UNA PROPUESTA PARA INTRODUCIR LA MECÁNICA LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE FÍSICA: SUGERENCIAS METODOLÓGICAS Y EPISTEMOLÓGICAS.

JEFFERSON CAMILO PRADA BAREÑO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN FÍSICA
BOGOTÁ D.C. 2015

UNA PROPUESTA PARA INTRODUCIR LA MECÁNICA LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE FÍSICA: SUGERENCIAS METODOLÓGICAS Y EPISTEMOLÓGICAS.

JEFFERSON CAMILO PRADA BAREÑO

CODIGO: 20062135060

PROYECTO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL COMO LICENCIADO EN FÍSICA

DIRECTOR:
Ph. D. Edwin Munévar

CODIRECTOR:
Ph. D. Yefrin Ariza

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN FÍSICA
BOGOTÁ D.C. 2015

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Problema de investigación

1.1.1. Planteamiento del problema

En la educación profesional y especialmente en los procesos de formación de licenciados en física, el estudiante debe considerar sus relaciones con el entorno y cada una de las temáticas que se abordan en su desarrollo educativo y disciplinario. Por esto es indispensable que conozca y maneje de manera adecuada todas las concepciones, metodologías, estrategias físicas y matemáticas para obtener un mejor desempeño en todo lo que respecta a su formación como docente. En general, todas las herramientas que se le brinden al estudiante posibilitan un mejor desempeño a la hora de abordar cualquier tipo de temática; es aquí donde nace la propuesta de implementar el trabajo dual de las temáticas que generalmente se abordan en segundo y séptimo semestre de manera independiente. Así, se podrán observar muchos de los elementos que intervienen en el proceso de aprendizaje dentro del aula, y aún más importante, el conocimiento y la variedad de estrategias que permitan el desarrollo de gran variedad de conceptos.

También es indispensable que dentro de la formación inicial de profesores se generen y estructuren nuevas metodologías que permitan reflexiones novedosas en torno a las teorías que son objeto de enseñanza, que posibiliten mayor facilidad para que los docentes generen nuevas estrategias y actividades que en muchas ocasiones se presentan solo hasta los últimos semestres. Esto permitiría, a su vez, el acercamiento de los estudiantes a nuevas concepciones que hacen parte del estudio de la mecánica clásica a nivel general y que pueden hacer más sencillo el trabajo presentando mayor viabilidad al momento de realizar todo el desarrollo físico y matemático que el problema pueda necesitar. Un ejemplo es el caso de la mecánica analítica propuesta por Lagrange y Hamilton durante el siglo XVIII y XIX, la cual nos permite trabajar problemas físicos desde una perspectiva diferente a la Newtoniana, con resultados que pueden considrerarse iguales. Es importante notar la facilidad que tiene esta formulacion para relacionar variables y problemas en otros sistemas generalizados como es el caso de algunos fenómenos cuánticos y astronómicos en sistemas inerciales y no inerciales, lo cual representa una buena propuesta de trabajo y de aprendizaje. Según *Norbury (2000,* p.*1)* "estas propuestas son destinadas para aquellos que desean explorar una versión de la mecánica más allá del tratamiento de Newton habitual en las escuelas secundarias, y sin embargo no tienen habilidades matemáticas avanzadas".Todos estos elementos brindan al estudiante la oportunidad de aprender nuevas formulaciones de la teoría dejándolas al alcance de toda la comunidad académica incluyendo a los docentes, generando un entorno inclusivo mediante el intercambio de ideas, teniendo en cuenta que dicho contexto favorece el desarrollo e intercambio intelectual de los estudiantes entre otras facultades universitarias y otros espacios académicos. De esta manera es importante aclarar que las formas de enseñanza y aprendizaje utilizadas actualmente dentro de la universidad generalmente se rigen bajo los esquemas tradicionales, dejando de lado la innovación y consecuentemente obstaculizando la construcción de nuevos conceptos que puedan despertar el interés de los estudiantes para la adquisición de nuevas herramientas que van a ser de gran ayuda al momento de afrontar las temáticas a las que se enfrentará en el futuro.

1.1.2. Justificación

A partir de la búsqueda y la recolección de información se han planteado algunas preguntas, teniendo en cuenta los procesos de formación en estudiantes de licenciatura en física de la universidad Distrital Francisco José de Caldas; revisando los "pénsum"[1] de los últimos años, es interesante poder abordar algunos de los temas y conceptos que respectan a la mecánica clásica I y II y a la mecánica analítica; esta última se estudia en séptimo semestre según el pénsum actual y en décimo semestre para el pénsum anterior; sin embargo, en raras ocasiones se presentan o por lo menos se dan a conocer nuevas perspectivas de las temáticas relacionados con la descripción del movimiento para un sistema teniendo en cuenta algunos conceptos como la energía, coordenadas generalizadas, sistemas de referencia no inerciales y todo lo que este estudio involucra.

1: El término 'pénsum' se refiere a los planes académicos o de estudio dentro del programa de la licenciatura.

¿Sería posible ver paralelamente en el curso de mecánica clásica la formulación de Lagrange-Hamilton y Newton? Esta pregunta puede ser interesante para muchos docentes y más aún, para los estudiantes, el poder conocer dos puntos de vista que son válidos y hacen parte de la mecánica clásica, ya que dependiendo de las características del sistema será mucho más fácil de abordar teniendo a la mano diferentes puntos de vista. En algunos fenómenos es más sencillo el análisis desde otras perspectivas, como el caso del estudio de movimientos de un sistema que gira; por ejemplo observaciones astronómicas vistas desde el planeta Tierra. Para Sofonea (1993, p.) "en la formulación Newtoniana es necesario introducir las fuerzas ficticias o fuerzas de inercia como la fuerza centrífuga o la fuerza de coriolis mientras que en la formulación Lagrangiana estas fuerzas aparecen de modo natural". De la misma manera, en otros casos el desarrollo del problema es más sencillo mediante el uso fuerzas y otras magnitudes vectoriales que satisfacen las características del sistema desde el punto de vista Newtoniano.

En ese orden de ideas mediante esta monografía se planteará y mostrará una formulación alterna, paralela a la habitual, en donde se analiza la mecánica clásica reconstruyendo parte de su evolución histórico-epistemológica y teórica, mostrando la existencia de otras alternativas al momento de estudiar un fenómeno. Todo esto se analizara mostrando al estudiante y al docente la viabilidad del desarrollo paso a paso en cierto tipo de ejercicios que incluyan y abarquen algunos de los conceptos que se trabajan durante los cursos de mecánica.

Por otro lado algunos docentes son conscientes de los problemas y dificultades que causan la aplicación de métodos educativos inadecuados ya que no pueden contribuir en la formación del concepto, sin embargo es importante recalcar la importancia de afrontar nuevas estrategias que estimulen el análisis y pensamiento crítico tanto de estudiantes como profesores, presentando una nueva versión al abordaje de las explicaciones trabajadas desde su secundaria, con un poco mas de bagaje, mejor estructurada e intelectualmente más agradable para la comunidad educativa. De este modo, al abordar el problema, el estudiante pondrá a prueba habilidades matemáticas que no son ajenas a su entorno académico.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Elaborar una propuesta de introducción simultánea de contenidos de la mecánica newtoniana y la mecánica analítica en primeros semestres de licenciatura en física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con el fin de orientar un acercamiento a otras metodologías e incentivar a la comunidad académica en la inclusión de nuevos conceptos y nuevas estrategias didácticas.

1.2.2. Objetivos específicos

- Brindar algunos referentes teóricos y epistemológicos de la mecánica clásica y de su enseñanza, para que sirvan como reflexión al momento de abordar algunas temáticas, en cualquier proceso formativo de profesores de ciencias, en general y profesores de física, en particular, pues es indispensable que el estudiante contextualice la estructura y el andamiaje que ha tenido la física y así comprenda su desarrollo y evolución.

- Organizar y analizar la información académica correspondiente a la mecánica clásica y especialmente los fenómenos relacionados con la dinámica por medio de revisiones históricas y conceptuales que permitan un desarrollo idóneo del tema en los estudiantes.

- Identificar ejercicios o situaciones problema que puedan ser abordadas desde las dos formulaciones y a su vez puedan dar soporte a la propuesta planteada en este trabajo.

- Diseñar y estructurar una lección (guía – taller) para desarrollar una metodología que permita implementar la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana de manera paralela a la mecánica de Newton.

1.3. Antecedentes

En la mayoría de escuelas secundarias y en muchos procesos de formación de profesionales el desarrollo de los contenidos y temáticas en física se abordan de manera en la que se construyeron cronológicamente; en los primeros semestres se analizas las temáticas de la mecánica clásica y entre ellas se plantean las ideas de Aristóteles, Galileo y la mecánica newtoniana, también se estudia lo relacionado con la óptica, la electricidad y el magnetismo finalizando con termodinámica y ondas; todos estos componentes de la física se trabajan a la par con los cursos generales de matemáticas, siendo esta ultima un elemento fundamental en la concepción de la mecánica y muchos de los fenómenos naturales. Después del séptimo semestre aproximadamente se presenta lo que normalmente se conoce como *física moderna* dando a conocer las posturas de la teoría relativista y cuántica de la naturaleza. Según el plan de trabajo que se lleve a cabo, y toda la estructuración de conceptos y el bagaje matemático adecuado se analiza una nueva formulación de la mecánica.

Es ahí donde surge la discusión sobre la viabilidad que tiene esta propuesta ya que en muchos casos los docentes se limitan a seguir al pie de la letra los esquemas impuestos desde hace años por las instituciones, por los planes de estudio o por los libros de texto que normalmente se trabajan y son pocas las excepciones donde se arriesgan a indagar nuevas metodologías que permitan una contextualización de las temáticas que se quieren estudiar, ya sea por las herramientas con las que se cuentan para el análisis o simplemente porque se limitan a explicar lo que siempre se ha planteado en dichos cursos. Para Sanmartí (1997, p. 5)

> "Muchos estudios muestran que influye mucho más la actitud del conjunto del profesorado que actúa en un centro, ya que un buen equipo de enseñantes, que busca conjuntamente nuevas respuestas en sus aulas y reflexiona sobre los resultados de sus proyectos, rentabiliza mucho más el tiempo y los recursos al ser coherente el tipo de formación promovida."

