1024 pixeles, por las características del sensor esta cubre una gran proporción de la ciudad de Bogotá, incluyendo la zona de estudio, con la intención de revisar el comportamiento de los filtros generados a diferente escala.

### 7.2.1 Fusión con la descomposición Mallat.

En la Tabla 16, se encuentran los diez resultados más altos de los índices de coeficiente de correlación (CC) y calidad universal (Q). Los valores representan el promedio de las bandas RGB.

*Tabla 16. Evaluación espectral de la fusión Landsat utilizando la descomposición Mallat*

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
1	Bior 26	0,000	-0,144	0,925	4,620	4,094	0,923	8,188	2,847
1	rbio 24	0,000	-0,146	0,925	4,621	4,101	0,923	8,202	2,851
1	coif2	0,000	-0,141	0,924	4,619	4,123	0,921	8,246	2,867
1	Bior 44	0,000	-0,139	0,923	4,618	4,130	0,921	8,260	2,871
1	coif3	0,000	-0,134	0,922	4,617	4,143	0,920	8,285	2,880
1	Bior 68	0,000	-0,132	0,922	4,616	4,139	0,921	8,278	2,878
1	coif4	0,000	-0,131	0,922	4,616	4,159	0,920	8,317	2,891
1	coif5	0,000	-0,130	0,921	4,616	4,171	0,919	8,342	2,900
1	sym8	0,000	-0,135	0,920	4,618	4,211	0,918	8,422	2,928
1	sym10	0,000	-0,132	0,919	4,617	4,216	0,918	8,432	2,931

Cuando se hace referencia a los resultados de la fusión para la imagen Landsat 8 con el algoritmo Mallat (Tabla 16), se pueden observar espectralmente resultados de correlación y calidad cercanos al 0.92. En RASE se obtienen valores de la calidad global de 8 aproximadamente. Por su parte, al analizar la riqueza espectral, la evaluación arroja (CC) y (Q) de 0.98 y 0.61 respectivamente, se ve un deterioro en la calidad universal, recordando que este mide la distorsión en tres aspectos, este tiene valores más cercanos al ideal. A su vez la Tabla 17 contiene los valores promedio más altos, para los coeficientes de correlación (CC) y calidad universal (Q) evaluando la imagen PAN con la fusión.

Tabla 17. Evaluación espacial de la fusión Landsat utilizando la descomposición Mallat

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
5	rbio 13	-1,792	0,218	0,981	4,827	90,088	0,616	180,177	22,454
5	Bior 44	-1,792	0,219	0,981	4,823	90,110	0,616	180,220	22,459
5	coif2	-1,792	0,219	0,981	4,822	90,102	0,616	180,205	22,457
5	Bior 26	-1,792	0,219	0,981	4,823	90,105	0,616	180,211	22,458
5	coif5	-1,792	0,222	0,981	4,821	90,092	0,616	180,184	22,455
5	Bior 68	-1,792	0,221	0,981	4,821	90,094	0,616	180,187	22,455
5	coif3	-1,792	0,221	0,981	4,821	90,093	0,616	180,186	22,455
5	db7	-1,792	0,221	0,981	4,821	90,088	0,616	180,176	22,454
5	sym8	-1,792	0,221	0,981	4,820	90,093	0,616	180,186	22,455
5	coif4	-1,792	0,222	0,981	4,821	90,089	0,616	180,179	22,454

La calidad universal (Q) se ve bastante afectada respecto a los hallazgos en los sensores de mayor resolución con valores de 61% para las 10 Wavelets con mayor coeficiente de correlación, esto es indicio de una distorsión sobre la imagen, además de índices de error como RMSE y RASE, muy altos. Así mismo, la Diferencia en varianzas (Div) alcanza los valores más altos hasta el momento, además negativos, lo que supone un cambio de color perceptible en la imagen.

### 7.2.2 Fusión con el algoritmo À trous

Los resultados de la evaluación con los diferentes índices sobre la imagen Landsat 8 con el algoritmo À trous se presentan en la Tabla 18.

Tabla 18. Evaluación espectral y espacial de la fusión Worldview 2 utilizando en la descomposición À trous

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	92,632	0,592	0,945	23,088	0,114	185,264	4,805	0,946	0,963	3,258	-0,451	9,610
G	95,565	0,571	0,943	23,819	0,332	191,129	4,658	0,928	0,952	3,223	-0,561	9,316
B	100,749	0,547	0,940	25,111	0,409	201,498	4,500	0,918	0,944	3,227	-0,598	9,001

Al comparar los resultados anteriores con el algoritmo À trous (Tabla 18), se evidencian resultados en general similares a los otros métodos, en otras palabras, valores esperados cercanos al ideal para la evaluación espectral. Es decir, valores bastante alejados en la evaluación espacial para los índices globales RASE ERGAS y RMSE.

### 7.2.3 Filtro generado para la riqueza espectral.

El análisis de la riqueza espacial fue implementado con el filtro generado para la riqueza espacial, y evaluada mediante la aplicación de los mismos índices de la riqueza espacial para permitir su comparación; estos fueron calidad universal (Q), coeficiente de correlación (CC), ERGAS, RASE, RMSE y Diferencia en varianzas (Div).

La Figura 22 muestra la aplicación del algoritmo propuesto sobre la imagen Landsat 8, está sobre una porción del área original escogida en este trabajo para ver los cambios obtenidos durante la fusión en el parque Simón Bolívar y áreas alrededor.

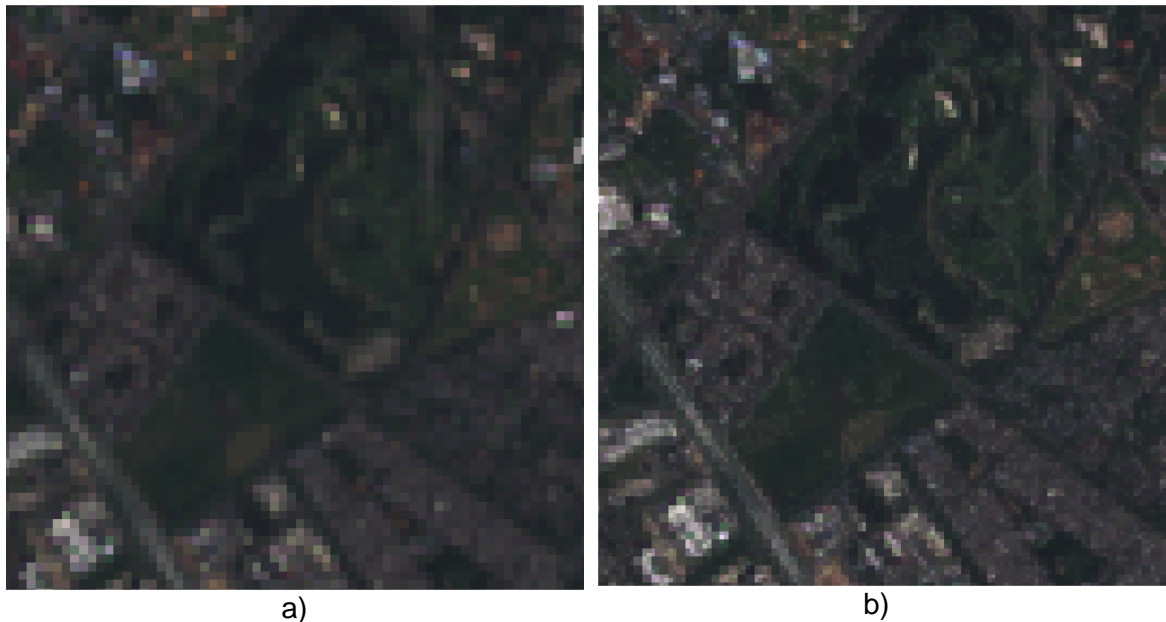


Figura 22. Porción de la Imagen Landsat 8 de validación. a) Imagen original. b) Imagen fusionada con el algoritmo propuesto.

En esta figura, se evidencia además el resultado de la fusión sobre la imagen Landsat 8 con el filtro para la riqueza espectral, se presenta una mejora notable mediante el análisis visual, en cuanto a tono de la imagen, así como la definición de calles y edificaciones, también una forma más exacta de la zona de estudio del parque Simón Bolívar, a pesar de la de 30m resolución de la imagen, mediante un acercamiento, se pueden distinguir zonas urbanas y de vegetación. Por otra parte, las zonas de cuerpos de agua se confunden con la respuesta espectral de los pastos y las zonas arbóreas no son diferenciables. No pasa igual con algunas edificaciones que no podían ser reconocidas dentro del parque Simón Bolívar y que aparecen con una forma y color más específico en la imagen fusionada.

La Tabla 19, presenta la evaluación espectral y espacial de la imagen Landsat 8 fusionada con el plano modificado propuesto en la descomposición À trous, para los principales índices ERGAS, Q, CC, RMSE, Div, RASE, en cada banda de la imagen en combinación verdadero color RGB.

*Tabla 19. Evaluación espectral y espacial de la fusión Landsat utilizando el filtro propuesto para la riqueza espectral en la descomposición À trous*

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	91,36	0,59	0,94	22,77	0,23	182,72	3,47	0,97	0,97	2,35	-0,25	6,94
G	94,40	0,56	0,94	23,52	0,43	188,80	3,37	0,95	0,96	2,33	-0,31	6,75
B	99,62	0,53	0,94	24,83	0,50	199,25	3,26	0,95	0,96	2,34	-0,33	6,53

En la aplicación del filtro generado a la imagen Landsat 8, es notable que los coeficientes correlación tanto para la evaluación espectral y espacial, es cercana al ideal de 1, con un valor máximo de 0.97, y mínimo de 0.94 Tabla 19. El RMSE espectralmente hablando, presenta poca distorsión respecto a la original en un sentido global. La Diferencia en varianzas (Div) es mayor que en otras imágenes analizadas, lo que implica que su varianza es diferente, sin ser extremadamente alta, y que además como se evidenció en el análisis visual, el valor negativo implica una tendencia hacia el blanco, lo que podría explicar la mejoría en los tonos de color de la imagen. No obstante, el índice RASE es también menor incluso que los aplicados en la imagen IKONOS y en la Woldview 2, situación similar para el índice ERGAS que también se acerca al ideal de cero.

