



**UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

---

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATÁSTROFES

---

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO  
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Maira Alejandra Rojas Diaz y Nicolás Esteban Holguín Ontiveros  
Dirigido por: Martín Barajas Sichaca

Bogotá DC  
Octubre de 2022

## Resumen

La teoría de catástrofes tiene sus orígenes en la teoría de singularidades de Whitney de la cual utiliza fuertemente las formas de aplicaciones suaves que se terminan por clasificar a grandes rasgos en dos tipos de singularidades, *doblez* y *cúspide*. Pero es hasta finales de la década de 1950 que el matemático francés René Thom introduce formalmente la noción de *catástrofe* para un sistema con determinadas características; en donde se resalta el hecho de que son estructuralmente estables pero tienden a presentar discontinuidades (cambios abruptos en su comportamiento); es decir, una *catástrofe* es cuando en un sistema estable sucede una perturbación. En la presente monografía nos ocuparemos de introducir las nociones que nos permiten evidenciar como estos sistemas se pueden interpretar mediante aplicaciones suaves y la clasificación de dichas aplicaciones, que R. Thom nombró *catástrofes elementales*

**Palabras clave:** Teoría de singularidades, Teoría de catástrofes, Codimensión, Co-rango

**Clasificación AMS:** 58K35, 58K40, 51H20, 57R45, 58A20, 58C25, 58E05, 58K05, 58K60

**Agradecimientos:** Deseamos en primera instancia agradecer al profesor Martín Barajas Sichacá por su dedicación, paciencia y constante apoyo para la realización de este proyecto, a la planta docente que nos formó no solo como matemáticos sino como profesionales con un enfoque social. De manera particular, yo Alejandra Rojas quiero agradecer: A mi madre por acompañarme en todo este proceso, darme palabras de aliento cuando más lo he necesitado y enseñarme a siempre dar lo mejor de mí; a mi tía por apoyarme desde el principio, creer en mí, comprenderme y darme guía cuando lo he necesitado; a mi compañera de vida, por su presencia durante estos años y su amor incondicional. Finalmente yo Nicolás Holguín Ontiveros deseo agradecer a Dios, a mis padres, hermanas y pareja por creer en mí, acompañarme en este camino y siempre darme ánimo y aliento, a mis amigos por nunca dejarme desfallecer y hacer de este camino una travesía más grata.

## 1. Introducción

Como el cambio de forma no siempre se comportara de manera estable y bien definida, el problema del análisis de forma no es sencillo, no se puede reducir a estudiar el cambio que presenta cierto sistema o fenómeno en una vecindad de cualquier punto, para establecer un algoritmo de predicción del mismo. Existen cambios abruptos en la naturaleza, cambios "inesperados" en ciertas ocasiones (impredicibles, relativo a nuestra limitación como observadores), los cuales resultan extraños. "Las funciones, al igual que los seres vivos, se caracterizan por sus singularidades", como proclamó P. Montel. Singularidades, bifurcaciones y catástrofes son términos diferentes para describir la aparición de estructuras discretas a partir de estructuras suaves y continuas[3]. Y es a partir de esta afirmación que el

objetivo principal de esta monografía se evidencia, ya que la teoría encargada de modelar fenómenos que presentan cambios discontinuos de fase es *La teoría de catástrofes*, en donde para mostrar su propósito, se recurrirá a un experimento diseñado por el fundador de esta teoría: *René Thom*; Thom exhibe a través de lo que el nombró como **maquina de catástrofes** un comportamiento discontinuo que puede describirse como una catástrofe de tipo *cúspide* (clasificación que se realiza en la **sección 4** del presente artículo). El comportamiento medido en la [Figural] es el ángulo formado por el punto

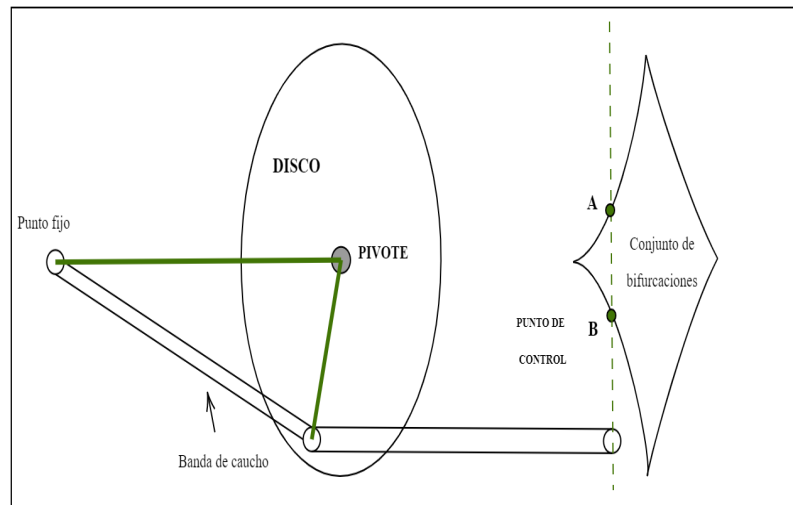


Figura 1: Máquina de Catástrofes

fijo, el pivote y el punto en el que las dos bandas se unen al disco. Muchos movimientos del punto de control solo provocan una rotación suave del disco, pero en algunos casos el disco oscila repentinamente de un lado al otro. Si se marcan todas las posiciones del punto de control en las que se producen estos movimientos bruscos, se genera una curva en forma de rombo. La curva se compone de cuatro cúspides, cada una de las cuales forma el conjunto de bifurcaciones de una catástrofe de cúspides. Moviendo el punto de control a lo largo de la trayectoria trazada, no hay movimiento en el punto **A**, pero el disco gira repentinamente en **B**. Si se invierte la trayectoria del punto de control, pasa por **B** sin incidentes, pero el disco se mueve cuando el punto de control llega a **A**. Dentro de la cúspide hay dos posiciones estables del disco. La máquina tiende siempre a asumir una posición de mínima energía, es decir, el disco gira para minimizar la tensión sobre las bandas. Cuando el punto de control está fuera del conjunto de bifurcación, sólo existe una posición de mínima energía, correspondiente a la única posición estable del disco. A medida que el punto de control se mueve a través del conjunto de bifurcaciones, se desarrolla un segundo mínimo local en **A** y, finalmente, se vuelve más profundo que el original. Sin embargo, la máquina no puede cambiar al nuevo mínimo local porque está separada de él por un máximo local. Solo cuando el punto de control cruza la segunda línea de la cúspide en **B** se elimina el máximo local; entonces el equilibrio se descompone y

la máquina se mueve repentinamente al nuevo mínimo.

Mediante este experimento, *Thom* ejemplifica como los fenómenos de la naturaleza se pueden describir mediante aplicaciones suaves; es así como en esta monografía nos encargaremos de mostrar como se realiza la clasificación de las formas arquetípicas que *Thom* denomino **catástrofes elementales**, las cuales son empleadas para describir con más facilidad el comportamiento de aquellos sistemas en donde su estabilidad se ve afectada por cambios que se pueden considerar abruptos en cierta medida.

## 2. Preliminares

En esta sección se presentarán definiciones y conceptos, los cuales al desarrollarse de manera simultanea dan como resultado la teoría de catástrofe; dichas definiciones son originarias de la teoría de Morse, cuyos conceptos contribuirán y complementaran el desarrollo de este trabajo.

### 2.1. Singularidades de Funciones Suaves

**Definición 1. (Función suave o infinitamente diferenciable)** [4] Sea  $\mathbb{R}^n$  el espacio de n-tuplas de números reales. Sea  $f$  definida como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual asigna a cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  un único número real  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Decimos que  $f$  es  $C^\infty$  si todas las derivadas parciales de  $f$  de todos los órdenes existen y son continuas. En otras palabras que  $f$  sea  $C^\infty$  es análogo a decir que es suave o infinitamente diferenciable.

Dicha definición nos permite hablar del siguiente concepto

**Definición 2. (Punto crítico)** [4] Sea  $f$  una función diferenciable, diremos que  $f$  tiene un **punto crítico** en  $x \in \mathbb{R}^n$  si la derivada en el punto  $x$  se anula, o lo que es lo mismo;  $x$  es llamado un punto crítico de una función  $f$ , si la derivada de  $f$  en dicho punto es cero, es decir<sup>1</sup>:

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = 0$$

Note que esta definición se ve limitada, ya que solo se contempla para una variedad en particular; para que este concepto sea empleado en la teoría de catástrofes debemos extenderlo. Empezaremos por definir la derivada para aplicaciones suaves.

