

TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SUS APLICACIONES EN SISTEMAS DINÁMICOS: UNA REVISIÓN

LAPLACE TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS INTO DYNAMIC SYSTEMS: A REVIEW

Wilmer Rafael Briceño Camacho.* Jairo Yesid Rodríguez González. Andrés Escobar Díaz.*****

Resumen: Este artículo presenta una revisión sobre las aplicaciones de la transformada de Laplace (TL) en el análisis de sistemas dinámicos lineales. Se presenta la importancia de la transformada; la definición de la transformada; los teoremas y propiedades con aplicaciones y, por último, aplicaciones del uso de la TL para el cálculo de: error de estado estacionario, funciones de transferencia, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, respuestas en frecuencia, análisis de señales y diagramas de bloques. Se propone, como situación didáctica para propósitos académicos, el modelamiento y análisis operacional con TL de un reactor multipropósito.

Palabras clave: Señales, Transformada de Laplace, Ecuaciones diferenciales, Sistemas Dinámicos, Sistemas de Control, reactor multipropósito.

* Ing. (c) en Control, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Correo: wrbricenoc@correo.udistrital.edu.co . ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2523-9993>

** Ing. (c) en Control, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Correo: jyrodriquezg@correo.udistrital.edu.co . ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8029-6168>

*** Ing. Electrónico, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). M.Sc. en Ingeniería y MBA, Universidad de Los Andes (Colombia). Posición actual: Profesor en Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). E-mail: aescobard@udistrital.edu.co <https://orcid.org/0000-0003-0527-8776>

Abstract: This paper presents a review of Laplace Transform (LT) applications in the analysis of linear dynamic systems. It is presented the importance of the transforms; the definition of the Transform; theorems and properties with applications and finally, the use of LT for the calculation of: steady state error, transfer functions, ordinary differential equations solution, frequency responses, signal analysis and block diagrams. The modeling and operational analysis with LT of a multipurpose reactor is proposed as a didactic situation for academic purposes.

Key Words: Signals, Laplace Transform, Differential Equations, Dynamic Systems, Control Systems, multipurpose reactor.

1. Introducción

Un fenómeno físico se puede modelar teniendo en cuenta las leyes de la física a través de ecuaciones matemáticas, según sean: lineales y no lineales (polinómicas y algebraicas); y ecuaciones en derivadas –lineales o no- (Ordinarias o Parciales), es decir, considerando funciones que cambian en el tiempo.

De otra parte, los sistemas dinámicos explican tales fenómenos. Estos se pueden clasificar en mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, entre otros, en acuerdo a las señales, su tratamiento y el contexto; y se pueden representar de diferentes formas: usando ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales; estableciendo funciones de transferencia; construyendo ecuaciones de estado; desarrollando diagramas de bloques; calculando respuestas en frecuencia, entre otras [1]–[5].

De otro lado, la TL es la principal herramienta matemática utilizada para el análisis de señales, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, desarrollo de modelos y sistemas de control. Por ende, se convierte en una base fundamental para el análisis de sistemas

dinámicos, de aquí que sea importante interpretar su definición, existencia y unicidad, así como los teoremas y transformadas de funciones o señales básicas [4], [6]–[8].

Por lo anterior, dada la importancia de la TL para el análisis de sistemas dinámicos, resulta de interés en ingeniería investigaciones documentales que conduzcan a una revisión del tema que evidencien que -a pesar de ser un área de estudio poco reciente- se siga utilizando en diversas aplicaciones de sistemas dinámicos pero distintos a los que tradicionalmente se abordan académicamente o en líneas de investigación en desarrollo.

Por lo expuesto, el presente artículo está organizado de la siguiente forma: La Sección 2 establece la metodología de investigación documental. La sección 3 describe la importancia de la Transformada de Laplace, la definición de Transformada de Laplace y los teoremas principales. La sección 4 describe la importancia de la Transformada de Laplace en sistemas dinámicos. Para ilustrar las aplicaciones más comunes de la TL en Sistemas Dinámicos se establece la Sección 5. La sección 6 muestra un ejemplo de aplicación en un reactor multipropósito; y finalmente la Sección 7 presenta las conclusiones.

2. Materiales y Métodos.

Para establecer la metodología que se desarrolla en la presente investigación documental se acude al método sintético [9]. Este método analiza y sintetiza la información recopilada, lo que permite ir estructurando las ideas a lo largo de la revisión sobre Sistemas Dinámicos que aplican la transformada de Laplace como herramienta para conocer características importantes de los mismos.

Igualmente, para el estudio exploratorio, la búsqueda bibliográfica utilizó las siguientes bases de datos: *IEEE Xplore*, *ScienceDirect*, *Google Scholar*; así como *textos de clase*. Las referencias obtenidas oscilan entre 60 y 70, con las palabras clave usadas y que corresponden a las categorías: Transformada de Laplace, Sistemas Dinámicos, Control clásico, Sistemas de Control, Ecuaciones Diferenciales. El aval de esta metodología se obtuvo de expertos del Grupo de Investigación en Orden y Caos (ORCA) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Se utilizó el Método por índices para la construcción de la revisión (vertebrado a partir de un índice general) [10], [11].

3. Definición y propiedades de TL

La transformada de Laplace de una función $f(t)$, con dominio en la variable real t es equivalente a otra función que depende de una nueva variable s en el dominio complejo. La transformada de Laplace de $f(t)$, para $t > 0$, está definida por [5], [8], [12]–[21]:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ existe si la integral (1) converge; las condiciones suficientes de existencia para la misma son: la continuidad por tramos y el orden exponencial para $f(t)$ [5], [8], [14]–[21].

3.1. Teoremas de la transformada de Laplace

A partir de la definición se transforman funciones elementales; sin embargo, no es conveniente usar la definición de transformada de Laplace para encontrar transformadas de funciones más complejas, dado que el proceso de integración suele complicarse. Basados en la revisión bibliográfica realizada se desarrolló la Tabla 2 y Tabla 3 [4]–[8], [14]–[29], la cual presenta de forma detallada y clara los teoremas de la transformada más aplicados en sistemas dinámicos.

Transformada de Laplace directa	
Definición	Ejemplo
Primer Teorema de Traslación	
<p>Toda aquella expresión de la forma $\mathcal{L}[f(t)e^{\pm at}]$ será igual a la transformada de la función $f(t)$, sustituyendo $s \rightarrow s \mp a$.</p> $\mathcal{L}[e^{\pm at} f(t)] = F(s \mp a) \quad (2)$	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = e^{-at} \text{sen } at \mu(t) \quad (3)$ <p>Aplicando el teorema de traslación compleja en (3) e identificando la función $f(t)$ y evaluando $s \rightarrow s + a$, la transformada de (3) es:</p> $F(s) = \frac{a}{(s + a)^2 + 1} \quad (4)$
Segundo Teorema de Traslación	
<p>Toda expresión de la forma $f(t - a)\mu(t - a)$, su transformada de Laplace será $\mathcal{L}[f(t)]$ multiplicada por e^{-as}, donde a representa el valor del desplazamiento.</p> $\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s) = e^{-as}F(s) \quad (5)$	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = [\text{sen } t \mu(t + 2\pi)] \quad (6)$ <p>Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo en (6) identificando $f(t) = \text{sen } t$ y $a = 2\pi$, como $\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t$ la transformada de (6) es:</p> $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} e^{2\pi s} \quad (7)$
Teorema de multiplicación por t (diferenciación compleja).	
<p>Si $f(t)$ es una función continua a trozos y de orden exponencial entonces cada transformada de Laplace: $\mathcal{L}\{t f(t)\}, \mathcal{L}\{t^2 f(t) \dots\}$, converge respecto a s. Es decir, la transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t^n se puede encontrar al diferenciar la transformada de Laplace de $f(t)$.</p>	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = \{t^2 \text{sen } t\} \mu(t) \quad (9)$ <p>Aplicando el teorema e identificando $f(t)$ en (9) su transformada es:</p> $F(s) = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3} \quad (10)$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{Para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$	
Teorema de la derivada (diferenciación real)	
<p>Dejando la función $f(t)$ continua a trozos y teniendo una derivada continua hasta de orden $n-1$ $f^{(n-1)}(t)$ y seccionalmente continua derivable $f^{(n)}(t)$ en un intervalo siempre finito, la transformada de $f^{(n)}(t)$ existe si $t \geq 0$.</p> $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (11)$	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $\frac{dx}{dt} + 3x = \mu(t) \quad (12)$ <p>Aplicando el teorema de la derivada en (12) su transformada es:</p> $sX(s) - X(0) + 3X(s) = \frac{1}{s} \quad (13)$
Teorema de la integral (integración real)	
<p>Si $f(t)$ es seccionalmente continua, la expresión $\int_0^t f(\alpha) d\alpha$ tiene transformada de Laplace dada por:</p> $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\alpha) d\alpha\right] = \frac{f(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{-1}(0) \quad (14)$	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = \left[\int_0^x t e^{at} \sin t dt \right] \mu(t) \quad (15)$ <p>Identificando la función que se está integrando, y aplicando los teoremas correspondientes su transformada es:</p> $\mathcal{L}\{t e^{at} \sin t\} = \frac{2(s-a)}{(s-a)^2 + 1} \quad (16)$ <p>Aplicando el teorema de Laplace de la integral, (16) se multiplica por $1/s^n$, donde n es el número de integrales, la transformada de (15) es:</p> $F(s) = \frac{2(s-a)}{s((s-a)^2 + 1)^2} \quad (17)$
Teorema de la integral de la transformada (integración compleja)	
<p>Si $f(t)$ es transformable en Laplace y teniendo que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ existe, la integral de la función $\int_s^\infty F(s) ds$ corresponde a la división de la transformada de Laplace de una función $f(t)$ dada por:</p> $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad (18)$ <p>Si y solo si el $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ existe.</p>	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = \left[\frac{\sin t}{t} \right] \mu(t) \quad (19)$ <p>El límite de $f(t)$ existe, entonces se aplica el teorema de integración compleja. La variable t indica el número de integrales a aplicar.</p> $\int_s^\infty \frac{1}{s^2 + 1} ds = \tan^{-1} s \Big _s^\infty \quad (20)$

