



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Sebastián Alejandro Gómez Ardla
Dirigido por: Verónica Cifuentes Vargas

Bogotá DC
Junio de 2021

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar un estudio de las álgebras de conglomerado, siendo introducidas desde la relación que se da entre las mutaciones asociadas a un carcaj y las triangulaciones de los polígonos regulares. Para esto se presentan conceptos y resultados de la teoría de representaciones y de las álgebras de caminos de carcajes, los cuales nos brindan las herramientas para formalizar la relación ya mencionada. Como resultado de la relación previa se presenta unos teoremas que caracterizan las álgebras de conglomerado del tipo finito asociadas a los diagramas del tipo Dinkin A_n .

Palabras clave: Álgebras, álgebras de Conglomerado, carcajes, clases de mutación, diagonales, mutaciones, representaciones de carcajes, triangulaciones.

Clasificación AMS: 13F60, 16G20, 05E15.

Agradecimientos: Procure ser sobrio y breve

1. Introducción

Las álgebras de conglomerado fueron introducidas por Fomin y Zelevinsky [6] como una subálgebra en el campo de las funciones racionales generada por una familia de variables llamada variables de conglomerado, cuyo propósito principal era el estudio de las bases canónicas en la teoría de Lie. Ellos presentaron una estructura algebraica con grandes propiedades combinatoriales que en el transcurso de estas dos décadas se a conectado con diversas áreas de estudio, como lo son la física teórica, sistemas dinámicos discretos, teoría de representaciones, geometría, entre otros campos [3] [4] [9].

Como resultado del estudio de las álgebras de conglomerado, se han logrado importantes resultados, como la clasificación de álgebras de conglomerado finitas por un sistema de raíces. Caldero y Keller [2] mostraron que los monomios de conglomerado forman una base de la álgebra de conglomerados si y solo si hay unicamente un número finito de variables de conglomerado. También se ha comprobado que los monomios de conglomerado son linealmente independiente para todas las álgebras de conglomerados asociadas a los carcajes [5].

Fomin y Zelevinsky [7] presentaron una clasificación de las álgebras de conglomerado de tipo finito a partir de los Diagramas de Dynkin. En particular, introdujeron una realización geométrica de las álgebras de conglomerados de tipo A_n a partir de las triangulaciones de polígonos con $n + 3$ vértices, mostrando que cada diagonal del polígono esta en correspondencia con una variable de conglomerado del álgebra inducida por una triangulación de un polígono. Cabe recordar que los diagramas de Dynkin son de vital importancia ya que además de caracterizar las álgebras de conglomerado, clasifican las álgebras de caminos de tipo finito [8].

En este trabajo, se presentará la construcción de las álgebras de conglomerado y la asociación natural que existe entre las triangulaciones de polígonos regulares y su conexión directa con las carcajes del tipo Dynkin A_n . Este documento se distribuye de la siguiente forma; en la sección 2 se recuerda los conceptos de álgebra, carcajes, álgebras de caminos, representaciones asociadas a carcajes, también se presentan teoremas importantes de clasificación de álgebras de tipo finito. En la sección 3.1, se presentan la definición de mutación de carcajes, clases de mutación y la equivalencia de mutaciones. Las triangulaciones de en un polígono regular y los carcajes de tipo A_n son enunciados en la sección 3.2. Por último y no menos importante, en la sección 4, se recuerda la definición del álgebra de conglomerado, y un teorema de clasificación que las caracteriza a partir de su diagrama subyacente.

2. Preliminares

En esta sección se presentan las definiciones que serán clave para el desarrollo de los conceptos que se tratarán a lo largo del trabajo [1] [10]. Sea K un cuerpo, se asumirá que K es algebraicamente cerrado.

Definición 2.1 (K -álgebra Asociativa). Un álgebra asociativa A sobre K es un espacio vectorial A sobre K con una aplicación bilineal $A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto ab$ tal que cumple $(ab)c = a(bc)$.

De ahora en adelante el álgebra asociativa A sobre un espacio vectorial K será denotada solamente K -álgebra A . Se dice que una **unidad** en una K -álgebra A es un elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$.

Definición 2.2 (K -Subálgebra). Un K -subálgebra B es un K -subespacio vectorial $B \subseteq A$ tal que la identidad $1 \in A$ se encuentra en B y además cuenta con una aplicación bilineal $B \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto ab$.

Definición 2.3 (Ideal). Un K -subespacio vectorial I de un K -álgebra A es un **ideal** de A si $ia \in I, ai \in I$ para todo $i \in I$ y $a \in A$.

Ejemplo 2.4. Como ejemplo de K -álgebras, se tiene $A = K[x_1, \dots, x_n]$ la K -álgebra de polinomios en las variables x_1, \dots, x_n , de aquí se obtiene la K -subálgebra $B = K[x_1^2, \dots, x_n^2]$. Otro ejemplo es $A = \text{End } V$ la K -álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial sobre K , es decir, las aplicaciones lineales de V en si misma, la multiplicación es dada por la composición de operaciones.

Definición 2.5 (Álgebra de dimensión finita). Una K -álgebra es de dimensión finita si la dimensión de A sobre K del K -espacio vectorial es finito. Una K -álgebra de dimensión finita es de tipo representación finito si el número de clases de isomorfía de A -módulos de dimensión finita es finito. Una K -álgebra es de tipo representación infinito si no es de tipo representación finito.

Ahora, se introduce la definición de carcaj, herramienta que será de gran ayuda para el desarrollo del trabajo.

Definición 2.6 (Carcaj). Un **carcaj** es una tupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, donde Q_0 y Q_1 son conjuntos y $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ son aplicaciones arbitrarias, tal que los elementos del conjunto Q_0 serán llamados **vértices** y los elementos del conjunto Q_1 serán llamados **flechas**. Para una flecha $\alpha \in Q_1$, se refieren los vértices $s(\alpha) \in Q_0$ como el **vértice inicial** y el vértice $t(\alpha) \in Q_0$ como el **vértice terminal** de α .

De ahora en adelante, un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ será denotado solamente Q , donde se entenderá que Q_0, Q_1 son el conjunto de vértices y flechas de Q respectivamente; s, t las funciones que relaciona los vértices iniciales y finales respectivamente con las flechas en Q_1 . Por otro lado, siempre es conveniente realizar una representación gráfica del carcaj.

Ejemplo 2.7. Si se tiene un carcaj Q con $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, además $s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 2, s(\beta) = 2, t(\beta) = 3, s(\gamma) = 2$ y $t(\gamma) = 4$, su representación gráfica es como se presenta en la figura 1. El concepto es también conocido como grafo dirigido en las matemáticas discretas.

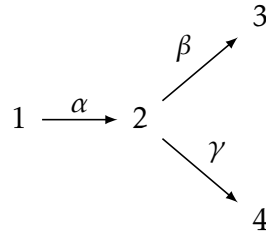


Figura 1: Ejemplo de un carcaj

Definición 2.8 (Isomorfismo). Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. Un **isomorfismo** entre Q y Q' es un par (f_0, f_1) de aplicaciones biyectivas $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ y $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tales que los diagramas de la figura 2 conmuten, es decir, para todas las flechas $\alpha \in Q_1$ se tiene $f_0(s(\alpha)) = s'(f_1(\alpha))$ y $f_0(t(\alpha)) = t'(f_1(\alpha))$. Si hay un isomorfismo entre Q y Q' , entonces el carcaj Q y Q' son llamados **isomorfos**. En este caso se escribe $Q \cong Q'$.

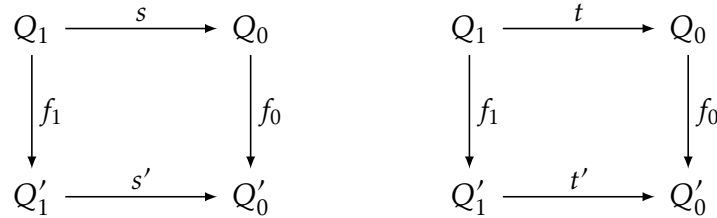


Figura 2: Diagramas conmutativos de un isomorfismo de carcajes

Definición 2.9 (Fuentes y sumideros). Sea Q un carcaj. Un vértice $i \in Q_0$ se llama **fuente** si no hay flechas $\alpha \in Q_1$ con $t(\alpha) = i$. Un vértice $i \in Q_0$ se llama **sumidero** si no hay flechas $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha) = i$.

En el carcaj que es mostrado en la figura 1, el vértice 1 es una fuente, mientras que los vértices 3 y 4 son sumideros.