Finalmente, con respecto a la evaluación espacial, y probablemente por la resolución mayor de los píxeles para esta imagen, el índice ERGAS es muy alto, es decir sobre este tipo de imagen se presenta una relación de escala muy distorsionada. Igualmente se puede ver en el índice RMSE y el RASE que tienen valores altos, lo cual implica considerar la pérdida de riqueza espacial al aplicar el filtro propuesto.

#### 7.2.4 Filtro generado para la riqueza espacial.

La validación del filtro generado para la riqueza espectral, se realizó sobre la imagen de validación Landsat 8 y los resultados se encuentran en la Figura 23. Allí se observa, en la Figura 23 a, la imagen original; y en la Figura 23 b, la imagen fusionada con el plano modificado propuesto.



Figura 23. Comparación Imagen fusionada Landsat 8 con el filtro generado para la riqueza espacial. a) Imagen original. b) Imagen fusionada.

Cuando se analiza el plano de forma visual (Figura 23) se evidencia una mejora en cuanto a la definición de la imagen. De esta manera podría considerarse que en la evaluación, los valores espaciales serán bastante altos; pero a pesar de ello, también se evidencia un cambio de los colores originales de la imagen a tonalidades más oscuras, por tanto, podría haber mayor pérdida espectral en relación con los otros sensores y resoluciones. También de forma preliminar y únicamente basado en el criterio visual, habría algunas consideraciones al utilizar el filtro generado para la riqueza espacial a resoluciones bajas, en cuanto al color y la información espectral.

La Tabla 20 proporciona los valores resultantes de los diferentes índices de evaluación utilizados para la imagen Landsat 8, fusionada mediante el algoritmo À trous con el filtro generado para la riqueza espacial.

Tabla 20. Evaluación espectral y espacial de la fusión Landsat 8 utilizando en la descomposición À trous con el filtro generado para la riqueza espacial

Banda	Evaluación Espacial						Evaluación Espectral					
	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE	ERGAS	Q	CC	RMSE	Div	RASE
R	13,24	0,96	0,975	3,30	-0,37	26,49	31,14	0,58	0,92	21,11	-1,25	62,29
G	11,98	0,97	0,976	2,99	-0,27	23,96	31,66	0,54	0,92	21,91	-1,98	63,33
B	12,22	0,96	0,978	3,05	-0,28	24,45	32,05	0,51	0,91	22,98	-2,47	64,09

Las evaluaciones espacial y espectral realizadas al aplicar el filtro generado (Tabla 20), muestran índices de correlación (CC) y calidad universal (Q) altos para la evaluación espacial por encima del 95%, distinto del comportamiento de los mismos índices en la evaluación espectral; allí se obtiene correlación mayor al 90%, pero calidad universal por debajo de 60%. Este último mide la distorsión en tres aspectos: pérdida de correlación, distorsión de iluminancia y contraste de distorsión, lo que significa que hay una considerable

distorsión de iluminancia sobre la fusión. Por tanto, conviene mencionar que esta distorsión se evidencia en el cambio del aspecto del color en la imagen obtenida (Figura 23 b).

Por otro lado, en cuanto a el error medio cuadrático de la imagen y el ERGAS como error relativo global, también se encuentran valores mayores en la evaluación espectral; lo que hace un poco más desequilibrada la fusión en cuanto al objetivo de este trabajo. Otro aspecto importante y notorio dentro de la evaluación visual, es la tendencia hacia los tonos negros en la fusión; esto se explica con los valores de Diferencia en varianzas (Div) que espectralmente alcanzan valores negativos y mayores a 1, al contrario de la evaluación espectral donde los valores son más cercanos a cero, aunque también negativos.

La Tabla 21 muestra los valores asociados al coeficiente de correlación comparando las diferentes modificaciones al algoritmo À trous, así mismo, presenta los promedios entre las resoluciones para determinar cuál de ellos es el que proporciona mejor información.

Tabla 21. Comparación del coeficiente de correlación de las fusiones resultantes por banda una de los métodos utilizados basados en À trous en la imagen Landsat 8

Método	Coeficiente de correlación (CC)									
	Evaluación Espacial			Evaluación espectral			Promedio			Total
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	
Algoritmo À trous	0,948	0,946	0,944	0,961	0,95	0,942	95,45%	94,78%	94,25%	94,83%
À trous con filtro generado para la riqueza espectral	0,944	0,946	0,943	0,977	0,969	0,964	96,06%	95,75%	95,33%	95,72%
À trous con filtro generado para la riqueza espacial	<b>0,986</b>	<b>0,987</b>	<b>0,988</b>	<b>0,922</b>	<b>0,919</b>	<b>0,911</b>	<b>95,41%</b>	<b>95,31%</b>	<b>94,93%</b>	<b>95,22%</b>

Al comparar el algoritmo de À trous con las modificaciones realizadas en la Tabla 21, filtro generado para riqueza espacial modificado una vez más, obtuvo los valores más altos de correlación respecto a la imagen original en la evaluación espacial, logrando una mejora global promedio de 95.22%. Aun así, para este caso la imagen que globalmente logra los mejores resultados, es el filtro generado para riqueza espectral.

Por otra parte, las dos modificaciones propuestas en el presente trabajo tienen resultados globales y específicos mayores que la aplicación del algoritmo À trous original, por lo que puede considerarse un avance en la búsqueda de obtener mayor riqueza espacial con menor pérdida espectral.

Finalmente, la Tabla 22 contiene los resultados del cálculo de la ganancia espectral y espacial para todos los métodos implementados en este trabajo, aplicados a la imagen de validación Landsat 8.

Tabla 22. Ganancia espacial y espectral de los métodos implementados para la fusión en una imagen Landsat 8

Método	Coeficiente de Correlación Espacial			Coeficiente de Correlación Espectral			Ganancia Espacial			Ganancia Espectral		
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	R	G	B
Imagen original	<b>0,90</b>	<b>0,90</b>	<b>0,89</b>	<b>0,90</b>	<b>0,90</b>	<b>0,89</b>	-	-	-	-	-	-
Mallat bior26	0,94	0,93	0,92	0,94	0,92	0,91	0,04	0,03	0,03	0,04	0,02	0,02
Algoritmo à trous	0,948	0,946	0,944	0,961	0,95	0,942	0,05	0,04	0,05	0,06	0,05	0,05
À trous con filtro propuesto	0,944	0,946	0,943	0,977	0,969	0,964	0,04	0,04	0,05	0,08	0,07	0,07
À trous con modificación al filtro propuesto	0,986	0,987	0,988	0,922	0,919	0,911	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>	<b>0,09</b>	<b>0,02</b>	<b>0,02</b>	<b>0,02</b>

De igual modo, al realizar la matriz de ganancia espacial para la imagen Landsat 8, la Tabla 22 arroja resultados confirmatorios al obtener mejores resultados espaciales y bajos espectrales; lo que indica una cercanía a la imagen original, a pesar de encontrar las distorsiones previamente mencionadas. Todo esto parece confirmar que la aplicación de filtro para la riqueza espectral, es más adecuada que el filtro para la riqueza espacial; en especial en los sensores de baja resolución. No obstante, si se espera una mejora espacial, el filtro espacial puede ser una gran alternativa, teniendo en cuenta que es posible encontrar distorsiones importantes en la luminancia y el tono; por tanto, la percepción del color de la imagen resultante, claro que para tareas específicas de clasificación o extracción, no necesariamente sería una limitación.



## 8. Análisis de resultados

Es importante recordar que los análisis realizados en el presente trabajo se basan en la evaluación visual y cuantitativa mediante los índices de coeficiente de correlación y calidad universal; el valor ideal para estos es de 1, y significa que las imágenes fusionadas, conservan las propiedades idénticas a la imagen original. Así mismo se analizan especialmente por ser índices globales RASE, ERGAS y RMSE, que se espera tengan un valor cercano a 0, lo que indicaría igualmente que las propiedades de la imagen fusionada y la original son iguales. También fueron evaluados la diferencia en varianzas, y el índice de diferencia entre medias de las imágenes, el valor ideal es cero en ambos casos.

Las descomposiciones aplicadas de Mallat y À trous, para la imagen IKONOS estudiada, arrojaron en el caso de Mallat la Wavelet Daubechies 11 en el primer nivel de descomposición, como la de más adecuados resultados de acuerdo a los criterios previamente descritos, donde se obtuvieron valores de 0.93 para la calidad universal y el coeficiente de correlación, e índices de ERGAS y RMSE de 6.1. Adicionalmente el RASE fue de 12,3, mientras la Div y Bias, tuvieron valores negativos y cercanos a cero de -0.076 y  $-5.7e-05$  respectivamente; lo que demuestra una fusión con pocos errores y pérdida de información original durante la evaluación espectral. Resultados similares, pero menos cercanos al ideal se observaron en las wavelets Coiflet 5 y Symlet 10.

En general, la evaluación espacial de este método de descomposición mostró que la mejor Wavelet fue la Haar en nivel de descomposición 5, en donde los valores de Bias y diferencia de varianza, mostraron valores de 0.1 y 0.041 igualmente cercanos a cero. Así mismo los índices de coeficiente de correlación y calidad universal Q mostraron valores más lejanos del ideal de 0.7; a su vez los índices ERGAS y RMSE alcanzaron valores de 13.7 y 16.4 respectivamente y un error relativo RASE de 27.4 considerado alto. Estos resultados suponen una distorsión mayor en la imagen fusionada respecto a la original, no obstante, los principales resultados mostraron valores menores a los obtenidos en la evaluación de riqueza espectral en este método.

De otro lado, al evaluar À trous, se encontraron resultados óptimos durante la evaluación de la riqueza espectral con valores de 0.95 en promedio para los índices Qu y CC, ERGAS con un valor muy cercano a 1 de 3.6 en promedio y RMSE y RASE de 7.2 y 14.4 respectivamente. La divergencia negativa y alta de -0.3. A pesar de ello, se hallaron resultados bajos para la riqueza espacial con coeficiente de correlación y calidad universal de 0.58, ERGAS de 8.2 que es cercano al ideal y resulta mejor que el obtenido con Mallat, aun así, los índices de RMSE y RASE, tienen valores de error, considerados altos de 19.7 y 33.0; la divergencia a su vez es mayor, y negativa, con valores de -0.3 en promedio para las bandas RGB, estos valores resultan consistentes con el comportamiento inverso de las resoluciones, aun así, los resultados espaciales, siguieron siendo mejores con el método Mallat.