	<p>La transformada de (19) es:</p> $F(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s \quad (21)$
Teorema del valor inicial	
<p>Dejando $f(t)$ siendo función transformable, entonces en el caso de evaluar $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, existe.</p> $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (22)$	<p>Determinar el valor inicial de:</p> $x(0) = \frac{3s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 2} \quad (23)$ <p>Aplicando el teorema de valor inicial</p> $x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 2} \quad (24)$ <p>Evaluando el límite:</p> $x(0) = 3 \quad (25)$
Teorema del valor final	
<p>Dejando $f(t)$ siendo función transformable, entonces en el caso de evaluar $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, existe.</p> $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (26)$	<p>Determinar el valor final de:</p> $x(0) = \frac{3s^2 + 4s + 1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (27)$ <p>Aplicando el teorema de valor inicial tenemos</p> $x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3s^2 + 4s + 1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (28)$ <p>Evaluando el límite:</p> $x(0) = \frac{1}{2} \quad (29)$
Teorema de la Convolución	
<p>Si las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces un producto especial, denotado como $f(t) * g(t)$, está definido como:</p> $\int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (30)$ <p>La multiplicación de las transformadas representa la convolución de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, definido como:</p>	<p>Hallar la transformada de Laplace de:</p> $f(t) = \left[\int_0^t e^t \sin(t - \tau) d\tau \right] \mu(t) \quad (32)$ <p>Aplicando el teorema de Convolución y aplicando transformada a $f(t)$ y $g(t)$ de (32), la transformada es:</p> $F(s) = \frac{1}{(s - 1)(s^2 + 1)} \quad (33)$

$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$ (31)	
Teorema de Convolución en frecuencia – plano s	
La transformada de Laplace del producto de dos funciones a trozos y seccionalmente continuas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ corresponde a la Convólución de sus transformadas.	Hallar la transformada de Laplace de:
$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$ (34)	$f(t) = e^{-t}e^{-2t}\mu(t)$ (35)
	Aplicando el teorema de Convólución en frecuencia.
	$F(s) = \frac{1}{s+3}$ (36)

Tabla 1. Teoremas transformada de Laplace directa. Fuente: elaboración propia.

Factor	Forma del Factor	Forma de la Fracción Parcial
0	$A = \text{constante}$	No existe
1	$(ax + b)$	$\frac{A}{ax + b} \rightarrow \text{Cte. } A \text{ a determinarse}$
1	$(ax + b)^n$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{C}{(ax + b)^3} + \dots$
3	$(ax^2 + bx + c)$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
3	$(ax^2 + bx + c)^n$	$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^3} + \dots$
3	$(ax^3 + bx^2 + cx + d)$	$\frac{Ax^2 + Bx + C}{ax^3 + bx^2 + cx + d}$
3	$(ax^3 + bx^2 + cx + d)^n$	$\frac{Ax^2 + Bx + C}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)^2} + \dots$

Tabla 2. Fracciones parciales de utilidad para calcular la transformada de Laplace inversa. [5], [7], [8], [16], [18], [22], [30].

3.2. Importancia de la TL

Los sistemas dinámicos modelan diversos fenómenos físicos a través de ecuaciones diferenciales; la forma clásica de ejercer control sobre estos sistemas es por medio de la transformada de Laplace. Su aplicación varía en diversos campos [31].

Hablando específicamente de control, Laplace se ha usado en la simulación y control de una gran cantidad de sistemas: péndulos [32], donde se usa Laplace para obtener los modelos del sistema; sistemas termoeléctricos [33], donde el análisis del sistema de regulación térmica de un transformador se hace en dominio de Laplace y su respuesta en el tiempo se halla con la transformada inversa de Laplace; entre otros, donde se usa la transformada de Laplace para obtener ecuaciones en dominio de la frecuencia que facilitan el diseño de los controladores [34]–[36].

De otro lado, los métodos de Laplace han sido aplicados para hacer compensación en la respuesta de sistemas de control digitales [37]; modelos de señales para controladores digitales [38]; y aunque hoy día existen variadas técnicas de control innovadoras, la transformada de Laplace sigue siendo una herramienta que facilita el entendimiento de los sistemas [39], [40]. Lo importante es que, basado en estos análisis, se forman nuevos modelos de control, como por ejemplo los algoritmos basados en la estimación de la incertidumbre y perturbaciones (UDE) [41]. En otro sentido, se ha aplicado al control de contención de sistemas multiagente donde su control colaborativo se analiza desde la perspectiva del dominio de la frecuencia que la TL ofrece [42]. Las transformadas de Laplace producen modelos eficientes para describir la dinámica de otro tipo de sistemas [43], tal como lo muestra [44] donde se busca obtener un adecuado control de corriente; ahora, por medio de la TL se aplica una técnica de dominio de frecuencia para el diseño de sistemas de control multivariable al control

de vibraciones de haz pasivo [45]. Por otro lado, la transformada de Laplace no solo es una herramienta de diseño, también es una herramienta para verificar la estabilidad de los sistemas de control [46]–[48], viabilidad [49], el rediseño de los mismos [50], y para hallar respuestas ante entradas en los sistemas dinámicos [51], [52].

Además de sistemas de control, la TL sirve como herramienta analítica [53], para el desarrollo de modelos y métodos de cálculo [54]–[56]. En [57] se aplica a los filtros para mitigar las pulsaciones de voltaje de baja frecuencia y calcular los armónicos en corriente continua. En eléctrica y electrónica los usos de la TL son diversos [58]–[60]. Se han desarrollado métodos para determinar las tensiones transitorias y dinámicas que surgen cerca del sistema de grietas en cuerpos elásticos bajo deformación, esto se basa en métodos de transformadas de Laplace tanto directa como inversa [61]. Además, se han propuesto nuevas fórmulas para la matriz transitoria de resistencia del suelo a una línea eléctrica aérea; cada fórmula se obtuvo usando la transformada inversa de Laplace, su uso produjo una solución en dominio del tiempo de transitorios electromagnéticos en líneas multiconductoras [62]. Igualmente, la TL se ha aplicado en modelos de líneas de transmisión descrito en el dominio s (frecuencial) para obtener perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo de líneas multiconductoras [63]. La TL también tiene cabida en sistemas dinámicos complejos como aquellos de tiempos variados en los que se usa su versión bidimensional [64]; así como también en estudios de modelamiento para las hojas de grafeno donde Laplace ayuda a obtener parámetros de densidad de corriente tangencial mediante leyes de Maxwell [65].

De otro lado, la transformada inversa de Laplace -cuyo objetivo es llevar lo que está en dominio de la frecuencia al dominio del tiempo- también ha sido herramienta en múltiples análisis matemáticos que buscan obtener una respuesta en dominio del tiempo en diversos campos de estudio. Por ejemplo, [66] muestra el uso de la transformada inversa en ecuaciones de onda

electromagnéticas canónicas. En el desarrollo de un nuevo método de diseño para antenas plasmodic que generan luz polarizada circular localizada para grabación en altura [67], donde al tener las ecuaciones de campo magnético en un dominio complejo se usa la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta en el dominio del tiempo.

Finalmente, la TL en campos diferentes al control y la electrónica ha hecho su aparición en variantes como por ejemplo el estudio de CO₂ y sus cambios atmosféricos como respuesta a las emisiones [68]. En la misma línea, se ha aplicado en la selección de materiales biológicos para determinar sus características y diferenciaciones [69]; y se ha usado para convertir las ecuaciones dinámicas de un sistema lineal de ecuaciones en aplicaciones al método de intervalos para análisis de estructuras [70].

4. Importancia en sistemas dinámicos

Como se ha visto, la TL ha sido utilizada en análisis de señales, solución de ecuaciones diferenciales, modelos lineales y sistemas de control, entre otras. Pero la presente exploración de los Ssistemas Dinámicos se ha hecho a partir de modelos matemáticos [1]–[5]. La Figura 1 muestra un diagrama donde a partir de las ecuaciones que modelan el sistema, la transformada de Laplace permite obtener otros parámetros característicos del mismo, como la función de transferencia, los diagramas de bloques, la representación de estados, el análisis en frecuencia y a su vez cómo interactúan entre ellos.

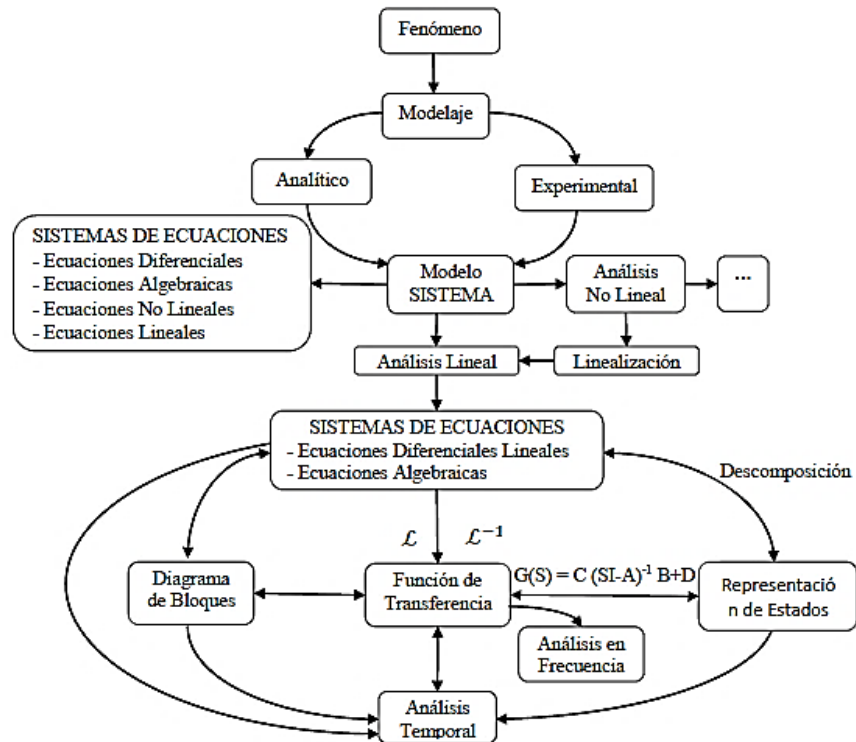


Figura 1. Diagrama de interacción de Laplace y sistemas dinámicos. Fuente: elaboración propia.

