UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

SEPARACIÓN POR FUNCIONES CONVEXAS

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Briyith Lisdey Herrera Cruz y Cesar Mateo Bahos Orjuela
Dirigido por: Julio César Ramos Fernández, Ph. D.

Bogotá DC
Octubre de 2021

Resumen

En este trabajo hacemos un estudio de distintos tipos de convexidad, haciendo especial énfasis en la noción de funciones fuerte-recíprocamente convexas introducidas en [2]. Presentamos algunos ejemplos, propiedades y relaciones. Además, demostramos que si una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ satisface la desigualdad

$$\left|f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)-tf(y)-(1-t)f(x)\right|\leq\varepsilon,$$

para todos $x,y\in[a,b]$ y $t\in[0,1]$ siendo $[a,b]\subseteq(0,\infty)$ un intervalo y $\varepsilon>0$ fijo, entonces para cada $\rho>0$, existe una función fuerte-recíprocamente convexa $\phi_\rho:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)-\phi_\rho(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\rho,$$

para todo $x\in[a,b]$. Esto es, obtenemos un resultado de aproximación convexa para esta clase de funciones.

Palabras clave: Funciones convexas, teorema del sándwich, resultado de aproximación.
Clasificación AMS: 26A51, 26B25, 26D07.

Agradecimientos:

Cesar Mateo Bahos Orjuela

Quiero agradecer en primera instancia a los profesores Julio César Ramos Fernández y Samuel Barreto por su guía y apoyo constante, en especial durante la realización de esta monografía. A la profesora Carolina Mejia Moreno por quien guardo bastante aprecio. Agradezco su gran apoyo durante mi estancia en la carrera y expreso mi admiración por su dedicación y entrega a su labor como docente.

Finalmente agradezco a mi familia y amigos, especialmente a mi madre, gracias a ella se pudo realizar mi anhelo de entrar y desarrollarme en la carrera de Matemáticas.

Briyith Lisdey Herrera Cruz

A mi madre por su esfuerzo y apoyo incondicional para conmigo. A mis amigos Mateo Bahos e Iván Nieto, por su excesiva paciencia, su constancia, por hacer de esta meta amena y agradable. A mis profesores Julio César Ramos Fernández y Carolina Mejia Moreno por su guía constante, por su excelente labor educando.

1. Introducción

La convexidad es una noción de alto impacto en diferentes áreas tanto de la matemática-en cálculo de variaciones- como en la economía, ingeniería, teoría de optimización y programación. Particularmente, en optimización el estudio de la convexidad es extremadamente útil ya que la eficiencia en la resolución de problemas del tipo convexo es superior a la de problemas no convexos. A menudo problemas que inicialmente no son convexos, se trabajan para poder discernir su "convexidad oculta" y en consecuencia aplicar las poderosas herramientas de la optimización convexa [3].

El estudio de la convexidad se remonta al año (250 A.C.) donde Euclides en su estudio de los polígonos y sus propiedades la introduce de manera indirecta (dado que estos últimos son precisamente figuras convexas). Sin embargo, es Arquímedes quien en su exhaustiva búsqueda de π - la relación existente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro-, nota el hecho de que el perímetro de cualquier figura convexa es más pequeño que el de cualquier otra figura convexa que la contenga [12]. Esto es precisamente lo que utiliza para aproximar el valor de π a través del perímetro de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de la circunferencia.

Durante el siglo XX hubo una intensa actividad de investigación relacionada con las funciones convexas y se obtuvieron resultados significativos en análisis funcional, economía matemática, análisis convexo y optimización no lineal. El libro de G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya [5] jugó un papel importante en la popularización del estudio de las funciones convexas, sus propiedades y características.

El concepto de función convexa se le atribuye al matemático danés Johan L.W.V. Jensen [9] [10] -a pesar de no ser el primero en estudiar tales funciones- pues es él quien unifica el concepto de las funciones que satisfacen ciertas propiedades, que fueron previamente estudiadas por Ch. Hermite, J. Hadamard, O. Hölder y O. Stolz ([4], [6], [7], [15]).

En este trabajo hacemos un recorrido por varios de los resultados clásicos sobre funciones convexas, esto se recopila en la segunda sección y resulta ser muy interesante puesto que exploramos en la geometría de las funciones convexas, y la usamos para dar las demostraciones correspondientes. También proveemos el concepto de conjuntos convexos, mostrando algunos de los resultados sobre este tema que son vitales para poder dar la demostración del teorema del sándwich para funciones convexas, que se realiza en la Sección 2 (Teorema 11).

La tercera sección de esta monografía, está dedicada a desarrollar las temáticas del artículo guía Bracamonte, Giménez y Medina del año 2018 [2]. En esta sección damos la interpretación geométrica del concepto de función fuertemente convexa, ya que los otros conceptos quedan completamente determinados por los conceptos de función convexa y de función fuertemente convexa. Seguimos además una serie de resultados propuestos en el artículo guía para llegar a una demostración bastante sencilla de una de las metas de este trabajo, la cual es el teorema del sándwich para funciones fuerte-recíprocamente convexas. Finalmente en la Sección 3.4, se hace énfasis que en el desarrollo de este trabajo, notamos un "missprint" del artículo [2, p. 180] por lo que damos un contraejemplo al enunciado tal cual está escrito. Adicionalmente proponemos y demostramos una versión corregida del mismo (Teorema 20).

2. Convexidad

2.1. Funciones convexas

Inicialmente daremos una noción geométrica de las funciones convexas para posteriormente formalizar dicho concepto. Intuitivamente una función es convexa, si para cualesquiera par de puntos de la gráfica de la función el segmento rectilíneo que los une queda por encima de esta, tal como ilustra la siguiente figura.

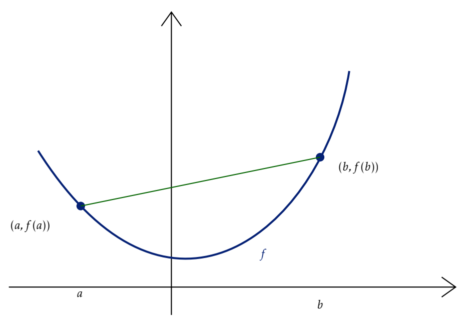

Figura 1: Función convexa

A partir de esta idea, podemos llevar a cabo el siguiente desarrollo para caracterizar tales funciones.