Por otra parte, el filtro generado riqueza espectral es mejor espectralmente que los métodos de Mallat y À trous, alcanzando valores muy cercanos a los ideales; espacialmente tiene un comportamiento cercano À trous, lo que hace al filtro generado más adecuado, dado que se adquiere una alta riqueza espectral y se pierde poca riqueza espacial comparada con À trous. Aun así, la conservación espacial en estos dos métodos es baja.

Finalmente, el filtro generado para riqueza espacial, obtiene resultados óptimos para esta resolución, comparado con todos los filtros aplicados previamente y los métodos de Mallat y À trous. Adicionalmente, la pérdida espectral fue diferente por bandas y aunque conservó el comportamiento inverso, las diferencias no son tan distantes como en los otros métodos estudiados y el filtro implementado para la riqueza espectral.

En resumen, los peores resultados se obtuvieron al aplicar Mallat y los mejores se obtuvieron al implementar los filtros generados para la riqueza espacial y espectral. Por tanto, según las necesidades de adquisición de riqueza espectral o espacial se sugieren los filtros generados, teniendo en cuenta que el filtro espacial, conserva una mejor proporcionalidad o equilibrio entre las pérdidas y ganancias de estas riquezas. Con estos resultados se evidenció una mayor riqueza espacial, con menor pérdida espectral que la obtenida por otros autores como Gonzalez-Audicana et al.(2004) y Lillo-Saavedra & Gonzalo (2008), proporcionando un filtro para la fusión de imágenes novedoso y no encontrado hasta el momento.

Asimismo, la validación de resultados sobre las dos imágenes utilizadas, sostuvo el hecho del aumento de riqueza espectral aplicando el filtro generado para este propósito. En la imagen Worldview 2, con los métodos Mallat y À trous, se obtuvieron resultados más cercanos al ideal que en el sensor IKONOS; pero el filtro propuesto para riqueza espacial, conservó esta proporcionalidad obtenida con el factor de equilibrio, permitiendo mayor ganancia espacial y mejor conservación espectral. A pesar de ello, no sucedió lo mismo con la riqueza espacial a baja resolución en la imagen Landsat 8, en donde se encontró una pérdida del tono de las imágenes, modificando la percepción del color de la imagen original y dejando con mejores resultados a Mallat. De hecho, se encontró una pérdida más desproporcionada de la riqueza espectral en comparación con los otros métodos.

## 9. Conclusiones

Para concluir, se generó una modificación del filtro b3spline, utilizado durante la descomposición con el método À trous para el cumplimiento del objetivo específico 1. Dicha modificación generó dos filtros: uno para la riqueza espectral y otro para la riqueza espacial.

En ambos casos, se incluyó un cambio del vector de convolución inicial. El filtro espectral produjo resultados crecientes en la riqueza espectral y también incrementó la pérdida espacial, sin embargo, este incremento es muy similar al método À trous general, por tanto, se consideró mejor al ganar más riqueza espectral. El filtro espacial por su parte, además del filtro producido, incluyó un factor de equilibrio basado en las resoluciones del sensor estudiado, lo que arrojó los mejores resultados para la riqueza espacial y la pérdida de riqueza espectral fue menor en relación a los otros algoritmos.

Estos cambios generados durante la fusión, pueden verse afectados al ser aplicados en diferentes sensores, por sus características de resolución espacial y temporal principalmente. No obstante, mediante la validación de los resultados obtenidos, se comprobó que es posible obtener imágenes con mayor riqueza espectral, en diferentes tipos de sensores, tanto de mayor como de menor resolución respecto a la imagen original; con valores de hasta 0.99 para la calidad universal en las imágenes validadas, cuando se aplica el filtro generado para la riqueza espectral.

Con base en el objetivo específico dos, se evaluaron las imágenes fusionadas con los cuatro métodos propuestos: Mallat, À trous y los filtros generados para riqueza espectral y espacial. Se evaluaron criterios de error, correlación y distorsión, encontrando que los resultados menos cercanos al ideal se presentaron en Mallat y los más cercanos se obtuvieron con valores mayores al 80% para los filtros generados. Es importante mencionar que una de las limitaciones de la descomposición Mallat es que se debe elegir el nivel de descomposición, y este difiere según la imagen trabajada. Desde esta perspectiva, en este trabajo se implementaron 20 wavelets distintas de las familias ortogonales, con diferentes momentos de desvanecimiento, y en cinco niveles de descomposición. Al hacerlo, se obtuvieron valores cercanos a 1 para los índices de correlación y de calidad universal, para la riqueza espectral y espacial, pero estos no superaron los obtenidos tanto con el método À trous, como con los filtros generados para la riqueza espectral y espacial, a su vez los errores RMSE, RASE y ERGAS presentaron valores aceptables pero mayores a los demás algoritmos implementados.

De igual forma, À trous obtuvo valores en estos índices mayores a Mallat, pero fueron superados por el filtro generado para la riqueza espectral en cuanto a CC y Qu, esto provocó una disminución considerable de la riqueza espacial, y aun así se mantuvo en valores similares al algoritmo À trous. De la misma forma, el filtro generado para la riqueza espacial, mejoró la evaluación de los índices CC y Qu, así como los errores medidos con ERGAS, RASE y RMSE, y aunque disminuyó la riqueza espectral, esta tuvo el equilibrio esperado,

permitiendo la mayor conservación posible de riqueza espacial y espectral, cumpliendo con el objetivo específico número 2.

Dentro de las pruebas fue interesante notar que los mejores resultados para el método Mallat; aparecen en los niveles de descomposición 4, 5 y 1 respectivamente para los valores de evaluación, que pueden deberse a la descomposición piramidal. Por lo tanto, para la riqueza espectral los valores más cercanos al ideal, se dieron en los niveles de descomposición mayores a diferencia de la captura de propiedades espaciales. A pesar de ello, también se comprobó en todos los sensores utilizados, que la aplicación de À trous, mejora los resultados de la fusión, lo que apoya la literatura estudiada en el estado del arte, dado que la descomposición rectangular soporta redundancia en cada plano, brindando más información de detalle para inyectar durante el proceso; razón por la cual la generación de los filtros se hizo sobre este método.

De forma similar para el objetivo específico tres, se pudo encontrar en el proceso de validación que la riqueza espacial se ve mayormente afectada en sensores de resolución menor, encontrado errores espaciales hasta del 91%, situación recurrente en los tres métodos utilizados: Mallat, À trous y el filtro generado para riqueza espectral; lo cual se corrige con la aplicación de la modificación al plano propuesto en donde se encuentran errores de 13% aproximadamente.

De otro lado, cuando se aplica el filtro generado para la riqueza espacial, se encuentra que los sensores de menor resolución presentan resultados más cercanos al ideal en sensores de alta resolución, a diferencia de los de baja resolución en donde se encuentran resultados cercanos al ideal; pero también una distorsión notable en el color, lo que puede ser una limitación según los intereses aplicativos de la fusión obtenida. Con base en lo anterior, se logra generar un filtro TDW no decimado para la fusión de imágenes que conserva la más alta riqueza espectral y espacial posible, que fue el objetivo general del presente trabajo.

Ahora bien, en cuanto a las limitaciones del estudio, se encontró un aspecto importante en la validación sobre la imagen Landsat 8, en donde los índices de distorsión como la Diferencia en varianzas (Div) arrojaron valores altos, lo que modifica la percepción de la tonalidad sobre la imagen, esto puede dificultar algunas tareas de interpretación de imágenes; por ejemplo, aunque en otro tipo de tareas como extracción de objetos o umbralización podría no ser significativa. Sin embargo, la utilización sobre sensores de baja resolución requerirá de pruebas posteriores.

En síntesis, los hallazgos aquí presentados, muestran mejorías significativas en relación con los métodos disponibles actualmente y su aplicación dependerá de la intención de cada estudio, pues se presenta una alternativa espacial y espectral comprobada en un sensor de alta resolución, y las respectivas recomendaciones y limitaciones en sensores de menor resolución.

## 10. Trabajo Futuro

Una vez analizados los resultados del presente trabajo, se realizan una serie de hallazgos de importancia investigativa futura. Algunos autores sugieren realizar la aplicación del filtro banda a banda, lo cual no se hizo en el presente trabajo, sino que se implementó globalmente sobre la combinación RGB. Podría suceder que, al utilizar los filtros generados tanto para riqueza espectral como espacial por bandas separadas, se encuentren mejores resultados, lo que es importante en combinaciones RGB específicas como índices de vegetación NDVI o falso color para determinación de zonas urbanas que requieren de las bandas G y R.

Adicionalmente, es necesario profundizar en las razones y posibles correcciones de los resultados obtenidos con los filtros generados en sensores de baja resolución. Estos en general, tienen aplicaciones meteorológicas importantes, o hay una amplia disponibilidad como es el caso de la serie Landsat; por tanto, se requerirán nuevas pruebas con otros sensores en búsqueda de un mejor equilibrio que el obtenido.

En este trabajo también se ha modificado el filtro del algoritmo À trous siguiendo su paradigma de planos wavelet; aun así, en el segundo plano la redundancia producida por la inyección de ceros se modificó, dado que estos valores fueron reemplazados, por tanto, la aplicación del factor de equilibrio generado en el filtro de riqueza espacial, puede implementarse directamente sobre el algoritmo con hoyos de À trous y la redundancia de la información podría arrojar mejores resultados a los aquí expuestos.

También es importante mencionar que en este trabajo se aplicaron únicamente dos planos wavelet, así que, se desconocen los resultados y efectividad de la aplicación de los planos propuestos en las siguientes iteraciones, en especial porque la característica de ceros del algoritmo À trous fue eliminada, como se ha dicho previamente.