Al iniciar el proceso de formación como licenciados en física son pocos los estudiantes que tienen conocimiento sobre la estructura y desarrollo de los contenidos programáticos que se llevan a cabo durante la carrera, de igual manera las habilidades y destrezas que se deben aplicar se dan a conocer por el análisis del pensum o por los referentes académicos que se han dado desde la educación media. De ahí la importancia que tiene la escuela como institución de formación de presentar y contextualizar la evolución epistemológica de las temáticas a estudiar durante todo el proceso, según Artigue & Pollrtio (2013, p. 954.) "La enseñanza de la matemática a través de un desarrollo histórico ayuda a un mejor entendimiento de las ideas y a la formación de personas en el ámbito del conocimiento". Por ende es de suma importancia que haya un trabajo mancomunado entre los programas de formación, los modelos que se desean trabajar y especialmente las competencias tanto de estudiantes y maestros, donde los últimos son pieza clave durante todo el desarrollo de la carrera desde sus inicios y de manera continua mostrando la mejor de las actitudes al momento de emplear e implementar nuevas metodologías que favorezcan la promoción de nuevas situaciones a nivel de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Norbury (2000, p. 4) es importante plantear una discusión sobre temas relacionados con la dinámica de Lagrange-.Hamilton en un nivel que sería el adecuado para estudiantes avanzados en secundaria, y va dirigido para personas que estén interesadas en explorar una versión de la mecánica más allá del tratamiento habitual sin dejar de lado algunas habilidades matemáticas necesarias para su óptimo desarrollo. Teniendo en cuenta esta investigación como uno de los soportes teóricos de este trabajo, se plantea la prioridad de implementar una metodología similar a nivel universitario con estudiantes de primeros semestres quienes en la mayoría de los casos son ajenos a otras formulaciones sin darse cuenta que también hacen parte de la mecánica clásica. De esta manera se hace indispensable para el tratamiento de esta investigación la implementación de los componentes históricos y conceptuales que permitan generar un engranaje consistente al momento de realizar todo el tratamiento de la dinámica para diferentes sistemas a nivel general. Para Salinas, Colombo & Jaén (1995, p. 55):

> Lo que no parece estar igualmente claro, es que las fundamentaciones ontológicas, axiológicas y metodológicas de esas teorías no son necesariamente las mismas. Los valores cognitivos, las concepciones sobre la naturaleza del mundo material, los modos de construir y los criterios de verdad para contrastar el conocimiento, son sin embargo factores decisivos para atribuir significados a los formalismos y para comprender correctamente las conceptuaciones físicas involucradas.

Se pretende que la comunidad académica pueda generar situaciones de aprendizaje, conociendo algunas de las formulaciones más importantes y a su vez haga uso de los conceptos físicos y matemáticos como herramientas en el proceso de análisis y de interpretación de los mismos. De aquí la importancia que tiene el incorporar las diferentes temáticas como lo son las teóricas, epistemológicas y experimentales las cuales fortalecen el aprendizaje y permiten que el conocimiento construido sea más fuerte y consistente al momento de relacionarlo con los fenómenos que se evidencian en la naturaleza.

Teniendo en cuenta varios de estos antecedentes, se resalta de nuevo la importancia que tiene el conocer y proponer metodologías paralelas que permitan adentrarse más en los conceptos y las generalidades de los mismos, pues la física es tan fuerte en sus postulados que se hace necesaria la contextualización de todos sus contenidos y de esta manera poder generar un análisis más fructífero a nivel académico. Según los análisis de Salinas & Colombo (1993, p. 103) “El profesor formado podría incorporarse a las investigaciones que analizan esos paralelismos en busca de pistas que permitan elaborar estrategias docentes que favorezcan la construcción de las conceptuaciones científicas en los estudiantes”. Todas estas pautas darán a conocer algunos aspectos pedagógicos, didácticos y epistemológicos de manera organizada y a la vez amena, permitiendo que el lector encuentre solidez y coherencia frente a las temáticas relacionadas con la dinámica clásica y algunas de las perspectivas más importantes.

1.4. Aspectos de formación

1.4.1 Aspecto didáctico

Las herramientas didácticas necesarias al momento de innovar o de proponer nuevas estrategias de trabajo deben ser coherentes y consistentes, de tal manera que sean manejables para los docentes e impactantes para los estudiantes; esto permite que se afiancen algunos de los conceptos al momento de participar e indagar sobre estas nuevas formulaciones, que generen algún tipo de reflexión y aprendizaje significativo de la mecánica a nivel general. Si se desean incluir nuevas temáticas que no son habituales en los primeros cursos de mecánica clásica, es importante mantener un proceso de selección y contextualización de todos aquellos conceptos base que hasta el momento se deban poseer; de esta manera el profesor puede generar un proceso paralelo donde se confronten ambas formulaciones (Newton, Lagrange- Hamilton) haciendo uso de herramientas epistemológicas y metodológicas adecuadas para un buen análisis. Para Norbury (2000 p. 1): La mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana generalmente se reserva para cursos superiores sobre la dinámica clásica. Sin embargo, siempre es bueno abrir el apetito avanzado al estudiante preparándolo para lo que vendrá.

De esta manera, es importante que la comunidad académica tenga en cuenta ciertas estrategias didácticas que permitan un ambiente agradable y participativo en el cual puedan generar sus propias preguntas sobre el engranaje y evolución que ha tenido la mecánica; así será más fácil la construcción de nuevos conceptos y la inclusión de nuevas herramientas. Todo esto permite la generalización de temáticas que normalmente se abordan de manera independiente sin ocasionar distanciamientos entre diferentes formulaciones que hacen parte de un mismo estudio en la mecánica clásica; así también, se evita que las clases lleguen a ser monótonas permitiendo que este trabajo a futuro pueda ser más que una propuesta, una estrategia de trabajo en los primeros cursos de formación de profesores de física.

1.4.2. Aspecto pedagógico

Al momento de incursionar o proponer nuevas metodologías de trabajo es importante que el estudiante se sienta motivado e incentivado a adquirir nuevas herramientas y contextualizar las mismas, de esta manera se puede evitar que el proceso educativo se analice de manera independiente con temas impuestos por los planes de trabajo facilitando la identificación de la relación y conexión existente entre todos los contenidos que hacen parte de la física desde sus inicios hasta la actualidad. Según Castiblanco & Nardi (2013, p. 53):

> Así, entendemos la pedagogía de la física como el conocimiento por ser enseñado para que el profesor aprenda a enseñar física, lo que significa que el futuro profesor comprenda la esencia de lo que va a enseñar, el cómo, el por qué, el para qué, algunos procesos le exigen revisitar la física que sabe y pensarla en un contexto educativo.

En este orden de ideas es importante que tanto estudiantes como docentes hagan uso de herramientas históricas y epistemológicas con el fin de generar un enlace constructivo e interdisciplinar para evitar que durante el proceso de formación se perciba la *física* como la recolección de un gran número de ecuaciones que deben ser memorizadas, dejando de lado el contexto sin llegar a trascender más allá de la acumulación de teorías sin ningún tipo de conexión. Así, uno de los objetivos más importantes de esta propuesta a nivel pedagógico es motivar a los estudiantes para que adquieran nuevas herramientas y conceptos que serán de gran utilidad en sus cursos avanzados; de igual manera es importante que generen un pensamiento crítico mediante el cual puedan generar y debatir sus propias conjeturas basadas en estructuras conceptuales de la mano de los eventos históricos que hacen parte de toda la estructura teórica de la mecánica. Esto permitirá analizar y determinar los puntos a favor y en contra que pueden presentar las dos formulaciones analizadas en un mismo curso, y así puedan ser más precisos los conocimientos construidos y mayor su interés por la evolución histórica y teórica de la mecánica clásica.

2. ACERCAMIENTO HISTORICO - EPISTEMOLÓGICO

2.1. Contextualización histórica de la mecánica clásica.

En algunos de los cursos iniciales del proceso de formación de docentes en física, se analizan textos de los diferentes campos de estudio los cuales son abordados teniendo en cuenta su desarrollo, aspectos teóricos y evolución histórica; no obstante, algunos autores asumen ciertas temáticas con el fin de mostrar hechos y teorías de la física, dejando de lado los aspectos históricos-epistemológicos de su propio desarrollo. Por otro lado algunos textos de divulgación científica se encargan de evidenciar históricamente la vida y obra de algunos pensadores enumerando varios de sus aportes a la ciencia, sin hacer uso de los elementos matemáticos necesarios para sustentar dichos logros. Es aquí donde nace uno de los objetivos de este trabajo, con el fin de presentar una propuesta alterna que contenga componentes epistemológicos y teoricos de las formulaciones Newtoniana, Lagrangiana y Hamiltoniana de uno de los grandes campos de la física como lo es la mecánica clásica, la cual se encarga del análisis y descripción del movimiento por medio de un conjunto de leyes físicas y herramientas matemáticas.

Para realizar un análisis de la mecánica clásica es importante poder establecer algunos de los precedentes históricos que han sido de gran importancia dentro de su evolución, y así poder presentar una breve contextualización cronológica donde se exponen algunos de los referentes, que hacen parte del desarrollo de la mecánica clásica desde Aristóteles y algunos pensadores griegos, de la misma manera realizando un recorrido por Copérnico, Kepler, Galileo, entre otros; no sin aclarar, que muchos de los grandes físicos y sus grandes aportes pueden quedar fuera de este recuento el cual intenta finalmente mostrar la importancia tanto de la mecánica de Newton, como de la mecánica de Lagrange y Hamilton.

2.1.1. Escuelas griegas y el movimiento

La física y su enseñanza como ciencia empírica, ha sido pieza clave en el desarrollo del pensamiento humano al momento de analizar las características y el comportamiento de la energía y la materia. Para Gamow (1971, p. 11) "es interesante saber, que antiguas naciones como Egipto y Babilonia, contribuyeron en gran medida al temprano desarrollo de las matemáticas y la astronomía, sin embargo fueron estériles respecto al desarrollo de otros fenómenos de la física" Esto en contraste con la ciencia griega desde el punto de vista de la física, pues son los griegos los encargados de proponer las primeras ideas claras sobre el universo mecánico. Entre los pensadores más importantes de la época podemos destacar al filósofo Pitágoras de Samos quien vivió a mediados del siglo IV antes de Cristo. Él estaba convencido que el mundo está dominado por los números, debido a esto fundó la escuela Pitagórica donde se destacan aportes como la ley pitagórica de las cuerdas, mediante la cual se encuentra la relación entre las longitudes de las cuerdas y los instrumentos musicales que producen combinaciones armónicas de sonidos. Para la escuela Pitagórica la tierra era esférica y constituía el centro del universo, ellos observaron que el sol y algunos planetas no comparten el movimiento uniforme de las estrellas, teniendo su camino propio.