Sabemos que la ecuación de la recta que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ viene dada por

$$m(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

como la gráfica de m debe estar por encima de la gráfica de f tenemos

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

de donde se deduce la siguiente desigualdad para cada $a < x < b$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ahora es posible dar una definición más formal para convexidad en un intervalo.

Definición 1. Se dice que f es una *función convexa* en I si se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

para todo $a, x, b \in I$ con $a < x < b$.

Consideremos f una función convexa en I. Sean L, M y R segmentos tales que:

- L es el segmento rectilíneo que une a $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.
- M es el segmento rectilíneo que une a $(a, f(a))$ con $(x, f(x))$.
- R es el segmento rectilíneo que une a $(x, f(x))$ con $(b, f(b))$.

Geométricamente esta situación se ilustra en la Figura 2.

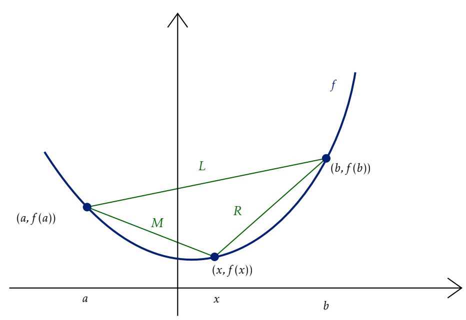

Figura 2: Pendientes en una función convexa

Teniendo en cuenta la definición anterior se puede probar que en una función convexa se obtiene un orden específico entre las pendientes de L, M y R. Por definición de convexidad se tiene que $pen(M) \leq pen(L)$, entonces se van a comparar $pen(R)$ y $pen(L)$.

Se sabe que R y L se cortan en el punto $(b, f(b))$ (ver Figura 2). Ahora dado que x está entre a y b entonces $(x, f(x))$ está por debajo de la recta L, además R pasa por este punto, en consecuencia R

está por debajo de L a la izquierda de b. Por lo cual necesariamente R está por encima de L a la derecha de b y por tanto $pen(L) \leq pen(R)$.

Finalmente, tenemos la desigualdad

$$pen(M) \leq pen(L) \leq pen(R).$$

Así, para $a < x < b$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \tag{1}$$

Como hemos visto, a partir de $pen(M) \leq pen(L)$ se deduce la desigualdad $pen(L) \leq pen(R)$. Con lo cual, una función es convexa si y sólo si $pen(L) \leq pen(R)$ o $pen(M) \leq pen(R)$ para todo $a < x < b$.

2.2. Algunos resultados sobre funciones convexas

En esta sección deduciremos algunos de los resultados que se desprenden de la definición de función convexa vista anteriormente; más concretamente la relación existente entre las funciones convexas, la continuidad y la diferenciabilidad de las mismas.

Teorema 1. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f posee derivadas laterales en cada punto z del interior de I.*

Demostración. Sea $z \in I$, para $x \neq z$ definimos

$$g(x) = \frac{f(x)-f(z)}{x-z},$$

dado que f es convexa entonces g es creciente a la derecha de z. Ahora mostraremos que para $x > z$ existe una cota inferior de g. En efecto, tomemos cualquier y que esté a la izquierda de z, aplicando (1) a $y < z < x$, se obtiene

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = g(x),$$

por lo cual $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ es una cota inferior para el siguiente conjunto

$$A = \{g(x) : x > z\}.$$

Por axioma del supremo existe

$$\alpha = \text{ínf}\, A.$$

Dado que g es una función creciente para $x > z$ entonces

$$\lim_{x\to z^+} g(x) = \lim_{x\to z^+} \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = \alpha,$$

con lo que $f_+'(z)$ existe, además $f_+'(z) = \alpha$.

Ahora a la izquierda de z ocurre lo mismo, g es creciente. Basta aplicar (1) a $x < y < z$ para obtener

$$g(x) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = g(y).$$

Sea $x < z$, elijamos y a la derecha de z, aplicando nuevamente (1) a $x < z < y$, tenemos que

$$g(x) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

por axioma del supremo existe

$$\gamma = \sup\{g(x) : x < z\}.$$

Como g es creciente, entonces

$$\lim_{x\to z^-} g(x) = \lim_{x\to z^-} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \gamma = f_-'(z).$$

Adicionalmente para cualesquiera x, y tal que $x < z < y$ se satisface que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

por lo cual se obtiene la desigualdad

$$f_-'(z) \leq f_+'(z).$$

Esto muestra el resultado. $\square$

Notemos que si $x < y$ y se toma cualquier a que este entre x e y, aplicando (1) a $x < a < y$, se sigue que:

$$f_+'(x) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq f_-'(y) \leq f_+'(y). \tag{2}$$

De esta desigualdad se deduce que f_+' es una función creciente en el interior de I, además de (2) si f_+' es continua en $y \in I$ entonces $f_+'(y) = f_-'(y)$, lo cual prueba el siguiente resultado:

Teorema 2. *Toda función convexa en un intervalo I es derivable salvo en un subconjunto numerable de I.*

Si bien podría pensarse que toda función convexa es continua esto no es necesariamente cierto, pues la continuidad de la función solo puede ser asegurada en el interior del intervalo donde se esté trabajando.

Teorema 3. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, si z es un punto interior de I entonces f es continua en z.*

Demostración. Por el Teorema 1 sabemos que f posee derivadas laterales en z, además:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to z^+} f(x) - f(z) &= \lim_{x \to z^+} \frac{f(x) - f(z)}{x - z}(x - z) \\
&= f'_+(z) * 0 \\
&= 0 \\
\lim_{x \to z^-} f(x) - f(z) &= \lim_{x \to z^-} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(z - x) \\
&= f'_-(z) * 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto culmina la demostración. □

El resultado previo no es cierto si z no es un punto en el interior de I, para ello consideramos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & si \quad x \neq 0, \\ 1, & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Se puede verificar gráficamente que f es convexa en todo su dominio. Sin embargo, es discontinua en $x = 0$, tal como ilustra la Figura 3.