Definición 2.10 (Camino). Sea Q un carcaj. Si $m \geq 1$ es un entero positivo, entonces una secuencia $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in Q_1^m$ de flechas tal que $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ será llamado un **camino de longitud m** en Q . En este caso, el vértice $s(\alpha_1)$ se llama el **vértice inicial de p** y el vértice $t(\alpha_m)$ se llama el **vértice terminal de p** y se escribe $s(p) = s(\alpha_1)$ y $t(p) = t(\alpha_m)$. Para cada vértice $i \in Q_0$ se introduce un **camino trivial** e_i de longitud 0 y definimos $s(e_i) = t(e_i) = i$. Un camino p es llamado **cerrado** si $s(p) = t(p)$. Un camino cerrado de longitud 1 es llamado un **lazo**.

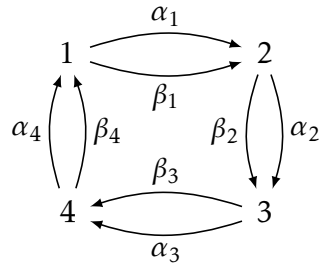


Figura 3: Ejemplo de carcaj con múltiples caminos

Ejemplo 2.11. En el carcaj Q cuya representación gráfica es como se presenta en la figura 3, la secuencia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ de flechas es un camino cerrado que empieza y termina en el vértice 1, la secuencia (β_2, β_3) es un camino que empieza en el vértice 2 y termina en el vértice 4. Note que, la secuencia (β_4, β_3) no es un camino.

Definición 2.12 (Ciclo). Sea Q un carcaj. Dos caminos cerrados $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ y $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m)$ de la misma longitud $m \geq 1$ en Q son **equivalentes** si hay un entero $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m) = (\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$. Sea $m \in \mathbb{N}$ un entero positivo, un **ciclo orientado de longitud m** o un **m -ciclo** es una clase de equivalencia de un camino cerrado de longitud m . Un ciclo orientado de longitud 3 es llamado un **triángulo**.

En la figura 3 se pueden obtener $2^4 = 16$ 4-ciclos diferentes.

Definición 2.13 (Subcarcaj). Sea Q un carcaj. Un carcaj $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ con $Q'_0 \subseteq Q_0$ y $Q'_1 \subseteq Q_1$ es llamado un subcarcaj de Q si para cada flecha $\alpha \in Q'_1$ los vértices iniciales y terminales $s(\alpha), t(\alpha) \in Q'_0$ y satisfacen $s'(\alpha) = s(\alpha)$ y $t'(\alpha) = t(\alpha)$. Un subcarcaj es llamado **completo** si cada flecha $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha), t(\alpha) \in Q'_0$ se encuentra en Q'_1 .

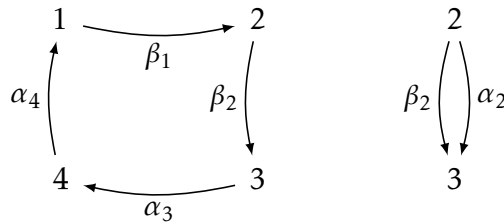


Figura 4: Subcarcaj - Subcarcaj completo

Ejemplo 2.14. En el carcaj Q de la figura 3, se puede definir un subcarcaj Q' con $Q'_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Q'_1 = \{\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2\}$ (el cual no es completo). También se puede definir el subcarcaj completo Q''

con $Q_0'' = \{2, 3\}$. Sus representaciones gráficas es como se presenta en la figura 4. Se aprecia que un subcarcaj completo es unicamente determinado por su conjunto de vértices.

Definición 2.15 (Acíclico). Un carcaj Q es llamado **acíclico** si no contiene un ciclo orientado (o de manera equivalente, si no contiene un camino cerrado).

Ejemplo 2.16. Un ejemplo de un carcaj acíclico es el que se presenta en la figura 1, otro ejemplo es el subcarcaj completo que se presenta en la figura 4, ya que estos no presentan algún ciclo orientado, o camino cerrado. Es fácil ver que un carcaj es acíclico si y solo si contiene un número finito de caminos; o que si un carcaj contiene un lazo, entonces este no puede ser acíclico.

Definición 2.17 (Conexo). Se dice que un carcaj Q es **no-conexo** si existe una partición $Q_0 = Q_0' \sqcup Q_0''$ del conjunto de vértices en dos conjuntos disjuntos no vacíos, tales que los vértices iniciales y finales $s(\alpha), t(\alpha)$ de cada flecha $\alpha \in Q_1$ pertenezcan a la misma partición; se dice que Q es **conexo**, si no es no-conexo.

Definición 2.18 (Diagrama Subyacente). El grafo formado por los vértices Q_0 tal que hay una arista de i a j por cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_1 es llamado el **diagrama subyacente** \overline{Q} de Q .

Definición 2.19 (K -álgebra de caminos). Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K -álgebra cuyo K -espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in Q_1^m$ de longitud $m \geq 0$ en Q y tal que el producto de dos vectores bases $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ y $q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ (con $n \geq 0$) de KQ esta definida por

$$pq = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \delta_{t(p),s(q)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

donde $\delta_{t(p),s(q)}$ denota la delta de Kronecker¹. En otras palabras, el producto de dos caminos $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ y $q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ es igual a cero si $t(p) \neq s(q)$ y es igual a la composición $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ si $t(p) = s(q)$. El producto de los elementos de la base es entonces extendido a elementos arbitrarios de KQ por distributividad.

Se puede ver que existe una descomposición de suma directa de la forma

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \dots \oplus KQ_l \oplus \dots$$

del espacio vectorial KQ , donde, para cada $l \geq 0$, KQ_l es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_l de todos los caminos de longitud l .

Ejemplo 2.20. Sea Q el carcaj



¹ $\delta_{a,b} = 0$ si $a \neq b$ y $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$

que consiste de un único punto y un lazo. La base definida del álgebra KQ inducida por Q es $\{e_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^l, \dots\}$ y la multiplicación de vectores de la base es dada por

$$\begin{aligned} e_1 \alpha^l &= \alpha^l e_1 = \alpha^l && \text{para todo } l \geq 0, \text{ y} \\ \alpha^l \alpha^k &= \alpha^{l+k} && \text{para todo } l, k \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha^0 = e_1$.

Definición 2.21 (Ideal de flechas). Sea Q un carcaj finito y conexo. El ideal del álgebra de caminos KQ generado por las flechas de Q es llamado el **ideal de flechas** de KQ y es denotado por R_Q .

Definición 2.22 (Carcaj acotado). Sea Q un carcaj finito y R_Q las flechas ideales de la K -álgebra de caminos KQ . Un ideal bilátero I de KQ se llama **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que:

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$$

Si I es un ideal admisible de KQ , el par (Q, I) es llamado un **carcaj acotado**. El álgebra cociente KQ/I es la K -álgebra del carcaj acotado (Q, I) .

El conjunto R_Q^m es el conjunto de los caminos de longitud $m \geq 2$ que se hallan en KQ . Por otro lado, se puede ver que los carcajes ofrecen un conveniente camino para visualizar las K -álgebras de dimensión finita, para este propósito se introduce las siguientes definiciones.

Definición 2.23 (Representación). Sea Q un carcaj finito, Una **representación** M de Q se define por la siguiente información:

- i) Cada vértice $i \in Q_0$ esta asociado a un espacio vectorial M_i .
- ii) Cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_1 esta asociado a una aplicación lineal $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$.

La representación será notada como $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, o simplemente $M = (M_i, \varphi_\alpha)$. Esta es llamada **de dimensión finita** si cada espacio vectorial M_i es de dimensión finita.

Sea $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q . Un **morfismo** (de representaciones) $f : M \rightarrow M'$ es una familia $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ de aplicaciones lineales $(f_i : M_i \rightarrow M'_i)_{i \in Q_0}$ que son compatibles con la aplicación φ_α , esto es, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$, se cumple $\varphi'_\alpha f_i = f_j \varphi_\alpha$ o de forma equivalente, el siguiente cuadro es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Sea $f : M \rightarrow M'$ y $g : M' \rightarrow M''$ dos morfismos de representaciones de Q , donde $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ y $g = (g_i)_{i \in Q_0}$. Su composición es definida como la familia $gf = (g_i f_i)_{i \in Q_0}$. Entonces se aprecia fácilmente que gf es un morfismo de M a M'' .

Ejemplo 2.24. Sea Q el carcaj

$$1 \rightleftarrows 2$$

Una representación M de Q esta dada por

$$K^2 \xrightleftharpoons[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} K$$

Otra representación M' es dada por

$$K^2 \xrightleftharpoons[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} K^2$$

Ambas son de dimensión finita. Se tiene además un morfismo $M \rightarrow M'$ definido por

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightleftharpoons[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & K \\ \downarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ K^2 & \xrightleftharpoons[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 \end{array}$$

Se comprueba fácilmente que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando la definición de categoría presentada en [1], se construye la categoría de representaciones $\text{Rep } Q$ de un carcaj Q , donde $\text{Ob}(\text{Rep } Q)$ son las representaciones del carcaj Q , y $\text{Hom}(\text{Rep } Q)$ son los isomorfismos entre las representaciones de Q . Se denota por $\text{rep } Q$ la subcategoría completa de $\text{Rep } Q$ que consiste de todas las representaciones de dimensión finita de Q .