## 11. Anexos

### Anexo 1. Índices de evaluación de la riqueza espacial para la descomposición Mallat en la imagen IKONOS

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
1	db11	-0,1695	-0,3394	0,9095	6,0536	6,4083	0,8774	25,6334	12,3348
1	coif 5	-0,1695	-0,3397	0,9093	6,0537	6,4121	0,8771	25,6486	12,3426
1	sym 10	-0,1695	-0,3399	0,9091	6,0537	6,4151	0,8770	25,6603	12,3486
1	db9	-0,1695	-0,3405	0,9090	6,0539	6,4179	0,8768	25,6714	12,3544
1	coif 4	-0,1695	-0,3402	0,9089	6,0539	6,4184	0,8768	25,6736	12,3555
1	Bior 6.8	-0,1695	-0,3402	0,9088	6,0537	6,4211	0,8766	25,6846	12,3612
1	sym 8	-0,1695	-0,3404	0,9087	6,0540	6,4220	0,8766	25,6879	12,3628
1	coif 3	-0,1695	-0,3410	0,9083	6,0543	6,4291	0,8761	25,7166	12,3777
1	db7	-0,1695	-0,3404	0,9083	6,0543	6,4294	0,8761	25,7177	12,3781
1	Bior 4.4	-0,1695	-0,3412	0,9076	6,0541	6,4412	0,8754	25,7649	12,4027
1	db4	-0,1695	-0,3434	0,9075	6,0561	6,4456	0,8752	25,7826	12,4121
1	sym 5	-0,1695	-0,3412	0,9072	6,0546	6,4470	0,8750	25,7879	12,4143
1	coif 2	-0,1695	-0,3427	0,9071	6,0554	6,4504	0,8749	25,8014	12,4215
1	sym 3	-0,1695	-0,3458	0,9059	6,0574	6,4724	0,8736	25,8897	12,4674
1	rbio 2.4	-0,1695	-0,3450	0,9056	6,0569	6,4758	0,8734	25,9033	12,4741
1	Bior 2.6	-0,1695	-0,3479	0,9054	6,0591	6,4826	0,8730	25,9304	12,4878
1	rbio 1.3	-0,1695	-0,3376	0,9038	6,0546	6,4974	0,8718	25,9895	12,5185
1	rbio 5.5	-0,1694	-0,3548	0,9032	6,0641	6,5229	0,8707	26,0915	12,5707
1	haar	-0,1720	-0,3520	0,8923	6,0694	6,7191	0,8600	26,8764	12,9683
1	Bior 1.5	-0,1695	-0,3897	0,8885	6,0915	6,7839	0,8552	27,1356	13,1061
2	db7	-0,1694	-0,4191	0,8593	6,1165	7,2328	0,8260	28,9313	14,0281
2	sym 8	-0,1694	-0,4161	0,8590	6,1150	7,2337	0,8257	28,9347	14,0300
2	db4	-0,1694	-0,4199	0,8588	6,1175	7,2415	0,8254	28,9661	14,0468
2	coif 3	-0,1694	-0,4124	0,8583	6,1136	7,2391	0,8252	28,9563	14,0418
2	coif 2	-0,1694	-0,4145	0,8583	6,1151	7,2419	0,8251	28,9677	14,0475
2	coif 4	-0,1694	-0,4114	0,8581	6,1130	7,2397	0,8251	28,9586	14,0430
2	coif 5	-0,1694	-0,4107	0,8580	6,1127	7,2406	0,8250	28,9624	14,0449
2	Bior 2.6	-0,1694	-0,4148	0,8574	6,1159	7,2540	0,8243	29,0161	14,0724
2	sym 5	-0,1694	-0,4064	0,8562	6,1112	7,2595	0,8235	29,0379	14,0844
2	db11	-0,1694	-0,3995	0,8547	6,1080	7,2716	0,8222	29,0863	14,1099
2	sym 3	-0,1694	-0,4278	0,8548	6,1210	7,3046	0,8213	29,2185	14,1734
2	db9	-0,1694	-0,4057	0,8528	6,1107	7,3032	0,8202	29,2128	14,1724
2	rbio 1.3	-0,1694	-0,4510	0,8542	6,1314	7,3429	0,8198	29,3716	14,2501

2	sym 10	-0,1694	-0,3999	0,8519	6,1079	7,3092	0,8195	29,2367	14,1858
2	Bior 6.8	-0,1694	-0,4036	0,8518	6,1091	7,3145	0,8193	29,2580	14,1960
3	Bior 4.4	-0,1694	-0,4042	0,8501	6,1090	7,3375	0,8177	29,3498	14,2429
2	rbio 5.5	-0,1694	-0,4022	0,8473	6,1128	7,3728	0,8150	29,4911	14,3168
2	rbio 2.4	-0,1694	-0,4103	0,8460	6,1149	7,4004	0,8134	29,6018	14,3714
2	haar	-0,1701	-0,3786	0,8293	6,1116	7,5788	0,7985	30,3152	14,7341
2	Bior 1.5	-0,1694	-0,4587	0,8272	6,1540	7,7072	0,7935	30,8288	14,9955
1	rbio 3.1	-0,1697	-0,5910	0,8299	6,2239	7,8650	0,7903	31,4602	15,3096
3	coif 5	-0,1694	-0,4523	0,8118	6,1579	7,8906	0,7789	31,5623	15,3689
3	db11	-0,1694	-0,4517	0,8117	6,1579	7,8908	0,7788	31,5633	15,3694
3	db9	-0,1694	-0,4516	0,8114	6,1578	7,8935	0,7786	31,5742	15,3748
3	sym 10	-0,1694	-0,4515	0,8114	6,1575	7,8940	0,7785	31,5761	15,3759
3	db7	-0,1694	-0,4527	0,8113	6,1584	7,8963	0,7785	31,5852	15,3803
3	coif 4	-0,1694	-0,4527	0,8112	6,1575	7,8978	0,7783	31,5911	15,3833
3	coif 3	-0,1694	-0,4523	0,8111	6,1584	7,8988	0,7782	31,5953	15,3854
3	sym 8	-0,1694	-0,4525	0,8111	6,1574	7,8994	0,7782	31,5975	15,3866
3	Bior 6.8	-0,1694	-0,4507	0,8108	6,1571	7,8996	0,7780	31,5985	15,3871
3	sym 5	-0,1694	-0,4501	0,8101	6,1579	7,9067	0,7774	31,6269	15,4014
2	Bior 4.4	-0,1694	-0,4507	0,8099	6,1571	7,9106	0,7772	31,6424	15,4090
3	coif 2	-0,1694	-0,4527	0,8098	6,1582	7,9145	0,7770	31,6580	15,4169
3	db4	-0,1694	-0,4535	0,8098	6,1589	7,9161	0,7769	31,6644	15,4202
3	Bior 2.6	-0,1694	-0,4532	0,8096	6,1587	7,9177	0,7768	31,6707	15,4232
3	sym 3	-0,1694	-0,4535	0,8085	6,1605	7,9318	0,7757	31,7274	15,4517
3	rbio 5.5	-0,1694	-0,4577	0,8082	6,1627	7,9412	0,7753	31,7649	15,4711
3	rbio 1.3	-0,1694	-0,4653	0,8080	6,1641	7,9535	0,7748	31,8138	15,4944
3	rbio 2.4	-0,1694	-0,4581	0,8061	6,1645	7,9676	0,7732	31,8705	15,5242
3	haar	-0,1696	-0,4330	0,7871	6,1630	8,1558	0,7559	32,6231	15,9018
3	Bior 1.5	-0,1694	-0,5096	0,7883	6,2050	8,2568	0,7540	33,0273	16,1088
4	sym 10	-0,1694	-0,4571	0,7667	6,1899	8,4239	0,7355	33,6954	16,4423
4	db11	-0,1695	-0,4584	0,7664	6,1910	8,4290	0,7352	33,7159	16,4524
4	coif 5	-0,1694	-0,4585	0,7663	6,1913	8,4298	0,7351	33,7190	16,4541
4	sym 8	-0,1694	-0,4576	0,7662	6,1906	8,4289	0,7351	33,7157	16,4525
4	Bior 6.8	-0,1694	-0,4563	0,7662	6,1897	8,4279	0,7350	33,7115	16,4503
4	db9	-0,1694	-0,4584	0,7663	6,1915	8,4304	0,7350	33,7216	16,4554
4	db7	-0,1695	-0,4561	0,7661	6,1898	8,4292	0,7349	33,7169	16,4529
4	coif 4	-0,1694	-0,4570	0,7661	6,1902	8,4298	0,7349	33,7192	16,4540
4	coif 3	-0,1694	-0,4559	0,7659	6,1895	8,4302	0,7348	33,7207	16,4548
4	sym 5	-0,1694	-0,4560	0,7647	6,1907	8,4441	0,7336	33,7764	16,4826
4	db4	-0,1694	-0,4548	0,7646	6,1901	8,4431	0,7336	33,7724	16,4807
4	coif 2	-0,1694	-0,4568	0,7645	6,1912	8,4468	0,7335	33,7874	16,4883
4	Bior 4.4	-0,1694	-0,4552	0,7644	6,1900	8,4453	0,7334	33,7812	16,4850