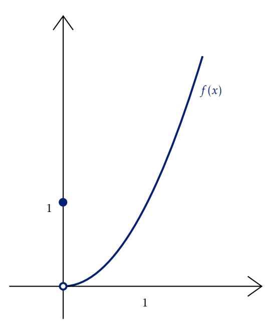

Figura 3: Función convexa no continua

El siguiente teorema pretende caracterizar el comportamiento de una función convexa en un intervalo abierto.

Teorema 4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, con I un intervalo abierto. Si f es convexa, entonces f cumple al menos una de las siguientes propiedades:*

- *f es creciente en I.*
- *f es decreciente en I.*
- *Existe $c \in I$ tal que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.*

Demostración. Si f es decreciente en I no hay nada que probar. Supongamos entonces que f es no decreciente en I, por lo que existen $a, b \in I$ tal que $a < b$ y $f(a) < f(b)$. Probaremos que f es creciente a la derecha de b.

Sean $x, y \in I$ tales que $a < b \leq y < x$, aplicando (1) en la desigualdad $a < y < x$ se tiene lo siguiente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Por otro lado, si a la desigualdad $a < b < x$ se le aplica (1), podemos concluir

$$0 < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

finalmente

$$0 < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

De este modo, si $b \leq y < x$ entonces

$$f(x) < f(y), \tag{3}$$

así f es creciente a la derecha de b. Definamos

$$A = \{z \in I : f(y) \leq f(x), \quad \forall x, y \in I, \ z \leq y < x\},$$

es decir, A es el conjunto de los $z \in I$ tal que f es creciente a la derecha de z. Ciertamente $A \neq \emptyset$ puesto que $b \in A$, además es inmediato ver que si $z < x$, con $x \in I$ y $z \in A$, entonces $x \in A$. Si $A = I$ entonces f es creciente en I; supongamos entonces que $I \neq A$ y sea $d \in I - A$. Naturalmente d debe satisfacer que $d < x$ para todo $x \in A$, por tanto existe:

$$c = \text{ínf} A;$$

como d es cota inferior de A entonces $d \leq c$.

Si $c < x < y$ existe $z \in A$ tal que $c \leq z < x < y$, por tanto $f(x) < f(y)$ y dado que $c \in I$, por Teorema 3, f es continua en c, esto es:

$$f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) \leq f(y).$$

De aquí concluimos que $c \in A$, es decir f es creciente a la derecha de c.

Finalmente falta probar que f es decreciente a la izquierda de c. Sean $x, y \in I$ tales que $x < y < c$. De ocurrir que $f(x) < f(y)$, aplicamos el mismo razonamiento usado en (3) para concluir que f es creciente a la derecha de y, es decir, $y \in A$, además $y < c$ lo cual es una contradicción. Así para todo $x < y < c$ se tiene:

$$f(y) \leq f(x).$$

Haciendo $y \to c$ concluimos:

$$f(c) = \lim_{y \to c^-} f(y) \leq f(x),$$

lo que da por finalizada la prueba. □

Con cierto trabajo adicional se puede probar que toda función convexa en un intervalo $[a, b]$ es acotada (ver [11, p. 5]). Como consecuencia directa de este resultado y del Teorema 4 tenemos lo siguiente.

Teorema 5. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces existen $f(a^+)$ y $f(b^-)$ y además, la función $\overline{f}$ definida por*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(a^+), & si \quad x = a, \\ f(x), & si \quad x \in (a, b), \\ f(b^-), & si \quad x = b. \end{cases}$$

es continua y convexa en $[a, b]$.

Este teorema nos garantiza que una función convexa, de presentar singularidades, estas solo pueden ser del tipo evitable.

Dado el papel geométrico de las secantes en el concepto de función convexa, es de esperar que la teoría de derivadas intervenga de cierta forma, y lo hace mediante el siguiente teorema y su corolario:

Teorema 6. *[14, p. 222-223] Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, f es convexa en I si y sólo si f' es creciente en I.*

Corolario 1. *Sea f una función dos veces diferenciable en un intervalo I, entonces f es convexa en I si y sólo si f'' es no negativa en I.*

2.3. Conjuntos convexos

En este apartado damos las herramientas necesarias en la demostración del teorema del sándwich para funciones convexas. Inicialmente proveemos la definición de conjunto convexo y enunciamos dos resultados referentes a ello, omitimos las pruebas de estos últimos ya que no hacen parte de nuestros objetos de estudio.

Definición 2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que S es convexo si para cada par de puntos $x, y \in S$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in S$.

Para el caso de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ tenemos una representación gráfica de un conjunto convexo, geométricamente, S es convexo si el segmento que une a x con y esta contenido en S.

Teorema 7. *Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces:*

$$S = \bigcap_{i\in I} S_i$$

es convexo.

Este resultado se deduce directamente de la definición de intersección generalizada y conjunto convexo.

Si S no es convexo, sea $\mathscr{A} = \{A \subseteq R^n : S \subseteq A$ y “A es convexo ”$\}$. Ciertamente $\mathscr{A} \neq \emptyset$ pues $\mathbb{R}^n \in \mathscr{A}$, por Teorema 7 se deduce que el conjunto $conv(S)$ definido como sigue:

$$conv(S) = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$$

es un conjunto convexo y además contiene a S; así por definición de $\mathscr{A}$, $conv(S) \in \mathscr{A}$, en otras palabras, $conv(S)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S. Generalmente este conjunto es conocido como la envolvente convexa de S.

Definición 3. Sean $x_1, x_2, ..., x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$, diremos que:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

es una *combinación lineal convexa* de $x_1, x_2, ..., x_m$ si los coeficientes λ_i son no negativos y además:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Teorema 8. *[13, p. 12] Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $conv(S)$ consiste de todas las combinaciones lineales de elementos de S.*

Finalmente enunciaremos el teorema de Caratheodory, resultado crucial en la demostración del teorema del sándwich para funciones convexas, el cuál jugará un rol muy importante en este trabajo.