**Definición 3. (Derivada de aplicaciones suaves)**[11] Considere una aplicación diferenciable  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la derivada de una aplicación  $f$  en un punto  $x$  es una aplicación lineal del espacio tangente de la variedad inicial  $\mathbb{R}^m$  en el punto  $x$  al espacio tangente de la variedad objetivo  $\mathbb{R}^n$  en el punto  $f(x)$ :

$$D_x f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

---

<sup>1</sup>esta definición es general, para los efectos de este trabajo se tendrá en cuenta para  $\dim \geq 1$

Ya con esto podemos definir el concepto de **singularidad**

**Definición 4. (Singularidad de aplicaciones suaves)** [1] Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x$  es una **singularidad** de la aplicación suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si el rango de la derivada

$$D_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

en ese punto es menor que el valor máximo posible, es decir, menor que la menor de las dimensiones de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ :

$$\text{ran} D_x f < \min(\dim \mathbb{R}^n, \dim \mathbb{R}^m)$$

*Nota 1.* Sea  $x_1, \dots, x_n$  coordenadas locales en una vecindad del punto  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $y_1, \dots, y_m$  coordenadas locales en una vecindad del punto  $f(x)$  en  $\mathbb{R}^m$ . En términos de estas coordenadas la aplicación  $f$  viene dada por  $n$  funciones suaves en variables:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \dots; y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

La matriz  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$  se denomina matriz jacobiana de la aplicación. En estos términos se puede decir que el punto  $x$  es una singularidad si el rango de la matriz jacobiana allí no es máximo.

*Nota 2.* [6] La matriz jacobiana se emplea gracias a propiedades que se tienen desde el cálculo multivariado, pues note que las derivadas parciales se pueden escribir de una manera más sencilla como un producto matricial; denotemos dicha matriz como  $Df(x)$  para esta observación, en donde diremos que  $Df(x)$  tendrá dimensiones  $m \times n$ . Así pues se tiene:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Así mismo se empleará el concepto de *matriz hessiana* [6] para poder continuar definiendo elementos necesarios de la teoría de catástrofes; ya que estamos hablando de *aplicaciones suaves* podemos emplear la matriz hessiana de dichas aplicaciones ya que no es otra cosa que una matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$  de las segundas derivadas parciales, denotada por  $H(x)$ . De esta manera se tendrá:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Gracias a estos conceptos mencionados, podemos proceder a realizar la clasificación de los tipos de **singularidades** las cuales se categorizan de la siguiente manera:

**Definición 5. (*singularidad no degenerado*)**[11] Sea  $x$  un punto singular de  $f \in C^\infty$ , la función  $f$  tiene una ***singularidad no degenerada*** en  $x$  si el determinante de la *matriz hessiana* es diferente de cero; es decir, la *matriz hessiana* es no singular. Esto es:

$$\det\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]\right) \neq 0$$

En caso contrario, se dirá que  $f$  tiene una **singularidad degenerada**

Esta clasificación, nos lleva abordar un concepto que nos permitirá continuar con la construcción de los elementos necesarios para encaminarnos de una manera certera a la teoría de catástrofes; dichos conceptos son:

**Definición 6. (*punto estable e inestable*)** [4] Se dice que un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  de una función de clase  $C^\infty$  es *estable* si bajo pequeñas "perturbaciones" no desaparece, sino que simplemente se desplaza ligeramente; por el contrario hablamos de puntos *inestables* cuando bajo dichas perturbaciones el punto desaparece o se descompone.

## 2.2. Equivalencia Diferenciable y Estabilidad

Existen varias formas de clasificar las aplicaciones suaves. Claramente la clasificación más usual es la topológica: se dice que dos aplicaciones son topológicamente equivalentes si hay **homeomorfismo** (aplicaciones continuas, biyectivas con inversas continuas) de los espacios de salida y de llegada, transformando una aplicación en la otra.

A los efectos del análisis, la equivalencia topológica, por regla general, es un concepto demasiado "tosco". Por ejemplo la función  $y = x^4$  con una singularidad inestable degenerada es *topológicamente equivalente* a una estable. Por tanto, es necesario un segundo concepto.

### 2.2.1. Equivalencia Diferenciable

**Definición 7. (*Acción de grupo*)**[7]: Por una *acción de grupo*  $(G, \bullet)$  en un conjunto  $M$  nos referimos a una aplicación  $\phi : G \times M \rightarrow M$ , se define como  $(g, x) \mapsto g \bullet x$ , para todo  $x \in M$  y  $g, h \in G$

i)  $1 \bullet x = x$

ii)  $(gh) \bullet x = g \bullet (h \bullet x)$

donde 1 se denota como la identidad de  $(G, \bullet)$ .

**Definición 8. (Órbita)[7]:** Dada tal acción de grupo podemos definir una relación de equivalencia  $\sim_O$  en  $M$  se cumple que  $x \sim_O y$  cuando existe un elemento  $g \in G$  para el cual  $y = g \bullet x$ .

*Ejemplo 1.* La relación  $\sim_O$  es de equivalencia

*Demostración.* Sean  $x, y, z \in M$  bajo la relación  $\sim_O$ . Veamos si se satisfacen las propiedades de relación de equivalencia.

**Reflexiva:** Para cada  $x \in M$  se tiene que  $x \sim_O x$ , ya que existe  $1 \in (G, \bullet)$  tal que  $x = 1 \sim_O x$ .

**Simétrica:** Si  $x \sim_O y$  por definición se tiene que

$$\begin{aligned} x &= g \bullet y \\ g^{-1} \bullet x &= g^{-1} \bullet (g \bullet y) \\ g^{-1} \bullet x &= y \end{aligned}$$

Luego  $y \sim_O x$ .

**Transitiva:** Si  $x \sim_O y$  e  $y \sim_O z$ , por definición, existen  $g, h \in (G, \bullet)$  tales que  $x = g \bullet y$  y  $y = h \bullet z$ , así

$$\begin{aligned} x &= g \bullet (h \bullet z) \\ x &= (gh) \bullet z \end{aligned}$$

Luego  $x \sim_O z$ .

Por lo tanto,  $\sim_O$  es una relación de equivalencia. □

Las clases de equivalencia son llamadas las *órbitas* bajo la acción. Dado  $x \in M$  la *órbita a través de x* es por definición la clase de equivalencia la cual contiene a  $x$ , es decir, el conjunto

$$G \bullet x = \{g \bullet x \mid g \in G\}$$

**Definición 9. (Difeomorfismo:) [4]** Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\phi$  es un *difeomorfismo* si es una  $C^\infty$ -aplicación, inyectiva y con inversa diferenciable .

**Definición 10. (Equivalencia Diferenciable)[11]** Una equivalencia diferenciable de morfismos diferenciables  $\phi_1 : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^m$  y  $\phi_2 : \mathbb{R}_2^n \rightarrow \mathbb{R}_2^m$  se representa por medio del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^n & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{R}_1^m \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}_2^n & \xrightarrow{\phi_2} & \mathbb{R}_2^m \end{array}$$

cuyas flechas verticales  $h$  y  $k$  son *difeomorfismos*

*Nota 3.* El *difeomorfismo*  $h$  es un cambio de las variables independientes  $x$  y el *difeomorfismo*  $k$  es un cambio de las variables dependientes  $y$ . Desde este punto de vista, la cuestión de la equivalencia diferenciable consiste en si se puede transformar una aplicación en otra mediante perturbaciones suaves de las variables independientes y dependientes

*Nota 4.* El diagrama conmutativo representado arriba representa la identidad

$$k(\phi_1(h^{-1}(x))) = \phi_2(x)$$

En esta fórmula  $h^{-1}$  está a la derecha de  $\phi_1$  y  $k$  a la izquierda. Por lo tanto, se dice que el *difeomorfismo*  $h^{-1}$  del espacio de salida ( y el cambio de las variables independientes  $x$ ) es un cambio **por la derecha**. Así mismo, se dice que el *difeomorfismo*  $k$  del espacio de llegada (y el cambio de las variables dependientes  $y$ ) es un cambio **por la izquierda**

*Nota 5.* Considere el conjunto  $\Omega(M,N)$  de todas las aplicaciones suaves de  $M$  a  $N$ . Considere el grupo  $\text{Diff}(M)$  de todos los *difeomorfismos* del espacio de salida  $M$  consigo mismo y el grupo  $\text{Diff}(N)$  de todos los *difeomorfismos* del espacio de llegada  $N$  consigo mismo. El producto directo de grupos

$$\text{Diff}(M) \times \text{Diff}(N)$$

consta de todos los pares  $(h,k)$  de *difeomorfismos* del espacio de salida  $h : M \rightarrow M$  y el espacio de llegada  $k : N \rightarrow N$ . El grupo  $\text{Diff}(M) \times \text{Diff}(N)$  actúa sobre el conjunto  $\Omega(M,N)$  de la siguiente manera:

$$\text{Si } f \in \Omega(M,N), h \in \text{Diff}(M), k \in \text{Diff}(N)$$

entonces

$$(h,k)f = k \bullet f \bullet h^{-1}$$

Notese que se trata de una **acción de grupo**, es decir que:

$$(h_1 h_2, k_1 k_2)f = (h_1, k_1)((h_2, k_2)f)$$

Se dice que esta acción es *izquierda-derecha* (se dice que la acción de  $\text{Diff}M$  es **derecha** y la acción de  $\text{Diff}N$  es **izquierda**)

En estos términos podemos reformular la **definición de equivalencia diferenciable** de la siguiente manera: [11] *Dos espacios  $M$  y  $N$  son diferencialmente equivalentes si y solo si pertenecen a la misma órbita de la acción izquierda-derecha*



### 2.2.2. Estabilidad

Existen funciones que con pequeñas perturbaciones que se hagan en vecindades alrededor de un punto crítico, el comportamiento cualitativo de dichas funciones cambiará significativamente. Considere una  $C^\infty$ -aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\mathbb{R}$  es cerrado.