> Pitágoras intentó dar un paso más al sugerir que como el movimiento de los planetas "debe ser armonioso" sus distancias de la tierra deben estar en las mismas relaciones que la longitud de las cuerdas (bajo la misma tensión) que producen las siete notas fundamentales de la lira, el instrumento nacional de los griegos. Gamow (1971, p. 12).

Así, son muchos los filósofos que han interpretado el comportamiento y los cambios en la naturaleza, teniendo en cuenta propiedades como el espacio y el tiempo; otro de los grandes participes de la mecánica clásica brindando grandes aportes al desarrollo de teorías sobre la materia y su movimiento fue Demócrito, quien vivió hacia el año 400 antes de Cristo y fue quien desarrolló la idea en donde todos los cuerpos materiales estas compuestos por partículas indivisibles llamadas "átomos". Este planteamiento y la existencia del vacío fueron pieza clave en la transición de la física durante esta etapa; aunque Demócrito era ignorado o abucheado por Sócrates y Platón, quienes fueron junto con Aristóteles los pensadores que más influenciaron el conocimiento hasta la llegada del renacimiento, no fue del todo ignorado por otra gran escuela del momento como lo fue la del filósofo griego Epicuro, quien también nació en la isla Samos en el año 342 antes de Cristo. Epicuro asumió la teoría atómica propuesta años antes por Leucipo y Demócrito, mediante la cual pretendía explicar el comportamiento mecánico del universo formado por átomos y vacío. En otro de sus aportes explica que en el vacío, bajo la acción de su peso, los cuerpos pesados y los ligeros deben moverse con la misma velocidad. Para él, si un cuerpo se mueve, deberá continuar su movimiento a menos que exista un efecto que lo modifique. Esto es el llamado principio de Galileo, redescubierto casi 2000 años después, y una de las leyes fundamentales de la mecánica.

2.1.2. El movimiento aristotélico

Dentro de nuestro recorrido de contextualización es importante mencionar a tres de los iconos más importantes de la filosofía griega, dos de ellos ya mencionados anteriormente y a quienes se debe en gran parte la concepción que tenía el ser humano respecto al universo hasta la llegada de Copérnico, de quien también hablaremos más adelante; El primero de ellos es Platón quien ya habíamos mencionado por sus malas relaciones con Demócrito, siendo uno de los mas grandes pensadores de la antigüedad por sus aportes a la política, la cosmología y la filosofía entre otros.

El segundo de ellos es Aristóteles de quien también hablaremos en esta sección por ser quien planteó una de las teorías griegas más populares acerca del universo y del movimiento de los cuerpos. Aristóteles nació en el año 384 antes de Cristo en una ciudad griega cerca al mar Egeo. La naturaleza del mundo aristotélico estaba compuesta de cuatro elementos, Tierra, agua, aire y fuego y un elemento especial presente en el cielo al que le llamo éter, cada elemento tenía su lugar natural. De igual manera se aceptaba que la tierra era de naturaleza terrestre y que se encontraba en el centro del universo. M*ás allá de las esferas de la tierra, aire, agua y fuego, los cuerpos celestes giran en esferas cristalinas autónomas. Las esferas celestes a las que solo se* *permitía la perfección del movimiento circular, eran imperturbables, armónicas y eternas” (*Goodstein 1999, p. 20).

Aristóteles argumentaba que todo movimiento puede analizarse desde dos perspectivas sea lineal, circular o una combinación de ambos. Afirmaba que el movimiento de cualquier cuerpo se clasificaba en natural y violento, también consideraba que todo objeto en el universo tiene su lugar propio determinado por su naturaleza, y aquellos que no se encontraran en su lugar propio realizarían esfuerzos para alcanzarlo. Él argumentaba que los cuerpos más pesados caerían más rápidamente que los livianos, se fundamentó en el ejemplo natural del tiempo que dura una pluma al caer en comparación con el de una piedra. Debido a esto los objetos más pesados opondrían mayor resistencia, ya que caen con rapideces proporcionales a su peso; cuanto más pesado sea un objeto, más rápido debería caer. Quizás uno de sus mayores aportes a la física fue la invención del nombre el cual deriva de la palabra naturaleza. Por otro lado sus ideas respecto al movimiento de los objetos y cuerpos celestes fueron de una u otra manera obstáculos durante el desarrollo de la ciencia y el pensamiento humano.

El tercero, y no menos importante, vivió un siglo después de Aristóteles; su nombre es Arquímedes quien además de sus aportes como científico al rey de Siracusa y sus fundamentos en hidrostática y estática, es considerado el padre de la ciencia mecánica. En algunos de sus escritos propuso las leyes sobre las palancas y discute el problema de encontrar el centro de gravedad; todos estos aportes y en especial los que respectan al movimiento fueron indispensables tanto para las personas de la época como para el desarrollo y evolución de la mecánica clásica. Además su estudio sobre las palancas permitió introducir un importante concepto mecánico como lo es el *trabajo* desarrollado por una fuerza actuante.

> *“Suponiendo que hay que levantar una piedra usando una palanca de hierro con una relación entre sus brazos de 3:1; debido a esto se debe ejercer presión sobre el extremo de la palanca con una fuerza tres veces menor que la fuerza gravitatoria que actúa sobre la piedra. Así puede deducirse que el producto de la fuerza, con la que presiona sobre el extremo, multiplicado por su desplazamiento hacia abajo es igual al peso de la piedra por su desplazamiento hacia arriba”* Gamow (1971, p. 19).

Todos estos aportes permitieron que las teorías del movimiento fueran tomando forma e importancia, de manera que sus características y propiedades poco a poco fueron ganando interés de parte de los pensadores de la época.

2.1.3 Mecánica de la escuela Alejandrina

Es importante resaltar que durante este proceso se pretende que los estudiantes conozcan y encajen algunos de los hechos que han sido claves durante el desarrollo de la física a nivel general y específicamente algunos de los que respectan a la mecánica clásica y el movimiento de los cuerpos. Sin embargo también es importante conocer que por más de mil años hubo gran ausencia del conocimiento y aportes a la física, y de una u otra manera también repercutieron en dicho desarrollo. Después de los grandes aportes de Arquímedes y otros pensadores, fueron muchos los inconvenientes de la cultura griega a nivel social, político y económico; no obstante la escuela Alejandrina fue la última en brindar aportes valiosos y pensadores connotados en la construcción de la mecánica y los modelos que respectan al movimiento, especialmente lo relacionado con el cosmos y el comportamiento del mismo.

La física y la astronomía tuvieron como representantes en la escuela alejandrina a Aristarco de Samos quien vivió durante el siglo III antes de Cristo y fue el primero en formular, sin ser tenido en cuenta, un sistema Heliocéntrico el cual pone al sol como centro del universo, sin embargo algunos de sus trabajos como “Distancia del sol y de la Luna” se basaban en la visión Geocéntrica propuesta años antes por Aristóteles y desarrollada por Ptolomeo años después. El siguiente de ellos es Hiparco, él vivió dos siglos antes de Cristo y realizó aportes al estudio del cosmos con una serie de catálogos donde se observan las posiciones de algunas de las estrellas, la división del día en 24 horas y el análisis del cambio gradual en la orientación del eje de la tierra (precesión de los equinoccios). Todos estos análisis fueron muy importantes teniendo en cuenta la época en la cual se realizaron. Por otro lado en la escuela de alejandrina también se realizaron aportes a la mecánica, esta vez de manos de Herón el cual vivió durante el siglo I después de Cristo, fue más un ingeniero e inventor perteneciente a la ciencia helénica, realizó contribuciones a la generalización del principio de la palanca de Arquímedes, además realizó experimentos con máquinas de vapor las cuales permitieron observar de manera primitiva la ley de acción y reacción de Newton; fue precursor de algunos de los modernos motores de propulsión a chorro. Herón también escribió un libro (Catóptrica) en el cual se estudian las teorías sobre espejos y algunas de sus aplicaciones evidenciando que la luz viaja siguiendo el camino geométricamente más corto. Las teorías del movimiento especialmente las que estudiaban el comportamiento del cosmos evidenciaban algunos problemas; mientras el sol, la luna y otras estrellas realizaban "casi siempre" sus movimientos de manera adecuada, otros cuerpos denominados "planetas" no tenían el mismo comportamiento definido por círculos perfectos de los cuales hablaba Platón. Para evitar estos inconvenientes "Los astrónomos hicieron que los planetas describieran circunferencias, llamadas epiciclos, que eran a su vez el centro de otros círculos, llamados deferentes" (Goodstein1999, p. 21). Uno de esos astrónomos era Claudio Tolomeo, el cual vivió durante el siglo II después de Cristo codificó éstas teorías y sus explicaciones mediante un sistema que desarrolló en su obra más grande, "El almagesto", siendo éste el manual más trabajado por los astrónomos hasta la llegada de Copérnico, quien no estaba de acuerdo que para que funcionara la teoría de los epiciclos, hubiese que introducir variaciones en las matemáticas y cálculos tradicionales. Las ideas de Ptolomeo fueron parte fundamental en el análisis de los movimientos astronómicos durante casi 1200 años sin tener mayores opositores en su cosmovisión geocéntrica.

2.1.4. Obstáculos en la comprensión del movimiento

Como mencionamos anteriormente, es importante que el docente en formación para quien va dirigida esta propuesta, comprenda y explore algunas de las transformaciones que se produjeron respecto a las teorías del movimiento. Durante más de 1400 años, fue la ciencia y sus pensadores quienes entraron en un letargo intelectual tras el final del apogeo de la cultura griega, la ascensión y posterior caída del imperio romano y más aún el fortalecimiento de la iglesia cristiana, quienes tenían otros intereses y preocupaciones; sin embargo, fueron los árabes quienes a finales del primer milenio fundaron algunas escuelas de ciencias y tras su invasión en territorio Español fueron cuna de la matemática, rescatando y traduciendo algunos escritos griegos. No fue hasta inicios del siglo XI donde se construyeron en Europa las primeras universidades como la de Paris, Bolonia, Oxford, la mayoría de ellas con supervisión de la iglesia.