Teorema 9. *[13, p. 155] **(Teorema de Caratheodory)** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si $x \in conv(S)$ entonces x se puede escribir como combinación lineal convexa de a lo más $n+1$ elementos de S.*

2.4. Teorema del sándwich para funciones convexas

A continuación mostraremos una equivalencia a la definición previamente dada para funciones convexas, la cuál resulta útil por la sencillez que supone para el manejo en ciertas demostraciones.

Teorema 10. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, f es convexa si y sólo si para todos $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se satisface*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{4}$$

Demostración. Supongamos que f es convexa. Sean $x, y \in I$, sin pérdida de generalidad, tomemos $x < y$, de esta manera $x < tx + (1-t)y < y$ para cada $t \in (0,1)$. Además para $t = 0$ y $t = 1$ se tiene (4); por lo que nos enfocaremos en $t \in (0,1)$. Por definición de función convexa tenemos que para $x < tx + (1-t)y < y$ se satisface

$$\frac{f(tx + (1-t)y) - f(x)}{(t-1)x + (1-t)y} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

de donde

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq (t-1)(x-y)\frac{f(x) - f(y)}{x - y} + f(x) \\ &\leq (t-1)f(x) + (1-t)f(y) + f(x) \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que f satisface (4). Sean $x < \overline{x} < y$, entonces existe $t \in (0,1)$ tal que

$$\overline{x} = tx + (1-t)y.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(\overline{x})-f(x)}{\overline{x}-x} &= \frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{(1-t)(y-x)}\\ &\leq \frac{tf(x)+(1-t)f(y)-f(x)}{(1-t)(y-x)}\\ &= \frac{(1-t)(f(y)-f(x))}{(1-t)(y-x)}\\ &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.\end{aligned}$$

Esto culmina la demostración. □

Con la equivalencia previamente dada podemos introducir el teorema principal de esta sección, que resultará ser fundamental en el desarrollo del trabajo restante. El mismo ha sido tomado del artículo [1, p. 140-141] y hemos hecho las modificaciones pertinentes.

Teorema 11. ***(Teorema del sándwich)*** *Sean f, g funciones definidas en algún intervalo I, entonces se satisface*

$$f(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y)$$

para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$ si y sólo si existe una función convexa h definida en I tal que

$$f \leq h \leq g.$$

Demostración. Sea $S = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : g(x) \leq y\}$, tomemos $(x,y) \in conv(S)$. Por el teorema de Caratheodory (Teorema 9) el punto (x,y) se encuentra en la envolvente convexa de a lo más tres puntos de S. Consideremos H como la envolvente convexa de dichos puntos; del Teorema 8 se infiere que H será un segmento de recta o un triángulo.

Ciertamente $(x,y) \in H$ y además $H \subset conv(S)$. Tomemos

$$y_0 = \text{ínf}\{z \in \mathbb{R} : (x,z) \in H\},$$

como y es tal que $(x,y) \in H$ y H es un conjunto cerrado y acotado, entonces y_0 está bien definido (ver Figura 4).

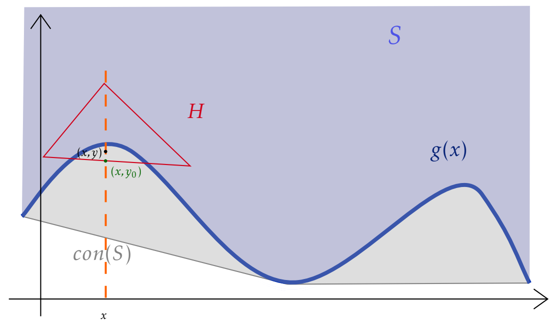

Figura 4: Envolvente convexa de S

Además podemos apreciar que (x, y_0) se encuentra en la frontera de H y por tanto (x, y_0) pertenece a un segmento que une a dos vértices del mismo.
Recordemos que los vértices de H son elementos de S, esto significa que (x, y_0) puede ser escrito como combinación lineal convexa de dos puntos de S, sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dichos puntos; existe $t \in [0,1]$ tal que

$$(x, y_0) = t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2).$$

Como $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ entonces $g(x_1) \leq y_1$ y $g(x_2) \leq y_2$, en consecuencia

$$\begin{aligned} y \geq y_0 &= ty_1 + (1-t)y_2 \\ &\geq tg(x_1) + (1-t)g(x_2) \\ &\geq f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x). \end{aligned}$$

Por ende, $y \geq f(x)$ para todo y tal que $(x, y) \in conv(S)$. Definimos $h : I \to \mathbb{R}$ como sigue

$$h(x) = \text{ínf}\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in conv(S)\},$$

dado que $(x, g(x)) \in conv(S)$ entonces $h(x) \leq g(x)$. Por otro lado $f(x)$ es cota inferior del conjunto $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in conv(S)\}$, de este modo $f(x) \leq h(x)$; en síntesis

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Finalmente, resta probar que h es una función convexa. Sean $x_1, x_2 \in I$, tomemos y_1, y_2 tales que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in conv(S)$ y $t \in (0,1)$. Como $conv(S)$ es convexo, entonces

$$(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in conv(S).$$

Luego, por definición de h,

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) \leq ty_1 + (1-t)y_2.$$

Reescribiendo lo anterior, se obtiene

$$\frac{h(tx_1+(1-t)x_2)-(1-t)y_2}{t} \leq y_1,$$

y se sigue que

$$\frac{h(tx_1+(1-t)x_2)-(1-t)y_2}{t}$$

es cota inferior del conjunto $\{y \in \mathbb{R} : (x_1, y) \in conv(S)\}$, con lo cual

$$\frac{h(tx_1+(1-t)x_2)-(1-t)y_2}{t} \leq h(x_1) \Longrightarrow h(tx_1+(1-t)x_2) \leq th(x_1)+(1-t)y_2.$$

De manera análoga para y_2, obtenemos

$$h(tx_1+(1-t)x_2) \leq th(x_1)+(1-t)h(x_2).$$

Por ende h es convexa. La condición suficiente es consecuencia del Teorema 10. □

3. Diversas formas de convexidad

En esta sección definimos y caracterizamos distintas nociones de convexidad tales como: armónicamente convexas, fuertemente convexas y fuerte-recíprocamente convexas.