**Definición 11.** (*Estabilidad*) [11] se dice que una aplicación es estable (más precisamente diferenciablemente estable de izquierda-derecha), si cada aplicación, lo suficientemente cercana a ella es **diferencialmente equivalente** a la misma. En otras palabras  $f$  es **estable** si su *órbita izquierda-derecha* esta abierta.

**Definición 12.** [4] Dos  $C^\infty$ -aplicaciones  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  son llamadas  $\mathcal{A}$ -equivalentes si hay difeomorfismos  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que<sup>2</sup>

$$\varphi \circ f = g \circ \phi$$

## 3. Singularidades de gérmenes de aplicaciones suaves

### 3.1. Germen de aplicaciones suaves

En esta subsección se darán dos conceptos que serán indispensables en el estudio de la teoría de Catástrofes, los cuales son: Germen y Jet. Daremos inicio con la noción de Germen, para esta parte iniciaremos con la noción para conjuntos, pues gracias a esta es que podemos proceder luego a definir nuestro concepto a manera de aplicación que es lo que utilizaremos fuertemente a lo largo de la monografía.

Sean  $X$  y  $Y$  dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $X$  es equivalente a  $Y$  si existe un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $p$  tal que  $X \cap U = Y \cap U$ . Esto define una relación de equivalencia entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen el punto  $p$ . La clase de equivalencia de un subconjunto  $X$  es llamado el *germen de conjuntos* de  $X$  en  $p$ . [5]

**Definición 13.** (*Germen de aplicaciones*) [5] Sean  $U$  y  $V$  dos subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , y sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  dos funciones suaves. Se dice que  $f \sim_p g$  si existe un conjunto abierto  $W \subset U \cap V$  que contiene a  $p$  tal que  $f = g$  en  $W$ , esto es  $f|_W = g|_W$ .

**Proposición 1.** *La relación  $\sim_p$  es de equivalencia*

---

<sup>2</sup>note que lo anterior define una acción de grupo en germen, concepto que es presentado en la siguiente sección

*Demostración.* Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h : T \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones suaves bajo la relación  $\sim_p$ . Veamos si se satisfacen las propiedades de relación de equivalencia.

**Reflexiva:** Para cada función suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $U$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $p$ , se tiene que  $f \sim_p f$ .

**Simétrica:** Si  $f \sim_p g$ , por definición 12, existe un conjunto abierto  $W \subset U \cap V$  que contiene a  $p$  tal que  $f|_W = g|_W$ , de allí se obtiene que  $g \sim_p f$ .

**Transitiva:** Sean  $W, Z$  conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , supongase que  $f \sim_p g$  y  $g \sim_p h$ , luego por definición existen  $W \subset U \cap V$  y  $Z \subset V \cap T$ , tal que  $f|_W = g|_W$  y  $g|_Z = h|_Z$ . Como  $W \cap Z \neq \emptyset$ , ya que  $p \in W$  y  $p \in Z$ , entonces  $W \cap Z$  es un abierto que contiene a  $W$  y  $Z$ . Así  $f|_{W \cap Z} = g|_{W \cap Z} = h|_{W \cap Z}$ . Por lo tanto,  $f \sim_p h$ .

Por lo tanto,  $\sim_p$  es una relación de equivalencia. □

*Nota 6.* [5] Un germen en  $p$  de una función suave es por definición un representante de una clase de equivalencia bajo esta relación de equivalencia.

*Nota 7.* [5] Una *función de germen* en  $p$  es denotada por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Se denotará por  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un representante de un germen  $f$  en una vecindad  $U$  de  $p$ .

*Nota 8.* [9] Un germen  $\tilde{f}$  en  $x$  es suave o  $C^\infty$  si tiene un representante que es suave en una vecindad de  $x$ .

*Nota 9.* Los germenos se comportan de manera muy similar a las aplicaciones, es por ello que podemos hablar de composiciones de la misma forma que con las aplicaciones, así: Si  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es un germen en  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{g} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un germen en  $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}^p$ , el germen de  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  en  $x$  puede ser definido de una forma natural tomando las clases de equivalencia de la composición de representantes de  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$ .

**Teorema 1. (Teorema de la función inversa)** [1] *Un germen  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$  posee un germen inverso  $\tilde{f}^{-1} : (\mathbb{R}^n, y) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x)$  si y solo si la matriz Jacobiana  $D_f x$  es no singular. Para su demostración ver [8, pág 47]*

**Definición 14. (Rango)** [1] Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es diferenciable,  $U \subset \mathbb{R}^n$ , luego la aplicación  $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{kn} = \{(k \times n) - \text{matrices}\}$ ,  $x \mapsto D_f x$  es diferenciable. El *rango* de  $f$  en  $x$  esta definido como el rango de  $D_f x$  y se denota por  $Rk_x f$

*Nota 10.* Si  $Rk_x f \geq s$ , entonces alguna  $(s \times s)$  - submatriz de  $D_f x$  no tiene determinante nulo, es decir, es regular. Este determinante será distinto en una vecindad de  $x$  ya que  $D_f x$  y el determinante son continuos. Por lo tanto, el rango de  $f$  nunca es menor que  $s$  en una vecindad de  $x$ .

**Teorema 2. (Teorema del rango)** [1] Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$  un germen con rango constante entonces existen germens invertibles  $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  y  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{R}^m, y) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  tal que el germen

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

es representado por la aplicación  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  donde  $k = \text{Rk}_x f$  **Para su demostración ver [1, pág 2]**

**Corolario 1.** [1] Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto, entonces  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es llamada una submersión si  $\text{Rk}_x f = k$  y una inmersión si  $\text{Rk}_x f = n$  para todo  $x \in U$ . Por el teorema del rango una submersión (inmersión) es  $\mathcal{A}$  – equivalente con

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_k) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

con respecto a las coordenadas adecuadas. Su rango no puede volverse más grande y por lo tanto es constante.<sup>3</sup> **Para su demostración ver [7, p. 10-11]**

En este punto hemos trabajado con definiciones, características e incluso propiedades de los *germen de aplicaciones*, de aquí en adelante vamos a definir un conjunto de todos los *germen de aplicaciones suaves* y procederemos a estudiar el comportamiento de dicho conjunto, ya que a partir de ahí, nos encaminaremos al objetivo principal de este trabajo; la clasificación de este tipo de aplicaciones.

**Definición 15.** [5] Se denota por  $\xi_n$  el conjunto de germenes, en el origen  $0 \in \mathbb{R}^n$ , de funciones suaves  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\xi_n = \{ \tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f} \text{ es el germen de una función suave} \}$$

**Nota 11.** El conjunto de funciones suaves de germen  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  esta denotado por

$$\xi_{n,m} = \underbrace{\xi_n \times \dots \times \xi_n}_{m\text{-veces}} = (\xi_n)^m$$

**Definición 16.** [9] Denotamos  $L(n) = \{ \phi \in \xi(n, n) \mid \phi(0) = 0 \text{ y } \phi \text{ no singular en } 0 \}$  por el grupo de germen de difeomorfismos locales de  $\mathbb{R}^n$  de 0 bajo la operación composición.

A continuación, denotese  $\mathcal{R}_n$  el conjunto de germenes invertibles  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  y observe que  $\mathcal{R}_n$  es un grupo bajo la operación de composición.  $\mathcal{R}_n$  actúa en  $\xi_n$  por composición; es decir, se tiene la acción  $\mathcal{R}_n \times \xi_n \rightarrow \xi_n$  dada por  $(g, \tilde{f}) \rightarrow \tilde{f} \circ g^{-1}$ . Note lo siguiente. Escoja un germen  $\tilde{f} \in \xi_n$  y

---

<sup>3</sup>Este resultado es una consecuencia directa de teorema 2

escribase solo  $\mathcal{R} \bullet \tilde{f}$  para la órbita a través de  $\tilde{f}$ . Se pretende que  $\mathcal{R} \bullet \tilde{f}$  sea una "subvariedad suave" de  $\xi_n$  y buscaremos un "subespacio vectorial" de  $\xi_n$  que sea el candidato más razonable a ser espacio tangente a la órbita  $\mathcal{R} \bullet \tilde{f}$  en  $\tilde{f}$ . La aplicación del grupo en la órbita es la aplicación  $\mathcal{R}_n \rightarrow \xi_n$  dada por  $g \rightarrow \tilde{f} \circ g^{-1}$  y se esperaría que el espacio tangente requerido fuera la imagen del "diferencial" (como aplicación) en la identidad 1 de esta aplicación. Observe que el problema ahora es encontrar una fórmula sensata para el diferencial. Tomemos un germen arbitrario  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ; es decir, un vector tangente arbitrario a  $\mathcal{R}_n$  en 1: Los componentes de  $g$  se escribirán  $g_1, \dots, g_n$ . Ahora podemos tratar este germen como el diferencial en 0 de la curva a través de 1 en  $\mathcal{R}$  dada por  $y(t) = 1 + tg$  con  $t$  cerca de 0. Observe que el diferencial con respecto a  $t$  en 0 es dado por la aplicación  $t \rightarrow \tilde{f}(y(t))$ ; esto es,  $\tilde{f}(x_1 + tg_1, \dots, x_n + tg_n)$  y aplicando regla de la cadena se tiene  $g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ . Así el diferencial requerido es la aplicación  $\xi_{n,m} \rightarrow \xi_n$  dado por la fórmula

$$(g_1, \dots, g_n) \rightarrow g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (1)$$

El espacio tangente requerido debe ser la imagen de esta aplicación y esto se puede describir claramente en términos algebraicos.[7]

Para la siguiente parte del desarrollo de la teoría de catástrofes, es indispensable desglosar las propiedades más relevantes que tiene  $\xi_n$ , ya que al dotar a  $\xi_n$  de las operaciones de adición y multiplicación vamos a observar que  $\xi_n$  se convierte en una  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa con unidad; hecho que se mencionará, más no se demostrará ya que pese a que el objetivo de este artículo es mostrar la forma en la que se construye la teoría de catástrofes; profundizar en sus cimientos algebraicos se desarrolló ya tanto en los textos citados como en monografías ya expuestas.