5. Aplicaciones en sistemas dinámicos

Como se estudió anteriormente, la transformada de Laplace en los sistemas dinámicos permite encontrar características principales de estos modelos, dentro de estos procesos se destaca la aplicación en análisis de señales, solución de ecuaciones diferenciales, análisis de modelos eléctricos, cálculo de función de transferencia, representación de diagramas de bloques, cálculo de error de estado estacionario y análisis de respuesta en frecuencia [1]–[5], [71]–[73]. La Figura 2, muestra una metodología para hacer uso de la transformada en el análisis de sistemas dinámicos.

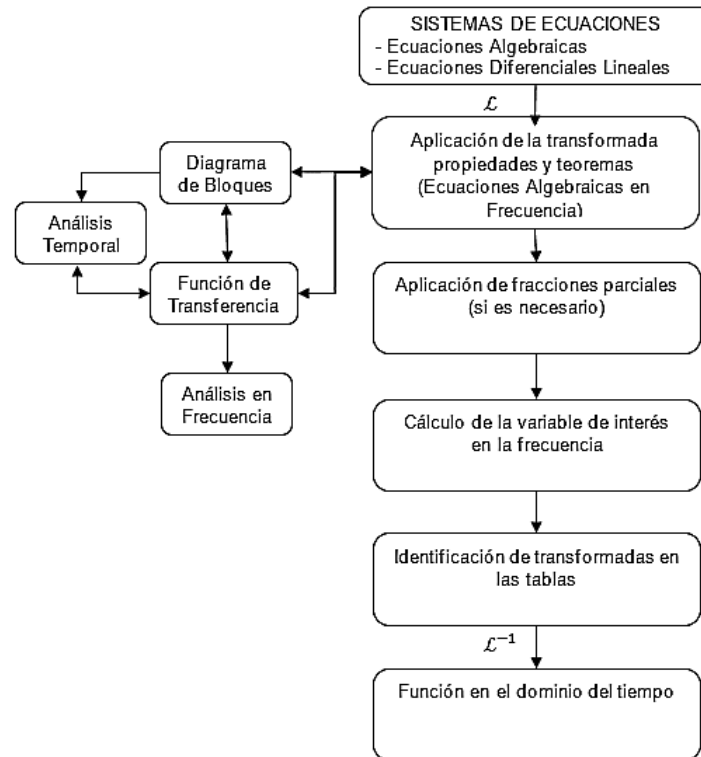


Figura 2. Metodología de aplicación de la transformada de Laplace en sistemas dinámicos.
Fuente: elaboración propia.

5.1. Análisis de señales

Calcular la TL de la señal Figura 3 [24].

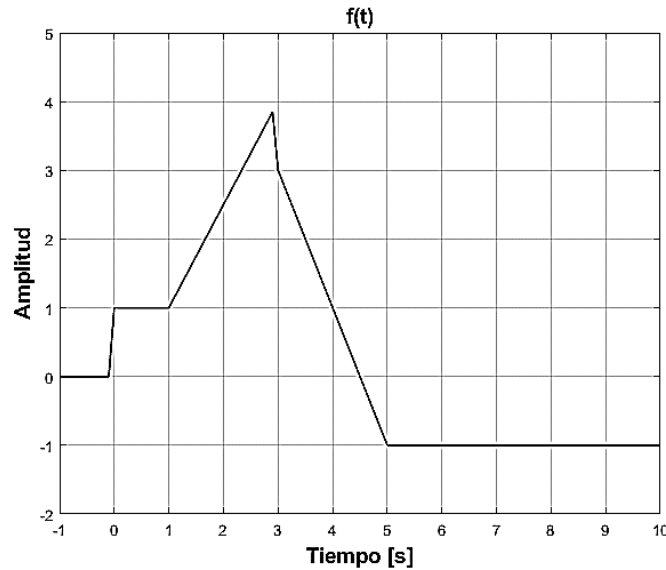


Figura 3. Señal combinada de funciones paso y rampa. Fuente: elaboración propia.

La función que describe la Figura 3 está dada por:

$$f(t) = [\mu(t) + 1.5 r(t - 1) - \mu(t - 3) - 3.5 r(t - 3) + 2 r(t - 5)] \quad (37)$$

Aplicando propiedad de linealidad y desplazamiento en el tiempo Tabla 1, la transformada de la señal (37) es:

$$\frac{1}{s} + 1.5 \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s} - 3.5 \frac{e^{-3s}}{s^2} + 2 \frac{e^{-5s}}{s^2} \quad (38)$$

5.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Encontrar la solución de la ecuación diferencial [23], [24]:

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \sin t \quad (39)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

Aplicando transformada de Laplace en (39) Tabla 1, se tiene

$$\{s^2 y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{s y - Y(0)\} + 5y = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \quad (40)$$

Solucionando (40) y reemplazando condiciones iniciales.

$$y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \quad (41)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace Tabla 2, la respuesta en el tiempo de (41) es

$$Y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t) \quad (42)$$

5.3. Análisis Circuitos Eléctricos

Aplicar TL a la ecuación que modela el siguiente sistema [23], [24]:

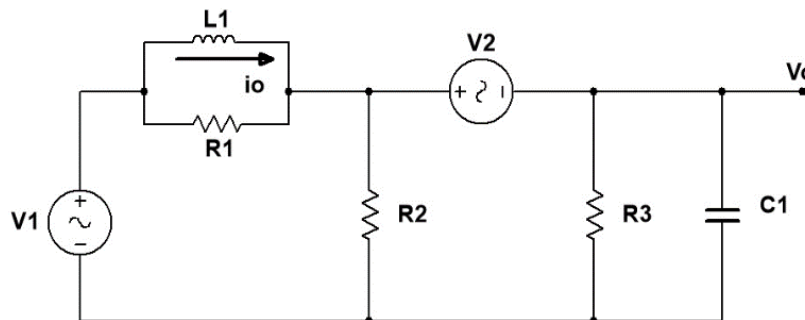


Figura 4. Sistema eléctrico. Fuente: elaboración propia.

Las ecuaciones que modelan el sistema de la Figura 4 son:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \left(-V_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + I_L + \frac{V_{i1}}{R_1} - V_{i2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) \quad (43)$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L} (V_{i1} - (V_{i2} + V_c)) \quad (44)$$

$$V_o = V_c, \quad I_o = I_L \quad (45)$$

Si las condiciones del sistema son:

$$V_{i1} = u(t - 10), \quad V_{i2} = 2, \quad I_L(0) = 1A, \quad (46)$$

$$V_c(0) = 0, \quad R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega, \quad L = 2H, \quad C = 1F$$

Aplicando condiciones iniciales y transformada de Laplace Tabla 1 a (43), (44) y (45) se obtiene:

$$sV_c(s) = -3V_c(s) + I_L(s) + V_{i1}(s) - 2V_{i2}(s) \quad (47)$$

$$sI_L(s) - I_L(0) = \frac{1}{2}(V_{i1}(s) - V_{i2}(s) - V_c(s)) \quad (48)$$

$$v_o(s) = v_c(s) \quad (49)$$

Despejando el valor para V_o y I_o se obtiene:

$$V_o(s) = \frac{(2 + V_{i1}(s)(2s + 1) - V_{i2}(s)(4s + 1))}{[2s^2 + 6s + 1]} \quad (50)$$

$$I_o(s) = \frac{(V_{i1}(s)[s + 2] - V_{i2}(s)[s + 1] + 2(s + 3))}{[2s^2 + 6s + 1]} \quad (51)$$

La respuesta de la salida en función del tiempo se aplica transformada inversa de Laplace Tabla 2 en (50), (51) obteniendo:

$$\begin{aligned} V_o(t) = & 0.3779e^{-(0.1771)t}u(t) - 0.3779e^{-(2.8228)t}u(t) - 0.6891e^{-(0.1771)t}u(t - 10) \\ & - 0.3110e^{-(2.8228)t}u(t - 10) + 1u(t - 10) + 0.6223e^{-(0.1771)t}u(t) \\ & + 1.3779e^{-(2.8228)t}u(t) + 2u(t) \end{aligned} \quad (52)$$

$$I_o(t) = 1.0669e^{-(0.1771)t}u(t) - 0.0669e^{-(2.8228)t}u(t) \quad (53)$$

5.4. Cálculo de la Función de Transferencia

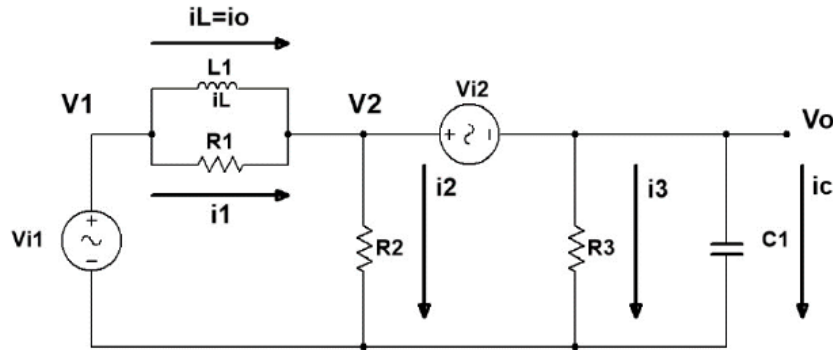


Figura 5. Sistema eléctrico. Fuente: elaboración propia.