A continuación se presentan dos teoremas que relacionan las representaciones de un carcaj Q y los A -módulos asociados a la K -álgebra inducida por Q y describen cuando un álgebra de caminos es de

tipo representación finito. La categoría de representaciones K -lineal de dimensión finita de Q acotado por I es denotada por $\text{Rep}_K(Q, I)$.

Teorema 2.25. *Sea $A = KQ/I$, donde Q es un carcaj finito conexo e I es un ideal admisible de KQ . Entonces existe una equivalencia K -lineal de categorías*

$$F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Rep}_K(Q, I)$$

que restringe a una equivalencia de categorías $F : \text{mod } A \rightarrow \text{rep}_K(Q, I)$

Teorema 2.26. *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico; K un cuerpo algebraicamente cerrado, y $A = KQ$ la K -álgebra de caminos de Q . Se tiene que, la K -álgebra A es una representación tipo finita si y solo si el grafo subyacente \overline{Q} de Q es uno de los diagramas de Dynkin, como se muestran en la figura 5.*

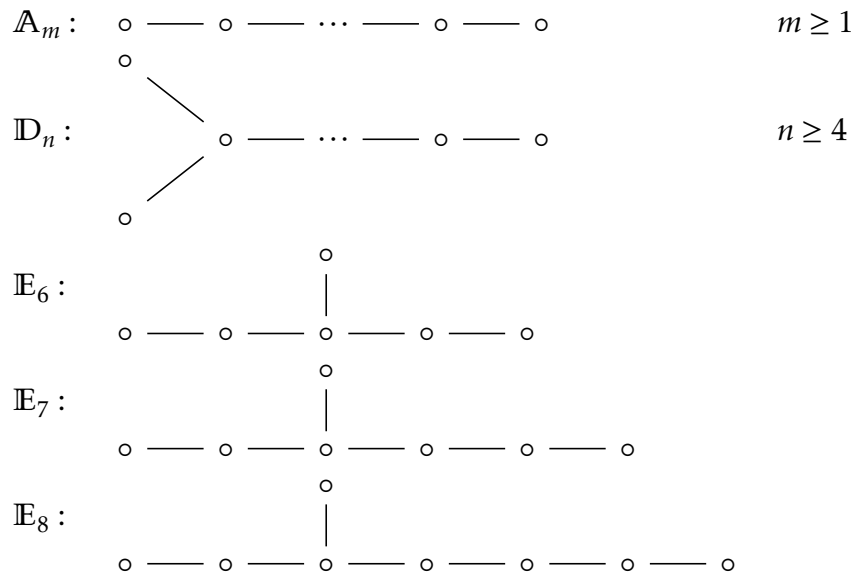


Figura 5: Diagramas Dynkin

Las demostraciones de estos teoremas pueden ser consultadas en [1].

3. Mutación

En esta sección se recordará conceptos básico de las mutaciones de carcajes y su relación con las triangulaciones de polígonos regulares asociadas a carcajes del tipo Dynkin A_n [10].

3.1. Mutación asociada a carcajes

Se introducirá la definición de mutación, mutaciones equivalentes y clases de mutaciones, que son conceptos que permitirán caracterizar diferentes clases de carcajes. Se presentarán algunas propiedades y ejemplos que ayudarán con la comprensión de estos términos. Para este propósito se considerara en todo momento un carcaj Q sin lazos y sin 2-ciclos.

Definición 3.1 (Predecesor directo y Sucesor directo). Sea Q un carcaj sin lazos y sin 2-ciclos. Sea $k \in Q_0$ un vértice, se llama a un vértice $i \in Q_0$ un **predecesor directo** de k si existe $\alpha \in Q_1$ tal que $i \xrightarrow{\alpha} k$, y se llama a un vértice $j \in Q_0$ un **sucesor directo** de k si existe $\beta \in Q_1$ tal que $k \xrightarrow{\beta} j$. Además, se llama a una flecha $\alpha \in Q_0$ **saliente** si $s(\alpha) = k$ y se llama **entrante** si $t(\alpha) = k$.

Se denota el conjuntos de los predecesores y sucesores directos de k por $PD(k)$ y $SD(k)$ respectivamente. Dado que el carcaj Q no contiene lazos ni 2-ciclos, los conjuntos $PD(k)$ y $SD(k)$ son disjuntos, y $k \notin PD(k) \cup SD(k)$. De esta manera se puede considerar el conjunto $U(k) = Q_0 \setminus \{k\} \cup PD(k) \cup SD(k)$ de vértices que no están relacionados con k , y se tiene la siguiente partición en los vértices de Q .

$$Q_0 = \{k\} \sqcup PD(k) \sqcup SD(k) \sqcup U(k).$$

Por otro lado, se denota el conjunto de flechas salientes y entrantes por $S(k)$ y $T(k)$, respectivamente. Estos conjuntos son disjuntos ya que no hay lazos en Q . Sea

$$A(k) = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \in PD(k), t(\alpha) \in SD(k)\} \cup \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \in SD(k), t(\alpha) \in PD(k)\}$$

un conjunto de flechas que conecta un predecesor directo de k con un sucesor directo de k o viceversa. A partir de los anteriores conjuntos, se tomará $R(k) = Q_1 \setminus \{A(k) \cup S(k) \cup T(k)\}$ como el conjunto de las flechas restantes, generando la siguiente partición del conjunto de flechas Q_1

$$Q_1 = S(k) \sqcup T(k) \sqcup A(k) \sqcup R(k).$$

Definición 3.2 (Matriz adyacente). Sea Q un carcaj arbitrario con $n = |Q_0|$ vértices, que no contiene lazos ni 2-ciclos. La **matriz adyacente** de Q es la matriz entera $A = A(Q) = (a_{ij})_{i,j \in Q_0}$ de dimensión $n \times n$ donde a_{ij} es el número de flechas $i \rightarrow j$ con vértice inicial $i \in Q_0$ y vértice terminal $j \in Q_0$. La **matriz adyacente signada** de Q es la matriz entera $B = B(Q) = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$ de dimensión $n \times n$ donde $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$.

Por la construcción de la matriz adyacente signada $B = B(Q) = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$ de un carcaj Q , B es una matriz antisimétrica. Se expone a continuación un breve ejemplo.

Ejemplo 3.3. Sea Q un carcaj de la figura 1, la matriz adyacente $A(Q)$, y la matriz adyacente signada $B(Q)$ del carcaj Q son:

$$A(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente se aprecia la antisimetría de la matriz $B(Q)$.

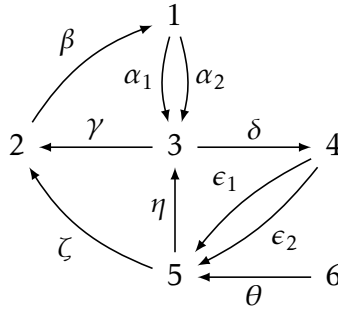
A partir de las definiciones previas, se procederá a presentar la mutación de un carcaj.

Definición 3.4 (Mutación de un carcaj). Sea Q un carcaj sin lazos y 2-ciclos, y sea $k \in Q_0$ un vértice de Q . La mutación de Q en k es de nuevo un carcaj $\mu_k(Q) = Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ que se construye como sigue:

- (a) Los vértices de Q no cambian bajo la mutación, es decir, $Q_0 = Q'_0$.
- (b) El conjunto de flechas varía bajo la mutación, siendo el nuevo conjunto de flechas igual a la unión $Q'_1 = S^*(k) \cup T^*(k) \cup A^*(k) \cup R(k)$ donde los cuatro conjuntos se obtienen de la siguiente forma:
 - (M1) Se invierten todas las flechas que terminan en k : si $\alpha \in T(k)$ es una flecha $i \xrightarrow{\alpha} k$ en Q_1 para algún predecesor directo $i \in PD(k)$, entonces se cumple que $\alpha^* \in Q'_1$ será una flecha $k \xrightarrow{\alpha^*} i$, es decir, se establece $s'(\alpha^*) = k$ y $t'(\alpha^*) = i$. Entonces $S^*(k) = \{\alpha^* : \alpha \in T(k)\}$.
 - (M2) Se invierten todas las flechas que inicien en k : si $\beta \in S(k)$ es una flecha $k \xrightarrow{\beta} j$ en Q_1 para algún sucesor directo $j \in SD(k)$, entonces se cumple que $\beta^* \in Q'_1$ será una flecha $j \xrightarrow{\beta^*} k$, es decir, se establece $s'(\beta^*) = j$ y $t'(\beta^*) = k$. Así se obtiene $T^*(k) = \{\beta^* : \beta \in S(k)\}$.
 - (M3) Sea $i \in PD(k)$ un predecesor directo y $j \in SD(k)$ un sucesor directo de k . Sea r_{ij} el número de caminos $(\alpha, \beta) \in Q_1 \times Q_1$ de la forma $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ en Q , y sea $A_{ij} = r_{ij} + b_{ij}$. Si $A_{ij} \geq 0$, entonces se define $A^*(k)$ como el conjunto que contiene A_{ij} flechas $\alpha_{ij}(r) : i \rightarrow j$ (para $1 \leq r \leq A_{ij}$). Por otro lado se define $A^*(k)$ como el conjunto que contenga $-A_{ij}$ flechas $\alpha_{ji}(r) : j \rightarrow i$ (para $1 \leq r \leq -A_{ij}$).
 - (M4) Las flechas en el conjunto $R(k)$ no cambian bajo la mutación.