### 3.2. Álgebra de $\xi_n$

**Definición 17.** [9]  $\mathcal{M}_n = \{\tilde{f} \in \xi(n) \mid \tilde{f}(0) = 0\}$

Todos los germenes  $g_1, \dots, g_n$  están centrados en el origen, así que pertenecen al ideal  $\mathcal{M}_n$  en el álgebra de  $\xi_n$  que comprenden todos los germenes centrados en el origen.

**Proposición 2.** [7] *El conjunto  $\xi_n$  es un anillo conmutativo con unidad bajo las operaciones de suma y producto. Para su demostración ver [7, p. 226].*

**Definición 18.** [7] Denotemos por  $\zeta_f$  el ideal en  $\xi_n$  generado por las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  y llamemoslo *ideal jacobiano* de  $f$ .

La imagen de la aplicación lineal (1) es solo el  $\mathcal{M}_n \bullet \zeta_f$ . De esta manera se llega a la conclusión de que un buen candidato para el espacio tangente a la orbita  $\tilde{f}$  es  $\mathcal{M}_n \bullet \zeta_f$

**Definición 19.** [7] Sea  $\tilde{f} \in \xi_n$ . Definimos el espacio tangente a  $\tilde{f}$  como el ideal jacobiano  $\zeta_f$  y definimos la *codimensión*  $\text{cod}\tilde{f}$  de  $\tilde{f}$  como la codimensión del espacio tangente  $\zeta_f$  en  $\xi_n$ , es decir

$$\text{cod}\tilde{f} = \dim \xi_n / \zeta_f$$

Si la  $\text{cod}\tilde{f}$  es finita, decimos que  $\tilde{f}$  es de codimensión finita; de lo contrario  $\tilde{f}$  es de codimensión infinita. En el desarrollo de la teoría necesitaremos saber cómo decidir si un germen  $\tilde{f}$  es o no de codimensión finita y si lo es, cómo calcular la codimensión.

**Teorema 3.**  $\mathcal{M}_n$  es el único ideal máximo en  $\xi_n$ . *Para su demostración ver [7, p. 99]*

**Teorema 4. (Lema de Hadaman)**[7] Sea  $U$  un entorno convexo de 0 en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f$  una función suave definida en  $U \times \mathbb{R}^q$  que se anula en  $0 \times \mathbb{R}^q$ : existen funciones suaves  $f_1, \dots, f_n$  en  $U \times \mathbb{R}^q$  con

$$f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$$

donde  $x_1, \dots, x_n$  son las funciones de coordenadas estándar en  $\mathbb{R}^n$  *Para su demostración ver [7, p. 100].*

Generalizando, el ideal maximal  $\mathcal{M}_n$ , dado  $k$  un entero positivo, la  $k$ -ésima potencia de  $\mathcal{M}_n$  denotada por  $\mathcal{M}_n^k$ , indica el conjunto de aplicaciones de germen  $\tilde{f} \in \mathcal{M}_n^k$  que se anulan en la  $k-1$  derivada parcial en el origen.

**Definición 20.** [9] Se denota por  $\mathcal{M}_n^k$  el conjunto de aquellos germenos que se anulan en 0 junto con sus derivadas de orden menor que  $k$ . Es decir,<sup>4</sup>

$$\mathcal{M}_n^k = \{\tilde{f} \in \mathcal{M}_n / J_0^{k-1}(x) = 0, \forall f \in \tilde{f}\}$$

**Teorema 5.** [11]  $\zeta_k = \mathcal{M}_n^k$ , y es generado por (los germenos en 0) de los monomios en  $x_1, \dots, x_n$  de grado  $\leq k$ . *Para su demostración ver [7, p. 100-101].*

**Definición 21. (Polinomio de Taylor)** [6] Sean  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase

---

<sup>4</sup>la notación  $J_0^{k-1}(x)$  se usa para referirse a los jets de germenos, termino que se explica con claridad en la pagina siguiente

$C^{k+1}$  en  $A$  y  $x_0 \in A$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{f} = & f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(x_0) h_{j_1} + \frac{1}{2!} \sum_{j_1, j_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(x_0) h_{j_1} h_{j_2} + \dots \\ & + \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x_0) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_k} \\ & + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_{k+1}}}((x_0 + \theta h) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_{k+1}}), \end{aligned}$$

siendo  $h = x - x_0 = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  y  $\theta \in (0, 1)$  un número que depende de  $x$ .

Nuestro interés en los gérmenes de aplicaciones se centra en asociar una representación en serie de Taylor. Denotemos por  $\hat{\xi}_n$  es el conjunto de series formales de Taylor en varias variables en el origen, de aquí se produce la aplicación

$$\gamma : \xi_n \longrightarrow \hat{\xi}_n$$

dada por

$$f \longmapsto \hat{f}$$

**Teorema 6. (Lema de Borel)[7]** El homomorfismo  $\gamma : \xi_n \longrightarrow \hat{\xi}_n$  dado por  $f \longmapsto \hat{f}$  es sobreyectivo. Para su demostración ver [7, p. 101-102].

Ahora, dada una  $C^s$ -aplicación local  $f = (f_1, \dots, f_p) : R^n \rightarrow R^p$  con  $f(0) = 0$ , podemos expandir cada  $f_i$  en un desarrollo de Taylor alrededor del origen. Si omitimos todos los términos de grado  $\geq r + 1$  ( $r < s$ ), que aproxima a  $f$ . Tal  $p$ -tupla se le denomina  $r$ -jet que depende de la elección de un sistema de coordenada. Ahora se dará la definición pero en la cual el  $r$ -jet no dependerá de la elección del sistema de coordenadas. [9]

**Definición 22. (Jet)** [9] Sea  $C^s(n, p)$  el conjunto de todos los mapeos  $s$ -veces diferenciables  $f = (f_1, \dots, f_p) : R^n \rightarrow R^p$ , con  $f(0) = 0$ . Llamamos  $f, g \in C^s(n, p)$  *equivalente de orden  $r$*  en 0, si en  $0 \in R^n$ , su desarrollo de Taylor hasta incluir los términos de grado  $\leq r$  son idénticos. El  $r$ -jet de  $f$ , denotado por  $J^r(f)$  es la clase de equivalencia de  $f$ ; y  $f$  es llamada la realización del jet  $J^r(f)$ .

El conjunto de todos los  $r$ -jets es denotado por  $J^r_{(n,p)}$ . Tomando los valores de las derivadas parciales en 0 como las coordenadas de un jet,  $J^r_{(n,p)}$  se convierte en un espacio vectorial real. Así un  $r$ -jet puede ser realizado por un conjunto de polinomios truncados de grado  $\leq r$  o por una  $N$ -tupla,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  para algún  $N$ , en el espacio euclidiano  $J^r_{(n,p)}$ .

Para un  $C^s$  mapeo  $f : U \rightarrow R^p$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $R^n$ ,  $f(0) = 0$ , la  $r$ -extensión de  $f$

$$J^r(f) : U \rightarrow J_{(n,p)}^r$$

esta definida como sigue: para  $x_0 \in U$ , traslademos los orígenes de  $R^n$  y  $R^p$  a  $x_0$  y  $f(x_0)$  respectivamente, entonces  $J_{x_0}^r(x)$  es la expansión de Taylor de  $f$  en  $x_0$  hasta e incluyendo los términos de grado  $\leq r$

*Ejemplo 2.* Sea  $f : R^2 \rightarrow R$ , definida por

$$f(x, y) = xe^y + 3xy^4$$

Determinar el  $J_{x_0}^3(x, y)$   $x_0 = (0, 0)$

Se tiene que

$$J_{x_0}^3(x, y) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left( x \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x_0)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left( x^2 \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial y^2} \right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{3!} \left( x^3 \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^3} + 3x^2y \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial y^3} \right)$$