Con base en la Figura 5, se calcula la función de transferencia [24]. Eliminando condiciones iniciales en (43) y (44), despejando las ecuaciones en términos de $\frac{V_o}{V_{i1}}$, $\frac{V_o}{V_{i2}}$, $\frac{I_o}{V_{i1}}$, $\frac{I_o}{V_{i2}}$

$$C \frac{dV_o}{dt} = -V_o \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + I_L + \frac{V_{i1}}{R_1} \quad (54)$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = V_{i1} - V_o \quad (55)$$

Realizando las operaciones correspondientes, aplicación de la transformada de Laplace Tabla 1, agrupando términos semejantes se obtienen las funciones de transferencia del circuito de la Figura 5.

$$\frac{V_o(s)}{V_{i1}(s)} = \left[\frac{(R_1 + Ls)(R_2 R_3)}{R_1 R_2 R_3 L C s^2 + Ls R_2 R_3 + Ls R_1 R_3 + Ls R_1 R_2 + R_1 R_2 R_3} \right] \quad (56)$$

Las demás funciones de transferencia se calculan del mismo modo que se halló (56).

$$\frac{V_o(s)}{V_{i2}(s)} = \left[\frac{-(R_1 R_2 + R_2 L s)(R_3)}{R_1 R_2 R_3 L C s^2 + L s R_2 R_3 + L s R_1 R_3 + L s R_1 R_2 + R_1 R_2 R_3} \right] \quad (57)$$

$$\frac{I_o(s)}{V_{i1}(s)} = \left[\frac{(R_2 + R_3 + R_2 R_3 R_1 + C s)(R_1)}{R_1 R_2 R_3 L C s^2 + L s R_2 R_3 + L s R_1 R_3 + L s R_1 R_2 + R_1 R_2 R_3} \right] \quad (58)$$

$$\frac{I_o(s)}{V_{i2}(s)} = \left[\frac{-(1 + R_3 C s)(R_1 R_2)}{R_1 R_2 R_3 L C s^2 + L s R_2 R_3 + L s R_1 R_3 + L s R_1 R_2 + R_1 R_2 R_3} \right] \quad (59)$$

5.5. Representación en Diagramas de Bloques

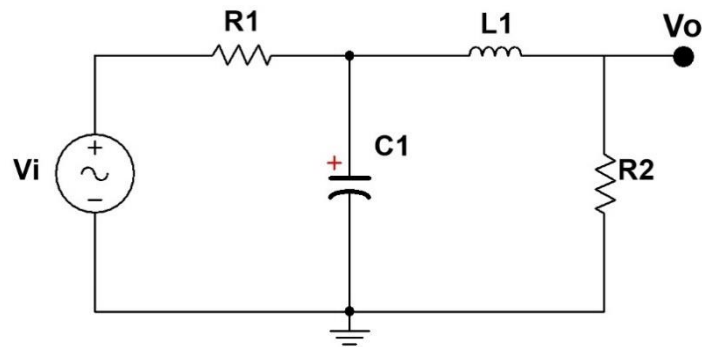


Figura 6. Sistema eléctrico. Fuente: elaboración propia.

Condiciones iniciales del sistema Figura 6 [23], [24]:

$$V_i(t) = u(t), R_1 = 2\Omega, C = 3F, L = 4H, \quad (60)$$

$$R_2 = 3\Omega, V_C(0) = 1V, I_L(0) = 3A$$

Las ecuaciones que modelan el sistema de la Fig. 5. son:

$$C \frac{dV_C}{dt} = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_C}{R_1} - i_L \quad (61)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = V_C - R_2 \cdot i_L \quad (62)$$

$$V_0 = i_L \cdot R_2 \quad (63)$$

Aplicando transformada de Laplace en (61), (62) y (63) según teoremas Tabla 2, identificando el número de integradores en este caso dos dado que existe más de una ecuación diferencial y el número de entradas y salidas V_R , V_o y i se realiza el diagrama de bloques correspondiente despejando de las ecuaciones diferenciales en términos de la derivada más alta Figura 7.

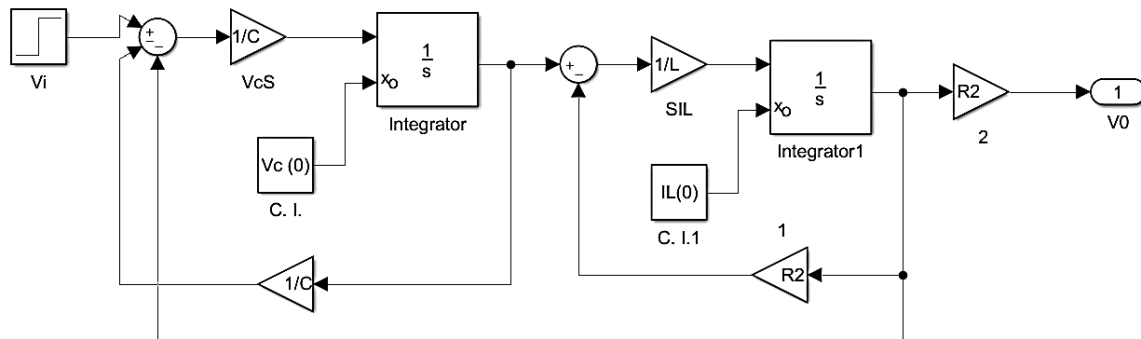


Figura 7. Diagrama de bloques obtenido. Fuente: elaboración propia.

5.6. Ecuaciones de estado a Función de transferencia

El modelo en variables de estado está dado por (64) y (65)

$$\dot{x} = A * x + B * u \quad (64)$$

$$Y = C * x + D * u \quad (65)$$

Donde \dot{x} representa a las variables de estado, u es la entrada del sistema y Y la salida, A , B , C y D son matrices.

Partiendo de las ecuaciones (61), (62) y (63) de la Figura 6 se tiene la representación de estado dada por (66) y (67)

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 * C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_i \quad (66)$$

$$V_O = [0 \quad R_2] \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + 0 * V_i \quad (67)$$

La función de transferencia se halla a partir de la ecuación (68)

$$G(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B + D \quad (68)$$

Al aplicar la ecuación (68) se obtiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 C L s^2 + (R_1 R_2 C - L)s + (R_1 - R_2)} \quad (69)$$

5.7. Análisis en frecuencia

El análisis en frecuencia para un sistema de segundo orden se caracteriza por tener dos componentes, el margen de ganancia y fase, a continuación, se muestra las ecuaciones que permiten detallar este comportamiento [24].

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (70)$$

Magnitud en dB.

$$|G(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \quad (71)$$

Fase en grados.

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right) / \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right) \quad (72)$$

Dada la función de transferencia (73),

$$G(s) = \frac{(5s + 50)}{s^2 + 99.8s - 20} \quad (73)$$

Se realiza el análisis en frecuencia dado que este viene del cálculo de transformada de Laplace, la respuesta en magnitud del sistema (74) y Figura 8.

$$|G(j\omega)|_{dB} = \frac{(5j\omega + 50)}{j\omega^2 + 99.8j\omega - 20} = -7.96 \quad (74)$$

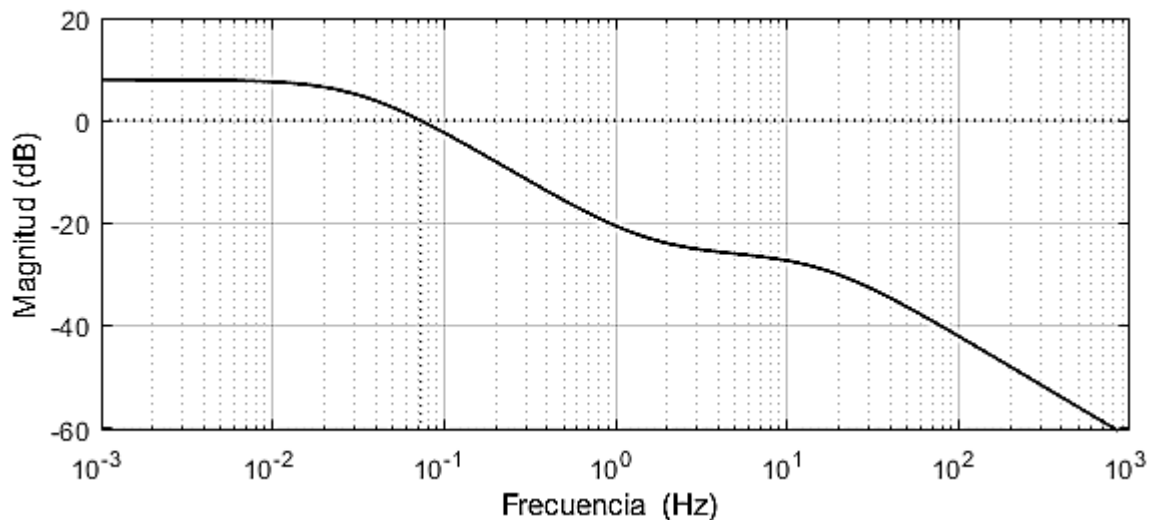


Figura 8. Respuesta en magnitud del sistema. Fuente: elaboración propia.

la respuesta en fase del sistema (75) y Figura 9.

$$\phi(\omega) = \frac{(5j\omega + 50)}{j\omega^2 + 99.8j\omega - 20} = 68.8 \quad (75)$$

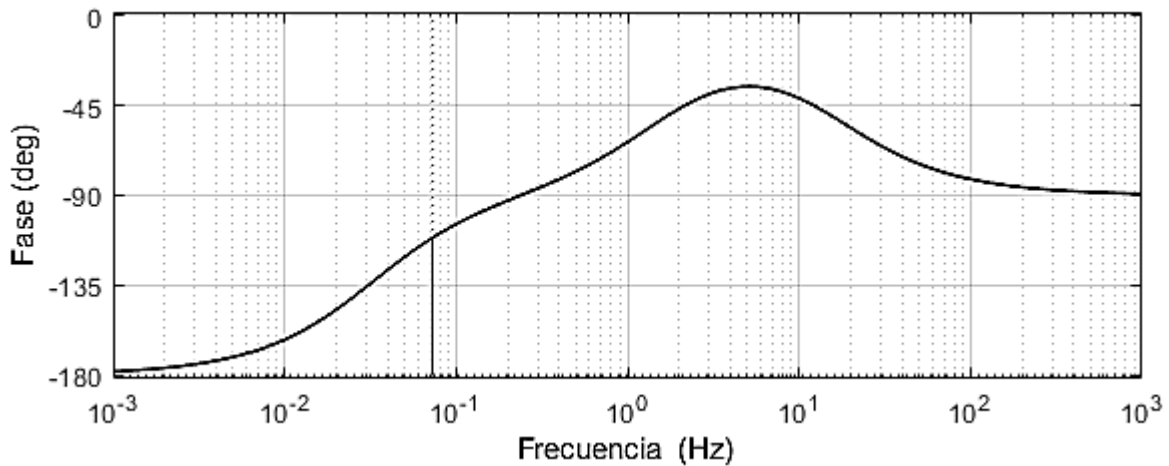


Figura 9. Respuesta en fase del sistema. Fuente: elaboración propia.