Una manera más intuitiva de describir la regla (M3) de la mutación es que para cada camino $i \rightarrow k \rightarrow j$ se agrega una flecha $i \rightarrow j$, luego de esto, se remueven los 2-ciclos que se hayan creado con el paso anterior. A continuación se presenta un ejemplo, donde se ilustra las definiciones presentadas previamente.

Ejemplo 3.5. Sea Q el carcaj



Al tomar el vértice $k = 3$, se obtienen:

- $S(3) = \{\gamma, \delta\}$ el conjunto de flechas salientes.
- $T(3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \eta\}$ el conjunto de flechas entrantes.
- $PD(3) = \{1, 5\}$ el conjunto de predecesores directos.
- $SD(3) = \{2, 4\}$ el conjunto de sucesores directos.
- $U(3) = \{6\}$ y $R(3) = \{\theta\}$ los conjuntos de los vértices y flechas respectivamente que no se relacionan con el vértice 3.
- $A(3) = \{\beta, \epsilon_1, \epsilon_2, \zeta\}$ las flechas que unen a un predecesor directo con un sucesor directo del vértice 3 o viceversa.

Por tanto, la mutación esta dada por la figura 6. Note que, por las reglas (M1) y (M2) la mutación invierte las flechas entrantes $\phi \in T(3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \eta\}$, así como las flechas salientes $\varphi \in S(3) = \{\gamma, \delta\}$ (las cuales son señaladas en azul). Por (M4) la flecha $\theta \in R(3)$ permanece inalterable. Se tiene una flecha (roja) $\beta : 2 \rightarrow 1$, y los caminos (α_r, γ) con $r \in \{1, 2\}$ ofrecen dos nuevas flechas del vértice 1 al vértice 2, de acuerdo a la regla de mutación (M3), como $A_{12} = 2 - 1 = 1 \geq 0$, el carcaj $\mu_3(Q)$ tiene una flecha $\alpha_{12}(1) : 1 \rightarrow 2$. Se presentan los caminos (α_r, δ) con $r \in \{1, 2\}$, que generan dos nuevas flechas del vertice 1 al vertice 4, por la regla de mutación (M3), $A_{14} = 2 + 0 = 2 \geq 0$, el carcaj $\mu_3(Q)$ presenta dos flechas $\alpha_{14}(1), \alpha_{14}(2) : 1 \rightarrow 4$. Se tiene dos flechas (rojas) $\epsilon_1, \epsilon_2 : 4 \rightarrow 5$ y el camino (η, δ) ofrece una nueva flecha $5 \rightarrow 4$, de acuerdo a la regla de mutación (M3), dado que, $A_{54} = 1 - 2 = -1 < 0$, entonces el carcaj $\mu_3(Q)$ tiene una flecha $\alpha_{45} : 4 \rightarrow 5$. Por último se tiene una flecha (roja) $\zeta : 5 \rightarrow 2$ y el camino (η, γ) ofrece una nueva flecha $5 \rightarrow 2$. De acuerdo a la regla de mutación (M3), se tiene $A_{52} = 1 + 1 = 2 \geq 0$, lo que implica que el carcaj $\mu_3(Q)$ tiene dos flechas $\alpha_{52}(1), \alpha_{52}(2) : 5 \rightarrow 2$.

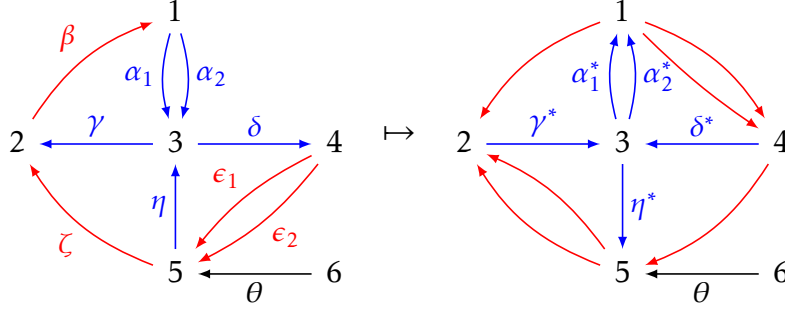


Figura 6: Mutación de un carcaj

De la definición de mutación de carcaj, se puede ver un comportamiento que es descrito en la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *La asignación $Q \mapsto \mu_k(Q)$ es involutiva, es decir, para todos los carcaj Q sin lazos y 2-ciclos, y todos los vértices $k \in Q_0$, se cumple que $Q \cong \mu_k(\mu_k(Q))$.*

Demostración. Sea Q un carcaj sin lazos y 2-ciclos, y sean $i, j, k \in Q_0$ vértices con $i \neq j$. Como abreviación de notación, se escribirá $Q' = \mu_k(Q)$ y $Q'' = \mu_k(\mu_k(Q))$. Se probará que el número de flechas $i \rightarrow j$ en Q_1 es igual a el número de flechas $i \rightarrow j$ en Q''_1 .

Primero, note que el conjunto de predecesores directos de k en Q' es $SD(k)$ y el conjunto de sucesores directos de k en Q' es $PD(k)$. Además, $S^*(k)$ es el conjuntos de flechas en Q' que terminan en k y $T^*(k)$ es el conjunto de flechas en Q' que empiezan en k . De esto se deduce que la afirmación es cierta en caso de $i = k$ o $j = k$, ya que se invierten las flechas incidentes en k dos veces. Se observa que las flechas entre i y j permanecen sin cambio en ambas mutaciones, excepto cuando $i \in PD(k)$ es un predecesor directo de k en Q y $j \in SD(k)$ es un sucesor directo de k en Q o viceversa.

Suponga que $i \in PD(k)$ es un predecesor directo y que $j \in SD(k)$ es un sucesor directo de k en Q . Con las siguientes igualdades, $A_{ij} = a'_{ij} = -b'_{ji}$ y $r_{ij} = r'_{ji}$. Se asume que hay $a_{ij} = b_{ij} \geq 0$ flechas desde i hasta j en Q (es decir no hay flechas desde j hasta i), entonces por (M3) se obtiene $A_{ij} = r_{ij} + b_{ij} \geq 0$ flechas desde i hasta j en Q' , de nuevo por (M3) se obtiene $A'_{ji} = r'_{ji} + b'_{ji} = r_{ij} - (r_{ij} + b_{ij}) = -b_{ij} = -a_{ij} < 0$, así existen a_{ij} flechas desde i hasta j que permanecen en Q'' . Ahora se asume que hay $a_{ji} = -b_{ij} > 0$ flechas desde j hasta i en Q (es decir no hay flechas desde i hasta j), de lo anterior se distinguen dos casos. Si $r_{ij} \geq a_{ji}$, por (M3) hay $A_{ij} = r_{ij} + b_{ij} \geq 0$ flechas desde i hasta j en Q' , de nuevo por (M3) $A'_{ji} = r'_{ji} + b'_{ji} = r_{ij} - (r_{ij} + b_{ij}) = -b_{ij} = a_{ji} > 0$, así existen a_{ji} flechas desde j hasta i en Q'' . Si $r_{ij} < a_{ji}$, por (M3) se obtiene $A_{ij} = r_{ij} + b_{ij} < 0$, entonces existen $-A_{ij}$ flechas desde j hasta i en Q' , de nuevo por (M3) se obtiene que $A'_{ji} = r'_{ji} + b'_{ji} = r_{ij} - (r_{ij} + b_{ij}) = -b_{ij} = a_{ji} > 0$, por tanto, se tiene a_{ji} flechas desde j hasta i . \square

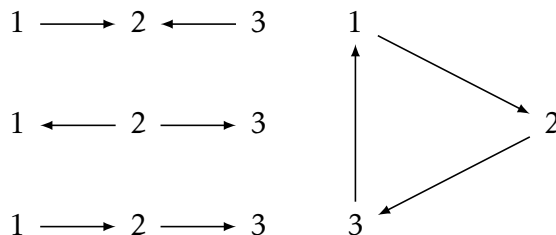
Como la mutación de un carcaj Q sin lazos ni 2-ciclos en un vértice $k \in Q_0$ es de nuevo un carcaj sin lazos ni 2-ciclos, se pueden iterar las mutaciones. Si $k, k' \in Q_0$ son dos vértices de Q , entonces se denotará el carcaj $\mu_k(\mu_{k'}(Q))$ por $(\mu_k \circ \mu_{k'})(Q)$.