Calculamos

$f(x, y)$	$=$	$xe^y + 3xy^4$	;	$f(x_0)$	$=$	$0$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$	$=$	$e^y + 3y^4$	;	$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$	$=$	$1$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$	$=$	$xe^y + 12xy^3$	;	$\frac{\partial f(x_0)}{\partial y}$	$=$	$0$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$	$=$	$0$	;	$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$	$=$	$0$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$	$=$	$e^y + 12y$	;	$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x \partial y}$	$=$	$1$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$	$=$	$xe^y + 36xy^2$	;	$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial y^2}$	$=$	$0$
$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}$	$=$	$0$	;	$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^3}$	$=$	$0$
$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y}$	$=$	$0$	;	$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2 \partial y}$	$=$	$0$
$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2}$	$=$	$e^y + 12y$	;	$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x \partial y^2}$	$=$	$1$
$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}$	$=$	$xe^y + 72xy$	;	$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial y^3}$	$=$	$0$

Luego reemplazando;

$$J_{x_0}^3(x, y) = 0 + \frac{1}{1!}(x(1) + y(0)) + \frac{1}{2!}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0))$$

$$+ \frac{1}{3!}(x^3(0) + 3x^2y(0) + 3xy^2(1) + y^3(0))$$

$$= x + xy + \frac{1}{2}xy^2$$

**Teorema 7. (Lema de Nakayama)[7]** Sea  $\xi$  un anillo conmutativo con elemento identidad 1, y sea  $\mathcal{M}$  un ideal en  $\xi$  con la propiedad que  $1 + x$  es invertible en  $\xi$  para cualquier  $x \in \mathcal{M}$ . Además, sea  $\mathbb{M}$  un  $\xi$ -módulo y sea  $A, B$   $\xi$ -submódulos con  $A$  finitamente generado. Si  $A \subseteq B + \mathbb{M} \bullet A$  entonces  $A \subseteq B$  **Para su demostración ver [7, p. 102-103-104].**

**Teorema 8. [7]** Bajo el anillo  $\xi$  del teorema 7 se denota por  $I$  la matriz invertible de dicho anillo, ahora sea  $\mathbb{M}$  un  $\xi$ -módulo finitamente generado y sea  $I \subseteq \mathbb{M}$  un  $\xi$ -submódulo. Una  $I$  es de codimensión finita en  $\mathbb{M}$  si y solo si existe un entero  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I$

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Suponga que existe un entero  $k \geq 1$  para el cual  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I$ . Entonces

$$\dim \mathbb{M}/I \leq \dim \mathbb{M}/\mathcal{M}^k \mathbb{M}$$

Note que gracias a  $I$  se tiene que  $\mathbb{M}/\mathcal{M}^k \mathbb{M}$  es de dimensión finita. Como  $\mathbb{M}$  tiene una base finita podemos suponer  $\mathbb{M} = \xi^s$  para algún entero  $s \leq 1$ . Ahora  $\xi^s/\mathcal{M}^k$  es un isomorfismo con el producto  $\xi/\mathcal{M}^k \times \dots \times \xi/\mathcal{M}^k$  con  $s$  factores, y como ya se ha visto cada factor en este producto es de dimensión finita, así que el producto también lo es. De ahí que  $\dim \mathbb{M}/I < \infty$  por lo que  $I$  tiene codimensión finita en  $\mathbb{M}$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos  $I$  es de codimensión finita en  $\mathbb{M}$  considere la secuencia descendente de  $\xi$ -submódulos

$$I + \mathcal{M}^0 \bullet \mathbb{M} \supseteq I + \mathcal{M}^1 \bullet \mathbb{M} \supseteq \dots \supseteq I$$

Claramente, cada inclusión directa en esta secuencia hace una contribución  $\geq 1$  a la codimensión de  $I$ . Dado que la codimensión es finita, las inclusiones, de algún punto en adelante, deben ser todas iguales. En particular existe un entero  $k \geq 1$  para el cual

$$I + \mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} = I + \mathcal{M}^{k+1} \bullet \mathbb{M}$$

lo cual implica que  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I + \mathbb{M} \bullet (\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M})$ . Dado que  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M}$  es generado finitamente, del **lema de Nakayama 7** se tiene que  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I$  □

*Nota 12.* Manteniendo la notación y del teorema anterior tenemos entonces que

$$\text{cod}_k I = \dim \frac{I + \mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M}}{I + \mathcal{M}^{k+1} \bullet \mathbb{M}}$$

**Teorema 9. [7]** Bajo la hipótesis del teorema 8  $I \subseteq \mathbb{M}$  es de codimensión finita en  $\mathbb{M}$  si y solo si todos menos un número finito de las  $\text{cod}_k I$  se desvanecen y en ese caso:

$$\text{cod} I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots$$



*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Suponga que  $I$  tiene codimensión finita en  $\mathbb{M}$ , por **teorema 8** existe un entero  $k \geq 1$  con  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I$ . Eso implica  $\text{cod}_j I = 0$  para todo  $j \geq k$

$\Leftarrow$ ) Si  $\text{cod}_k I = 0$  entonces  $I + \mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} = I + \mathcal{M}^{k+1} \bullet \mathbb{M}$  así que  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I + \mathcal{M}^{k+1} \bullet \mathbb{M}$  lo que implica  $\mathcal{M}^k \bullet \mathbb{M} \subseteq I$  por el **lema de Nakayama 7**; es decir,  $I$  es de codimensión finita en  $\mathbb{M}$ . La segunda parte del enunciado se sigue inmediatamente de la demostración del **teorema 8**  $\square$

Ampliando un poco el tipo de situación que tenemos, observe lo siguiente; tomemos un germen  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \gamma) \in \xi_{(n,m)}$ . Tal germen tiene componentes  $f_1, \dots, f_m$  en  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  cada una de las cuales se encuentra en  $\xi_n$  y observe que así podemos pensar en  $\xi_{(n,m)}$  como un  $\xi_n$ -módulo  $\mathbb{M}$  con una base finita. En la práctica se pensará en  $I$  como el espacio tangente a un germen  $f$ ; por ejemplo en el caso  $m = 1$  estemos pensando en  $I = \zeta_f$ , el **el ideal jacobiano** asociado a la germen-aplicación  $f$ . Se debe tener en cuenta unos aspectos para calcular la dimensión  $\xi_{(n,m)}/I$ , tal y como lo son los siguientes: Denotemos  $\hat{\xi}_{(n,m)} = \hat{\xi}_n \times \dots \times \hat{\xi}_n$  con  $m$  factores. El **epimorfismo**<sup>5</sup>  $\xi_n \rightarrow \hat{\xi}_n$  del **Lema de Borel 6** da lugar a una aplicación lineal sobreyectiva  $\xi_{(n,m)} \rightarrow \hat{\xi}_{(n,m)}$  que aplica  $I$  a  $\hat{I}$ , de esto se tiene lo siguiente

**Teorema 10.** [7]  $I$  es de codimensión finita en  $\xi_{(n,m)}$  sí y solo si  $\hat{I}$  es de codimensión finita en  $\hat{\xi}_{(n,p)}$  y en ese caso las dos dimensiones coinciden

*Demostración.* Considere la composición de las aplicaciones lineales sobreyectivas  $\xi_{(n,m)} \rightarrow \hat{\xi}_{(n,m)} \rightarrow \hat{\xi}_{(n,m)}/\hat{I}$ , siendo el segundo la proyección natural sobre el cociente. Note que el kernel acá es  $I + \mathcal{M}_n^\infty$ , de modo que

$$\frac{\xi_{(n,m)}}{I + \mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)}} \cong \frac{\hat{\xi}_{(n,m)}}{\hat{I}}$$

$\Rightarrow$ ) Si  $I$  tiene codimensión finita en  $\xi_{(n,m)}$ , entonces también la tiene  $I + \mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)}$  y por lo tanto  $\hat{I}$  tiene codimensión finita en  $\hat{\xi}_{(n,m)}$  por el isomorfismo visto

$\Leftarrow$ ) Si  $\hat{I}$  tiene codimensión finita en  $\hat{\xi}_{(n,m)}$ , entonces  $I + \mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)}$  tiene codimensión finita en  $\xi_{(n,m)}$  por el isomorfismo visto. Del **teorema 9** se sigue que existe un entero  $k \geq 1$  con

$$\mathcal{M}_n^k \bullet \xi_{(n,m)} \subseteq I + \mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)} \subseteq I + \mathcal{M}_n^{k+1} \bullet \xi_{(n,m)}$$

El **Lema de Nakayama 7** nos dice que tenemos  $\mathcal{M}_n^k \bullet \xi_{(n,m)} \subseteq I$  y por el **teorema 9** que  $I$  tiene codimensión finita en  $\xi_{(n,m)}$ . Finalmente, cuando  $I$  tiene codimensión finita en  $\xi_{(n,m)}$  la relación  $\mathcal{M}_n^k \bullet \xi_{(n,m)} \subseteq I$  nos dice que  $\mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)} \subseteq I$  así que  $I + \mathcal{M}_n^\infty \bullet \xi_{(n,m)} = I$  y el isomorfismo mostrado nos establece

$$\xi_{(n,m)}/I \cong \hat{\xi}_{(n,m)}/\hat{I}$$

llegando así a lo deseado  $\square$

---

<sup>5</sup>homomorfismo sobreyectivo

El **Teorema 10** nos da la herramienta necesaria para garantizar que al calcular la codimensión de  $I$  en  $\xi_{(n,m)}$  podemos y debemos reemplazar todos nuestros germens por su *serie de Taylor* y manejarlos como series de potencias, que son más sencillas de trabajar en la practica