A partir del análisis realizado (74) y (75), se determina que el sistema es inestable.

5.8. Error de estado estacionario

Una de las aplicaciones más comunes de este teorema en los sistemas de control es el cálculo de error de estado estacionario, este se define como error del sistema a la diferencia entre la señal de referencia y la señal de entrada [24].

El cálculo de error de estado estacionario de posición, velocidad y aceleración proviene de la formula general, hallada del sistema de realimentación unitaria (76).

$$e(s) = \frac{r(s)}{1 + T(s)} \quad (76)$$

Aplicando el teorema del valor final Tabla 1, se tiene:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + T(s)} \quad (77)$$

Donde (77) corresponde al error de estado estacionario del sistema con realimentación unitaria.

Según el análisis anterior se definen las ecuaciones para el cálculo de error de estado estacionario de posición, velocidad y aceleración.

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + T(s)} \quad (78)$$

$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sT(s)} \quad (79)$$

$$e_{ssa} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2T(s)} \quad (80)$$

Con las funciones del controlador y planta de la Figura 10, se analiza el error de estado estacionario para posición velocidad y aceleración para el sistema.

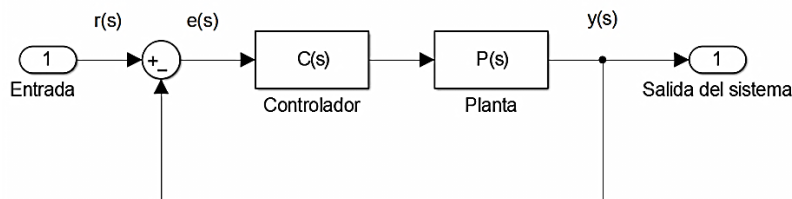


Figura 10. Diagrama sistema de control. Fuente: elaboración propia.

Las funciones del controlador y la planta corresponden a:

$$C(s) = \frac{2}{s(s + 0.05)} \quad (81)$$

$$P(s) = \frac{s + 0.1}{s^2(s^2 + 6s + 3)} \quad (82)$$

La función de transferencia para el sistema se encuentra con la formula $T(s) = C(s) * P(s)$.

$$T(s) = \frac{2(s + 0.1)}{s^3(s + 0.05)(s^2 + 6s + 3)} \quad (83)$$

Aplicando el teorema de valor final Tabla 1 el error de estado estacionario en posición es:

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s^3(s + 0.05)(s^2 + 6s + 3)}{s^3(s + 0.05)(s^2 + 6s + 3) + 2(s + 0.1)} \right\} = 0 \quad (84)$$

Del mismo modo se obtiene el error de estado estacionario de velocidad y aceleración.

$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s^2(s + 0.05)(s^2 + 6s + 3)}{2(s + 0.1)} \right\} = 0 \quad (85)$$

$$e_{ssa} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s(s + 0.05)(s^2 + 6s + 3)}{2(s + 0.1)} \right\} = 0 \quad (86)$$

Los resultados del análisis de error de estado estacionario para el sistema se muestran en la Tabla 3.

Modelo	e_{ssp}(%)	e_{ssv}(%)	e_{ssa}(%)
Tipo 3	0	0	0

Tabla 3. Error de estado estacionario del sistema. Fuente: elaboración propia.

La respuesta del sistema ante entradas escalón, rampa y parábola corresponde a las Figura 11, Figura 12 y Figura 13.

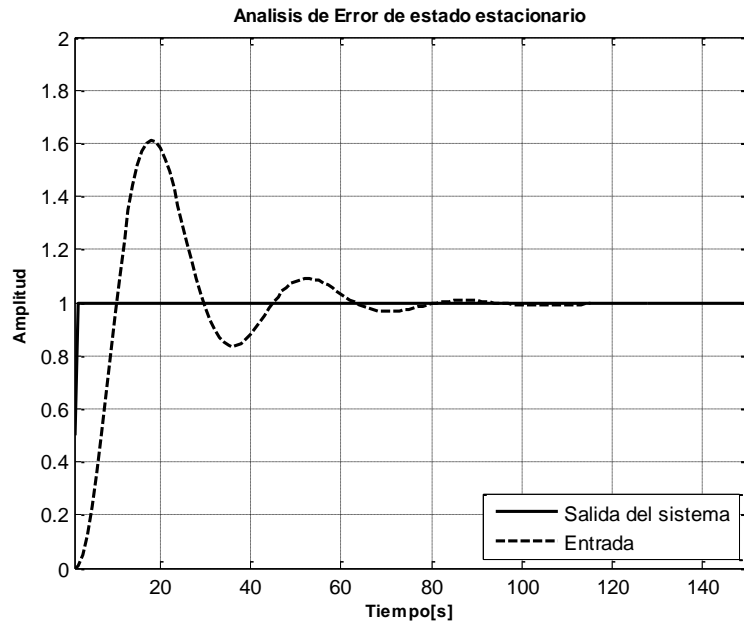


Figura 11. Respuesta a entrada tipo escalón. Fuente: elaboración propia.

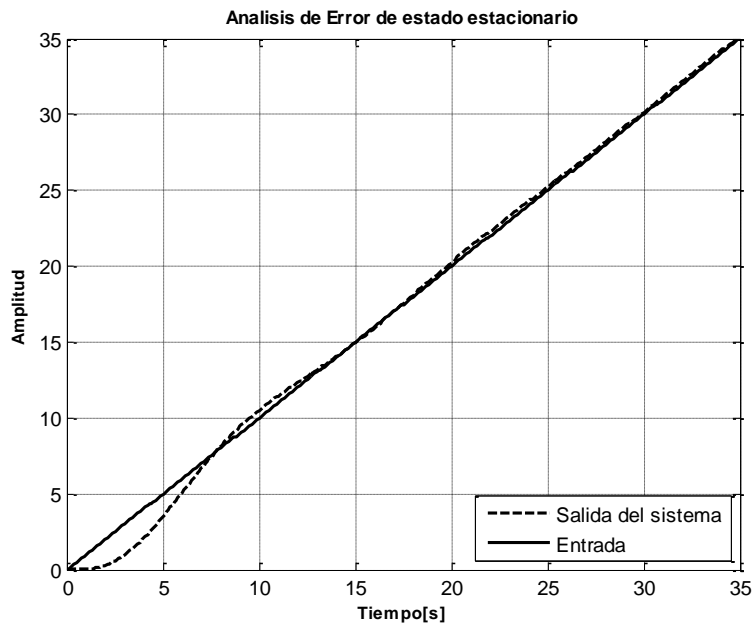


Figura 12. Respuesta a entrada tipo rampa. Fuente: elaboración propia.

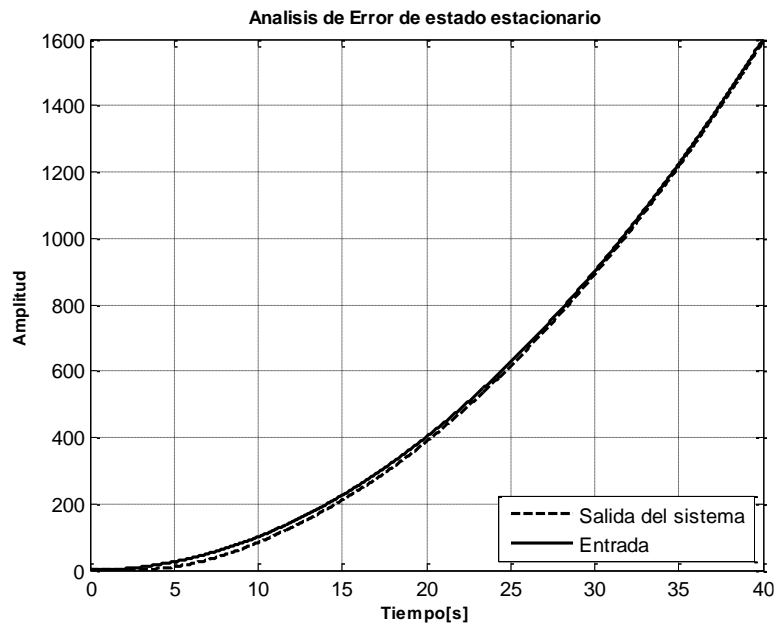


Figura 13. Respuesta a entrada tipo parabólica. Fuente: elaboración propia.

6. Caso de aplicación

El proceso consiste en un reactor multipropósito el cual se diseñó e implementó en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el proyecto curricular de ingeniería en control. Este proyecto se desarrolló con el propósito de diseñar un controlador PID de temperatura del reactor [74].

El proceso para fabricar biodiesel inicia solicitando la cantidad de materia prima que se usara, la temperatura para el proceso, la temperatura para la deshidratación, tiempo de decantación del lavado, Tiempo de deshidratación y velocidad de mezclado, hecho esto la planta agregara la cantidad de aceite ingresada por el usuario, cuando el reactor tenga el nivel de materia prima requerido procederá a agitar y calentar el aceite entre una temperatura de 55°C y 60°C requerida para la fabricación de biodiesel, una vez alcanzada la temperatura se agrega el catalizador y se activa una bomba de recirculación para garantizar la mezcla [74]. Ya en este punto inicia el proceso de transesterificación y depende del tiempo ingresado, luego se pasa al

tiempo de decantación donde la acción del controlador PID y el agitador se apagan y el sistema queda en reposo mientras ocurre este tiempo, terminado este tiempo se inicia el proceso de lavado donde se ingresa agua en el reactor la cual se encarga de disolver restos de metanol, hidróxido de sodio y componentes hidrosolubles que serán eliminados posteriormente por decantación, después del lavado se inicia el tiempo de decantación donde se separan el agua con residuos disueltos del biodiesel, para terminar se pasa a la etapa de deshidratación donde se eliminara el agua residual en el biodiesel manteniendo una temperatura elevada para extraer los vapores de agua a través de una válvula de vacío Figura 14 [74].