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

4	Bior 2.6	-0,1694	-0,4569	0,7643	6,1915	8,4498	0,7332	33,7992	16,4942
4	rbio 5.5	-0,1694	-0,4621	0,7638	6,1953	8,4632	0,7326	33,8527	16,5214
4	sym 3	-0,1694	-0,4560	0,7624	6,1925	8,4690	0,7315	33,8762	16,5326
4	rbio 1.3	-0,1694	-0,4514	0,7616	6,1891	8,4715	0,7308	33,8860	16,5369
4	rbio 2.4	-0,1694	-0,4631	0,7608	6,1984	8,4987	0,7296	33,9949	16,5926
4	Bior 1.5	-0,1694	-0,5107	0,7473	6,2365	8,7240	0,7148	34,8962	17,0472
4	haar	-0,1696	-0,4393	0,7436	6,1971	8,6518	0,7140	34,6073	16,8981
5	db9	-0,1694	-0,4380	0,7203	6,2135	8,8962	0,6918	35,5848	17,3866
5	sym 10	-0,1695	-0,4407	0,7201	6,2159	8,9032	0,6915	35,6128	17,4005
5	sym 8	-0,1695	-0,4415	0,7201	6,2164	8,9047	0,6914	35,6189	17,4035
5	Bior 6.8	-0,1695	-0,4408	0,7198	6,2163	8,9057	0,6912	35,6226	17,4054
5	db7	-0,1695	-0,4394	0,7195	6,2159	8,9077	0,6909	35,6306	17,4094
5	Bior 4.4	-0,1695	-0,4413	0,7193	6,2166	8,9129	0,6907	35,6515	17,4195
5	coif 3	-0,1695	-0,4384	0,7191	6,2157	8,9092	0,6907	35,6368	17,4125
5	db11	-0,1695	-0,4359	0,7190	6,2137	8,9067	0,6906	35,6268	17,4077
5	coif 5	-0,1694	-0,4342	0,7189	6,2126	8,9045	0,6906	35,6180	17,4035
5	coif 4	-0,1694	-0,4352	0,7188	6,2138	8,9073	0,6905	35,6293	17,4090
5	sym 5	-0,1695	-0,4350	0,7187	6,2127	8,9088	0,6903	35,6351	17,4118
5	coif 2	-0,1695	-0,4413	0,7189	6,2176	8,9167	0,6903	35,6669	17,4274
5	Bior 2.6	-0,1695	-0,4417	0,7188	6,2178	8,9185	0,6902	35,6741	17,4310
5	rbio 5.5	-0,1695	-0,4453	0,7187	6,2200	8,9251	0,6900	35,7004	17,4443
5	sym 3	-0,1695	-0,4411	0,7177	6,2182	8,9293	0,6892	35,7173	17,4525
5	db4	-0,1695	-0,4344	0,7174	6,2149	8,9214	0,6891	35,6857	17,4372
5	rbio 2.4	-0,1695	-0,4465	0,7162	6,2228	8,9537	0,6876	35,8147	17,5015
5	rbio 1.3	-0,1695	-0,4219	0,7133	6,2102	8,9438	0,6856	35,7750	17,4816
5	Bior 1.5	-0,1693	-0,4842	0,7018	6,2551	9,1634	0,6725	36,6538	17,9252
5	haar	-0,1696	-0,4147	0,6969	6,2193	9,1013	0,6701	36,4052	17,7969
2	rbio 3.1	-0,1730	-1,6035	0,6503	6,6364	11,7536	0,5750	47,0144	23,1295
3	rbio 3.1	-0,2071	-3,9032	0,4319	6,8931	18,1918	0,3223	72,7674	35,9490
4	rbio 3.1	-0,2849	-7,5692	0,2833	6,8892	25,4055	0,1717	101,6221	50,2601
5	rbio 3.1	-0,3770	-11,8490	0,1924	6,7637	31,9582	0,0974	127,8328	63,2516



Anexo 2. Índices de evaluación de la riqueza espectral para la descomposición Mallat

Nivel de descomposición	Familia Wavelet	Bias	DIV	CC	Entropy	ERGAS	Q	RASE	RMSE
5	haar	0,0305	-0,1161	0,8405	6,1971	4,7418	0,8388	18,9673	11,3510
5	rbio 1.3	0,0306	-0,1217	0,8310	6,1891	4,8840	0,8293	19,5361	11,6915
5	sym 3	0,0305	-0,1369	0,8272	6,1925	4,9588	0,8251	19,8352	11,8704
5	Bior 4.4	0,0305	-0,1370	0,8268	6,1900	4,9653	0,8247	19,8612	11,8860
5	db4	0,0306	-0,1316	0,8264	6,1901	4,9631	0,8244	19,8525	11,8808
5	Bior 2.6	0,0305	-0,1373	0,8264	6,1915	4,9710	0,8243	19,8841	11,8997
1	coif 3	0,0305	-0,1370	0,8263	6,1912	4,9716	0,8242	19,8863	11,9010
5	coif 3	0,0306	-0,1347	0,8256	6,1584	4,9783	0,8235	19,9132	11,9171
5	Bior 6.8	0,0306	-0,1366	0,8256	6,1897	4,9808	0,8235	19,9230	11,9230
5	rbio 2.4	0,0305	-0,1411	0,8256	6,1984	4,9866	0,8235	19,9466	11,9371
5	db7	0,0306	-0,1355	0,8255	6,1898	4,9811	0,8234	19,9243	11,9238
5	rbio 5.5	0,0306	-0,1321	0,8253	6,1953	4,9779	0,8233	19,9116	11,9161
5	sym 5	0,0306	-0,1321	0,8253	6,1907	4,9779	0,8233	19,9116	11,9161
5	sym 8	0,0306	-0,1372	0,8254	6,1906	4,9843	0,8233	19,9371	11,9314
5	coif 4	0,0306	-0,1322	0,8253	6,1902	4,9793	0,8233	19,9170	11,9194
5	db11	0,0306	-0,1328	0,8252	6,1910	4,9808	0,8232	19,9233	11,9231
5	sym 10	0,0306	-0,1366	0,8253	6,1899	4,9853	0,8232	19,9413	11,9339
5	coif 5	0,0306	-0,1314	0,8250	6,1913	4,9819	0,8230	19,9277	11,9258
5	db9	0,0306	-0,1344	0,8246	6,1915	4,9916	0,8226	19,9663	11,9489
5	Bior 1.5	0,0307	-0,1709	0,8121	6,2365	5,2153	0,8092	20,8612	12,4844
4	haar	0,0305	-0,1354	0,8033	6,1630	5,2766	0,8013	21,1062	12,6311
4	rbio 1.3	0,0306	-0,1450	0,7927	6,1641	5,4283	0,7905	21,7133	12,9944
4	sym 3	0,0306	-0,1486	0,7897	6,1605	5,4719	0,7874	21,8877	13,0988
4	Bior 4.4	0,0306	-0,1480	0,7890	6,1571	5,4799	0,7867	21,9198	13,1179
4	Bior 2.6	0,0306	-0,1493	0,7882	6,1587	5,4914	0,7859	21,9656	13,1453
5	coif 2	0,0306	-0,1492	0,7880	6,1895	5,4936	0,7858	21,9745	13,1507
4	rbio 2.4	0,0306	-0,1542	0,7879	6,1645	5,5027	0,7855	22,0108	13,1724
4	db4	0,0306	-0,1477	0,7877	6,1589	5,4959	0,7854	21,9836	13,1561
4	sym 5	0,0306	-0,1486	0,7877	6,1579	5,4971	0,7854	21,9883	13,1589
4	Bior 6.8	0,0306	-0,1488	0,7868	6,1571	5,5089	0,7845	22,0357	13,1873
4	sym 8	0,0306	-0,1498	0,7867	6,1574	5,5118	0,7844	22,0471	13,1942
4	coif 4	0,0306	-0,1494	0,7867	6,1575	5,5113	0,7844	22,0451	13,1930
4	coif 2	0,0306	-0,1486	0,7866	6,1582	5,5106	0,7843	22,0424	13,1913
4	db9	0,0306	-0,1505	0,7866	6,1578	5,5135	0,7843	22,0540	13,1983
4	db7	0,0306	-0,1487	0,7865	6,1584	5,5117	0,7843	22,0470	13,1941
4	coif 5	0,0306	-0,1506	0,7865	6,1579	5,5148	0,7842	22,0591	13,2013
4	rbio 5.5	0,0306	-0,1534	0,7866	6,1627	5,5184	0,7842	22,0736	13,2100
4	sym 10	0,0306	-0,1495	0,7862	6,1575	5,5172	0,7839	22,0689	13,2072

4	db11	0,0306	-0,1505	0,7862	6,1579	5,5184	0,7839	22,0737	13,2100
4	Bior 1.5	0,0306	-0,1918	0,7732	6,2050	5,7449	0,7699	22,9798	13,7523
3	haar	0,0305	-0,1305	0,7612	6,1116	5,7903	0,7595	23,1613	13,8609
3	rbio 1.3	0,0306	-0,1560	0,7494	6,1314	5,9704	0,7471	23,8817	14,2920
3	sym 3	0,0306	-0,1466	0,7452	6,1210	6,0039	0,7431	24,0157	14,3723
3	Bior 4.4	0,0306	-0,1445	0,7448	6,1090	6,0048	0,7427	24,0190	14,3743
3	rbio 2.4	0,0306	-0,1503	0,7442	6,1149	6,0215	0,7420	24,0860	14,4143
3	db4	0,0306	-0,1467	0,7440	6,1175	6,0180	0,7419	24,0721	14,4060
3	Bior 2.6	0,0306	-0,1464	0,7438	6,1159	6,0191	0,7417	24,0762	14,4085
3	coif 2	0,0306	-0,1460	0,7437	6,1151	6,0194	0,7417	24,0774	14,4092
3	sym 5	0,0306	-0,1439	0,7431	6,1112	6,0235	0,7411	24,0939	14,4190
3	Bior 6.8	0,0306	-0,1445	0,7428	6,1091	6,0280	0,7407	24,1120	14,4299
3	sym 8	0,0306	-0,1458	0,7425	6,1150	6,0333	0,7404	24,1332	14,4426
4	coif 3	0,0306	-0,1457	0,7425	6,1136	6,0331	0,7404	24,1325	14,4421
3	db7	0,0306	-0,1460	0,7423	6,1165	6,0357	0,7402	24,1428	14,4483
3	coif 4	0,0306	-0,1460	0,7423	6,1130	6,0356	0,7402	24,1426	14,4482
3	db9	0,0306	-0,1452	0,7421	6,1107	6,0365	0,7401	24,1462	14,4504
3	sym 10	0,0306	-0,1451	0,7420	6,1079	6,0377	0,7399	24,1506	14,4530
3	coif 5	0,0306	-0,1457	0,7419	6,1127	6,0397	0,7398	24,1589	14,4580
3	db11	0,0306	-0,1452	0,7419	6,1080	6,0393	0,7398	24,1572	14,4570
3	rbio 5.5	0,0306	-0,1500	0,7420	6,1128	6,0460	0,7398	24,1842	14,4731
3	Bior 1.5	0,0306	-0,1909	0,7300	6,1540	6,2500	0,7269	24,9999	14,9613
2	haar	0,0300	-0,0876	0,7083	6,0694	6,3130	0,7074	25,2521	15,1122
2	rbio 1.3	0,0306	-0,1447	0,6944	6,0546	6,5573	0,6925	26,2293	15,6970
2	Bior 4.4	0,0306	-0,1078	0,6932	6,0541	6,5072	0,6920	26,0287	15,5770
2	rbio 2.4	0,0306	-0,1125	0,6929	6,0569	6,5189	0,6915	26,0758	15,6051
2	Bior 6.8	0,0306	-0,1073	0,6893	6,0537	6,5471	0,6881	26,1885	15,6726
2	sym 3	0,0306	-0,1264	0,6892	6,0574	6,5807	0,6876	26,3226	15,7529
2	sym 10	0,0306	-0,1044	0,6881	6,0537	6,5540	0,6870	26,2158	15,6889
2	db9	0,0306	-0,1090	0,6877	6,0539	6,5662	0,6865	26,2648	15,7182
2	rbio 5.5	0,0306	-0,1062	0,6864	6,0641	6,5754	0,6852	26,3015	15,7402
2	db11	0,0306	-0,1040	0,6855	6,0536	6,5805	0,6843	26,3219	15,7524
2	sym 5	0,0306	-0,1095	0,6849	6,0546	6,5964	0,6836	26,3854	15,7904
2	db4	0,0306	-0,1202	0,6845	6,0561	6,6189	0,6830	26,4757	15,8445
2	Bior 2.6	0,0306	-0,1161	0,6839	6,0591	6,6172	0,6826	26,4689	15,8404
2	coif 2	0,0306	-0,1159	0,6838	6,0554	6,6179	0,6825	26,4716	15,8420
3	coif 3	0,0306	-0,1143	0,6834	6,0543	6,6194	0,6821	26,4774	15,8455
2	coif 4	0,0306	-0,1134	0,6834	6,0539	6,6186	0,6820	26,4746	15,8438
2	coif 5	0,0306	-0,1129	0,6833	6,0537	6,6180	0,6820	26,4718	15,8421
2	db7	0,0306	-0,1195	0,6833	6,0543	6,6301	0,6818	26,5205	15,8713
2	sym 8	0,0306	-0,1171	0,6830	6,0540	6,6290	0,6816	26,5158	15,8685