**Teorema 11.** [7] *Suponga  $\tilde{f} \in \xi_n$ ,  $\tilde{f}$  tiene codimensión finita positiva. Entonces el origen en  $\mathbb{R}^n$  es un punto singular aislado de cualquier representante de  $\tilde{f}$ ; es decir, existe una vecindad del origen, en la que el origen es el único punto singular del representante*

*Demostración.* Observe primero que  $0 \in \mathbb{R}^n$ , en efecto debe ser un punto singular de (cualquier representante) de  $\tilde{f}$ . De hecho, si algunos  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0) \neq 0$  entonces  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$  será un elemento invertible de  $\xi_n$ , por el **teorema 1**, entonces  $\zeta_f = \xi_n$ , y  $\tilde{f}$  tendrá codimensión cero. Ya que  $\tilde{f}$  tiene codimensión finita tendremos  $\mathcal{M}_n^k \subseteq \zeta_f$  para algún entero  $k \geq 1$  por el **lema de nakayama 7**. En particular, esto significa que los monomios  $x_1^k, \dots, x_n^k$  se pueden escribir como combinación lineal de  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}$  con coeficientes en  $\xi_n$ . En un punto singular de  $\tilde{f}$  todas estas derivadas parciales deben desaparecer, entonces  $x_1^k, \dots, x_n^k$  debe desaparecer también; es decir, el punto singular en cuestión es 0  $\square$

Para el cálculo real de la codimensión procedemos de la siguiente manera. Supongamos que  $f$  es de codimensión finita. La idea es calcular  $cod f$  usando el **teorema 8**. Abreviemos  $cod_k \zeta_f$  a  $cod_k f$ . Sabemos que

$$cod f = cod_0 f + cod_1 f + \dots$$

así debemos calcular sucesivamente  $cod_0 f, cod_1 f$  hasta llegar a una respuesta cero, y luego sumamos la lista de números enteros así obtenidos. Para calcular  $cod_k f$  tenemos que encontrar una base para un suplemente de  $\zeta_f + \mathcal{M}^{k+1}$  en  $\zeta_f + \mathcal{M}^k$ . Esto se puede obtener de una lista de monomios de grado  $k$  en las  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , que no se encuentran en  $\zeta_f + \mathcal{M}^{k+1}$ . El primer paso en este cálculo siempre es trivial, ya que  $cod_0 f = dim \xi_n / \mathcal{M}_n = 1$ . En la practica se toma sucesivamente  $k = 1, 2, 3, \dots$ ; y para cada  $k$  se debe decidir, para cada monomio de grado  $k$  en  $x_1, \dots, x_n$  si se encuentra en el ideal  $\zeta_f + \mathcal{M}^{k+1}$ . Note que si esta condición se cumple para algún monomio  $m$ , automáticamente se cumple para todos sus descendientes; es decir, los monomios que se pueden obtener de  $m$  multiplicándolo por algún otro monomio

*Ejemplo 3.* Calcularemos la codimensión del germen  $f(x, y) = x^2 y + y^4$ , que aparecerá más adelante como el llamado **ombbligo parabólico**. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 4y^3$$

desaparecen simultáneamente (incluso en el caso complejo) solo en el origen, por lo que  $f$  debería tener una codimensión finita. Escribimos la matriz de monomios en  $x, y$ . Ninguno de  $x, y$  se encuentra

en  $\zeta_f + \mathcal{M}^2$ . De  $x^2, xy, y^2$  los dos primeros ciertamente se encuentran en  $\zeta_f + \mathcal{M}^4$ ; aquí

$$x^2 = \frac{\partial f}{\partial x} - 4y^3, \quad xy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}$$

pero  $y^2$  no está; así se subraya  $x^2, xy$  y todos los descendientes en la matriz, a saber  $x^3, x^2y, xy^2$  en la tercera fila, y  $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$  en la cuarta fila y así sucesivamente. De los monomios de grado 3 solo es necesario considerar  $y^3$ , y no se encuentra en  $\zeta_f + \mathcal{M}^4$ . Y de los monomios de grado 4 solo es necesario considerar  $y^4$  y este se encuentra en  $\zeta_f + \mathcal{M}^5$  como

$$y^4 = \frac{1}{4} y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{8} x \frac{\partial f}{\partial x}$$

Así todos los monomios de grado 4 están en  $\zeta_f + \mathcal{M}^4$  y el cálculo está terminado.

$$\begin{array}{cccccc} & & x & & y & & \\ & & x^2 & & xy & & y^2 \\ & & \underline{x^3} & & \underline{x^2y} & & \underline{xy^2} & & y^3 \\ \underline{x^4} & & \underline{x^3y} & & \underline{x^2y^2} & & \underline{xy^3} & & \underline{y^4} \\ \underline{x^5} & & \underline{x^4y} & & \underline{x^3y^2} & & \underline{x^2y^3} & & \underline{xy^4} & & \underline{y^5} \end{array}$$

La codimensión es el número total de monomios que no han sido subrayados (es decir  $x, y, y^2, y^3$ ) más uno, por lo que  $\text{cod}f = 5$ , acá cabe mencionar que se demostró que  $\mathcal{M}^4 \subseteq \zeta_f + \mathcal{M}^5$  y por tanto que  $\mathcal{M}^4 \subseteq \zeta_f$  por el **lema de nakayama 7**.

*Nota 13.* Un germen posee la propiedad de ser invariante bajo la  $\sim_p$ . Dado un germen  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  se tiene un aplicación  $f^* : \xi_n \rightarrow \xi_n$  por la fórmula  $\lambda \rightarrow \lambda \circ f$ . Se evidencia que  $f^*$  es un homomorfismo algebraico.

**Lema 1.** [7] Sea  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  un germen,  $f^* : \xi_n \rightarrow \xi_n$  es un isomorfismo si y solo si  $f$  es invertible **Para su demostración ver [7, p. 113-114]**

**Teorema 12.** [7] Si los germenos  $f, g$  en  $\xi_n$  son equivalentes entonces  $\text{cod}f = \text{cod}g$

*Demostración.* ya que  $f, g$  son equivalentes, existe un germen invertible  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para el cual  $g = f \circ h$ . Por **lema 1**  $h$  induce un isomorfismo  $h^* : \xi_n \rightarrow \xi_n$  de álgebras. Note que  $h^*\zeta_f = \zeta_g$  eso implicará que los espacios cocientes  $\xi_n/\zeta_f, \xi_n/\zeta_g$  son isomorfos. Ahora por cuenta de la regla de la cadena

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n h^* \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}$$

así que  $\zeta_g \subseteq h^*\zeta_f$ . Un razonamiento análogo muestra que  $\zeta_f \subseteq (h^{-1})^*\zeta_g = (h^*)^{-1}\zeta_g$  dando la inclusión reversa  $h^*\zeta_f \subseteq \zeta_g$  □

**Teorema 13.** [7] *El ideal  $\mathcal{M}\zeta_f$  tiene codimensión finita si y solo si  $\zeta_f$  tiene codimensión finita*

*Demostración.*  $\mathcal{M}\zeta_f \subseteq \zeta_f$ , por lo que ciertamente si  $\mathcal{M}\zeta_f$  tiene codimensión finita entonces  $\zeta_f$  tiene codimensión finita. Por el contrario, supongamos  $\zeta_f$  tiene codimensión finita, así que  $\mathcal{M}^k \subseteq \zeta_f$  para algún entero  $k \geq 1$  por **teorema 8**. Pero entonces  $\mathcal{M}^{k1} \subseteq \mathcal{M}\zeta_f$  así que nuevamente por **teorema 8** vemos que  $\mathcal{M}\zeta_f$  tiene codimensión finita  $\square$

**Teorema 14.** [7] *Sea  $f \in \xi_n$ , y supongamos que uno (por lo tanto ambos) de  $\zeta_f, \mathcal{M}\zeta_f$  tiene codimensión finita positiva, entonces se tiene que:*

$$\text{cod}\mathcal{M}\zeta_f = n + \text{cod}\zeta_f$$

*Demostración.* Observemos primero que  $\zeta_f$  es la suma vectorial de los subespacios vectoriales  $\mathcal{M}\zeta_f$  y  $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ , donde los corchetes indican el subespacio vectorial de  $\xi_n$  generado por las primeras derivadas parciales. De hecho un elemento de  $\zeta_f$  tiene la forma  $u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$  con  $u_i \in \xi_n$ ; y note que  $u_i(x) = (u_i(x) - u_i(0)) + u_i(0)$ . A continuación afirmamos que no es posible encontrar germens  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \xi_n$  con al menos un  $\varepsilon(0) \neq 0$  para el cual  $\sum \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ . Para probar esto conviene usar los germens con sus representantes. Pensemos en  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  como los componentes de un campo vectorial  $\Xi$  en una vecindad de 0 en  $\mathbb{R}^n$  con  $\Xi(0) \neq 0$ . Note que podemos encontrar un difeomorfismo  $h$  de una vecindad de 0 en  $\mathbb{R}^n$  con  $h(0) = 0$  para el cual  $\varepsilon_i \circ h = \frac{\partial h_i}{\partial x_i}$ , donde  $h_1, \dots, h_n$  son los componentes de  $h$ . Observe ahora que  $g = f \circ h$  es un germen en  $\xi_n$  equivalente a  $f$ , así también de codimensión positiva finita. Denotemos  $b = h(a)$ , entonces  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) = \sum \varepsilon_i(b) \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) = 0$  así que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  es idénticamente cero en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^n$ ; es decir,  $g$  es independiente de la variable  $x_1$ , por el **teorema 11**, el origen 0 es un punto singular para  $g$ , de modo que cada punto cercano a 0 en el eje  $x$  es un punto singular para  $g$ , y  $g$  tiene codimensión infinita. Esta contradicción establece nuestra afirmación. Ahora para finalizar, tomando  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  para ser números reales, vemos que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  son linealmente independientes sobre los reales, y por lo tanto que el subespacio vectorial  $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$  tiene dimensión  $n$ . Además de lo anterior se sigue inmediatamente que la suma vectorial de  $\mathcal{M}\zeta_f$  y  $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$  es directa; es decir, que la intersección en el subespacio trivial.  $\square$