2.1.5. Revolución copernicana

A puertas de la revolución científica esta historia va tomando un rumbo interesante, pues se evidencian situaciones y personajes que estructuraron la física y especialmente las leyes del movimiento. Después de cientos de años y de estar en el olvido la concepción de Aristarco fue tenida en cuenta por un astrónomo Polaco llamado Nicolás Copérnico, el cual vivió durante los años (1473 -1543) y dedicó la mayor parte de su vida a estudiar los movimientos del sol, la luna y los planetas, intentando encontrar un modelo que describiera el comportamiento del universo. Copérnico formuló en su libro “De Revolutionibus Orbium Coelestium” (de las revoluciones de las esferas celestes) un sistema en el que el sol se encontraba en el centro y los planetas describen orbitas circulares a su alrededor (modelo heliocéntrico); allí explicaba que los movimientos celestes son uniformes, eternos, y circulares o compuestos de diversos ciclos (epiciclos). Para Copérnico, orbitando el Sol, en orden, se encuentran Mercurio, Venus, la Tierra y la Luna, Marte, Júpiter, Saturno; Copérnico también presenta un modelo de rotación diaria y anual de la tierra sobre su eje, manifestando que éste se encuentra un tanto inclinado y que la distancia de la Tierra al Sol es pequeña comparada con la distancia a las demás estrellas.

De ahí la importancia que tiene nuestro recorrido y el respectivo análisis de esta propuesta pues se han evidenciado posturas en las cuales algunos autores discuten qué tan importante es que el estudiante visualice y reconozca que:

> Existen razones culturales para conocer, comprender y acoger el modelo de Copérnico. Son razones de «simplicidad» y de «belleza» del modelo, pero sobre todo es el principio de no considerar a la Tierra estática y en posición central respecto a un Universo en el que todo se mueve y en el que no hay un centro, siendo este el motivo más importante. Lanciano (1989, p. 175).

Si bien la obra de Copérnico no fue tenida en cuenta durante los primeros años, décadas más tarde algunos jesuitas enseñaban astronomía copernicana en china, y sus aportes fueron la base y el inicio de la revolución científica, que más adelante continuaría a manos de unos cuantos revolucionarios del conocimiento y del movimiento. Eran Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo Galilei.

2.1.6. Tycho Brahe el astrónomo

Continuamos nuestra historia tres años después de la muerte de Copérnico, con el nacimiento en Dinamarca de un astrónomo llamado Tycho Brahe (1546-1601), gracias a sus observaciones pudo analizar muchos de los errores encontrados en los datos que empleaban Ptolomeo y Copérnico para calcular las posiciones de algunos astros. De igual manera pudo predecir con precisión algunos eventos celestes como eclipses solares y la conjunción de algunos planetas. Brahe contó con la ayuda del rey Federico II de Dinamarca, quien le donó la isla de “Huen” para construir allí el mayor observatorio visto hasta entonces, este fue llamado “Uraniborg”. Allí se construyeron instrumentos para realizar nuevas mediciones y muy pronto se convirtió en un centro de investigación que contaba con su propia imprenta para publicar sus trabajos de investigación. Todos estos procedimientos resultaron eficaces y con una precisión asombrosa pues en 1572 apareció una estrella en el firmamento en la constelación de Casiopea, siendo contradictorio para los aristotélicos quienes consideraban un cielo inmutable, sin transformación alguna; no obstante la concepción de Brahe no dejo de ser geocéntrica sin discrepar del todo con el modelo heliocéntrico, debido a esto ideó su propio modelo el cual es denominado por algunos autores como “ geoheliocéntrico” otros afirman que “para Brahe, en el movimiento del cosmos todos los planetas daban vueltas alrededor del sol y éste, junto con los demás planetas, daban vueltas alrededor de la Tierra, que volvía a ser el centro del universo” (Goodstein 1999, p. 28). Estas afirmaciones evitaban confrontaciones entre ambas posturas, haciendo cada vez más evidentes las inconsistencias del modelo aristotélico, que más tarde se derrumbaría por completo teniendo en cuenta los análisis y las teorías fisicomatemáticas que se mostrarían al mundo años más tarde de la mano de otros grandes de la ciencia.

2.1.7 Kepler y leyes del movimiento planetario

Continuando nuestro recorrido a través de la evolución de la mecánica clásica y con ella las concepciones del movimiento; es así como en el año 1600 viajó hacia Praga, a encontrarse con Tycho Brahe, una de las mentes más prodigiosas y maravillosas de la revolución científica y el renacimiento, su nombre era Johannes Kepler, quien trabajaría y postularía las leyes de los movimientos planetarios. Antes de su encuentro con Brahe, Kepler se había destacado por sus grandes habilidades matemáticas y aportes al sistema copernicano, él explicaba la proporción entre las orbitas de los seis planetas conocidos hasta el momento, teniendo en cuenta sus ideas sobre el acoplamiento de los cinco sólidos perfectos (el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro). El libro donde expuso estas ideas se publicó en 1596 bajo el nombre *"*Mysterium Cosmographicum", esto llamó la atención del astrónomo danés quien lo llamaría cuatro años más tarde.

De esta manera trabajaron juntos algunos meses, no con buenas relaciones, pero si con mutua necesidad hasta 1601, año en el que murió Tycho Brahe. Posterior a esto Kepler se convirtió en el nuevo matemático imperial y dedicó los siguientes años a estudiar los movimientos orbitales de los planetas. En el año 1604 mientras observaba la conjunción de algunos planetas, vio como una supernova aparecía en el cielo haciéndose visible durante más de un año lo cual no era normal dentro de los sistemas ya establecidos; este y otros eventos como el movimiento orbital de Marte el cual no encajaba en ningún círculo, generaron en Kepler gran duda e incertidumbre, pero a la vez trascendieron de manera fundamental respecto a sus ideas, " ≪¡ Necio de mi ! ≫ exclama Kepler, por no haberse dado cuenta antes que la órbita de Marte no era un círculo. Era una elipse con el sol en uno de sus focos (Kepler tomó esta palabra de la latina focus, que significa fogón)" (Goodstein1999, p. 18). La elipse es una de las cuatro secciones cónicas junto con el círculo, la parábola y la hipérbola las cuales se obtienen a partir de realizar diferentes cortes transversales a un cono.

Kepler analizó sus datos y los de Brahe concluyendo en el año 1609 que la mejor opción para ajustar las cosas es lo que hoy conocemos como leyes del movimiento planetario:

- *Una elipse puede definirse como una serie de puntos elegidos de tal modo que la suma de las distancias de cada uno de ellos a los puntos fijos llamados focos es la misma. Todos los planetas recorren orbitas elípticas teniendo al sol situado en uno de sus focos.*

También postulo que los planetas se mueven con mayor rapidez cuando están cerca del sol (Perihelio) y más lento cuando se encuentra lejos (Afelio).

- *Esta aceleración y la relación de sus distancias respeto al sol presentan una particularidad: la línea imaginaria que une el sol y el planeta recorre áreas iguales de la órbita planetaria en intervalos de tiempo iguales.*

Diez años más tarde en 1619, tras soportar muchos inconvenientes, enfermedades y la pérdida de muchos de sus seres queridos, publicó su libro, “Harmonices mundi” (ciencia de la armonía del mundo) que sería conocido como la tercera ley del movimiento planetario.

- En esta ley compara las orbitas de los planetas y afirma que: *los cuadrados de los periodos de revolución de los diferentes planetas en torno al sol están en la misma razón que los cubos de sus distancias medias al sol.*

Para ejemplificar esta idea tomamos dos planetas que están a diferentes distancias del Sol. En el caso general vamos a decir que el semieje de la órbita del planeta 1 es r_1, el del planeta 2 es r_2 y que sus períodos son T_1 y T_2, respectivamente.

$$T_1^2 = kr_1^3 \; ; \quad \frac{T_1^2}{r_1^3} = k \qquad (2-1)$$

$$T_2^2 = kr_2^3 \quad ; \quad \frac{T_2^2}{r_2^3} = k \qquad (2-2)$$

Igualando (2-1) y (2-2)

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \qquad (2-3)$$

Siendo esto lo que ahora conocemos como tercera ley del movimiento planetario.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 \qquad (2-4)$$

Todos estos aportes de Kepler contribuyeron en la aceptación del modelo heliocéntrico; Sin embargo, la ciencia aún tenía que enfrentar una serie de obstáculos, pues la revolución científica hasta ahora iniciaba y la mecánica clásica también emprendía una revolución en el pensamiento del movimiento a partir de lo que hoy conocemos como la cinemática y la dinámica.

2.1.8 Galileo Galilei

Para finalizar este capítulo se considera importante que el estudiante de primeros semestres visualice la transformación intelectual que se ha generado a partir de la comprensión del movimiento de la mano con el estudio de la astronomía. La matemática y la práctica experimental como herramientas del conocimiento fueron otros de los factores que influenciaron el pensamiento humano y con este la comprensión de las leyes del movimiento.

Uno de los pensadores más grandes de toda la historia inició el camino hacia la física experimental, su nombre, Galileo Galilei, nació en Pisa (Italia) en el año 1564. Galileo inició sus estudios de medicina en 1581, sin darlos por terminados, pues no mostró tanto interés como por la matemática y el análisis del movimiento. Algunos autores afirman, que un día mientras oía una misa observó cómo una lámpara que estaba en movimiento realizaba oscilaciones que poco a poco se iban haciendo más tenues hasta llegar al reposo; sin embargo lo que generaba su duda era si el tiempo de cada oscilación (periodo) ¿se haría cada vez más corto?, Galileo realizó dicho analsis mediante un reloj de agua que él ingenió para hacer sus experimentos (pues en su época no existían otros elementos para medir el tiempo), fue así como:

> "probablemente con gran sorpresa descubrió que, aunque las oscilaciones eran más cortas, el tiempo de duración era exactamente el mismo. De igual manera descubrió que, para una longitud dada de la cuerda, el periodo de oscilación era el mismo usase una piedra pesada o ligera en el experimento" Gamow (1971, p. 37).

De esta manera se analizaron por primera vez las características del péndulo siendo el abrebocas y pieza clave de su orientación e interés por la mecánica, lo que permitió realizar grandes aportes en lo que ahora se conoce como cinemática y dinámica.