3.1. Funciones armónicamente convexas

Comenzamos nuestro estudio con las funciones armónicamente convexas, más precisamente tenemos la siguiente definición.

Definición 4. [8] Sea I un intervalo contenido en $\mathbb{R}-\{0\}$, decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es *armónicamente convexa* en I si para todos $x, y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$ se satisface la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y)+(1-t)f(x).$$

Un resultado inmediato de aplicar esta definición junto con el Teorema 10 es el siguiente.

Teorema 12. *$f : I \to \mathbb{R}$ es armónicamente convexa si y sólo sí la función $g : J \to \mathbb{R}$ dada por, $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ es convexa en J, donde J es el intervalo que corresponde a la imagen directa del intervalo I por medio de la función $\frac{1}{t}$.*

Al igual que en el caso de las funciones convexas tenemos un resultado análogo al Teorema del Sándwich para las funciones armónicamente convexas. Solo demostraremos la implicación necesaria, pues la suficiente se deduce directamente de la definición de función armónicamente convexa.

Teorema 13. *Sean f, g funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$, entonces se satisface*

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tg(y) + (1-t)g(x)$$

para todo $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ si y sólo si existe una función armónicamente convexa h definida en I tal que $f \leq h \leq g$

Demostración. Aplicando el Teorema 11 a las funciones $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, tenemos que existe $H(t)$, una función convexa tal que:

$$F(t) \leq H(t) \leq G(t)$$

$$f(t) \leq H\left(\frac{1}{t}\right) \leq g(t).$$

Por el Teorema 12 se concluye que $h(t) = H\left(\frac{1}{t}\right)$ es armónicamente convexa en I. □

3.2. Funciones fuertemente convexas

Similarmente a como hicimos con las funciones convexas, en este apartado, primero daremos una noción geométrica del concepto de fuertemente convexa para posteriormente formalizarlo. Sea f una función definida en un intervalo I y $c > 0$, decimos que f es fuertemente convexa módulo c, si para todos $x_1, x_2 \in I$ la gráfica de f en $[x_1, x_2]$ queda por debajo de la parábola h con coeficiente director c que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, tal como ilustra la siguiente figura:

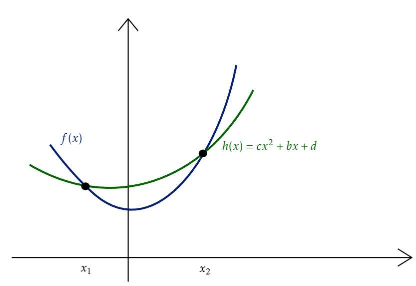

Figura 5: Función fuertemente convexa

El hecho de que la parábola $h(x) = cx^2 + bx + d$ esté por encima de la gráfica de f en $[x_1, x_2]$ se traduce en la siguiente desigualdad

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq h(tx_1 + (1-t)x_2),$$

para todo $t \in [0,1]$, además debe ocurrir que $h(x_1) = f(x_1)$ y $h(x_2) = f(x_2)$, por lo cual

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) - tf(x_1) - (1-t)f(x_2) \leq h(tx_1 + (1-t)x_2) - (th(x_1) + (1-t)h(x_2)). \tag{5}$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$2x_1x_2t(1-t) = -t(1-t)\Big((x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2\Big),$$

concluimos que

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) - (th(x_1) + (1-t)h(x_2)) = -ct(1-t)(x_1 - x_2)^2,$$

por tanto (5) queda de la siguiente manera

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - ct(1-t)(x_1 - x_2)^2.$$

Con esta motivación geométrica podemos dar la siguiente definición.

Definición 5. Sea I un intervalo y $c > 0$, decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *fuertemente convexa módulo c* si satisface la siguiente desigualdad

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

para todos $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$.

De esta definición deducimos que toda función fuertemente convexa es también convexa. El recíproco no es cierto, para ello basta considerar la función identidad. Sin embargo, la relación entre estos dos conceptos la damos en el siguiente teorema.

Teorema 14. *Sea I un intervalo y $c > 0$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ es fuertemente convexa módulo c si y sólo si la función $g(x) = f(x) - cx^2$ es convexa.*

Demostración. Supongamos que f es fuertemente convexa módulo c, de la Definición 5, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(tx + (1-t)y) &= f(tx + (1-t)y) - c(tx + (1-t)y)^2 \\
&\leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 - c(tx + (1-t)y)^2 \\
&= tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(1-t)(x-y)^2 + t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2) \\
&= tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(1-t)(x-y)^2 + t^2x^2 - t(1-t)((x-y)^2 - x^2 - y^2) \\
&\quad + (1-t)^2y^2) \\
&= tf(x) + (1-t)f(y) - ctx^2 - c(1-t)y^2 \\
&= tg(x) + (1-t)g(y)
\end{aligned}$$

Si ahora suponemos que g es convexa, la demostración es la misma salvo el orden. En este caso, se empieza desde la última línea. □

Teorema 15. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es fuertemente convexa módulo c en (a,b).*
2. *Para cada $x_0 \in (a,b)$ existe una transformación lineal T tal que $f(x) \geq f(x_0)+T(x-x_0)+c(x-x_0)^2$ para todo $x \in (a,b)$.*
3. *Si f diferenciable, entonces para cada $x_0 \in (a,b)$ se cumple que $f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+c(x-x_0)^2$ siempre que $x \in (a,b)$.*
4. *Para f dos veces diferenciable, se tiene que $f''(x) \geq 2c$ para todo $x \in (a,b)$.*

Demostración. $1. \implies 2.$

Por Teorema 14, la función $g(x) = f(x) - cx^2$ es convexa. El Teorema 1 asegura la existencia de $g'_+(x_0)$ y $g'_-(x_0)$. Además, si $x > x_0$ tenemos que

$$g(x) - g(x_0) \geq g'_+(x_0)(x-x_0) = (x-x_0)(f'_+(x_0) - 2cx_0).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0) + c(x^2 - x_0^2) - 2cx_0(x-x_0) \\ &= f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0) + c(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Si $x < x_0$ entonces por Teorema 1, $g'_+(x_0) \geq g'_-(x_0)$, ahora

$$g(x) - g(x_0) \geq g'_-(x_0)(x-x_0) \geq g'_+(x_0)(x-x_0).$$

Repitiendo el razonamiento anterior para $x > x_0$ tenemos que para todo $x \in (a,b)$ se satisface