Definición 3.7 (Equivalencia de mutación). Se dice que dos carcajes Q y Q' son **mutaciones equivalentes** si existe una secuencia $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in Q_0^r$ de vértices de Q de longitud $r \geq 0$ tal que el carcaj $(\mu_{k_1} \circ \mu_{k_2} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q)$ es isomorfo a Q' .

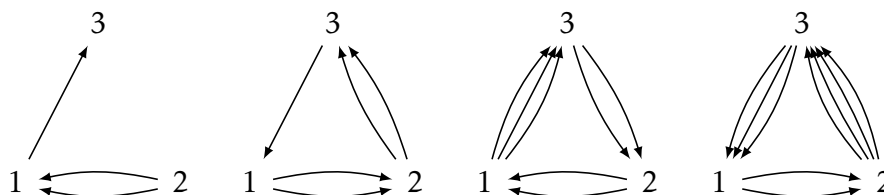
La equivalencia de mutación define una relación de equivalencia sobre la clase de los carcajes sin lazos y 2-ciclos. Claramente la relación es transitiva y reflexiva, la relación es simétrica por la proposición 3.6. Si los carcajes Q y Q' son mutaciones equivalentes, entonces se escribe $Q \sim Q'$.

Definición 3.8 (Clase de mutación). Sea Q un carcaj sin lazos ni 2-ciclos. La **clase de mutación** de Q es el conjunto de todas las clases de isomorfismos que contiene un representante Q' con $Q \sim Q'$.

Ejemplo 3.9. i) Las clases de isomorfismo de los siguientes carcajes forman una clase de mutación de cardinal cuatro.



ii) Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, sea $T(n+1, n, 2)$ un carcaj con $Q_0 = \{i, j, k\}$ tal que hay n flechas desde i hasta j , 2 flechas desde j hasta k y $n+1$ flechas desde k hasta i . Entonces $\mu_k(T(n+1, n, 2)) \cong T(n+2, n+1, 2)$, por lo tanto $(T(n+1, n, 2))_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia infinita de mutaciones equivalentes, por pares no isomorfos de carcajes.



Con los ejemplos previamente presentados, motiva una caracterización de las clases de mutaciones de los carcajes por su cardinal.

Definición 3.10. Se dice que un carcaj Q es de **mutación finita** si su clase de mutación es finita. En caso contrario, es de **mutación infinita**.

En el ejemplo 3.9, en la parte (a), se presenta un carcaj que es de mutación finita, mientras que en la parte (b) la clase de mutación del carcaj T tiene infinitos elementos, por tanto este carcaj es de mutación infinita. Es de notar que la mutación en una fuente o un sumidero de Q no afecta el diagrama subyacente \overline{Q} .

Definición 3.11. Se dice que un diagrama subyacente es llamado **árbol** si este es conexo y no contiene caminos cerrados.

Proposición 3.12. *Cualesquiera dos orientaciones del mismo árbol son mutaciones equivalentes.*

Demostración. Sea T un árbol y sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos orientaciones de T . Se mostrará que existe una secuencia $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in Q'_0$ de longitud $r \geq 0$ tal que $(\mu_{k_1} \circ \mu_{k_2} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) \cong Q'$ y cada mutación es en una fuente o un sumidero.

La prueba se lleva a cabo por inducción matemática sobre el número $n = |Q_0|$ de vértices. Para el caso $n = 1$ es trivial. Para el caso $n = 2$ se observa que la mutación sobre cualesquiera dos vértices transforma Q en Q' . Como hipótesis de inducción, se asume como cierto para $k = |Q_0|$, con $2 \leq k \leq n$, y se mostrará que cumple para $n + 1 = |Q_0|$. Sea $n + 1 = |Q_0|$, por la característica de Euler² el árbol debe contar con n aristas. Por construcción, debe existir un vértice i de T que incide sobre una sola arista, se nota el único vértice que es adyacente a i por j . Por hipótesis de inducción existe una secuencia (j_1, j_2, \dots, j_s) de vértices en $Q_0 \setminus \{i\}$ tal que la mutación $\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \dots, \mu_{j_s}$ transforma el subquiver completo de Q con vértices $Q_0 \setminus \{i\}$ en el subquiver completo de Q' con vértices $Q_0 \setminus \{i\}$. Para transformar Q en Q' se usa la misma secuencia de vértices, excepto que posiblemente se incluya μ_i antes de realizar μ_j para garantizar que j es una fuente o un sumidero en ese paso. Las otras mutaciones no afectan al vértice i . De esta forma se logra una secuencia de mutaciones en sumideros y fuentes que transforma Q en Q' . □

También se puede describir las reglas de mutación en términos de la matriz signada. Para este propósito, se introduce la siguiente notación.

Definición 3.13 (Mutación de matrices). Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de índices. Sea $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ una matriz antisimétrica. La **mutación** de B en k es la matriz $B' = \mu_k(B) = (b'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ con entradas

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{si } i = k \text{ ó } j = k; \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $[x]_+ = \max(0, x)$ y $\text{sgn}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ ³ para cada $x \in \mathbb{R}$.

²La característica de Euler es un invariante topológico, un número definido que sirve para describir la forma o la estructura de una clase de espacios topológicos.

³ $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\text{sgn}(x) = 0$ si $x = 0$, $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$

Ejemplo 3.14. Se toma la matriz de adyacencia signada $B(Q)$ del carcaj Q del ejemplo 3.5, para este caso la matriz $\mu_3(B(Q))$ representa la mutación de la matriz $B(Q)$ en 3. Note que, $\mu_3(B(Q))$ es la matriz de adyacencia del carcaj $\mu_3(Q)$ descrito en el ejemplo 3.5.

$$B(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mu_3(B(Q)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.15. Sea Q un carcaj sin 2-ciclos y lazos. Sea $B(Q)$ su matriz de adyacente signada y sea $k \in Q_0$ cualquier vértice de Q . Entonces la matriz de adyacente signada de la mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k es igual a la mutación $\mu_k(B)$ de B en k .

Demostración. Sea $i, j \in Q_0$ cualesquiera dos vértices de Q . Se denota las entradas de la matriz de adyacencia signada de Q y $\mu_k(Q)$ por $B = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$ y $B' = (b'_{ij})_{i,j \in Q_0}$ respectivamente. De acuerdo a las reglas (M1) y (M2) la mutación invierte todas las flechas que inciden en k , es decir, $b'_{ij} = -b_{ij}$ si $i = k$ o $j = k$. Por otro lado se tiene que el producto $b_{ik}b_{kj}$ es igual al número de caminos de longitud 2 desde un predecesor directo hasta un sucesor directo de k por medio de k , y además $\text{sgn}(b_{ik})[b_{kj}b_{kj}]_+ \neq 0$ si se cumple que i es un predecesor directo y j un sucesor directo de k ($b_{ik} > 0, b_{kj} > 0$) o viceversa ($b_{ik} < 0, b_{kj} < 0$). En el primer caso, se presenta un aumento de $|b_{ik}b_{kj}|$ caminos desde i hasta j si $b_{ij} > 0$, en caso contrario, se eliminan los caminos necesarios para que no se presenten 2-ciclos. En el segundo caso, se presenta un aumento de $|b_{ik}b_{kj}|$ caminos de j hasta i si $b_{ij} < 0$, en caso contrario, se eliminan los caminos necesarios para que no se presenten 2-ciclos, de acuerdo a la regla de mutación (M3). \square

3.2. Clases de mutación para carcajes del tipo \mathbb{A}_n

En esta parte se presenta como a partir de las triangulaciones de un polígono regular, se puede obtener un modelo combinatorio para las mutaciones de los carcajes del tipo A_n , además como estas mutaciones se relaciona con el **giro** de una triangulación.

Definición 3.16 (Diagonal). Para todo número natural $n \geq 3$, sea P_n un polígono regular con n vértices. Una línea que une dos vértices diferentes y no consecutivos de P_n es llamada una **diagonal** del polígono P_n . Dos diagonales d_1, d_2 son **cruzadas** si d_1 y d_2 se intersecan en algún punto que este al interior de P_n .