**Definición 23.** [9] Sea  $\tilde{f} \in \mathcal{M}_n$  y sea  $k$  un entero no negativo. Entonces  $\tilde{f}$  es denominado  $k$ -determinado si para todo  $\tilde{g} \in \mathcal{M}_n$  tal que  $J^k(\tilde{f}) = J^k(\tilde{g})$  entonces  $\tilde{f} \sim \tilde{g}$

**Lema 2.** [7] *Sea  $f \in \xi_n$  tal que  $\mathcal{M}^k \subseteq \mathcal{M}\zeta_f$ , entonces  $f$  es  $k$ -determinado. Para su demostración ver [7, p. 117]*

## 4. Clasificación de germen es de codimensión $\leq 5$

Teniendo en cuenta que ya hemos desarrollado las herramientas algebraicas suficientes, a continuación procederemos a realizar una clasificación de germen es centrados en el origen por su codimensión, lo cual es uno de los objetivos centrales de este artículo.

**Teorema 15.** [7] *Un germen  $f \in \xi_n$  tiene codimensión 0 si y solo si es no singular<sup>6</sup>*

*Demostración.* Si  $\text{cod } f = 0$ , se tiene que  $\zeta_f = \xi_n$ . Supongamos que  $f$  es singular, entonces las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  serían elementos de  $\mathcal{M}_n$ , luego  $\zeta_f \subseteq \mathcal{M}_n$ , que contradice la hipótesis, por lo tanto  $f$  es no singular. Si  $f$  es un germen no singular, por definición alguna derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$ . Luego por el **teorema 1**  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es invertible, y así  $\zeta_f = \xi_n$ . Por lo tanto,  $\text{cod } f = 0$   $\square$

**Teorema 16.** [7] *Un germen no singular  $f \in \xi_n$  es equivalente al germen  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1$ <sup>7</sup>*

Ahora se consideraran los germen es de codimensión 1. Recordemos que se dice que un germen  $f \in \mathcal{M}_n^2$  es no degenerado cuando la matriz Hessiana es no singular.

**Definición 24.** [9] Una función suave es una **función de Morse** si todos sus puntos singulares son puntos críticos no degenerados.

**Teorema 17.** [7]  *$f \in \mathcal{M}_n^2$  es no degenerada si y solo si  $\mathcal{M} = \zeta_f$*

*Nota 14.* Notesé que  $\zeta_f \subseteq \mathcal{M}$  automáticamente ya que todos los  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{Q}$  el segundo polinomio de  $f$ , el cual es solo una forma cuadrática en  $x_1, \dots, x_n$ . No degenerado en  $f$  tiene el mismo significado que no degenerado de una forma cuadrática de  $\mathcal{Q}$ , lo cual equivale a decir que  $\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_i}$  abarca todo el espacio vectorial de todos los polinomios lineales en  $x_1, \dots, x_n$ . Como  $\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  modulo  $\mathcal{M}^2$ , esta última condición es equivalente a que  $\mathcal{M} = \zeta_f + \mathcal{M}^2$ , que a su vez será equivalente a  $\mathcal{M} = \zeta_f$ , por el **lema de nakayama 7**  $\square$

Veamos ahora un resultado importante de la teoría de Morse, el cual nos permitirá deducir el comportamiento de una función en una vecindad de un punto crítico no degenerado.

**Teorema 18.** [10] *Si  $f$  es una forma cuadrática de germen es en  $n$  variables con coeficientes en  $\mathbb{R}$  entonces existe un cambio lineal de coordenadas  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:*

$$f \circ \rho(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2$$

---

<sup>6</sup>no singular se refiere a la **definición 5**

<sup>7</sup>note que este resultado es consecuencia del corolario 1

Para su demostración ver [10, p. 375-380]

**Teorema 19. (Lema de Morse)** [7] Un germen  $f \in \mathcal{M}_n^2$  es de codimensión 1 si y solo si es no degenerado, y en este caso  $f$  será equivalente a un germen de la forma

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_n^2 \quad (2)$$

*Demostración.* Supongasé que  $f$  es no degenerada, por **teorema 14**, se tiene que  $\zeta_f = \mathcal{M}$ . Entonces  $\text{codim} f = \dim \xi_n / \zeta_f = \dim \xi_n / \mathcal{M} = 1$ . Recíprocamente, supongasé que  $f$  tiene codimensión 1, por definición  $\dim \xi_n / \mathcal{M} = 1$ . Y si  $\zeta_f \subset \mathcal{M}$  entonces  $\dim \xi_n / \zeta_f > f$ , es decir  $\text{codim} f > 1$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. Así  $\zeta_f = \mathcal{M}$ , y por **teorema 14**,  $f$  es no degenerada.

Ahora veamos que  $f$  es equivalente a la forma normal (2). Como  $f$  es no degenerada es equivalente a  $\mathcal{M}_{\zeta_f}$ , lo cual implica que  $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{M}_{\zeta_f}$ . Se tiene, por el **lema 2**, que  $f$  es 2-determinado equivalente a su 2-jet. Ahora, por **teorema 18**,  $\mathcal{Q}$  siendo una forma cuadrática no degenerada, es equivalente a la forma normal

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

donde  $s$  es el índice de  $\mathcal{Q}$ . □

Para pasar a la clasificación de germenos de codimensión  $\geq 2$ , necesitaremos de la siguiente definición.

**Definición 25. (Co-rango)**[7] Supongasé que  $f \in \mathcal{M}_n^2$  tiene codimensión  $\geq 2$ . Ciertamente su matriz Hessiana  $H_f$  es singular, así tiene rango  $r < n$ , el entero no negativo  $c = n - r$  es llamado el corango de  $f$ .

**Definición 26. ( $k$ -equivalencia)**[7] Dos germenos  $f, g \in \xi_n$  son  $k$ -equivalentes si existe un germen de difeomorfismo  $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , para el cual  $f \circ \phi, g$  tienen el mismo  $k$ -jet, esto es

$$J_0^k(f \circ \phi) = J_0^k g$$

**Teorema 20. (Lema de separación)** [7] Sea  $f \in \mathcal{M}_n$  un germen finitamente determinado de co-rango  $c$ ;  $f$  es equivalente al germen

$$g(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 \quad (3)$$

donde  $g \in \mathcal{M}_c^3$  y cada  $\delta_i = \pm 1$ .

*Demostración.* Para esta demostraciones tomaremos la siguiente notación: Dos gérmenes  $\phi, \varphi \in \xi_n$  son  $k$ -equivalentes como  $\phi \sim_k \varphi$ . Observé que  $\sim_k$  es una relación de equivalencia.

Vamos a demostrar por inducción sobre  $k$  que, existe un germen  $g_k \in \mathcal{M}_c^3$ , el cual es polinomio de grado  $\leq k$ , para el cual

$$f \sim_k g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 \quad (4)$$

Esto será suficiente para probar el resultado ya que existe un  $k$  para el cual  $f$  es equivalente a su  $k$ -jet. Veamos el caso base de la inducción  $k = 2$ . El 2-jet de  $f$  es una forma cuadrática en  $n$  variables con rango  $r = n - c$ , por **teorema 18**, existe un cambio de coordenadas lineales que hace que  $f$  sea equivalente a una forma cuadrática

$$\delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 \quad \text{con } \delta_i = \pm 1$$

Tomando  $g_2$ , quedará probado. Para el paso inductivo; asumimos cierto (4), entonces

$$f \sim_{k+1} g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 + H(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

donde  $H(x_1, \dots, x_n)$  es un polinomio homogéneo de grado  $(k + 1)$ . Ahora podemos escribir

$$H(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_c) + x_{c+1}H_{c+1}(x_1, \dots, x_n) + \cdots + x_n H_n(x_1, \dots, x_n)$$

donde  $h$  es un polinomio homogéneo de grado  $(k + 1)$  y  $H_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $k$  para  $i = c + 1, \dots, n$ . Sustituyendo la expresión de  $H$  en 5, se tiene

$$f \sim_{k+1} g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 + x_{c+1}H_{c+1}(x_1, \dots, x_n) + \cdots + x_n H_n(x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

Usamos estos últimos polinomios para definir el siguiente germen.