Galileo se trasladó 1592 en a la Universidad de Padua trabajando como maestro de geometría, mecánica y astronomía durante unos 18 años aproximadamente, tiempo en el que analizó el movimiento del péndulo como un caso especial de la caída de los cuerpos, ya que al soltar una piedra que no está atada a nada, caerá directamente hacia el suelo, y si de la misma manera que en el caso anterior dos objetos de masas diferentes gastan el mismo tiempo en alcanzar la posición más baja, dedujo entonces que ambos objetos tardarían el mismo tiempo en caer al suelo si se sueltan desde la misma altura. Esto contradecía fuertemente el pensamiento Aristotélico en el cual los objetos con mayor masa caerán más rápido. Es así como encontró interés por el estudio de la caída de los cuerpos y por ende las características de su movimiento; pero no todo fue fácil para Galileo, ya que al intentar demostrar varias de sus ideas no contaba con las herramientas apropiadas para obtener el mejor desempeño. Describir el movimiento acelerado de algunos cuerpos era fundamental para él, ya que de esta manera podría establecer más fundamentos a las ideas copernicanas del cual era seguidor; sin embargo el sistema de Copérnico era un insulto tanto para los aristotélicos como para la iglesia, pues no se explicaban porque los movimientos de la tierra no eran perceptibles.

Ellos pensaban: “si la tierra gira efectivamente, por qué cuando dejamos caer una pelota desde una torre, la de Pisa por ejemplo, esta cae rectilínea y no cae en la ciudad próxima. Las respuestas comenzaron a ser más arriesgadas que las preguntas” (Blinn 1985). Para explicar el comportamiento y las características del movimiento, Galileo ideó una serie de experimentos con el fin de analizarlos desde un punto de vista matemático; lo más cercano a una caída libre era un plano ligeramente inclinado, minimizando la fricción al máximo y de esta manera prolongando un poco más el tiempo de caída, pues no contaba con buenos instrumentos para medir dichos intervalos, y los relojes de buena calidad aun tardarían algunos años. Galileo observó que las esferas que ruedan hacia abajo por las pendientes aumentaban su rapidez, mientras que las que rodaban hacia arriba perdían su rapidez.

Así, sus ideas y observaciones le indicaban que si la esfera rodase por un plano horizontal, esta ni se acelera ni desacelera, ya que la esfera llega al reposo no por su naturaleza como manifestaba Aristóteles, sino por la fricción que se ejercía sobre ésta; y dedujo que en ausencia de la fricción o fuerzas contrarias la esfera terminaría moviéndose indefinidamente. Es así como Galileo logró concluir que en ausencia de fuerzas de retardo, la tendencia de los objetos es a moverse por siempre sin desacelerarse. A la propiedad de un objeto de resistirse a los cambios en el movimiento la llamo *inercia*. Todas estas estrategias permitieron que Galileo postulara la ley de la caída de los cuerpos pues al marcar las posiciones en iguales intervalos de tiempo, encontró que las distancias recorridas se relacionaban proporcional a los números 1, 2, 3,5, 7…; Galileo también concluyó que la distancia total recorrida en un instante determinado es proporcional al cuadrado del tiempo. Lo cual se puede representar matemáticamente de la siguiente manera.

$$x(\mathrm{t}) = \mathrm{Ct}^2 \qquad (2-5)$$

Donde x es función del tiempo y C es una constante; de esta manera se podría obtener el valor x en cualquier intervalo de tiempo. Galileo realizó todos sus análisis matemáticos teniendo en cuenta algunas propiedades geométricas. A continuación presentamos al lector parte de este análisis, desde una perspectiva más algebraica exponiendo otras de las ecuaciones de la ley de caída de los cuerpos, mediante las cuales se pueden conocer variables como la rapidez media e instantánea de un objeto.

En cuanto a la rapidez media o promedio se puede obtener al dividir la distancia total recorrida sobre el intervalo de tiempo.

$$v_{media} = \frac{Distancia\ total\ r\mathrm{ecorrida}}{T i\mathrm{empo\ total}} \qquad (2-6)$$

Introducir la rapidez instantánea como la variación en la distancia sobre la variación del tiempo en un instante determinado presenta algunos inconvenientes, pues en un determinado punto la razón de cambio es igual a cero, y el máximo y el mínimo del cociente también son cero, lo cual genera una inconsistencia matemática, pues no es posible dividir nada entre cero. Para esto vamos a realizar algunos procesos matemáticos en donde inicialmente no vamos a calcular la rapidez en un instante *t,* sino la rapidez media en un instante $(t + h)$, siendo (h) el cambio en el tiempo. Si:

$$x\ (t) = Ct^2 \qquad (2-5)$$

Es la distancia recorrida en el tiempo (t), entonces:

$$x\ (t + h) = C(t + h)^2 \qquad (2-7)$$

Resolviendo el cuadrado de la suma tenemos:

$$x\,(t+h) = C(t^2 + 2th + h^2) \qquad (2-8)$$

De esta manera podemos escribir la velocidad media como:

$$v_{media} = \frac{C(t+h)^2 - Ct^2}{h} \qquad (2-9)$$

$$v_{media} = \frac{C(t^2 + 2th + h^2) - Ct^2}{h} \qquad (2-10)$$

Multiplicando la constante C por los términos del paréntesis:

$$v_{media} = \frac{Ct^2 + 2Cth + Ch^2 - Ct^2}{h} \qquad (2-11)$$

Restando términos semejantes y h como factor común:

$$v_{media} = \frac{h(2Ct + Ch)}{h} \qquad (2-12)$$

Es así como se obtiene la velocidad instantánea de manera más sencilla pues la velocidad media no tiene términos de h en su denominador.

$$v_{media} = 2Ct + Ch \qquad (2-13)$$

De esta manera podemos calcular la rapidez en cualquier punto que se desee, inclusive haciendo a h cada vez más corta, hasta que esta tienda a cero (esto se conoce como derivada, más adelante mostraremos la importancia del cálculo diferencial como instrumento matemático para explicar una taza de cambio).

Para $h = 0$,

$$v_{instantanea} = 2Ct \qquad (2-14)$$

Para calcular la aceleración podemos emplear el mismo razonamiento. Teniendo en cuenta cómo varía la rapidez dividida en un intervalo de tiempo, entonces podemos escribir:

$$v_{(t)} = 2Ct$$

$$v_{(t+h)} = 2C(t+h) \qquad (2-15)$$

$$v_{(t+h)} = 2Ct + 2Ch \qquad (2-16)$$

$$aceleracion = \frac{variacion\ de\ \text{la velocidad}}{variacion\ del\ \text{tiempo}} \qquad (2-17)$$

Reemplazando la variación de la velocidad en el mismo intervalo de tiempo (h)

$$a = \frac{v_{(t+h)} - v_{(t)}}{h}$$

$$a = \frac{2Ct + 2Ch - 2Ct}{h} \qquad (2-18)$$

Se cancelan los dos $2Ct$ con signo opuesto y las h que encuentran en el numerador y denominador:

$$a = \frac{2Ch}{h} \qquad (2-19)$$

Finalmente tenemos la ecuación de la aceleración en función del tiempo, y notamos que no depende del tiempo pues es una constante:

$$a = 2C \qquad (2-20)$$

Siendo $a = aceleracion\ de\ la\ gravedad$ la cual será representada con la letra (g)

$$g = 2C \qquad (2-21)$$

De esta manera podemos escribir las ecuaciones del movimiento para la caída libre en términos de la gravedad teniendo en cuenta que $\frac{1}{2}g = C$

Por lo tanto, $x_{(t)}$:

$$x_{(t)} = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2-22)$$

Las otras dos magnitudes $v_{(t)}$ y $a_{(t)}$ se representan de la siguiente manera:

$$v_{(t)} = gt \qquad (2-23)$$

$$a_{(t)} = g \qquad (2-24)$$

Estas serían las leyes de la caída de los cuerpos, que planteamos de la mano de algunos conceptos sencillos de cálculo diferencial, el cual abordaremos más adelante. Sin embargo aunque Galileo no conocía esta herramienta matemática si comprendía todas las características y propiedades de este movimiento. Finalmente hacia el año 1631 tras analizar muchos experimentos, obtener evidencias e ideas brillantes, Galileo podía dar respuesta a las preguntas relacionadas con el movimiento de la tierra. Por otro lado existían debates en los cuales se discutía lo complicado que sería obtener la cantidad de fuerza necesaria para mantener la tierra en movimiento.

De esta manera se planteaban interrogantes como el de la caída de la piedra desde la torre que mencionamos con anterioridad y otros en los que daban vuelo a la imaginación y proponían por ejemplo:

> *"imagina un ave parada en reposo en la copa de un árbol muy alto. En el suelo, debajo de él, está un gusano gordo y jugoso. El ave lo observa y se deja caer verticalmente y lo atrapa. Esto sería imposible, se afirma, si la tierra se moviera como sugirió Copérnico"* Hewitt (2007, p. 36).

*S*i la teoría copernicana y los cálculos de velocidad de la tierra respecto al sol eran ciertos, dicha rapidez era de unos 30 km/s para describir un círculo alrededor del sol en un año. Lo que los llevaba a pensar "si el ave bajara en un segundo la tierra se habría desplazado 30 km", lo cual no era evidente para nadie. La genialidad y la perspicacia de Galileo generaron frutos gigantescos en el estudio de la mecánica y de igual forma a su enseñanza, enhorabuena dio a conocer sus teorías del movimiento, siendo la de *inercia* pieza clave en el desarrollo de estas teorías ya que podía afirmar que el árbol, el ave, el gusano y todo lo que hay en la tierra está moviéndose a 30 km/s.

Las ideas de Aristóteles nunca tuvieron en cuenta la fricción o fuerzas de resistencia, mucho menos la idea de inercia, y nunca estuvieron en tanto riesgo como en la época de Galileo; más aún con la llegada de Isaac Newton, pues Aristóteles nunca reconoció a la unicidad del movimiento. Sin embargo galileo tuvo que enfrentar una batalla más, en el año 1633 a la edad de 69 años, esta vez con la iglesia, que estaba en total desacuerdo con sus ideas; debido a esto fue llevado a juicio donde fue declarado culpable y obligado a retractarse.