Definición 3.17 (Triangulación). Sea $n \geq 1$ un número natural. Una **triangulación** del $(n+3)$ -polígono regular P_{n+3} es una colección de diagonales no cruzadas que diseccionan el polígono en triángulos.

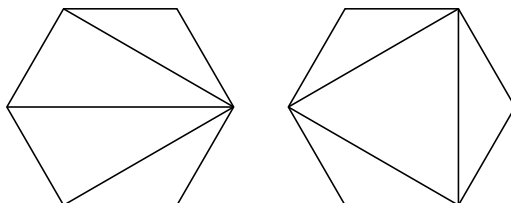


Figura 7: Dos triangulaciones de un hexágono regular

Una triangulación en un polígono P_{n+3} va contener n diagonales y disecciona al polígono en $n + 1$ triángulos. En la figura 7 se muestra dos diferentes triangulaciones de un hexágono regular.

Si se fija un número natural $n \geq 1$ y polígono regular P_{n+3} , para cada triangulación T de P_{n+3} se obtiene el carcaj $Q(T) = Q_T = (Q_0, Q_1, s, t)$ como se describe a continuación:

- $Q_0 = T$, es decir los vértices de Q corresponden con las diagonales de la triangulación.
- Se introduce una flecha desde la diagonal d_1 a la diagonal d_2 en Q_1 siempre que d_1 y d_2 sean dos lados de un mismo triángulo en la triangulación de forma que d_1 precede directamente a d_2 cuando atraviesa el borde del triángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Partiendo de las triangulaciones de la figura 7, y siguiendo las instrucciones previamente presentadas se obtienen los carcajes como se muestran en la figura 8.

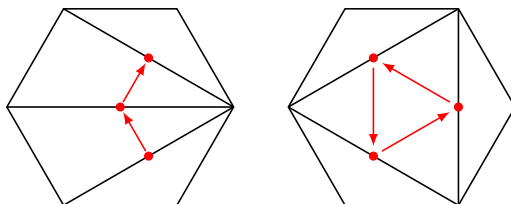


Figura 8: Los carcajes adjuntos de una triangulación

Para cada vértice v de P_{n+3} hay una triangulación especial T_v dada por todas las n diagonales incidiendo en v , la primera triangulación de la figura 7 es un ejemplo de ello, además es de notar que el carcaj $Q(T_v)$ es un carcaj linealmente orientado del tipo A_n . Ahora se presenta una definición con la cual se podrá generar una relación entre la triangulación y la mutación de carcajes.

Definición 3.18 (Giro). Sea $d \in T$ una diagonal de una triangulación T de un polígono regular P_{n+3} . Si se remueve la diagonal d de la triangulación, entonces los dos triángulos con lado d se fusionan en un cuadrilátero. Sea d' la otra diagonal de este cuadrilátero. El **giro** de la triangulación T en la diagonal d es la triangulación $F_d(T) = (T \cup \{d'\}) \setminus \{d\}$.

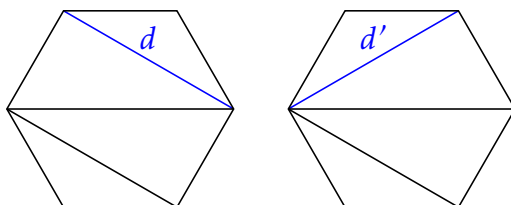
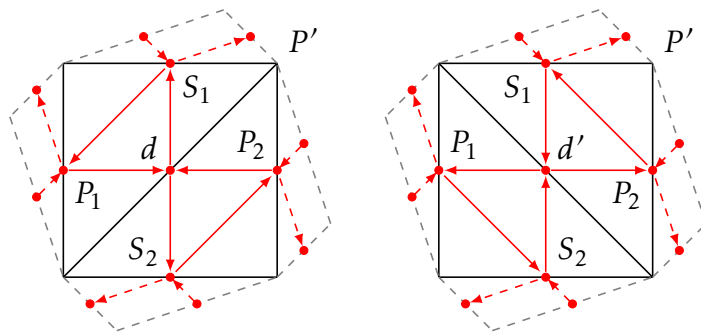


Figura 9: El giro $T \rightsquigarrow F_d(T)$ de una triangulación en una diagonal

Por construcción, el giro de una triangulación es de nuevo una triangulación y al igual que la mutación, el giro es involutivo, es decir, para cualquier d y T se cumple $F_d(F_d(T)) = T$. Como ejemplos, se presenta en la figura 9 un giro del hexágono donde se aprecia también el carácter involutivo del giro. Por otro lado, en la figura 10 se muestra las 14 triangulaciones de un hexágono y sus giros. La relación entre giros de triangulaciones y mutaciones de carcajes se aprecia en la proposición que se expone a continuación.

Proposición 3.19. *Sea $d \in T$ una diagonal de una triangulación T de un polígono regular P_{n+3} . Se denota el carcaj de las triangulaciones T por Q y el carcaj del giro $F_d(T)$ por Q' . Entonces se cumple que $Q' \cong \mu_d(Q)$.*

Demostración. La diagonal $d \in T$ es el lado de dos triángulos de una triangulación. Así el vértice $d \in Q_0$ tiene a lo más dos predecesores directos y a lo más dos sucesores directos (dependiendo de si los segmentos son lados o diagonales de P_{n+3}). Se denota los predecesores directos y sucesores directos de d en Q en los dos triángulos (si existen) por P_1, P_2, S_1 y S_2 .



Sea P' el cuadrilátero con diagonales d y d' . El giro no cambia la triangulación afuera de P' . Entonces las flechas en Q' que provienen de los triángulos afuera de P' siguen siendo las mismas que Q . Ya que estas flechas no son incidentes de k ni conecta un predecesor directo con un sucesor directo, por tanto estas también permanecen iguales bajo mutación de acuerdo a la regla (M4). Es también evidente que adentro de P' las flechas incidentes a d cambian de dirección de acuerdo con las reglas

de mutación ($M1$) y ($M2$). Además, las flechas $S_1 \rightarrow P_1$ y $S_2 \rightarrow P_2$ desaparecen y las flechas $P_1 \rightarrow S_2$ y $P_2 \rightarrow S_1$ aparecen de acuerdo con la regla de mutación ($M3$). \square

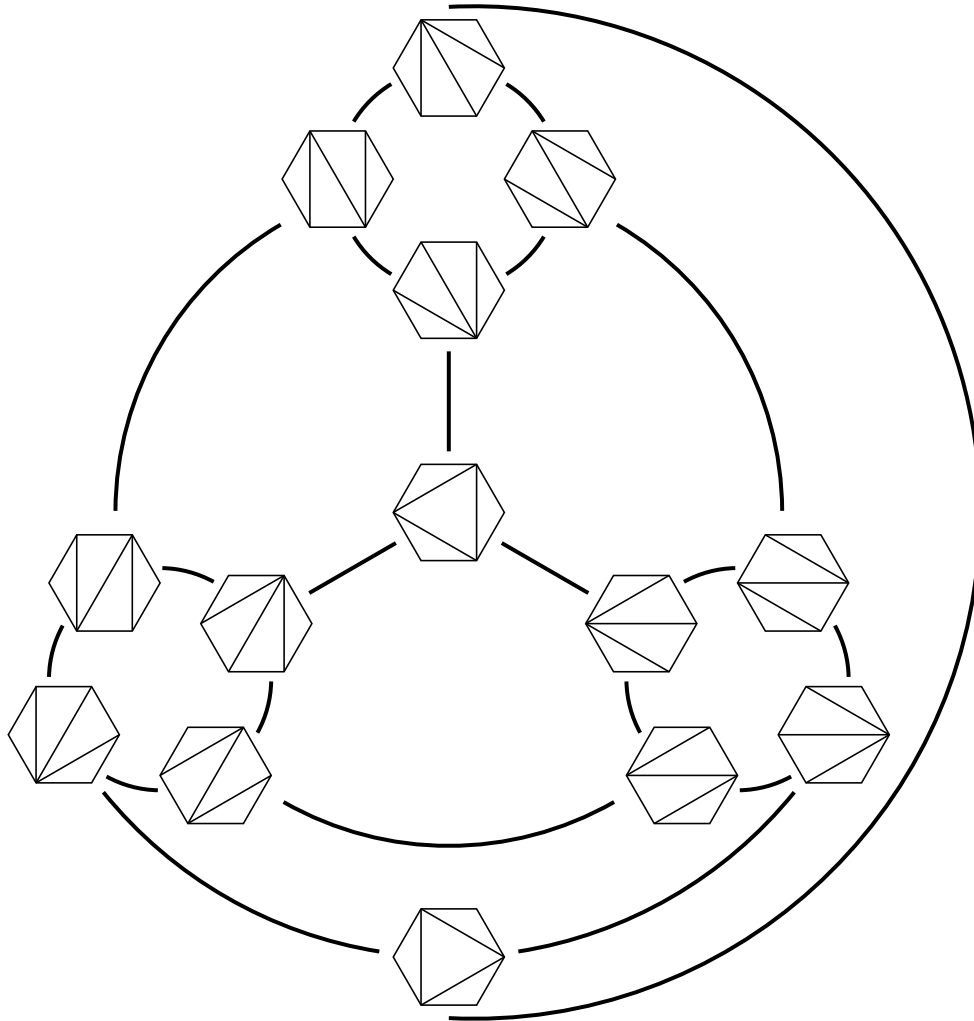


Figura 10: Triangulaciones de un hexágono y sus giros

4. Álgebras de conglomerado asociadas a carcajes

En esta sección, se recuerdan los conceptos de conglomerado, y como estos elementos se encargan de formar un álgebra de conglomerado por medio de las mutaciones. Además se presenta un teorema de clasificación de álgebras de conglomerado, indicando cuando un álgebra de conglomerado es finito o infinita a partir del carcaj asociado.