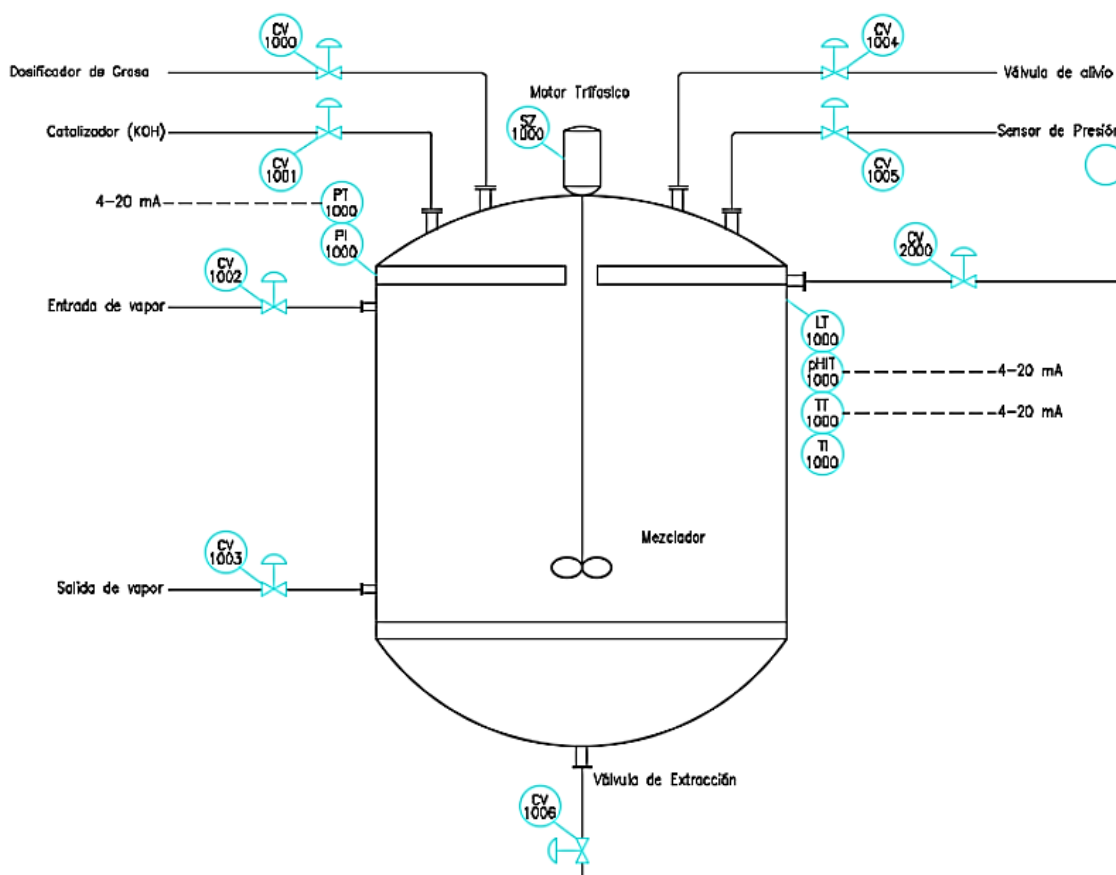


Figura 14. Diagrama P&ID del reactor [74].

Es evidente que es necesario mantener un control en la temperatura para cada etapa del proceso. La toma de temperatura se hace por medio de una PT100, las pruebas para la linealización se hicieron entre 17 °C y 86 °C [74].

Para poder diseñar el controlador fue necesario obtener la función de transferencia de la planta y así poder analizar su comportamiento dinámico, el método para encontrarla fue diseñar 2 experimentos en los cuales se puede comparar la importancia en la cantidad de datos para generar el modelo con la herramienta de identificación Ident de Matlab, los experimentos consisten en inyectar una señal paso en el sistema para llevar a la planta a un punto de estabilidad; se obtuvo que la planta tiene un retardo de 75 segundos y un tiempo de estabilización aproximado de 4 horas, tiempo en el que el agua llega a su punto de ebullición, el primer experimento tiene un tiempo de muestreo de 30 segundos, mientras que el segundo experimento tiene un tiempo de muestreo de 1 segundo [74], a partir de las medidas tomadas y usando la herramienta de identificación Ident de Matlab, se logra establecer la función de transferencia para cada experimento, como resultado se toma la función de transferencia arrojada por el experimento 2 que tiene un porcentaje de exactitud del modelo del 97.6%.

Cabe resaltar que [74], realizó la identificación en tiempo discreto (Transformada z), por ende, en este artículo a partir de las tablas de medición se desarrolló la identificación en tiempo continuo TL, para poder llegar al sistema de ecuaciones que modelan la planta y ver el comportamiento de la misma.

La función de transferencia arrojada por la herramienta es:

$$F(s) = \frac{3,233 \times 10^{-5}}{s + 4,633 \times 10^{-5}} \quad (87)$$

Con base en la anterior función de transferencia se procede a conocer las ecuaciones que modelan el reactor aplicando los teoremas de la transformada de Laplace Tabla 1 y la metodología de aplicación propuesta Figura 5.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{3,233 \times 10^{-5}}{s + 4,633 \times 10^{-5}} \quad (88)$$

Despejando (88) en términos de la función de salida, y reemplazando la entrada por una señal paso se obtiene:

$$V_o(s) = \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{3,233 \times 10^{-5}}{s + 4,633 \times 10^{-5}}\right) \quad (89)$$

Se aplica fracciones parciales en (89) Tabla 2 y transformada inversa se tiene:

$$V_o(t) = [0.69782 - 0.69782 e^{-(4,633 \times 10^{-5})t}]u(t) \quad (90)$$

Basados en la función de transferencia (87) se obtiene el diagrama de bloques del sistema Figura 15.

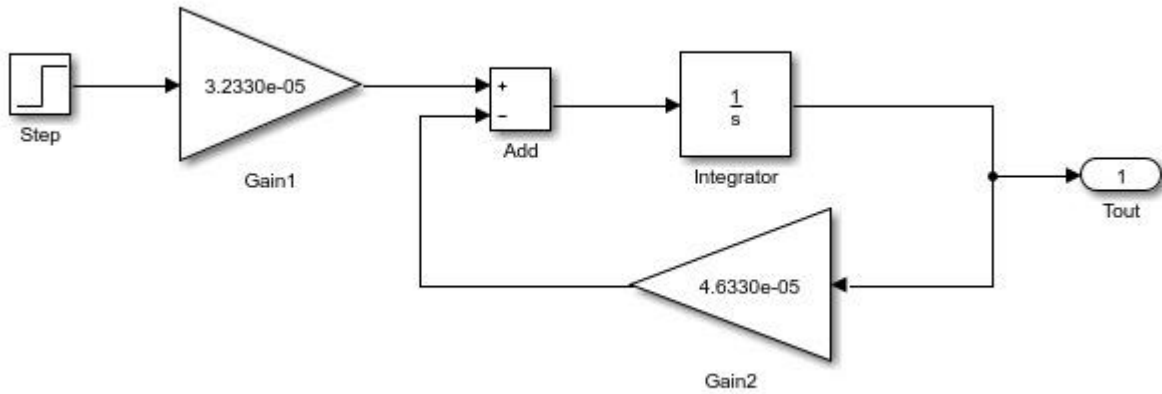


Figura 15. Diagrama de bloques del reactor. Fuente: elaboración propia.

Se realiza el análisis en frecuencia (87), la respuesta en magnitud del sistema (91) y Figura 16.

$$|G(j\omega)|_{dB} = \frac{3,233 \times 10^{-5}}{j\omega + 4,633 \times 10^{-5}} = \infty \quad (91)$$

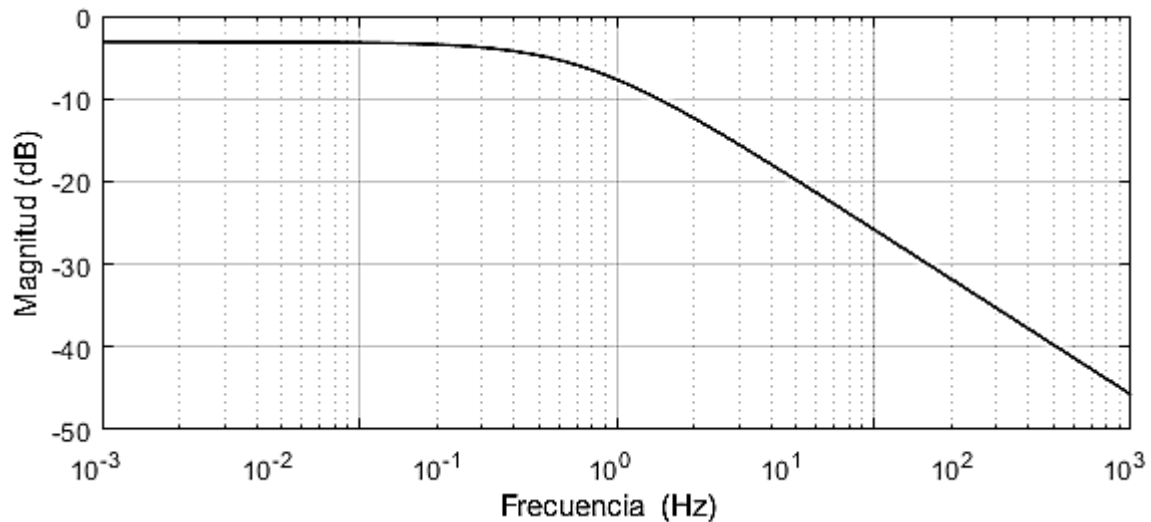


Figura 16. Respuesta en magnitud del sistema. Fuente: elaboración propia.