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0) + c(x-x_0)^2.$$

$2. \implies 3.$
Supongamos que para cada $x_0 \in (a,b)$ existe una transformación lineal T tal que

$$f(x) \geq f(x_0) + T(x-x_0) + c(x-x_0)^2,$$

para todo $x \in (a,b)$. Pongamos $T(x) = mx$, entonces

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) + c(x-x_0)^2.$$

Considerando $x > x_0$ y dividiendo por $x - x_0$, obtenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq m + c(x - x_0) \geq m.$$

Luego, haciendo $x \to x_0$:

$$f'(x_0) \geq m.$$

Análogamente para el caso $x < x_0$ concluimos que $f'(x_0) \leq m$. Finalmente $f'(x_0) = m$.

3. $\Longrightarrow$ 1.
Supongamos ahora que f es diferenciable y que para cada $x_0 \in (a,b)$ se cumple que

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c(x - x_0)^2,$$

siempre que $x \in (a,b)$. Vamos a mostrar que f es fuertemente convexa módulo c. Con este fin, sean $x < x_0 < y$ elementos de (a,b). Aplicando la hipótesis a la función $g(x) = f(x) - cx^2$, podemos deducir las siguientes desigualdades

$$g(x) - g(x_0) \geq g'(x_0)(x - x_0), \tag{6}$$

$$g(y) - g(x_0) \geq g'(x_0)(y - x_0). \tag{7}$$

Luego, de (6) y (7) obtenemos

$$\frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \leq \frac{g(y) - g(x_0)}{y - x_0}$$

y la desigualdad (1) implica que g es convexa. El resultado se sigue del Teorema 14.

4. $\Longleftrightarrow$ 1.
Esta equivalencia es consecuencia directa del Corolario 1 y del Teorema 14. $\square$

3.3. Funciones fuerte-recíprocamente convexas

La última noción que vamos a considerar en esta sección es el concepto de funciones fuerte-recíprocamente convexas módulo c.

Definición 6. Sea I un intervalo contenido en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $c > 0$, decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es *fuerte-recíprocamente convexa módulo* c en I si se satisface la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) - ct(1-t)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$$

para todos $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$.

El siguiente resultado relaciona dos nociones distintas de funciones convexas, más concretamente las funciones tratadas en la Definición 5 y la Definición 6. La prueba es consecuencia inmediata de las definiciones de función fuertemente convexa y fuerte-recíprocamente convexa (ver[2, p. 177]).

Teorema 16. *f es fuerte-recíprocamente convexa módulo c en I si y sólo si la función $g : J \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ es fuertemente convexa módulo c en J, donde J es el intervalo que corresponde a la imagen directa del intervalo I por medio de la función $\frac{1}{t}$.*

Así mismo, haciendo las modificaciones pertinentes a las demostraciones de los teoremas 15 y 16 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 17. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *f es fuerte-recíprocamente convexa módulo c en $(a,b) \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$.*
2. *Para cada $x_0 \in (a,b)$ existe una transformación lineal T tal que*
$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f\left(\frac{1}{x_0}\right) + T(x-x_0) + c(x-x_0)^2$$
para todo $x \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$.
3. *Para f diferenciable y para cada $x_0 \in (a,b)$*
$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f\left(\frac{1}{x_0}\right) - \frac{1}{x_0^2} f'\left(\frac{1}{x_0}\right)(x-x_0) + c(x-x_0)^2$$
para todo $x \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$.
4. *Para f dos veces diferenciable*
$$\frac{1}{x^4}\left(2xf'\left(\frac{1}{x}\right) + f''\left(\frac{1}{x}\right)\right) \geq 2c$$
para todo $x \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$.

El siguiente teorema va a mostrar la relación entre funciones armónicamente convexas y fuerte recíprocamente convexas. Inicialmente el artículo [2, p. 175-176] propone una demostración más extensa, pero aquí presentamos este resultado como una consecuencia de los teoremas ya mostrados anteriormente.

Teorema 18. *f es fuerte-recíprocamente convexa módulo c en I si y sólo si $g(x) = f(x) - \frac{c}{x^2}$ es armónicamente convexa en I.*

Demostración. Por Teorema 16 la función $h : J \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ es fuertemente convexa módulo c en J, ahora por Teorema 14 la función $r(t) = h(t) - ct^2$ es convexa en J, luego, por Teorema 12 la función $g(t) = r\left(\frac{1}{t}\right)$ es armónicamente convexa en I, además

$$g(t) = r\left(\frac{1}{t}\right) = h\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{c}{t^2} = f(t) - \frac{c}{t^2}.$$

Así concluimos la prueba. $\square$

Todo el trabajo previo se hizo con el objetivo de obtener los resultados necesarios para poder brindar una demostración bastante simplificada del siguiente teorema.

Teorema 19. ***(Teorema del sándwich)*** *Sea I un intervalo contenido en $\mathbb{R} - \{0\}$, y sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones. Entonces la siguiente desigualdad se satisface*

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \le tg(y) + (1-t)g(x) - ct(1-t)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2,$$

para todo $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ si y sólo si existe una función fuerte-recíprocamente convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \le h \le g$.

Demostración. Aplicando el Teorema 13 a las funciones

$$F(t) = f(t) - \frac{c}{t^2} \quad , \quad G(t) = g(t) - \frac{c}{t^2}$$

aseguramos la existencia de $H : I \to \mathbb{R}$ armónicamente convexa tal que

$$F(t) \le H(t) \le G(t)$$

Sustituyendo queda

$$f(t) \le H(t) + \frac{c}{t^2} \le g(t)$$

y el Teorema 18 implica que la función $h(t) = H(t) + \frac{c}{t^2}$ es fuerte-recíprocamente convexa módulo c. $\square$

El teorema anterior es la versión del teorema del sándwich para funciones fuerte-recíprocamente convexas, el cual era una de las metas principales del desarrollo de este trabajo.