Se procede a introducir las álgebras de conglomerado, para este propósito, se fija un número natural $n \geq 1$, se establece de manera general $K = \mathbb{Q}$ como el cuerpo de números racionales y se presenta una serie de definiciones.

Definición 4.1 (Independencia algebraica). Sea $K \subseteq \mathcal{F}$ un cuerpo de extensión. Se dice que los elementos u_1, u_2, \dots, u_n en \mathcal{F} son **dependientes algebraicamente** sobre el cuerpo K si existe un polinomio $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ con coeficientes en K tal que $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$. Los elementos son **algebraicamente independientes** si estos no son dependientes algebraicamente.

Sea \mathcal{F} un cuerpo de extensión de \mathbb{Q} , normalmente se expresa como $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ para las variables independientes u_1, u_2, \dots, u_n . El cuerpo \mathcal{F} es llamado el **cuerpo ambiental**. A continuación se presentan las definiciones que componen las álgebras de conglomerado.

Definición 4.2 (Conglomerado). Un **conglomerado** es una secuencia $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^n$ de elementos algebraicamente independientes de longitud n . Los elementos de un conglomerado $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^n$ son llamadas **variables de conglomerado**.

La elección natural de un cuerpo ambientado para un conglomerado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^n$ es el cuerpo más pequeño posible nombrado $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición 4.3 (Semilla). Una **semilla** es un par (\mathbf{x}, Q) donde $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^n$ es un conglomerado y Q es un carcaj con vértices $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ sin 2-ciclos y lazos.

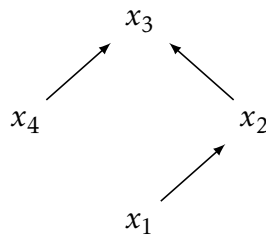


Figura 11: Ejemplo de semilla

Definición 4.4 (Semillas isomorfas). Sea (\mathbf{x}, Q) y (\mathbf{x}', Q') dos semillas con conglomerados $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{F}^n$ y carcajes $Q = y Q'$. Se dice que estas semillas son **isomorfas** si existe un isomorfismo de carcajes dadas por las aplicaciones biyectivas $\sigma : Q_0 \rightarrow Q'_0$ y $\tau : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tal que $x_i = x'_{\sigma(i)}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. También se puede decir que dos semillas son isomorfas si se obtienen una de la otra mediante un reordenamiento simultáneo de las variables del conglomerado y los vértices del carcaj. Si dos semillas son isomorfas suele notarse de la forma $(\mathbf{x}, Q) \cong (\mathbf{x}', Q')$.

Ejemplo 4.5. Un ejemplo de semilla se aprecia en la figura 11, donde se emplea el carcaj

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4$$

y el conglomerado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Definición 4.6 (Mutación de semillas). Sea (\mathbf{x}, Q) una semilla y sea $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de índices. La mutación de (\mathbf{x}, Q) en k es una semilla $\mu_k(\mathbf{x}, Q) = (\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(Q))$ donde $\mu_k(Q)$ es la mutación de el carcaj Q en el vértice k y $\mu_k(x) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \in \mathcal{F}^n$ es el conglomerado con $x'_l = x_l$ si $l \neq k$ y

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \left(\prod_{\alpha:i \rightarrow k} x_i + \prod_{\beta:k \rightarrow j} x_j \right) \in \mathcal{F}.$$

El producto es considerando las flechas $\alpha, \beta \in Q_1$ que empiezan o terminan en el vértice k respectivamente, contando con su posible multiplicidad expresado en la potencia de la variable de conglomerado. Cuando no se presentan tales flechas, se entiende que el producto resultante es 1. Como ejemplo, en la figura 12 se aprecian dos mutaciones de la semilla mostrada previamente.

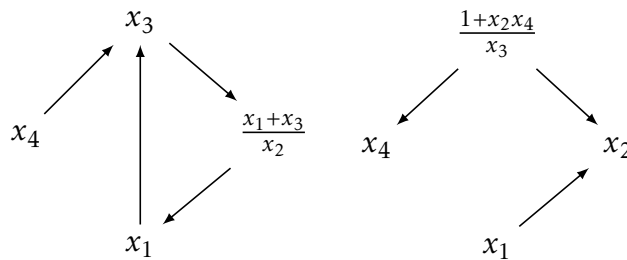


Figura 12: Las mutaciones de la semilla previa en los vértices 2 y 3

Nota 4.7. Sea $B = B(Q)$ la matriz de adyacente signada de un carcaj Q en una semilla (\mathbf{x}, Q) , entonces se puede reescribir la ecuación anterior como

$$x_k x_{k'} = \prod_{\alpha:i \rightarrow k} x_i + \prod_{\beta:k \rightarrow j} x_j = \prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}: b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}: b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}$$

La ecuación es también llamada **relación de intercambio**.

Nota 4.8. Se aprecia con facilidad que la mutación de semillas esta bien definida, es decir, la mutación de una semilla en un conjunto de índices es de nuevo una semilla. Además la mutación es involutiva, es decir, para todas las semillas (\mathbf{x}, Q) y todos los índices $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $(\mu_k \circ \mu_k)(\mathbf{x}, Q) \cong (\mathbf{x}, Q)$, la ecuación $(\mu_k \circ \mu_k)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ es verdadera ya que por las reglas de mutación de carcajes y (M2) los roles de predecesores directos y sucesores directos cambian, y por otro lado, la proposición 3.6 implica $(\mu_k \circ \mu_k)(Q) \cong Q$.

Recuerde que la equivalencia de mutación define una relación de equivalencia sobre la clase de los carcajes sin lazos y 2-ciclos. Además si los carcajes Q y Q' son mutaciones equivalentes, entonces se escribe $Q \sim Q'$.

Definición 4.9 (Equivalencia de mutación). Se dice que dos semillas (\mathbf{x}, Q) y (\mathbf{x}', Q') son mutaciones equivalentes si existe una secuencia $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in Q'_0$ de índices de longitud $r \geq 0$ tal que la semilla $(\mu_{k_1} \circ \mu_{k_2} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(\mathbf{x}, Q)$ es isomorfa a (\mathbf{x}', Q') . En este caso se escribe $(\mathbf{x}, Q) \sim (\mathbf{x}', Q')$.

Definición 4.10 (Álgebra de conglomerado). Sea (\mathbf{x}, Q) una semilla. La **álgebra de conglomerado** $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$ adjunta a la semilla es la subálgebra del cuerpo ambiental \mathcal{F} generada por el conjunto

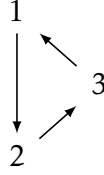
$$\chi(\mathbf{x}, Q) = \bigcup_{(\mathbf{x}', Q') \sim (\mathbf{x}, Q)} \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}.$$

De forma general se puede describir el álgebra de conglomerado como la subálgebra generada por todas las variables de conglomerado que son mutaciones equivalentes para la semilla dada. Las semillas $(\mathbf{x}', Q') \sim (\mathbf{x}, Q)$ son llamadas las **semillas** del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$, los conglomerados \mathbf{x}' son llamados los **conglomerados** del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$ y los elementos de $\chi(\mathbf{x}, Q)$ son llamados las **variables de conglomerado** de la álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$. También se nota $\mu_k(x_k)$ por x'_k .

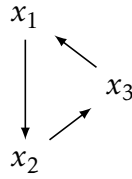
Es de notar que todas las variables de conglomerado de una álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$ se encuentran en el subcuerpo $\mathbb{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{F}$, la definición es independiente de la elección del cuerpo ambientado. Si se tiene dos semillas (\mathbf{x}, Q) y (\mathbf{x}', Q') que son mutaciones equivalentes, entonces las álgebras de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q) = \mathcal{A}(\mathbf{x}', Q')$ son iguales. Además, si $y \in \mathcal{G}^n$ es otro conglomerado de la misma longitud (en otro cuerpo ambientado \mathcal{G}), entonces las álgebras de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q) \cong \mathcal{A}(\mathbf{y}, Q)$ son álgebras isomorfas. Considerando lo anterior, suele escribirse $\mathcal{A}(Q)$ en vez de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$.