Los últimos días tuvo que cumplir condena desde su casa debido a su edad y estado de salud. Sin embargo siguió trabajando desde su hogar y realizó aportes importantes en el estudio del movimiento de proyectiles. Galileo vivió los últimos cuatro años de vida ciego tras los daños ocasionados por sus observaciones astronómicas especialmente hacia sol; murió el 8 de enero de 1642 dejando huellas trascendentales en la compresión del movimiento y de igual manera en la que ahora conocemos como mecánica clásica.A continuación se presenta una idea clara sobre el análisis del movimiento desde la perspectiva de Newton, con el fin de contextualizar algunas de las pautas, estrategias y otros conceptos claves que son necesarios al momento de abordar todas las temáticas desde varias alternativas

.3. Dinámica y principios de conservación.

3.1 Mecánica Newtoniana

Tras haber explicado algunas de las pautas necesarias para el análisis de la mecánica, ahora vamos a continuar nuestro recorrido enfocándonos en la base fundamental de la misma, con algunas de las ideas del más grande pensador existente durante el renacimiento (Isaac Newton) y la llegada inminente de la revolución científica. En el capítulo 2 realizamos un recorrido resaltando las ideas de pensadores importantes que de una u otra manera constituyeron las bases que más tarde se emplearían en diferentes análisis sobre el comportamiento y las leyes que rigen el movimiento en la naturaleza. Después de la muerte de Galileo en el año 1642 el camino de la ciencia no podía quedar en el limbo y aunque en dicha época nadie esperaba la llegada de grandes pensadores fue necesaria la incursión de alguien con características similares a los ya mencionados en capítulos anteriores.

El 4 de enero de 1643 nació en Lincolnshire, Inglaterra una de las mentes más brillantes; fue bautizado con el nombre de Isaac Newton, quien se graduaría de bachiller en 1665 y regresaría a su casa tras los peligros de la peste que rondaba en Londres, sin ninguna distinción especial, solo la de ser un joven tímido y un tanto retraído.

> Según el mismo Newton Durante 1665 encontré la regla de los binomios, el mismo año descubrí el método de las tangentes y en noviembre un método directo de los fluxiones (cálculo diferencial); el siguiente año en enero la teoría de los colores, en el siguiente el método inverso de los fluxiones (cálculo integral) y el mismo año comencé a pensar en la gravedad extendiéndola a la órbita de la luna […] (Gamow 1971, p. 53).

Sin embargo mantuvo muchas de sus ideas en secreto y solo años más tarde, a la edad de 44 años, publicaría uno de sus más grandes aportes al establecer los principios dinámicos que reemplazarían las ideas aristotélicas del todo. Newton presentó algunos análisis en su libro “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”

(Principios matemáticos de filosofía natural) publicado en el año 1687, lo cual permitió generar un análisis de la evolución del conocimiento a nivel matemático y físico. Esto se reducía a tres leyes fundamentales mediante una serie de definiciones y parámetros heredados de pensadores como, Kepler, Galileo y Descartes, entre otros.

En esta sección mencionaremos de manera puntual las tres leyes de Newton teniendo en cuenta que no deben ser ajenas para los estudiantes, ya que generalmente son tratadas en los cursos de bachillerato. Según Gregory, D. (2006), esta es la formulación de las leyes básicas del movimiento.

Ley I: Si la suma vectorial de todas las fuerzas $\sum \vec{F}$ ejercidas sobre un objeto es cero, el objeto continúa en su estado original de movimiento. Esto es, si $\sum \vec{F} = 0$, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento con alguna veleocidad continúa con esa misma velocidad.

Esta ley fue heredada de las ideas de Galileo, sobre la caída de los cuerpos mencionada en el Capítulo 2 y que son aplicables al movimiento de proyectiles sin la resistencia del aire, atraídos por la fuerza de gravedad.

Ley II: El cambio de movimiento (momento mecánico) es proporcional a la fuerza motriz ejercida que actúa sobre una partícula de masa m, la partícula se mueve con una aceleración instantánea.

Sobre esta ley hablaremos detenidamente en esta sección. Generalmente se representa la fuerza neta o total ejercida sobre un cuerpo, como el cambio del momento respecto al tiempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (3-1)$$

Al representar el momento lineal como $\vec{P} = m\vec{v}$, y asumiento una masa constante podemos reescribir la ecuación anterior así

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3-2)$$

En los cursos de secundaria se da a conocer la fuerza como el producto de la masa por la variación de la velocidad con respecto al tiempo $\frac{d\vec{v}}{dt}$ o aceleración. Dicho en otras palabras,

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (3-3)$$

Ley III**: **Cuando dos partículas ejercen fuerzas sobre la otra, estas fuerzas son Igual en magnitud, en dirección opuesta, y paralela a la línea recta que une las dos partículas.

Según esta ley, Newton consideraba que los planetas (incluida la tierra) ejercen fuerzas entre sí las cuales se anulan mutuamente sin importar su naturaleza.

Estas tres leyes han sido de gran importancia para la evolución de la ciencia ya que reemplazaron del todo los movimientos naturales de la mecánica aristotélica y años más tarde se convirtieron en la base de otras leyes como las de conservación del momento lineal, del momento angular y la energía. Una de las ideas más maravillosas de Newton además de sus tres leyes fue la inclusión de una fuerza particular ejercida entre el sol y los planetas o entre dos puntos materiales cualesquiera en el universo, denominada fuerza de gravedad, la cual analizó por medio de la segunda y tercera leyes de Kepler permitiéndole junto con sus leyes analizar las órbitas elípticas de los planetas alrededor del sol.

La mecánica newtoniana recurre a ecuaciones diferenciales de segundo orden en términos de fuerzas (cantidades vectoriales) que representadas en coordenadas cartesianas permiten (en muchos casos) plantear algunos problemas de manera más sencilla. Ahora desde el punto de vista de Newton nos enfocamos en las ***interacciones*** necesarias para comprender el comportamiento de un sistema o elementos que conforman dicho sistema. También es importante que el docente en formación comprenda y contextualice algunas de las restricciones ineludibles de las leyes de Newton tales como que la interacciones se producen en un tiempo determinado debido a la instantaneidad de la fuerza de acción y reacción, por otro lado dichas fuerzas no son analizadas por medio de un campo intermedio que posea momento y energía; estas pautas limitan el campo de acción de algunas de estas leyes como en el caso de la tercera ley de Newton en los siguientes casos:

Según González et al,.(2009, p. 5).

1. interacción entre partículas cargadas en movimiento (la fuerza es mediada por Fotones del campo electromagnético)

2. colisiones atómicas (ya que la duración de la colisión es grande en comparación con el tiempo que tardan en reordenarse los electrones de modo que el potencial electrostático se modifica gradualmente mientras dura la colisión).

3. También esta el caso de cargas en movimiento a lo largo de direcciones perpendiculares entre sí, como la fuerza generada por el campo magnético va en una dirección perpendicular al movimiento hablar de una acción reacción sobre la línea que une a los centros de las dos cargas se ve afectado por la dirección del movimiento.

Así podemos evidenciar algunos de los obstáculos presentes en la formulación Newtoniana. Si analizamos lo anterior y lo que compete a los sistemas de referencia inerciales, encontraremos que en muchos de los casos es necesario conocer de antemano algunas fuerzas como la fuerza de gravedad, la fuerza elástica, la tensión y las fuerzas de contacto y roce; sin embargo, de éstas la única fuerza fundamental es la gravedad. De igual manera, si analizamos los sistemas de referencia no inerciales aparecen términos adicionales no asociados a las fuerzas explícitas del sistema. Estos términos se denominan fuerzas ficticias (o pseudofuerzas) y generalmente están asociadas con la aceleración del sistema de referencia. De ahí la importancia de dar a conocer otras formulaciones, en este caso específico la mecánica de Lagrange y Hamilton ya que permite (entre otras) trabajar bajo sistemas no inerciales.

¿Y la Energía? Concepto no mencionado a profundidad durante este trabajo; y aunque para Newton no fue de gran importancia dentro del estudio del movimiento, sí sería fundamental en el análisis de Lagrange y Hamilton.

3.2. Conservación de la Energía.

La energía es uno de los conceptos más importantes en el estudio de las ciencias empíricas y de igual manera para las intenciones de este trabajo, ya que el estudiante debe pasar de una simple definición a todo lo que esta abarca, teniendo en cuenta su aplicabilidad a diferentes fenómenos y formulaciones físico-matemáticas.

Desde la perspectiva Newtoniana generalmente se emplean cantidades vectoriales; sin embargo existen casos donde la información que tenemos inicialmente no es la necesaria para la solución de dichos problemas. En estos casos donde las cosas no son del todo claras, podemos realizar una predicción del movimiento haciendo uso de dos conceptos fundamentales como el trabajo y la energía, que son cantidades escalares. Según Gregory (2006, p. 131):

> *aunque los métodos con energías no siempre son indispensables en la solución de ejercicios, nos da mayores conocimientos y permite generar nuevas alternativas que pueden ser solucionadas de manera rápida y elegante; la energía ha jugado un papel importante en la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana; más general a la noción de energía ha sido implícitamente al principio de conservación.*

Si tenemos en cuenta el movimiento y trayectoria de una partícula sujeta a una fuerza desde dos puntos r_1 y r_2 podemos mencionar algunos conceptos de gran importancia, uno de ellos es la energía cinética (cantidad escalar) de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ la cual se define de la siguiente manera:

$$T \equiv \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}) \qquad (3-4)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (3-5)$$

Si realizamos un producto escalar con $\vec{v}$ en ambos lados de la ecuación (3.2) podremos obtener una ecuación escalar:

$$\vec{F}.\vec{v} = m\,.\vec{v}\ \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3-6)$$

Donde:

$$m\,.\vec{v}\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}\right) \qquad (3-7)$$

De esta manera podemos reescribir la ecuación como.

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{dT}{dt} \qquad (3-8)$$

Ahora, si integramos a ambos lados de la ecuación en los intervalos de tiempo $[t_1, t_2]$, obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\ .\vec{v}\ dt = \int dT\ = T_2 - T_1 \qquad (3-9)$$

Siendo T_1 y T_2 la energía cinética de la partícula que se mueve bajo la influencia de la fuerza $\vec{F}$.