3.4. Aproximación por funciones fuerte-recíprocamente convexas

En esta sección enunciaremos el último teorema “resultado de aproximación” del artículo de Bracamonte, Giménez y Medina del año 2018 [2]. En primer lugar, destacamos un “missprint” del artículo, proveemos un contraejemplo sobre el enunciado que ellos proponen y posteriormente, enunciamos y demostramos la versión corregida.

Enunciado 1. *[2, p. 180] . Sea* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *un intervalo y* $\varepsilon > 0$. *Si una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisface la desigualdad*

$$\left| f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) - tf(y) - (1-t)f(x) \right| \leq \varepsilon \tag{8}$$

para todos $x, y \in [a,b]$ *y* $t \in [0,1]$. *Entonces, existe una función fuerte-recíprocamente convexa* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left| f(x) - \phi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

para todo $x \in [a,b]$.

Observaciones. Si $g : \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \to \mathbb{R}$ está definida por

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

entonces (8) queda de la siguiente manera

$$\left| g(tx+(1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) \right| \leq \varepsilon,$$

para cada $x, y \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ y $t \in [0,1]$; y por (9), si $\alpha(x) = \phi\left(\frac{1}{x}\right)$ obtenemos

$$|g(x) - \alpha(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$. Además como $\phi(x)$ es fuerte-recíprocamente convexa en $[a,b]$, por Teorema 16, $\alpha(x)$ es fuertemente convexa en $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$. Por ende, de ser el Enunciado 1 verdadero, el siguiente enunciado es equivalente:

Enunciado 2. *Sea* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *un intervalo y* $\varepsilon > 0$. *Si una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisface la desigualdad*

$$\left| f(tx+(1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) \right| \leq \varepsilon,$$

para todo $x, y \in [a,b]$ *y* $t \in [0,1]$, *entonces existe una función fuertemente convexa* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left| f(x) - \phi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para cada $x \in [a,b]$.

Pero este último resultado no es cierto, tal como se puede ver en el siguiente contraejemplo:

Contraejemplo. Consideremos $f(x) = -(x-2)^2$ en el intervalo $[1,3]$. Tenemos

$$\begin{aligned}\left|f(tx+(1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)\right| &= \left|-(tx+(1-t)y)^2 + tx^2 + (1-t)y^2\right| \\ &= t(1-t)(x-y)^2.\end{aligned}$$

El máximo valor de $t(1-t)$, $t \in [0,1]$ se obtiene cuando $t = \frac{1}{2}$ y el máximo valor de $(x-y)^2$ con $x, y \in [1,3]$ se obtiene cuando $x = 1, y = 3$, por lo tanto

$$\left|f(tx+(1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)\right| = t(1-t)(x-y)^2 \leq \frac{1}{4}(2)^2 = 1.$$

De este modo $f(x) = -(x-2)^2$ satisface las hipótesis del Enunciado 2 en el intervalo $[1,3]$ para $\varepsilon = 1$; por lo cual debe existir $\phi : [1,3] \to \mathbb{R}$ fuertemente convexa tal que

$$\left|\phi(x) + (x-2)^2\right| = \left|\phi(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2},$$

por propiedades del valor absoluto

$$-\frac{1}{2} - (x-2)^2 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{2} - (x-2)^2, \quad x \in [1,3] \tag{10}$$

La desigualdad anterior nos indica que $\phi(x)$ se encuentra en la franja $-\frac{1}{2} - (x-2)^2$, $\frac{1}{2} - (x-2)^2$.

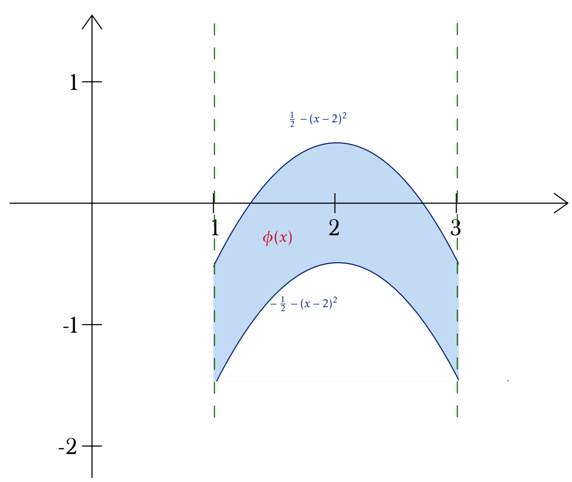

Figura 6: Cotas para $\phi(x)$

Como ϕ es fuertemente convexa, en particular es convexa; a partir de este hecho deduciremos como debe ser el comportamiento de ϕ en los extremos del intervalo $[1,3]$. Si alguno de los valores $\phi(1)$, $\phi(3)$ es menor que $-\frac{1}{2}$, entonces alguno de los dos puntos $(1,\phi(1))$ o $(3,\phi(3))$ está estrictamente por debajo de la recta $L: y = -\frac{1}{2}$, y por (10) pueden estar a lo más a la misma altura de L. Sea P la función lineal que describe el segmento que une a dichos puntos.

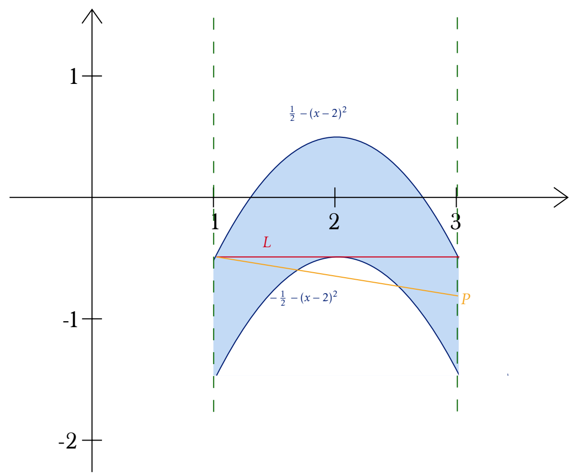

Figura 7: ϕ en los extremos

Por lo previamente mencionado, el segmento P se encuentra estrictamente por debajo de L en $(1,3)$, así $P(2) < -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - (2-2)^2 \leq \phi(2)$, lo cual es contradictorio debido a que si ϕ es convexa entonces el segmento P debe encontrarse por encima de ϕ en $[1,3]$, de este modo $\phi(1) = -\frac{1}{2} = \phi(3)$.