la respuesta en fase del sistema (92) y Figura 17.

$$\phi(\omega) = \frac{3,233 \times 10^{-5}}{j\omega + 4,633 \times 10^{-5}} = \infty \quad (92)$$

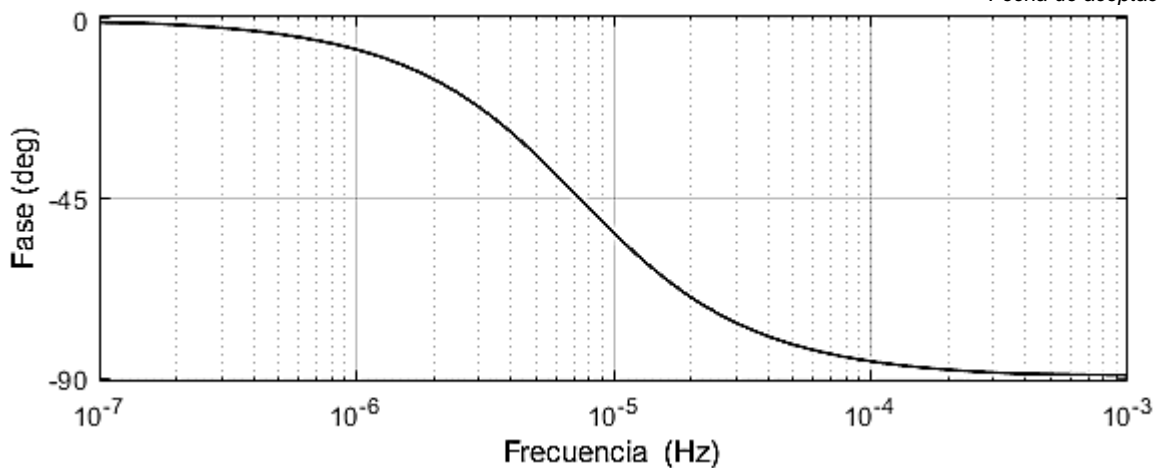


Figura 17. Respuesta en fase del sistema. Fuente: elaboración propia.

A partir del análisis realizado (91) y (92), se determina que el sistema es inestable.

7. Conclusiones

Los sistemas dinámicos modelan diversos fenómenos físicos a través de ecuaciones diferenciales, la forma clásica de ejercer control sobre estos sistemas es por medio de la transformada de Laplace, con esta transformada llevar ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo que en muchos casos son difíciles de resolver, se vuelven más sencillas en el Dominio de la frecuencia, en este dominio se dispone de varias herramientas que permiten tanto modelar como ejercer acciones de control, dentro de estas herramientas tenemos el análisis de frecuencia, la función de transferencia, los diagramas de bloques entre otros.

En este artículo se ha realizado una presentación de la Transformada de Laplace, su definición, propiedades y teoremas, Además, se crea un marco de referencias en los cuales se ve los diversos usos de la TL en investigación y resalta la importancia de esta en los sistemas

dinámicos presentando sus diversos usos en el análisis de los sistemas de control, adicionalmente, se muestra una metodología para la aplicación de TL en los sistemas dinámicos y por último, se realizó un ejercicio de modelamiento de reactor multipropósito donde la TL permitió encontrar el modelo y otras características del mismo, es importante resaltar que el marco referencial usado para destacar la importancia de la TL está orientado principalmente hacia los sistemas dinámicos y sistemas de control, donde el 39,18% de referencias hablan de estas temáticas; en temas relacionados a eléctrica, electrónica y telecomunicaciones obtenemos 17,56% de referencias; 33,78% habla de definición, propiedades y teoremas de la Transformada de Laplace y el 4,05% hablan del uso de la TL en campos diferentes a la ingeniería, es de resaltar que la investigación puede ser extendida a los usos y las ventajas que la TL puede brindar en otros campos diferentes a los aquí presentados con el fin de enriquecer esta esta investigación.

8. Referencias

- [1] M. F. Golnaraghi, B. C. Kuo, and M. F. Golnaraghi, *Automatic control systems*. Hoboken, NJ: Wiley, 2010.
- [2] R. T. Stefani and B. Shahian, *Design of feedback control systems*. New York; Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [3] T. E. Fortmann and K. L. Hitz, *An introduction to linear control systems*. New York, NY: Marcel Dekker, 2000.
- [4] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Madrid: Pearson Educación, 2003.
- [5] N. Lobontiu, "The Laplace Transform," in *System Dynamics for Engineering Students*, Elsevier, 2018, pp. 273–322 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-804559-6.00006-3>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [6] N. S. Nise, *Control systems engineering*. Hoboken, NJ: Wiley, 2015.
- [7] J. J. DiStefano, A. R. Stubberud, and I. J. Williams, *Schaum's outline of theory and problems of feedback and control systems*. New York: McGraw-Hill, 1995 [Online]. Available: <http://accessengineeringlibrary.com/browse/schaums-outline-of-feedback-and-control-systems-second-edition>
- [8] M. R. Spiegel, *Schaum's outline of theory and problems of Laplace transforms*. New York: McGraw-Hill, 2006.
- [9] E. Maya, "Métodos y técnicas de investigación," 2014 [Online]. Available:

https://arquitectura.unam.mx/uploads/8/1/1/0/8110907/metodos_y_tecnicas.pdf

- [10] R. hernandez Samperini, C. fernandez Callado, and P. baptista Lucio, *Metodología de la investigación*, 6 ta. MC GRAW HILL, 2014.
- [11] L. C. Calderón, O. L. Londoño, and L. F. Maldonado, *Guía para construir estados del arte*. 2014.
- [12] M. J. Corinthios, "Complex-variable distribution theory for Laplace and z transforms," *IEE Proc. - Vision, Image, Signal Process.*, vol. 152, no. 1, p. 97, Dec. 2005 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/ip-vis:20050999>
- [13] H. Chen and Y. Zhang, "Laplace Transform for Stable Random Variables," in *2015 3rd International Conference on Computer and Computing Science (COMCOMS)*, 2015, pp. 32–36 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/COMCOMS.2015.10>
- [14] M. L. Abell and J. P. Braselton, "Laplace Transform Methods," in *Differential Equations with Mathematica*, Elsevier, 2016, pp. 613–720 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-804776-7.00008-5>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [15] X.-S. Yang, "Laplace Transforms," in *Engineering Mathematics with Examples and Applications*, Elsevier, 2017, pp. 187–198 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-809730-4.00022-7>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [16] J. Semmlow, "Linear Systems in the Complex Frequency Domain," in *Circuits, Signals and Systems for Bioengineers*, Elsevier, 2018, pp. 295–344 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-809395-5.00007-2>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Fourier, Laplace, and Mellin Transforms," in *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier, 2014, pp. 1077–1103 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-384933-5.00012-6>. [Accessed: 23-Jul-2019]
- [18] M. A. Haidekker, "Solving Differential Equations in the Laplace Domain," in *Linear Feedback Controls*, Elsevier, 2013, pp. 27–56 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-405875-0.00003-6>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [19] R. F. Hoskins, "The Laplace Transform," in *Delta Functions*, Elsevier, 2011, pp. 99–127 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1533/9780857099358.99>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [20] W. van Drongelen, "Laplace and z -Transform," in *Signal Processing for Neuroscientists*, Elsevier, 2018, pp. 231–250 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-810482-8.00012-6>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [21] J. Kirkwood, "The Laplace Transform," in *Mathematical Physics with Partial Differential Equations*, Elsevier, 2018, pp. 401–425 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-814759-7.00012-0>. [Accessed: 20-Aug-2018]
- [22] J. Bird, "Laplace Transforms," in *Engineering Mathematics Pocket Book*, Elsevier, 2008, pp. 472–491 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-7506-8153-7.50018-5>. [Accessed: 20-Aug-2018]

- [23] J. Y. Rodriguez and A. E. Diaz, "Transformada de Laplace Inversa." No publicado, p. 81, 2017.
- [24] W. R. Briceño and A. E. Diaz, "Transformada de Laplace directa." No publicado, Bogotá D.C, p. 212, 2017.
- [25] E. A. D. Poularikas, A. D. Poularikas, and S. Seely, *Poularikas, A. D., Seely, S. "Laplace Transforms ."* 2000.
- [26] D. G. Zill and M. R. Cullen, *Ecuaciones diferenciales, Matemáticas avanzadas para ingeniería*, vol. 1. 2008.
- [27] J. Salvador and C. Peña, "Transformada de Laplace y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales Índice General," 2008.
- [28] Ingeniería Técnica Industrial, "Tema 4. La Transformada de Laplace," *Ampliación Matemáticas. Espec. Electrónica Ind.*, no. 1, p. 12, 2009.
- [29] J. Chen, K. H. Lundberg, D. E. Davison, and D. S. Bernstein, "The Final Value Theorem Revisited - Infinite Limits and Irrational Functions," *IEEE Control Syst.*, vol. 27, no. 3, pp. 97–99, Jun. 2007 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/MCS.2007.365008>
- [30] X. Espinoza, *Manual de fracciones parciales*. Cuenca: Editorial Universidad Abya-Yala, 2012 [Online]. Available: <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/6119>
- [31] Z. Cervenanska, J. Kotianova, and A. Strasiftak, "Laplace transform in application using computational knowledge engine," in *2012 15th International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL)*, 2012, pp. 1–4 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2011.12.002>
- [32] J. L. Duarte Madrid, E. A. González Querubín, and P. A. Ospina Henao, "MPC in Space State for the Control of a Furuta Pendulum," A. P. P. Abdul Majeed, J. A. Mat-Jizat, M. H. A. Hassan, Z. Taha, H. L. Choi, and J. Kim, Eds. Singapore: Springer Singapore, 2020, pp. 219–235 [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-981-13-8323-6_19
- [33] Shuping Dang, Yubo Sun, L. Baker, and A. Gholamzadeh, "Dynamical oil-immersed transformer thermal control model based on thermal-electrical analogy and its analytical solution using laplace transform," in *2014 14th International Conference on Environment and Electrical Engineering*, 2014, pp. 241–244 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/EEEIC.2014.6835871>
- [34] M. De La Sen, "On the External Positivity of Linear Time-Invariant Dynamic Systems," *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, vol. 55, no. 2, pp. 188–192, Feb. 2008 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2007.911818>
- [35] T. At and T. H. E. Origin, "Initial conditions, generalized functions, and the laplace transform troubles at the origin," *IEEE Control Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 22–35, Feb. 2007 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/MCS.2007.284506>
- [36] N. Yalcin, E. Celik, and A. Gokdogan, "Multiplicative Laplace transform and its applications," *Optik (Stuttg.)*, vol. 127, no. 20, pp. 9984–9995, Oct. 2016 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.07.083>
- [37] A. G. Bolton, "Design of sampled control systems using laplace domain techniques," *IEE Proc. G (Electronic Circuits Syst.)*, vol. 128, no. 3, p. 138, 1981 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/ip-g-1.1981.0026>