Esto relaciona otra de las cantidades escalares conocida como el trabajo (W) que realiza la fuerza durante ese intervalo de tiempo.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\ .\vec{v}\ dt\ = W \qquad (3-10)$$

De ahí uno de los principios más importantes, como el de la energía para una partícula, "en el cual se afirma que en cualquier movimiento de una partícula, la variación de su energía cinética en determinado tiempo, es igual al trabajo total hecho por la sumatoria de todas las fuerzas aplicadas en dicho intervalo" (Gregory 2006, p. 132). El movimiento rectilíneo es otro de los fenómenos donde podemos aplicar el principio de conservación de la energía, siendo uno de los casos más sencillos ya que dicha partícula se desplaza en una sola dirección donde se aplica el campo de fuerza generalmente sobre el eje x .

Si tenemos en cuenta la ecuación (3-10), podemos observar que cada uno de estos términos corresponde a la velocidad $\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, con la que se mueve la partícula bajo la influencia de dicha fuerza, que es una función $\vec{F}_{(x)}$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\ .\vec{v}\ dt\ = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{(x)}\ .\frac{dx}{dt}\ dt\ = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{(x)}\ .dx = W$$

Reescribiendo:

$$W\ = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{(x)}\ .dx \qquad (3-11)$$

Lo cual nos permite relacionar las ecuaciones (3-10) y (3-11) con el principio de conservación de la energía para una partícula con movimiento rectilíneo.

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{(x)}\ .dx \qquad (3-12)$$

Si consideramos que $\vec{F}_{(x)}$ es conservativa (es decir, que el trabajo no depende de la trayectoria seguida, si no de las posiciones inicial y final), podemos hacer uso de la siguiente definición, donde la fuerza se expresa como la función "gradiente[2]" de un escalar denominado energía potencial $\vec{F}_{(x)} = -\vec{\nabla}\, U$.

2: *Uno de los operadores más importantes en el cálculo vectorial se denomina gradiente* ($\boldsymbol{\nabla}$), *y se representa en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:* $\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

En este caso vamos a tener en cuenta el caso donde $\vec{F}$ solo depende de x, (pueden haber otros casos donde $\vec{F}$ no depende de x si no de otras variables), puede expresarse como $\vec{F}_{(x)} = -\frac{dU}{dx}$, lo que nos lleva a reescribir la ecuación (3-14) de la siguiente manera:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_{(x)} \ .dx = \int_{x_2}^{x_1} -\frac{dU}{dx}.dx = U_{(x_1)} - U_{(x_2)}$$

Tal que

$$T_2 + U_{(x_2)} = T_1 + U_{(x_1)} \qquad (3-13)$$

Esta igualdad es interesante, pues es equivalente a la formulación de la conservación de la energía $T + U = E$ donde E es una constate denominada energía total. La energía potencial puede presentarse como

- Energía potencial gravitatoria, $U_Z = mgz$, donde el trabajo realizado por la fuerza de gravedad dependerá exclusivamente de la diferencia de altura entre los puntos inicial y final.
- Energía potencial elástica $U_x = \frac{1}{2}\ k\ x^2$, que podemos encontrar acumulada en el interior de un sólido deformable, como resultado del trabajo realizado por las fuerzas elásticas; k representa la constante de elasticidad de dicho objeto.

Tras la publicación de la ley de gravitación universal por Newton en 1687, la cual plantea la acción a distancia entre dos cuerpos con distinta masa tal que, la fuerza es directamente proporcional al producto de las masas de cada cuerpo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa; su dirección y sentido son atractivos entre cada cuerpo.

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad (3-14)$$

Las partículas tienen masa M_1y m_2 , además se encuentran separadas por una distancia r, donde G es una constante universal llamada constante de gravitación universal. A pesar que todas estas investigaciones tuvieron varios altibajos, fueron necesarios nuevos aportes y pensadores que encajaran algunas de las ideas y conceptos que quedaban a la deriva; de ahí la importancia que tuvieron las academias de ciencias. Para Maravall (1988, p. 156):

“*En especial la de París fundada en 1666, la de Berlín fundada en 1700 a instancias de Leibniz, que fue su primer Presidente, donde trabajaron Euler y Lagrange, la de San Petersburgo fundada en 1725 por Catalina I, como culminación del proyecto de su esposo y antecesor en el trono Pedro I El Grande; allí trabajaron Euler y Bernoulli”*.

Por su parte Newton durante toda su vida realizó aportes en otros campos de la física como la óptica y la astronomía, en donde también estableció grandes disputas con algunos de sus contemporáneos, entre ellos el inglés Robert Hooke (1635-1703), quien afirmaba haber sido el primero en intuir la ley de gravitación universal y el holandés Christian Huygens (1629-1695), con quien mantuvo discusiones, en la defensa de sus perspectivas personales sobre la naturaleza de la luz. Sin embargo, la experiencia y sabiduría llevaron a Newton a lo más alto de la cúspide científica, pues en 1689 fue elegido miembro del Parlamento, en 1696 se le encargó la custodia de la Casa de la Moneda, en 1703 fue elegido presidente de la Royal Society y en 1705 fue nombrado Sir Isaac, por lo que vivió sus últimos años de manera tranquila con algunas enfermedades propias de la edad (murió a la edad de ochenta y cinco años, en el año 1727) , pero lo más importante dejando huella en historia de las ciencias y de la humanidad.

Para finalizar este análisis es importante mencionar que en algunos casos el principio de conservacion de la energía al ser derivado de la ecuación vectorial del movimiento puede tener menos informacion que ésta; por lo tanto, en ocasiones es más sencillo abordar el problema cuando el sistema solo tiene un grado de libertad y puede ser analizado con una sola variable escalar. Cuando este tipo de situaciones se presentan, el principio de conservacion de la energía y la ecuación del movimiento son válidos para analizar el sistema y podria desarrollarse desde cualquir punto de vista de manera independiente.

4. Dinámica analítica y mínima acción

El recorrido histórico-epistemológico y conceptual que hemos desarrollado hasta el momento generalmente se debe trabajar de manera detallada en los cursos de bachillerato sobre mecánica clásica y específicamente dentro del proceso de formación de docentes en física durante los primeros semestres de su desarrollo profesional. Por medio de este trabajo queremos resaltar la importancia de la continuidad cronológica y teórica de los eventos presentes en la construcción del conocimiento, como un todo que relaciona la evolución de las sociedades y de sus estructuras cognitivas. Normalmente la historia de la mecánica clásica finalizaría con algunas discusiones sobre el formalismo de Newton y análisis en otras áreas como el electromagnetismo, la termodinámica y la óptica, hasta iniciar una nueva etapa denominada por muchos autores como *física moderna*, donde se abordan las teorías que transformaron la visión de la naturaleza, como la relatividad y la mecánica cuántica. Todo esto permite que en algunos casos se cree una brecha temporal sin tener en cuenta el contexto cultural y las condiciones del desarrollo científico que condujeron a dicha evolución. Para nosotros, esta historia aún no finaliza, pues la mecánica clásica y las teorías del movimiento continuaron siendo fuentes de trabajo e inspiración en muchos de los países de Europa durante todo el siglo XVIII, siendo esta etapa de gran importancia para la evolución de algunas ideas matemáticas que permitía dar una visión más analítica, donde se preservan los principios de Newton y Galileo, pero se desarrolla una formulación más sofisticada e intelectualmente más interesante. Sin embargo no todos los pensadores eran partidarios de las ideas newtonianas y era necesario organizar de manera unificada muchas de las ideas que hacían parte de la mecánica, pero se manejaban de manera independiente. Durante 1730 y 1740 las actividades científicas estuvieron encaminadas al análisis de la forma de la tierra, algunos movimientos perturbados, la mecánica del cuerpo rígido, la hidrodinámica y algunos problemas en condiciones de equilibrio. Según Torres & Ayala (1996, p. 30) “la necesidad de unificación del dominio de la mecánica se volvía cada vez más relevante, requiriéndose para ello la indagación en búsqueda de sus principios como el de la mínima acción y conservación de la energía que jugaron un papel importante”.

4.1 Principios de la dinámica analítica

Parte de la rigurosidad y el formalismo de Lagrange y Hamilton se evidencia al momento de estudiar algunos problemas y darse cuenta que la dinámica y leyes del movimiento no son suficientes para la solución, pues en cada caso existen restricciones o ligaduras que no son explícitas directamente, y se evidencian en sus ecuaciones específicas.

> *“es decir, las puras leyes de la mecánica son insuficientes para explicar la mecánica del sistema: se requiere conocer las relaciones o condiciones que limitan las coordenadas generalizadas, estas restricciones o vínculos suelen llamarse condiciones de ligadura, y son específicas de cada problema”* Falcón (2012, p. 22).

Algunos textos definen las coordenadas generalizadas como un grupo de elementos caracteristicos que se describen por medio de parámetros numéricos.y que permiten analizar de manera detallada las características y comportamieneto de un sistema que tenga un número finito de grados de libertad; estos conceptos se menccionaran y analizaran un poco mas durante el desarrollo de esta sección. Las ligaduras son conocidas como las condiciones que permiten restringir el movimiento de un cuerpo o un sistema, dependiendo de su forma, las condiciones que determinen su evolución y la manera en que sea puesto en funcionamiento; todo esto muestra la acción de algunas fuerzas de ligadura presentes en la evolución de dicho fenómeno.

Observemos los siguientes sistemas mecánicos en los cuales se presentan algunos tipos de ligaduras. Uno de estos está compuesto por una masa que se mueve de manera libre por medio de una varilla que la atraviesa. El segundo muestra el movimiento de una partícula sobre una superficie semicircular.

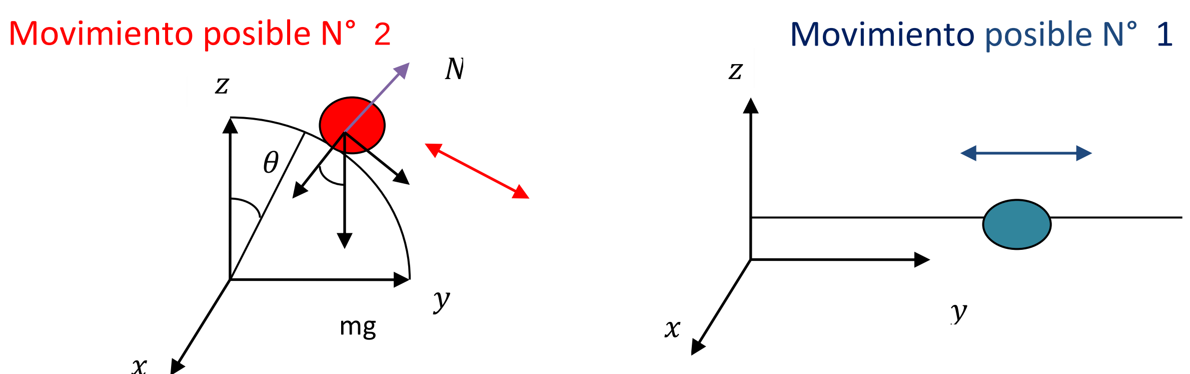


Figura 1: Posibles movimientos de una esfera dependiendo sus ligaduras o restricciones.