Definimos el germen  $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , cuyas componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \\ &\vdots \\ \phi_c(x_1, \dots, x_n) &= x_c \\ \phi_{c+1}(x_1, \dots, x_n) &= x_{c+1} - \frac{1}{2\delta_{c+1}} H_{c+1}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) &= x_n - \frac{1}{2\delta_n} H_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Note que la *matriz Jacobiana* de  $\phi$  es la matriz identidad  $n \times n$ , así  $\phi$  es invertible. Componiendo  $\phi$  con el germen que aparece en 6, se obtiene

$$\begin{aligned} f \sim_{k+1} g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}\phi_{c+1}(x)^2 + \cdots + \delta_n \phi_n(x)^2 \\ \phi_{c+1}(x)H_{c+1}(\phi(x)) + \cdots + \phi_n(x)H_n(\phi(x)) \end{aligned}$$

Cada uno de estos sumandos se puede escribir como

$$\begin{aligned}\delta_i \phi_i(x)^2 &= \delta_i \left( x_i - \frac{1}{2\delta_i} H_i(x) \right)^2 = \delta_i x_i^2 - x_i H_i(x) + s(x), \\ \phi_i(x) H_i(\phi(x)) &= \left( x_i - \frac{1}{2\delta_i} H_i(x) \right) H_i(\phi(x)) = x_i H_i(x) + t(x),\end{aligned}$$

para  $i = x + 1, \dots, n$ , donde  $s(x)$ ,  $t(x)$  contiene los términos de orden mayor que  $(k + 1)$ . Como la relación de equivalencia  $\sim_{k+1}$  nos permite olvidarnos de los términos de grado mayor que  $(k + 1)$ , y al sustituir las expresiones anteriores obtenemos que

$$f \sim_{k+1} g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2$$

donde  $g_{k+1} = g_k + h$ . Concluyendo así nuestra demostración por inducción, y obteniendo el resultado deseado.  $\square$

*Nota 15.* Los gérmenes  $f, g$  del enunciado del *Lema de Separación (20)* son necesariamente de la misma codimensión.

Una aplicación del **lema de Separación (20)** es establecer una conexión amplia entre co-rango y la codimensión de un germen.

**Teorema 21.** [2] Si  $f \in \mathcal{M}_n^2$  un germen singular de co-rango 1 y codimensión  $\geq 2$ , entonces  $f$  es equivalente

$$\pm x_1^{k+1} + Q, \quad Q = \sum_{i=2}^n \delta_i x_i^2 \quad (\delta_i = \pm 1)$$

*Demostración.* Por el **lema de separación (20)** se tiene que  $f$  puede ser expresada como

$$f(x) = g(x_1) \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

con  $g \in \mathcal{M}_1^3$  un germen de codimensión  $k$ . Existe un cambio de coordenada en  $\mathbb{R}$ ,  $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  tal que  $g(\phi(x_1)) = \pm x_1^{k+1}$ . Tomando el cambio de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  dado por  $\varphi(x) = (\phi(x_1), x_2, \dots, x_n)$  se tiene que

$$f(\varphi(x)) = \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

$\square$

**Definición 27.** (*Germen de tipo  $A_k$* ) [7][2] Un germen singular  $f$  de **co-rango 1** y **codimensión  $k \geq 2$**  se le denomina *germen de tipo  $A_k$* .



**Teorema 22.** [7] Sea  $f \in \mathcal{M}_n^2$  un germen de codimensión finita, y corango  $c$ : la codimensión de  $f$  es  $\geq \frac{c(c+1)}{2} + 1$

*Demostración.* Por el lema de separación (20), podemos suponer  $f(x) = g(x_1, \dots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$ , donde  $g \in \mathcal{M}_c^3$ . Observe que, por el hecho mencionado e Nota 15,  $f$  tiene la misma codimensión que  $g$  ( $\text{cod} f = \text{cod} g$ ).

Tomemos  $I = \mathcal{M}_c \zeta_g$ , como  $g \in \mathcal{M}_c^3$ , entonces  $I = \mathcal{M}_c \zeta_g \subseteq \mathcal{M}_c^3$ . Ahora, por **teorema 9**, se tiene que

$$\text{cod} I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \text{cod}_2 I + \text{cod}_3 I + \dots$$

Pero

$$\begin{aligned} \text{cod}_0 I &= \dim \frac{I + \xi_n}{I + \mathcal{M}_c} = \dim \frac{\xi_n}{\mathcal{M}_c} = 1 \\ \text{cod}_1 I &= \dim \frac{I + \mathcal{M}}{I + \mathcal{M}_c^2} = \dim \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_c^2} = c \\ \text{cod}_2 I &= \dim \frac{I + \mathcal{M}_c^2}{I + \mathcal{M}_c^3} = \dim \frac{\mathcal{M}_c^2}{\mathcal{M}_c^3} = \frac{c(c+1)}{2} \end{aligned}$$

Así,  $\frac{c(c+1)}{2} + c + 1 \leq \text{cod} I$ . Utilizando el **teorema 14**, se tiene que

$$\text{cod} I = \text{cod} \mathcal{M}_c \zeta_g = \text{cod} g + c$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{cod} g + c &\geq \frac{c(c+1)}{2} + c + 1 \\ \text{cod} g &\geq \frac{c(c+1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

□

*Nota 16.* Por el **teorema 22**, se tiene que si  $\text{cod} f \leq 5$  entonces  $\text{co-rang} f \leq 2$ . Así será suficiente estudiar los germenos de co-rango 1 y 2.

**Teorema 23.** (*Teorema de clasificación de Thom*)[7] Sea  $f \in \mathcal{M}_n^2$  que tiene codimensión  $\geq 2$  y  $\leq 5$ , entonces hasta la suma de una forma cuadrática no degenerada en varias variables, y multiplicando por  $\pm 1$ ,  $f$  es equivalente a uno de los siete germenos en la siguiente lista. *Para su demostración ver [12, p. 264-326]*

Corango	Codimensión	Germen	Nombre
1	2	$x^3$	pliegue
	3	$x^4$	cúspide
	4	$x^5$	cola de golondrina
	5	$x^6$	mariposa
2	4	$x^3 - xy^2$	ombligo elíptico
	4	$x^3 + y^3$	ombligo hiperbólico
	5	$x^2y + y^4$	ombligo parabolico

## 5. Conclusiones

Para llegar a la construcción del **teorema 23**, el *teorema de clasificación de Thom* fue necesario usar conceptos de la geometría diferencial, el álgebra, la topología e incluso recurrir a herramientas del análisis; en donde la finalidad de hacer que estas ramas de las matemáticas coexistan no es otra que poder realizar un análisis de carácter local, sobre estructuras tan abstractas y complejas como las mostradas a lo largo de esta monografía. Note que al construir los germens de aplicaciones suaves, fue necesario hacer uso del álgebra abstracta para poder delimitar el lugar en el espacio en donde estas aplicaciones coexisten y luego gracias a conceptos tan poderoso y decisivos como lo son la **codimensión** y el *co-rango*, poder desarrollar la estructura que nos permite establecer las equivalencias entre dichas aplicaciones, que a simple vista es difícil identificar como se comparten. Para finalizar, es relevante mencionar el hecho que hasta el punto en donde se desarrollo esta monografía, se tiene la punta de un iceberg conocido como *teoría de catástrofes*, pues aunque se mostró el hecho principal de la teoría, el cual consiste en la clasificación de los germens de aplicaciones suaves por su codimensión; la continuación de estos resultados son fascinantes, ya que lo que prosigue en este viaje, es poder relacionar las construcciones geométricas resultantes de la clasificación de germens, a los fenómenos naturales que trazan el comportamiento de nuestro universo.

## Referencias

- [1] Th. Bröker and L. Lander. *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Note. Cambridge University Press, 1975.
- [2] V.I. Arnol'd. Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of  $a_k$ ,  $d_k$ ,  $e_k$  and lagrangian singularities. *Consultants Bureau*, pages 254–259, 1973.
- [3] V.I. Arnol'd. Catastrophe theory. *Consultants Bureau*, pages 3–160, 1992.
- [4] Jan W. Auer. Mathematical preliminaries to elementary catastrophe theory. *Mathematics Magazine*, 53(1):13–20, 1980.
- [5] Shyuich Izumiya; Maria del Carmen Romero Foster; Maria Aparecida Soares Ruas; Farid Tari. *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015.
- [6] Luiz A. Tristán Vega Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil. *Guía práctica de Calculo Infinitesimalen varias variables*. Thompson Editores Spain, 2005.
- [7] CG Gibson. *Singular points of smooth mappings*. Fearon Pitman, 1979.
- [8] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *A primer of real analytic functions. Second Edition*. Hamilton Printing, Rensselaer, NY, 2002.
- [9] Yung-Chen Lu. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. Springer Verlag New York inc., 1976.
- [10] Marc Lars Lipson Seymour Lipschutz. *Schaum's series*. McGraw-Hill Companies, Inc, 2009.
- [11] A.N Varchenko V.I Arnold, S.M Gusein-Zade. *Singularities of Differentiable Maps*. Volumen I. Science, Moscow, 1982.
- [12] Cristopher Zeeman and Trotman. Classification of elementary catastrophes of codimension 5. *Lect Notes in Math*, pages 254–259, 1974.