- [38] Y. Yan, F. C. Lee, P. Mattavelli, and S. Tian, "Small-signal Laplace-domain model for digital predictive current mode controls," in *2012 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2012, pp. 1386–1393 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/ECCE.2012.6342653>
- [39] Q. HONG, Y. SHI, and D. LU, "Dynamics modeling and pressure control of composites tape winding system based on LQSMC," *Chinese J. Aeronaut.*, May 2019 [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.04.021>
- [40] Yongji Wang and Hong Wang, "Output PDFs control for linear stochastic systems with arbitrarily bounded random parameters: a new application of the Laplace transform," *Proc. 2002 Am. Control Conf. (IEEE Cat. No.CH37301)*, vol. 5, pp. 4262–4267 vol.5, 2002 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2002.1024601>
- [41] Q.-C. Zhong, A. Kuperman, and R. K. Stobart, "Filter Design for UDE-based Controllers," in *UKACC International Conference on CONTROL 2010*, 2010, vol. 2010, no. 4, pp. 583–588 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/ic.2010.0347>
- [42] H. Yang, F. Wang, and F. Han, "Containment Control of Fractional Order Multi-Agent Systems With Time Delays," *IEEE/CAA J. Autom. Sin.*, vol. 5, no. 3, pp. 727–732, May 2018 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/JAS.2016.7510211>
- [43] L. H. I. Lim, Z. Ye, J. Ye, D. Yang, and H. Du, "A linear identification of diode models from single I-V characteristics of PV panels," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 7, pp. 4181–4193, Jul. 2015 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2015.2390193>
- [44] R. Brito, A. Carvalho, and M. Gericota, "A new three-phase voltage sourced converter laplace model," in *2015 9th International Conference on Compatibility and Power Electronics (CPE)*, 2015, pp. 160–166 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/CPE.2015.7231066>
- [45] J. Van de Vegte and J. Li, "Design of Passive Beam Vibration Controls by Multivariable Frequency Domain Control Techniques," in *1989 American Control Conference*, 1989, no. 6, pp. 2796–2801 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.23919/acc.1989.4790666>
- [46] J. Li and Y. Hu, "PID controller parameter iterative learning scheme design for missile roll-tunnel model," in *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, CCC 2011*, 2011, pp. 2415–2418 [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6000775>
- [47] J. Q. Xie and M. Farooq, "Frequency domain stability test of SISO systems with memoryless nonlinear feedback," in *Proceedings of IEEE International Conference on Industrial Technology 2000 (IEEE Cat. No.00TH8482)*, vol. 1, pp. 206–210 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/ICIT.2000.854128>
- [48] J. Klima, "Analytical closed-form solution of a space-vector modulated VSI feeding an induction motor drive," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 17, no. 2, pp. 191–196, Jun. 2002 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TEC.2002.1009467>
- [49] V. Sooraj and J. L. Febin Daya, "A Large Signal Dynamic Model of Loosely Coupled IPT System for EV Based on Laplace Phasor Transform," in *2018 IEEE International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems (PEDES)*, 2018, vol. 2,

pp. 1–6 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/PEDES.2018.8707822>

- [50] Y. N. Rosenvasser, E. Y. Polyakov, and B. P. Lampe, “Application of Laplace transformation for digital redesign of continuous control systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 4, pp. 883–886, Apr. 1999 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/9.754840>
- [51] R. A. O’Connell, “Simple recursive processes for determining Laplace and Z transforms of the zero-input responses of linear time-invariant systems,” *IEEE Trans. Educ.*, vol. 45, no. 2, pp. 168–170, May 2002 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TE.2002.1013882>
- [52] H. R. Miller, D. L. Trumper, and K. H. Lundberg, “A Brief Treatment of Generalized Functions for Use in Teaching the Laplace Transform,” *Proc. 45th IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 3885–3889, 2006 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/cdc.2006.377468>
- [53] N. Bayan, S. Erfani, and B. Shahrava, “Two-dimensional Laplace transform-based analysis for communication systems,” in *48th Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2005.*, 2005, vol. 1, no. 1, pp. 349–350 Vol. 1 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/MWSCAS.2005.1594110>
- [54] N. Nagaoka and T. Ishii, “A logarithmic segmented Laplace transform and its application to a battery diagnosis,” in *2017 52nd International Universities Power Engineering Conference (UPEC)*, 2017, vol. 2017-Janua, pp. 1–5 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/UPEC.2017.8232026>
- [55] K. Udagawa *et al.*, “Analytic method using laplace transform for a modified TRV of a circuit breaker,” in *IEEE PES T&D 2010*, 2010, pp. 1–6 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TDC.2010.5484511>
- [56] S. Djordjevic, O. H. Bosgra, and P. M. J. Van den Hof, “Boundary control of two-phase fluid flow using the Laplace-space domain,” in *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 2011, pp. 3283–3288 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2011.5991245>
- [57] J. Liao, N. Zhou, and Q. Wang, “DC-side harmonic analysis and DC filter design in hybrid HVDC transmission systems,” *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 113, pp. 861–873, Dec. 2019 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.06.013>
- [58] W. K. Zahra, M. M. Hikal, and T. A. Bahnasy, “Solutions of fractional order electrical circuits via Laplace transform and nonstandard finite difference method,” *J. Egypt. Math. Soc.*, vol. 25, no. 2, pp. 252–261, Apr. 2017 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.joems.2017.01.007>
- [59] A. J. Prado, L. S. Lessa, E. Assuncao, M. C. M. Teixeira, R. C. Monzani, and J. P. Filho, “Laplace’s analyses for application of π circuits’ associations in digital simulations,” in *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, 2016, pp. 3276–3276 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/PIERS.2016.7735281>
- [60] L. A. Kraft and M. D. Kankam, “Modelling a single phase, voltage controlled rectifier using Laplace transforms,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 388–394, May 1993 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/59.260848>
- [61] T. Solyar, “Investigation of the Crack’s Effect on SH-Waves Propagation Based on the

- Regularized Formula of Inverse Laplace Transform,” in *2018 XXIIIrd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, 2018, vol. 1, no. 1, pp. 170–174 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543262>
- [62] F. Tossani, F. Napolitano, and A. Borghetti, “Inverse Laplace Transform of the Ground Impedance Matrix of Overhead Lines,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 60, no. 6, pp. 2033–2036, Dec. 2018 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2017.2765207>
- [63] R. Nuricumbo-Guillén, F. P. Espino-Cortés, and P. Gómez, “Computation of transient voltage and current profiles along illuminated multiconductor lines by means of the numerical Laplace transform,” *IET Gener. Transm. Distrib.*, vol. 9, no. 13, pp. 1608–1613, Oct. 2015 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/iet-gtd.2014.0866>
- [64] S. Erfani and M. Ahmadi, “Fundamentals of generalized Laplace transform techniques for linear time-varying systems,” in *ISSCS 2011 - International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, 2011, no. 3, pp. 1–4 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/ISSCS.2011.5978707>
- [65] M. Ahmad and L. Yang, “Laplace transform current density convolution finite-difference time-domain formulation for the modelling of 1D graphene,” *IET Microwaves, Antennas Propag.*, vol. 11, no. 15, pp. 2211–2218, Dec. 2017 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/iet-map.2016.0899>
- [66] S. Ohnuki, S. Watanabe, and K. Nagasawa, “Time-domain analysis of electromagnetic fields using the fast inverse Laplace transform,” in *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, 2016, vol. 146, no. 1, pp. 1786–1786 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/PIERS.2016.7734795>
- [67] S. Kishimoto, S. Ohnuki, Y. Ashizawa, K. Nakagawa, S. Y. Huang, and W. C. Chew, “Time-domain analysis of electromagnetic problems for nanoscale objects by integral equation methods with fast inverse Laplace transform,” in *2013 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium)*, 2013, no. 1, pp. 47–47 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/USNC-URSI.2013.6715353>
- [68] I. G. Enting, “Laplace transform analysis of the carbon cycle,” *Environ. Model. Softw.*, vol. 22, no. 10, pp. 1488–1497, Oct. 2007 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2006.06.018>
- [69] P. Caputo, V. Loise, S. Ashimova, B. Teltayev, R. Vaiana, and C. Oliviero Rossi, “Inverse Laplace Transform (ILT) NMR: A powerful tool to differentiate a real rejuvenator and a softener of aged bitumen,” *Colloids Surfaces A Physicochem. Eng. Asp.*, vol. 574, pp. 154–161, Aug. 2019 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.colsurfa.2019.04.080>
- [70] Y. Yang, Z. Cai, and Y. Liu, “Interval analysis of dynamic response of structures using Laplace transform,” *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 29, pp. 32–39, Jul. 2012 [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2011.12.002>
- [71] R. E. Williamson, *Students solutions manual for use with: Introduction to differential*

equations and dynamical systems. Boston: McGraw-Hill, 2001.

- [72] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*. 2012.
- [73] R. K. Nagle, E. B. Saff, and A. D. Snider, *Fundamentals of differential equations*. 2018.
- [74] R. Ocampo and E. C. M. Bernal, "Diseño e implementación de un sistema de control pid para la supervisión de la temperatura del reactor multipropósito," p. 120, 2018 [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/11349/14159>