Cuando se habla de un álgebra de conglomerado asociado a una semilla, se dice que esta semilla es la **semilla inicial**, además, el número $n \in \mathbb{N}$ es conocido como el **rango** de la álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$.

Ejemplo 4.11. Sea Q el carcaj



que pertenece a la clase de mutación de los carcajes del tipo A_3 como se aprecia en el ejemplo 3.9 (a), si se toma como semilla inicial



se obtiene un diagrama que relaciona los conglomerados por medio de la mutación, tal como aparece en la figura 13. En este caso, hay un número finito de variables de conglomerado, las cuales pertenecen al anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}] \subseteq \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$. Por tanto, el álgebra de conglomerado es la subálgebra generada por el conjunto

$$\chi = \left\{ x_1, x_2, x_3, \frac{x_2 + x_3}{x_1}, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \frac{x_1 + x_2}{x_3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 x_3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2} \right\}$$

de variables de conglomerado. Realizando la siguiente asignación de variables

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_2 + x_3}{x_1} & z_1 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 x_3} \\ y_2 &= \frac{x_1 + x_3}{x_2} & z_2 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_3} \\ y_3 &= \frac{x_1 + x_2}{x_3} & z_3 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

con el fin de abreviar notación, se puede visualizar las igualdades

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= y_1 x_1 \\ z_2 + z_3 &= y_1 z_1 \\ y_1 + y_2 + 2 &= (x_1 + x_2) z_3 \\ y_1 + y_3 + 2 &= (x_1 + x_3) z_2 \end{aligned}$$

lo que lleva a

$$\begin{aligned}
 x_3 &= y_1 x_1 - x_2 \\
 z_3 &= y_1 z_1 - z_2 \\
 y_2 &= (x_1 + x_2)(y_1 z_1 - z_2) - (y_1 + 2) \\
 y_3 &= (x_1(1 + y_1) - x_2)z_2 - (y_1 + 2)
 \end{aligned}$$

logrando generar las 9 variables del conglomerado con x_1, x_2, y_1, z_1, z_2 , por tanto se puede concluir

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q) \cong \mathbb{Q} \left[x_1, x_2, \frac{x_2 + x_3}{x_1}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 x_3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_3} \right]$$

El teorema que se presenta a continuación caracteriza las álgebras de conglomerado en torno a los carcajes.

Teorema 4.12. *i) Cada variable de conglomerado de una álgebra $\mathcal{A}(Q)$ es un polinomio de Laurent con coeficientes enteros.*

ii) La álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(Q)$ tiene únicamente un número finito de variables de conglomerado si y solo si, Q es mutación equivalente a un carcaj del tipo Dynkin D , en este caso, el grafo subyacente \overline{D} de D es único salvo isomorfismo. [6][7]

Note que, este teorema garantiza que las álgebras de conglomerado asociadas a las triangulaciones siempre tienen un número finito de variables de conglomerado dado que el carcaj asociado a dichas triangulaciones es del tipo Dynkin A_n .

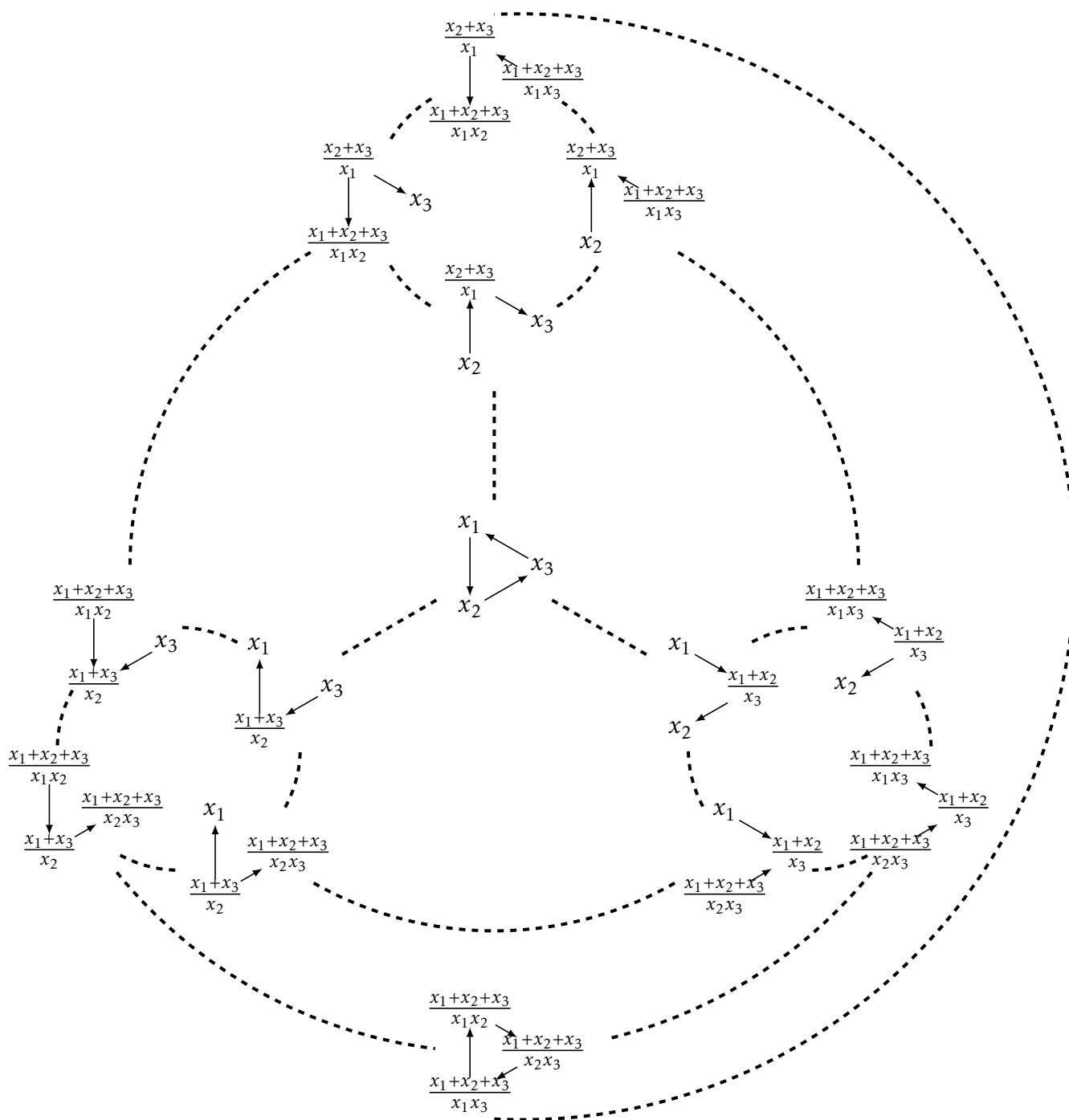


Figura 13: Conglomerados asociados a los carcajes del tipo A_3

5. Conclusiones

Es importante recalcar la conexión directa que existe entre la construcción de las álgebras de conglomerado usando las mutaciones en los triangulaciones asociadas en carcajes del tipo A_n .

También es importante mencionar que los diagramas de Dinkyn adquieren una relevancia fundamental en el proceso de clasificación de álgebras de conglomerado de tipo finito.

Esto evidencia un ejemplo de un modelo combinatorial para construir álgebras de conglomerado, que después fue extendido por Fomin y Zelevinsky para superficies de Riemman.

Referencias

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, U.K., first edition, 2006.
- [2] P. Caldero and B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras,. *Invent. Math.* 172, page 169–211, 2008.
- [3] I. Canakci and R. Schiffler. Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces, 2012.
- [4] I. Canakci and R. Schiffler. Snake graphs and continued fractions, 2018.
- [5] G. Cerulli, B. Keller, D. Labardini-Fragoso, and Plamondon Pierre-Guy. Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras, 2013.
- [6] S. Foimin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. i. foundations. *J. Amer.Math. Soc*, 15(2):497–529, 2002.
- [7] S. Foimin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. ii. finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.
- [8] P. Gabriel. Unzerlegbare darstellungen i. *Manuscripta Math.* 6, pages 71–103, 1972.
- [9] E. Gunawan. Combinatorics of cluster algebras from surfaces. *University of Minnesota Digital Conservancy*, 2016.
- [10] P. Lampe. *Cluster Algebras*. United Kingdom: Department of Mathematical Sciences, Durham UniversS. Fomin, M. Shapiro and D. Thurstonity, 2013.