Generación de un filtro para mejorar la resolución espacial y espectral de imágenes satelitales usando transformada wavelet discreta (TWD) no decimada

2	Bior 1.5	0,0306	-0,1507	0,6746	6,0915	6,7729	0,6726	27,0915	16,2130
1	haar	0,0285	-0,0666	0,6348	6,2137	7,0101	0,6342	28,0403	16,7808
1	rbio 1.3	0,0305	-0,0552	0,6247	6,2193	7,0908	0,6241	28,3634	16,9741
1	sym 3	0,0306	-0,0617	0,6189	6,2127	7,1564	0,6183	28,6256	17,1310
1	rbio 2.4	0,0306	-0,0610	0,6186	6,2102	7,1575	0,6181	28,6298	17,1336
1	Bior 4.4	0,0306	-0,0580	0,6174	6,2178	7,1637	0,6168	28,6548	17,1485
1	db4	0,0306	-0,0598	0,6168	6,2126	7,1719	0,6163	28,6878	17,1683
1	coif 2	0,0306	-0,0592	0,6167	6,2163	7,1720	0,6162	28,6880	17,1684
1	sym 5	0,0306	-0,0581	0,6164	6,2182	7,1726	0,6159	28,6904	17,1698
1	Bior 2.6	0,0306	-0,0634	0,6159	6,2551	7,1871	0,6153	28,7483	17,2045
1	db7	0,0306	-0,0574	0,6151	6,2149	7,1841	0,6145	28,7363	17,1973
2	coif 3	0,0306	-0,0579	0,6150	6,2176	7,1850	0,6145	28,7398	17,1994
1	Bior 6.8	0,0306	-0,0572	0,6149	6,2166	7,1852	0,6144	28,7408	17,2000
1	sym 8	0,0306	-0,0574	0,6145	6,2127	7,1891	0,6140	28,7564	17,2094
1	db9	0,0306	-0,0575	0,6143	6,2159	7,1914	0,6137	28,7658	17,2150
1	coif 4	0,0306	-0,0573	0,6142	6,2157	7,1915	0,6137	28,7659	17,2150
1	sym 10	0,0306	-0,0570	0,6140	6,2164	7,1934	0,6134	28,7734	17,2195
1	coif 5	0,0306	-0,0569	0,6137	6,2138	7,1953	0,6132	28,7814	17,2243
1	db11	0,0306	-0,0566	0,6136	6,2135	7,1961	0,6131	28,7845	17,2262
1	rbio 5.5	0,0306	-0,0688	0,6132	6,7637	7,2218	0,6126	28,8872	17,2876
1	Bior 1.5	0,0305	-0,0963	0,6086	6,1693	7,3141	0,6077	29,2564	17,5086
1	rbio 3.1	0,0304	-0,2551	0,5710	6,2228	7,9627	0,5670	31,8509	19,0612
2	rbio 3.1	0,0276	-1,0538	0,5007	6,2239	10,2326	0,4697	40,9304	24,4949
3	rbio 3.1	-0,0006	-2,8681	0,3865	6,6364	14,6818	0,3123	58,7270	35,1453
4	rbio 3.1	-0,0652	-5,7600	0,2970	6,8931	20,0713	0,1986	80,2851	48,0468
5	rbio 3.1	-0,1415	-9,1363	0,2287	6,8892	25,2149	0,1296	100,8596	60,3597

## 12. Bibliografía

- Abdipour, M., & Nooshyar, M. (2016). Multi-focus image fusion using sharpness criteria for visual sensor networks in wavelet domain. *Computers and Electrical Engineering*, 51, 74–88. <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2016.03.011>
- Abdullah, F., Kalyankar, N., & Al-Zuky, A. A. (2011). The IHS Transformations Based Image Fusion. *Computer Vision and Pattern Recognition*. Retrieved from <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1107/1107.4396.pdf>
- Amolins, K., Zhang, Y., & Dare, P. (2007). Wavelet based image fusion techniques - An introduction, review and comparison. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 62(4), 249–263. <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2007.05.009>
- Aldalur, M. S. (2002). Realce de imágenes: filtrado espacial. *Revista de Teledetección*, 17, 31–42. Retrieved from <http://www.aet.org.es/revistas/revista17/AET17-04.pdf>
- Bhandari, A. K., Gadde, M., Kumar, A., & Singh, G. K. (2012). Comparative analysis of different wavelet filters for low contrast and brightness enhancement of multispectral remote sensing images. *2012 International Conference on Machine Vision and Image Processing, MVIP 2012*, 81–86. <https://doi.org/10.1109/MVIP.2012.6428766>
- Burrus, C. S., Gopinath, R. A., & Guo, H. (1998). *Introduction to wavelets and wavelet transforms : a primer*. México: Prentice Hall.
- Carper, W. J., Lillesand, T. M., & Kiefer, R. W. (1990). The Use of Intensity-Hue-Saturation Transformations for Merging SPOT Panchromatic and Multispectral Image Data. *PHOTOCRAMMETRIC ENGINEERING AND REMOTE SENSING*, 56, 459–467. Retrieved from [https://www.asprs.org/wp-content/uploads/pers/1990journal/apr/1990\\_apr\\_459-467.pdf](https://www.asprs.org/wp-content/uploads/pers/1990journal/apr/1990_apr_459-467.pdf)
- Carvajal, B. E. (2008). Técnica de Inserción de Información en Video aprovechando el mismo Ancho de Banda. *2008*, (1), 150. <https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2>
- Chibani, Y., & Houacine, A. A. (2002). Redundant versus orthogonal wavelet decomposition for multisensor image fusion. *Pattern Recognition*, 36(4), 879–887. [https://doi.org/10.1016/S0031-3203\(02\)00103-6](https://doi.org/10.1016/S0031-3203(02)00103-6)
- Chuvieco, E. (1995). *Fundamentos De Teledeteccion Espacial* (p. 449). <https://doi.org/23.304-1995>
- Cohen, A., Daubechies, I., & Feauveau, J.-C. (1992). Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45(5), 485–560. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160450502>
- Czapla-Myers, J., McCorkel, J., Anderson, N., Thome, K., Biggar, S., Helder, D., ... Mishra, N. (2015). The ground-based absolute radiometric calibration of Landsat 8 OLI. *Remote Sensing*, 7(1), 600–626. <https://doi.org/10.3390/rs70100600>
- Demirel, H., & Anbarjafari, G. (2011). IMAGE resolution enhancement by using discrete and stationary wavelet decomposition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(5), 1458–1460. <https://doi.org/10.1109/TIP.2010.2087767>

- Dial, G., Bowen, H., Gerlach, F., Grodecki, J., & Oleszczuk, R. (2003). IKONOS satellite, imagery, and products. *Remote Sensing of Environment*, 88(1–2), 23–36. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2003.08.014>
- Dogra, A., Goyal, B., & Agrawal, S. (2016). Performance Comparison of Different Wavelet Families Based on Bone Vessel Fusion. *Asian Journal of Pharmaceutics*, 10(4), 791.
- Dong, J., Zhuang, D., Huang, Y., & Fu, J. (2009, October 30). Advances in multi-sensor data fusion: Algorithms and applications. *Sensors*, 9, pp. 7771–7784. <https://doi.org/10.3390/s91007771>
- Dutilleul, P. (1990). *An Implementation of the “algorithme à trous” to Compute the Wavelet Transform*. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-75988-8\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-642-75988-8_29)
- Escalante, B. (2006). *Procesamiento Digital de Imágenes*. Retrieved from [http://lapi.fi-p.unam.mx/wp-content/uploads/PDI\\_Cap4\\_Realce-de-la-Imagen.pdf](http://lapi.fi-p.unam.mx/wp-content/uploads/PDI_Cap4_Realce-de-la-Imagen.pdf)
- Félix, C. S., Walter, F. G., Raúl, G. C., & Dora, C. F. (2014). Multiresolution analysis based on Mallat pyramidal algorithm applied to GPR data. Proceedings of the 15th International Conference on Ground Penetrating Radar, *GPR*, 647–650. <https://doi.org/10.1109/ICGPR.2014.6970505>
- Gabriel, G., & Virginia, V. (2017). Downscaling SMAP soil moisture images with wavelets transform and PCA method. *2017 First IEEE International Symposium of Geoscience and Remote Sensing (GRSS-CHILE)*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/GRSS-CHILE.2017.7996007>
- Gambhir, D., & Manchanda, M. (2015). Wavelet based fusion of fuzzy enhanced images captured under improper illumination. 2nd International Conference on Signal Processing and Integrated Networks, *SPIN*, 584–588. <https://doi.org/10.1109/SPIN.2015.7095434>
- Gao, R., & Yan, R. (2010). *Wavelets: Theory and applications for manufacturing*. <https://doi.org/10.1007/9781441915450>
- González-Audicana, M., Otazu, X., Fors, O., & Seco, A. (2005). Comparison between Mallat’s and the “à trous” discrete wavelet transform based algorithms for the fusion of multispectral and panchromatic images. *International Journal of Remote Sensing*, 26(3), 595–614. <https://doi.org/10.1080/01431160512331314056>
- Gonzalez-Audicana, M., Saleta, J. L., Catalan, R. G., & Garcia, R. (2004). Fusion of multispectral and panchromatic images using improved IHS and PCA mergers based on wavelet decomposition. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(6), 1291–1299. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2004.825593>
- González, Rafael, & Wintz, P. (1987). *Digital image processing*. Boston: Addison Wesley.
- González, RC, & Wintz, P. (1977). *Digital image processing* (13th ed.; M. Reading, Ed.). Addison-Wesley Publishing Co., Inc.(Applied Mathematics and Computation).
- Gravey, M., Rasera, L. G., & Mariethoz, G. (2019). Analogue-based colorization of remote sensing images using textural information. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 147, 242–254. <https://doi.org/10.1016/J.ISPRSJPRS.2018.11.003>