Dado que ϕ es fuertemente convexa en $[1,3]$ existe $c > 0$ tal que la parábola $J(x)$ con coeficiente director c que pasa por los puntos $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ queda por encima de la gráfica de ϕ en $[1,3]$. Como $J(x)$ pasa por los puntos mencionados anteriormente entonces

$$J(x) = cx^2 - 4cx + 3c - \frac{1}{2}.$$

Además

$$J(2) = -\left(c + \frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2} \leq \phi(2),$$

lo cual es una contradicción al hecho que $J(2)$ debería ser mayor o igual que $\phi(2)$ según la definición de función fuertemente convexa.

El enunciado 1 puede ser reformulado de la siguiente manera:

Teorema 20. *Sea* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *un intervalo y* $\varepsilon > 0$. *Si una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisface la desigualdad*

$$\left| f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) - tf(y) - (1-t)f(x) \right| \le \varepsilon,$$

para todos $x, y \in [a,b]$ *y* $t \in [0,1]$. *Entonces para cada* $\rho > 0$ *existe una función fuerte-recíprocamente convexa* $\phi_\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left| f(x) - \phi_\rho(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \rho,$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función que satisface la desigualdad

$$\left| f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) - tf(y) - (1-t)f(x) \right| \le \varepsilon, \tag{11}$$

para todos $x, y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ y para algún $\varepsilon > 0$.

Sea $\rho > 0$ arbitrario. Podemos observar que para $x, y \in [a,b]$ se cumple que

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2,$$

y que también, para $t \in [0,1]$, se tiene lo siguiente

$$0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4}.$$

Por tanto

$$0 \le t(1-t)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2,$$

para todo $x, y \in [a,b]$ y $t \in [0,1]$. Luego, podemos seleccionar $c > 0$, dependiendo solo de a,b y ρ, lo suficientemente pequeño para obtener la desigualdad:

$$0 \le ct(1-t)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 \le 2\rho. \tag{12}$$

Así que, por la desigualdad triangular obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)-tf(y)-(1-t)f(x)+ct(1-t)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\right| \\
&\qquad\qquad \le \left|f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)-tf(y)-(1-t)f(x)\right|+\left|ct(1-t)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\right| \\
&\qquad\qquad \le \varepsilon+2\rho,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la hipótesis (11) y la desigualdad (12) en la última línea. Con lo cual nos queda

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le tf(y)+(1-t)f(x)-ct(1-t)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\varepsilon+2\rho.$$

Ahora usando el teorema del sándwich para funciones fuerte-recíprocamente convexas (Teorema 19) aplicado a f y $f+\varepsilon+2\rho$ podemos garantizar que existe una función fuerte-recíprocamente convexa módulo c, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x)\le h(x)\le f(x)+\varepsilon+2\rho,$$

para todo $x\in[a,b]$. De esta manera,

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\rho\le\left(h(x)-\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)-f(x)\le\frac{\varepsilon}{2}+\rho,$$

para cada $x\in[a,b]$. Por tanto, si definimos $\phi(x)=h(x)-\rho-\frac{\varepsilon}{2}$, entonces ϕ es fuerte-recíprocamente convexa por el Lema 2.10 [2, p. 176] y además

$$\left|f(x)-\phi(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\rho,$$

para todo $x\in[a,b]$, con lo cual se culmina la demostración.

$\square$

4. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo, obtuvimos los siguientes resultados:

1. Estudiamos distintas nociones de convexidad tales como: armónica, fuerte y fuerte-recíprocamente y luego establecimos relaciones entre estos conceptos.

2. Se desarrollaron teoremas del sándwich para funciones armónicamente y fuerte-recíprocamente convexas, establecidos por Işcan [8] y Bracamonte, Giménez y Medina [2], respectivamente.

3. En la Sección 3.4 establecimos un contraejemplo, que muestra que un resultado de aproximación de tipo Hyres-Ulam no es factible para funciones fuerte-recíprocamente convexas y adicionalmente establecimos y demostramos un resultado de aproximación para esta clase de funciones.

Referencias

[1] K. Baron; J. Matkowski; K. Nikodem. A sandwich with convexity. *Math. Pannon.* **5** (1994), no. 1, 139-144.

[2] M. Bracamonte; J. Giménez; J. Medina. Sandwich theorem for reciprocally strongly convex functions. *Rev. Colombiana Mat.* **52** (2018), no. 2, 171-184.

[3] E. M. F. De Velasco. Herramientas de optimización convexa y aplicaciones en telecomunicaciones, PCF, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, (2011).

[4] J. S. Hadamard. Ětude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. Math. Pures Appl.* **58** (1893), 171-215.

[5] G. H. Hardy; J.E. Littlewood; G. Pólya. *Inequalities*, Cambridge at the Univ. Press, (1934).

[6] Ch. Hermite. Sur deux limites d'une intégrale définie. *Mathesis.* **3** (1883), no. 82.

[7] O. Hölder. Über einen Mttelwertsatz, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen* (1889).

[8] İ. Işcan. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, *Hacet. J. Math. Stat.* **43** (2014), no. 6, 935 - 942.

[9] J. L. W. Jensen. Om Konvekse funktioner og Uligherder meellem Middelvaerdier. *Nyt Tidsskrift for Mathematik*. **16B** (1905), no. 1, 175-193.

[10] J. L. W. Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.* **30** (1906), no. 1, 175-193.

[11] N. J. Merentes, S. T. Rivas. *El Desarrollo del Concepto de Función Convexa*, Escuela Venezolana de Matemáticas (2013).

[12] C.P. Niculescu. *Convex Functions and Their Applications. A contemporary approach*, Springer (2018), 9-12.

[13] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, (1972).

[14] M. Spivak. *Cálculo infinitesimal*, Reverté, (2014).

[15] O. Stolz. *Grundzüge der Differential und Integralrechung*, Leipzig: B. G. Teubner, (1893).