- Grossmann, A., & Morlet, J. (1984). Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4), 723–736. <https://doi.org/10.1137/0515056>
- Gupta, D., & Choubey, S. (2008). Discrete Wavelet Transform for Image Processing. In *Certified Journal* (Vol. 9001). Retrieved from [www.ijetae.com](http://www.ijetae.com)
- Han, N., Hu, J., & Zhang, W. (2010). Multi-spectral and SAR images fusion via Mallat and à trous wavelet transform. *2010 18th International Conference on Geoinformatics, Geoinformatics 2010*. <https://doi.org/10.1109/GEOINFORMATICS.2010.5567653>
- Hsieh Hou, & Andrews, H. (1978). Cubic splines for image interpolation and digital filtering. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 26(6), 508–517. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1978.1163154>
- Jin, X., Chen, G., Hou, J., Jiang, Q., Zhou, D., & Yao, S. (2018). Multimodal sensor medical image fusion based on nonsubsampling shearlet transform and S-PCNNs in HSV space. *Signal Processing*, 153, 379–395. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2018.08.002>
- Jinju, J., Santhi, N., Ramar, K., & Sathya Bama, B. (2019). Spatial frequency discrete wavelet transform image fusion technique for remote sensing applications. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2019.01.004>
- Jong, S. M. de, & Meer, F. van der. (2004). *Remote sensing image analysis : including the spatial domain*. Kluwer Academic.
- Kass, M., & Solomon, J. (2010). Smoothed local histogram filters. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4), 1. <https://doi.org/10.1145/1778765.1778837>
- Kim, Y., Lee, C., Han, D., Kim, Y., & Kim, Y. (2011). Improved Additive-Wavelet Image Fusion. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 8(2), 263–267. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2010.2067192>
- Kumar, A. S., Kartikeyan, B., & Majumdar, K. L. (2000). Band sharpening of IRS-multispectral imagery by cubic spline wavelets. *International Journal of Remote Sensing*, 21(3), 581–594. <https://doi.org/10.1080/014311600210768>
- LabenBernard, Craig A., B. C. A. (1998). *Process for enhancing the spatial resolution of multispectral imagery using pan-sharpening*. Retrieved from <https://patents.google.com/patent/US6011875A/en>
- Latouche, H., Solarte, K., Ordoñez, J., & Sánchez, L. (2017). Nonlinear Filters to denoising color images. *Revista Ingeniería UC*, 24(2), 185–195. Retrieved from <http://www.redalyc.org/pdf/707/70753474006.pdf>
- Li, H., Manjunath, B. S., & Mitra, S. K. (1995). Multisensor Image Fusion Using the Wavelet Transform. *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 57, pp. 235–245. <https://doi.org/10.1006/gmip.1995.1022>
- Lillo-saavedra, C. G. M. (2004). *Control de la calidad espacial y espectral de imágenes de satélite fusionadas mediante el algoritmo wavelet à trous*. 47–53. Retrieved from <http://www.aet.org.es/revistas/revista22/AET22-07.pdf>

- Lillo-Saavedra, M., & Gonzalo, C. (2007). Multispectral images fusion by a joint multidirectional and multiresolution representation. *International Journal of Remote Sensing*, 28(18), 4065–4079. <https://doi.org/10.1080/01431160601105884>
- Lillo-Saavedra, Mario, & Gonzalo, C. (2006). Spectral or spatial quality for fused satellite imagery? A trade-off solution using the wavelet à trous algorithm. *International Journal of Remote Sensing*, 27(7), 1453–1464. <https://doi.org/10.1080/01431160500462188>
- Lillo-Saavedra, Mario, & Gonzalo, C. (2008). Aplicación de la Metodología de Fusión de Imágenes Multidirección-Multiresolución (MDMR) a la estimación de la turbidez en lagos. *Informacion Tecnologica*, 19(5), 137–146. <https://doi.org/10.1612/inf.tecnol.3978it.07>
- Liu, J. (2000). Smoothing Filter-based Intensity Modulation: A spectral preserve image fusion technique for improving spatial details. *International Journal of Remote Sensing*, 21(18), 3461–3472. <https://doi.org/10.1080/014311600750037499>
- Liu, S. (2014). *Remote Sensing Satellite Image Acquisition Planning: Framework, Methods and Application* (University of South Carolina). Retrieved from <https://scholarcommons.sc.edu/etd>
- Maisinger, K., et al. (2004). Maximum-entropy image reconstruction using wavelets. *Academic.Oup.Com*. Retrieved from <https://academic.oup.com/mnras/article-abstract/347/1/339/1273292>
- Mallat, S. (1989). A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674–693. <https://doi.org/10.1109/34.192463>
- Mallat, S. (2009). A Wavelet Tour of Signal Processing. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8>
- Mamatha, G., Sumalatha, V., & Lakshmaiah, M. V. (2015). FPGA implementation of satellite image fusion using wavelet substitution method. *2015 Science and Information Conference (SAI)*, 1155–1159. <https://doi.org/10.1109/SAI.2015.7237290>
- Marcello, J., Medina, A., & Eugenio, F. (2013). Evaluation of Spatial and Spectral Effectiveness of Pixel-Level Fusion Techniques. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 10(3), 432–436. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2012.2207944>
- Martínez, F., Peris, A., & Rodenas, F. (2013). *Tratamiento de señales digitales mediante wavelets y su uso con Matlab*. Editorial Club Universitario.
- Martínez, M., Gómez, L., Serrano, A. J., Vila, J., & Gómez, J. (2009). *Filtros Digitales*.
- Medina, J., Carrillo, I., & Upegui, E. (2018). Spectral and spatial assessment of the TDW Wavelet transform decimated and not decimated for the fusion of OrbView-2 satellite images. *2018 13th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI)*, 1–6. <https://doi.org/10.23919/CISTI.2018.8399418>
- Medina, J., Joyanes, L., & Pinilla, C. (2013). Aplicativo Web para la Fusión de Imágenes Satelitales. *Iberian Journal of Information Systems and Technologies*, 0(11), 17–30. <https://doi.org/10.4304/risti.11.17-30>

- Mohan, C. R., & Kiran, S. (2018). *Image Enrichment Using Single Discrete Wavelet Transform Multi-resolution and Frequency Partition*. [https://doi.org/10.1007/978-981-10-7868-2\\_9](https://doi.org/10.1007/978-981-10-7868-2_9)
- Mozammel, M., Chowdhury, H., & Khatun, A. (2012). *Image Compression Using Discrete Wavelet Transform*. Retrieved from [www.IJCSI.org](http://www.IJCSI.org)
- Naidu, V., & Raol, J. (2008). Pixel-level Image Fusion using Wavelets and Principal Component Analysis. *Defence Science Journal*, 58(3), 338–352. <https://doi.org/10.14429/dsj.58.1653>
- Nunez, J., Otazu, X., Fors, O., Prades, A., Pala, V., & Arbiol, R. (1999). Multiresolution-based image fusion with additive wavelet decomposition. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 37(3), 1204–1211. <https://doi.org/10.1109/36.763274>
- Oguz, H. (2016). Environmental Sustainability and Landscape Management Editors. In R. Efe, İ. Cürebal, A. Gad, & B. Tóth (Eds.), *researchgate.net*. Retrieved from [https://www.researchgate.net/profile/Recep\\_Efe/publication/311065048\\_Environmental\\_Sustainability\\_and\\_Landscape\\_Management/links/583c862f08ae502a85e3e890.pdf#page=569](https://www.researchgate.net/profile/Recep_Efe/publication/311065048_Environmental_Sustainability_and_Landscape_Management/links/583c862f08ae502a85e3e890.pdf#page=569)
- Osio, J., Rapallini, J., Adrián Quijano, A., & Ocampo, J. (2010). Implementación de un Algoritmo para procesamiento de imágenes en una FPGA. *Congreso de Microelectrónica Aplicada*. Retrieved from [https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/30176049/uea2010\\_submission\\_33.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1526933170&Signature=K%2FXwONdALguxRfOpsVKin5Y9zKQ%3D&response-content-disposition=inline%3Bfilename%3DImplementacion\\_de\\_un\\_A](https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/30176049/uea2010_submission_33.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1526933170&Signature=K%2FXwONdALguxRfOpsVKin5Y9zKQ%3D&response-content-disposition=inline%3Bfilename%3DImplementacion_de_un_A)
- Ouahab, A., & Belbachir, M. F. (2020). A comparison analysis of pan-sharpening methods on Alsat-2A images. *Proceedings of the 2020 International Conference on Mathematics and Information Technology, ICMIT 2020*, 138–141. <https://doi.org/10.1109/ICMIT47780.2020.9046990>
- Padwick, C., Deskevich, M., Software, S., Pacifici, F., Smallwood, S., & Software Engineer, S. (2010). WORLDVIEW-2 PAN-SHARPENING. In asprs (Ed.), *ASPRS 2010 annual Conferece*. Retrieved from <http://www.asprs.org/wp-content/uploads/2013/08/Padwick.pdf>
- Pardo-Igúzquiza, E., & Chica-Olmo, M. (2005). *Incremento de la resolución espacial de imágenes de satélite mediante cokrigeaje*. Retrieved from <http://www.aet.org.es/congresos/xi/ten111.pdf>
- Pérez Gutiérrez, C., & Muñoz Nieto, A. L. (2006). *Teledetección: nociones y aplicaciones*. Retrieved from [https://books.google.com.co/books/about/Teledetección.html?id=SfrGxbO1DT0C&redir\\_esc=y](https://books.google.com.co/books/about/Teledetección.html?id=SfrGxbO1DT0C&redir_esc=y)
- Pérez, R., & Martínez, P. (2003). Bondad de los algoritmos de descomposición wavelet de mallat y ‘à trous’ para la fusión de imágenes quickbird. *Teledetección y Desarrollo Regional X Congreso de Teledetección*, 295–300.



- Pohl, C., & Genderen, J. Van. (2016). *Remote sensing image fusion: A practical guide* (C. Press, Ed.). Crc Press.
- Pohl, C., & Van Genderen, J. L. (1998). Review article Multisensor image fusion in remote sensing: Concepts, methods and applications. *International Journal of Remote Sensing*, 19(5), 823–854. <https://doi.org/10.1080/014311698215748>
- Poscolieri, M., & Parcharidis, I. (2007). Application of new image analysis methods to VHR satellite imagery for archaeological features detection. *GeoInformation in Europe*, 649–656. Retrieved from [https://www.researchgate.net/publication/235965491\\_Application\\_of\\_new\\_image\\_an\\_alysis\\_methods\\_to\\_VHR\\_satellite\\_imagery\\_for\\_archaeological\\_features\\_detection](https://www.researchgate.net/publication/235965491_Application_of_new_image_an_alysis_methods_to_VHR_satellite_imagery_for_archaeological_features_detection)
- Pradhan, P. S., King, R. L., Younan, N. H., & Holcomb, D. W. (2006). Estimation of the number of decomposition levels for a wavelet-based multiresolution multisensor image fusion. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(12), 3674–3686. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2006.881758>
- Qian, Y., Zhou, W., Yan, J., Li, W., & Han, L. (2015). Comparing machine learning classifiers for object-based land cover classification using very high resolution imagery. *Remote Sensing*, 7(1), 153–168. <https://doi.org/10.3390/rs70100153>
- Ranchin, T., & Wald, L. (2000). Fusion of high spatial and spectral resolution images: The ARSIS concept and its implementation. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 66(1), 49–61.
- Renza Torres, D. (2015). *Transformada Wavelet Compleja de Doble Árbol (DT-CWT) y su aplicación en Teledetección. Nuevos modelos y aplicaciones*. Retrieved from <http://oa.upm.es/37211/>
- Rumora, L., Gašparović, M., Miler, M., & Medak, D. (2020). Quality assessment of fusing Sentinel-2 and WorldView-4 imagery on Sentinel-2 spectral band values: a case study of Zagreb, Croatia. *International Journal of Image and Data Fusion*, 11(1), 77–96. <https://doi.org/10.1080/19479832.2019.1683624>
- Saavedra, M. L., Martin, C. G., Zambrano, F., & Merino, F. J. (2008). *Clasificación de Imágenes Fusionadas, un problema de explosión de información*. Retrieved from [http://oa.upm.es/3461/1/INVE\\_MEM\\_2008\\_54971.pdf](http://oa.upm.es/3461/1/INVE_MEM_2008_54971.pdf)
- Scherzer, O. (2010). *Handbook of mathematical methods in imaging*. Springer Science & Business Media.
- Shahdoosti, H. R. (2015). MS and PAN image fusion by combining Brovey and wavelet methods. *International Conference on Information Technology, Computer & Communication*. Retrieved from <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1701/1701.01996.pdf>
- Shensa, M. J. (1991). Discrete Wavelet Transforms: The Relationship of the À trous and Mallat Algorithms. *Trezieme Colloque Grets - Juan-Les-Pins Du 16 Au 20 Septembre 1991*, 189–192.
- Singh, D., Garg, D., & Singh Pannu, H. (2017). Efficient Landsat image fusion using fuzzy and stationary discrete wavelet transform. *Imaging Science Journal*, 65(2), 108–114. <https://doi.org/10.1080/13682199.2017.1289629>

- Sobrino, J., Raissouni, N., Kerr, Y., Oliosio, A., López-García, M., Belaid, A., . . . Dempere, L. (2000). *Teledetección*. Valencia, España: Servicio de Publicaciones.
- Sojasi, S., & Maldague, X. (2017, May 5). *Satellite image fusion by using a combination of IHS and HPM methods* (P. Bison & D. Burleigh, Eds.). <https://doi.org/10.1117/12.2266038>
- Srinivasa Rao, D., & Ramesh Babu, C. (2017). Comparison of Discrete Wavelet Transform (DWT), Discrete Cosine Transform (DCT) and Stationary Wavelet Transform (SWT) based Satellite Image Fusion Techniques. *International Journal of Current Research and Review*, vol 9, 49–53. <https://doi.org/10.7324/IJCRR.2017.9129>
- Starck, J.-L. (Jean-L., Murtagh, F., & Bijaoui, A. (1998). *Image processing and data analysis: the multiscale approach*. Cambridge University Press.
- Stathaki, T. (2011). *Image Fusion: Algorithms and Applications*. [https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=VmvY4MTMFTwC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Stathaki,+T.+\(2011\).+Image+Fusion:+Algorithms+and+Applications.&ots=Cak-KrSDtB&sig=gUGdB34CGN0Vsy49kCUsfk6q01E](https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=VmvY4MTMFTwC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Stathaki,+T.+(2011).+Image+Fusion:+Algorithms+and+Applications.&ots=Cak-KrSDtB&sig=gUGdB34CGN0Vsy49kCUsfk6q01E)
- Stolojescu, C., Railean, I., Moga, S., & Isar, A. (2010). Comparison of wavelet families with application to WiMAX traffic forecasting. *Proceedings of the International Conference on Optimisation of Electrical and Electronic Equipment, OPTIM*, 932–937. <https://doi.org/10.1109/OPTIM.2010.5510403>
- Tao Chen, Kai-Kuang Ma, & Li-Hui Chen. (1999). Tri-state median filter for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12), 1834–1838. <https://doi.org/10.1109/83.806630>
- Theodore, M., Emmanouil, A., Panagiotis, B., Ioannis, K., Nikos, D., & Dionisis, C. (2006). Performance evaluation of A-trous wavelet-based filters for enhancing digital mammography images. *2nd International Conference "From Scientific Computing to Computational Engineering"*. Retrieved from <http://medisp.bme.teiath.gr>
- Tirupal, T., Chandra Mohan, B., & Srinivas Kumar, S. (2016). Image fusion of natural, satellite, and medical images using Undecimated Discrete Wavelet Transform and contrast visibility. *RAECE 2015 - Conference Proceedings, National Conference on Recent Advances in Electronics and Computer Engineering*, 11–16. <https://doi.org/10.1109/RAECE.2015.7510217>
- Toet, A., & Hogervorst, M. (2016). *Multispectral Image Enhancement Through Adaptive Wavelet Fusion*. Retrieved from <http://www.dtic.mil/docs/citations/AD1026530>
- Toro, G. H., & Medina, R. J. (2019). Implementación de un filtro de escalamiento utilizado durante el proceso de fusión de imágenes Ikonos, a partir de la descomposición a trous. In L. Ángel, R. Fernández, J. Estornell, C. Abel, C. Montes, J. Carlos, & A. Sánchez (Eds.), *Hacia una visión global del cambio climático*, Editores (2019th ed., pp. 271–274). Retrieved from [www.publicaciones.uva.es](http://www.publicaciones.uva.es)
- Toro Garay, G. H. (2016). *Extracción de Objetos Geográficos Mediante Morfología Matemática a partir de Transformadas Wavelet* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas). Retrieved from <http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/3046>

- Tu, T.-M., Su, S. hu.-C., Shyu, H., & Huang, P. S. (2001). A new look at IHS-like image fusion methods. *Information Fusion*, 2(3), 177–186. [https://doi.org/10.1016/S1566-2535\(01\)00036-7](https://doi.org/10.1016/S1566-2535(01)00036-7)
- Unser, M. A. (1997, October 30). *Ten good reasons for using spline wavelets* (A. Aldroubi, A. F. Laine, & M. A. Unser, Eds.). <https://doi.org/10.1117/12.292801>
- Vaiopoulos, A. D. (2011, October 6). *Developing Matlab scripts for image analysis and quality assessment* (U. Michel & D. L. Civco, Eds.). <https://doi.org/10.1117/12.897806>
- Wang, J., & Zhou, J. (2018). Band Weighting Network for Hyperspectral Image Classification. *2018 Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA)*, 1–8. <https://doi.org/10.1109/DICTA.2018.8615876>
- Wang, T. (2015, December 9). *An improved adaptive IHS method for image fusion* (Y. Xie, Y. Wang, & X. Jiang, Eds.). <https://doi.org/10.1117/12.2228444>
- Wang, Z., Ziou, D., Armenakis, C., Li, D., & Li, Q. (2005). A comparative analysis of image fusion methods. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(6), 1391–1402. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2005.846874>
- Yadav, A. K., Roy, R., Kumar, A. P., Kumar, C. S., & Dhakad, S. K. (2015). De-noising of ultrasound image using discrete wavelet transform by symlet wavelet and filters. *2015 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics, ICACCI 2015*, 1204–1208. <https://doi.org/10.1109/ICACCI.2015.7275776>
- Youssef, M. E., Nasim, S., wasi, S., Khisal, U., & Khan, A. (2018). Efficient Cooperative Spectrum Detection in Cognitive Radio Systems Using Wavelet Fusion. *2018 International Conference on Computing, Electronic and Electrical Engineering (ICE Cube)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICECUBE.2018.8610981>
- Zhang, Y. (1999). A new merging method and its spectral and spatial effects. *International Journal of Remote Sensing*, 20(10), 2003–2014. <https://doi.org/10.1080/014311699212317>
- Zhang, Yun. (2004). Understanding Image Fusion Existing image fusion techniques. *Photogrammetric engineering & remote sensing*, 657–661. Retrieved from [http://scenesharp.com/wp-content/uploads/2016/11/Pub\\_2\\_Highlight\\_Article.pdf](http://scenesharp.com/wp-content/uploads/2016/11/Pub_2_Highlight_Article.pdf)