Si queremos analizar la dinámica, podemos observar que la forma en que se nos plantea el primer sistema (MOVIMIENTO N^0 1) sólo permite que la masa se mueva en la dirección del eje y. Mientras la trayectoria de la esfera roja (Figura 1 Movimiento N^0 2) se describe por medio de la superficie en el plano y y z.

Otro de los problemas habituales es el del péndulo simple. Aquí las restricciones y su evolución temporal pueden depender de sus condiciones iniciales. Veamos dos casos comunes.

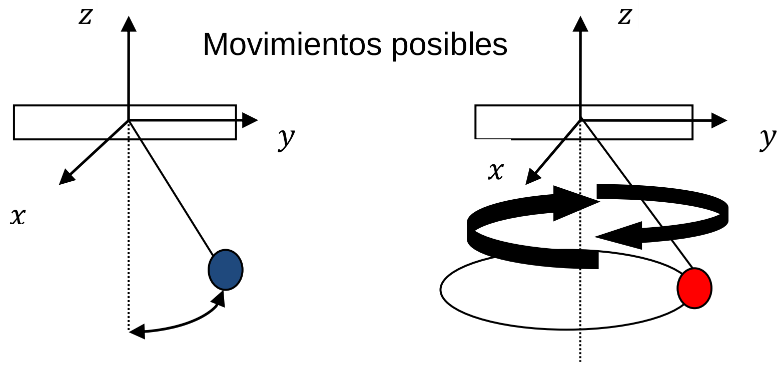


Figura 4: Movimiento de una particula con diferentes restricciones

En el primer caso es posible observar que la masa solo realiza movimientos en el plano y y z. Por otro lado, en el segundo caso, es posible que no se imponga una ligadura respecto al eje de suspensión y así el sistema pueda realizar circunferencias completas en el plano x y y, que normalmente se conoce como péndulo cónico.

Conociendo un poco más sobre las ligaduras y su importancia al restringir las condiciones iniciales del sistema, es importante también reconocer la diferencia entre algunos conceptos que serán de gran ayuda al momento de resolver cualquier problema. El primero de estos se define de la siguiente manera:

- **"Fuerzas de ligadura:** Son las fuerzas responsables de las restricciones del sistema. No aparecen directamente en la formulación Lagrangiana, aunque están de forma implícita en ella y pueden calcularse mediante métodos analíticos. En general estas fuerzas, dependen de la posición y la velocidad (González, et al., 2009, p. 25)

En el caso de la masa que cae sobre la superficie semicircular (Figura 1 - movimiento N°2), la fuerza de ligadura es la encargada de que la partícula describa dicha trayectoria; es también conocida como la fuerza normal (N), y además de ser fuerza de ligadura actúa como variable, pues depende de la posición y la velocidad de la partícula. Otro concepto que se debe identificar sobre las ligaduras son las ecuaciones de ligadura, ya que describen la geometría y cinemática del sistema.

- **"Ecuaciones de ligadura**: Describen los efectos de las fuerzas de ligadura, es decir, sus implicaciones sobre la dinámica del sistema al que se aplica una determinada fuerza" González, Revuelta, Saeta, García, Maciá (2009, p. 26).

Si analizamos de nuevo el mismo sistema (Figura 3 - movimiento N°2), podemos notar que la geometría circular y la capacidad de no deformarse permite escribir la ecuación de ligadura en coordenadas cartesianas como

$$\boldsymbol{y^2 + z^2 - R^2 = cte} \qquad (\mathbf{4-1})$$

El movimiento de la esfera también está restringido por el plano (y, z). En este caso se tiene:

$$x = 0 \qquad (4-2)$$

Si la ecuación de ligadura se representa como una igualdad (existen situaciones donde se presenta como una desigualdad), pueden presentarse tres casos; el primero conocido como *"ligadura cinemática* $f = f(q_j,\ \dot{q}_j, t)$ *"* donde la ligadura depende de la posición, la velocidad y el tiempo; el segundo denominado *"ligadura geométrica* $f = f(q_j, t)$*"* en el cual las ligaduras no dependen de la velocidad, únicamente de la posición y el tiempo; el tercer caso es conocido como *"ligadura estacionaria* $f = f(q_j,)$*"*. Este tipo la ligadura solo depende de la posición de la partícula. Las restricciones o condiciones de ligadura, son otro de los conceptos de suma importancia ya que establecen su relación entre las magnitudes o como en este caso entre las coordenadas generalizadas ($q_j,\ \dot{q}_j$). Las ligaduras pueden clasificarse en estos dos grupos generales:

- **Ligaduras holónomas:** se consideran ligaduras holónomas a aquellas que no dependen de las velocidades; dicho de otra manera, todas las ligaduras que son geométricas. $$f(q_1, q_2, \ldots, q_j\ ; t) = 0 \qquad (4-3)$$

Si en dichas ligaduras aparece de manera explícita el tiempo, se habla entonces de un sistema holónomo reónomo. Si por el contrario la ligaduras son estacionarias, es decir, independientes del tiempo, se tiene un sistema holónomo escleronómo.

- **Ligadura no holónomas:** un sistema es no holónomo cuando sus ligaduras dependen de las velocidades, es decir, son ligaduras únicamente dinámicas. Suelen representarse como una desigualdad.

$$f(q_1, q_2, \dots, q_i; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i\ ; t) \leq 0 \qquad (4-4)$$

Para finalizar esta sección, vamos a mencionar otra de las nociones de gran importancia al momento de analizar la dinámica desde estas perspectivas.

Como hemos evidenciado, la representación de las coordenadas se ha planteado de manera general, con la intención de expresar la transferencia de energía en un sistema de la mejor manera. Es por esto que una de las nociones más importantes al momento de hablar sobre coordenadas generalizadas, son los grados de libertad de un sistema. Según Cosenza (2015, p. 27):

> La cantidad g determina los grados de libertad del sistema, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema. Los grados de libertad definen un conjunto de coordenadas generalizadas, denotadas por las posiciones $\{q_1, q_2, , q_i\}$, el cual tiene asociados un conjunto de velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, , \dot{q}_i\}$".

Los grados de libertad de un sistema con K ecuaciones de ligadura y N partículas podemos escribirlo como: $\mathrm{g} = 3\mathrm{N} - \mathrm{K}$. Donde:

- $\mathrm{g} =$ Grados de libertad
- $3\mathrm{N} =$ Movimientos posibles de una partícula libre. El factor 3 indica que puede moverse en las tres dimensiones.
- $\mathrm{K} =$ ecuaciones de ligadura.

4.2 Mecánica Lagrangiana

Aunque no podemos extendernos al momento de realizar un análisis respecto a los conceptos y desarrollo matemático que dieron origen a una formulación alterna de la mecánica clásica, si es importante mencionar brevemente algunas de las ideas que influenciaron dicho desarrollo y dar a conocer a los estudiantes otro de los pensadores que hizo parte de la evolución de la mecánica, y que raramente es mencionado. Él es

Jean le Rond D´ Alembert (1716-1783), quien de la mano de conceptos como los desplazamientos y trabajos virtuales, propuso uno de los principios más importantes de la física, él cual lleva su nombre. Este es conocido como el principio de D´ Alembert, y son varios los sistemas que pueden abordarse por medio de este, aunque en otros casos surgen problemas que pueden ser muy engorrosos para sistemas más complejos. Sin embargo, como veremos a continuación, la mecánica Lagrangiana puede solucionar problemas como un método mucho más práctico. Algunas de sus diferencias con la mecánica Newtoniana se evidencian durante el desarrollo de este capítulo, entre las que podemos mencionar la ausencia de representaciones gráficas o diagramas de cuerpo libre y los análisis del sistema, ya no de manera individual, si no como un sistema mecánico general resumido en su energía potencial (U).
Sin dejar de lado esta historia, la estructura y representación de las teorías del movimiento se tornaban cada vez más precisas, tanto, que algunos pensadores intentaban generalizar los problemas mediante un principio general que fuese deducible de la mecánica de Newton. Uno de los principales ponentes respecto a estas ideas fue el físico y matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), quien vivió en Alemania y Rusia la mayor parte de su vida y fue considerado el mejor matemático del siglo XVII, en toda Europa. Según Costa& Arlego (2013, p. 31):

> Para Euler la naturaleza persigue sus diversos fines por los medios más económicos y eficientes, y esa simplicidad oculta, subyace al aparente caso de los fenómenos. Fue esta idea metafísica la que le indujo a crear el cálculo de variaciones como técnica para la investigación de tales cuestiones.

Fueron bastantes los aportes que realizó Euler en el análisis del movimiento y bastante el interés de muchos otros pensadores en seguir fomentando más ideas para el desarrollo de la mecánica. Es así como en 1750 continuaron los trabajos con la finalidad de generar otra formulación de la dinámica desde otro punto de vista tanto a nivel conceptual como matemático. Este es el caso de uno de nuestros protagonistas, se trata de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), quien nació en Turín (Italia) y de manera muy rápida se destacó por su notable inteligencia, tanto así que logró ser profesor de geometría en la escuela militar de Turín con tan solo 19 años y a los 22 años fundó una sociedad que años más tarde se convertiría en la academia de ciencias de Turín. Lagrange tomó algunas de las ideas de la dinámica de Euler y planteó su propia formulación, con una visión matemáticamente más estructurada. Dentro de la formulación Lagrangiana se prescinde de las fuerzas que actúan sobre diferentes partes del sistema, evitando de una u otra manera algunas cantidades vectoriales y aquellas ecuaciones donde solo se tienen en cuenta algunas fuerzas de ligadura como las tensiones y reacciones.Por otro lado se involucra una función escalar que permite obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento, dependiendo del número de variables físicamente significativas que existan; todo esto permite escribir las ecuaciones de forma generalizada de manera que formalmente sean iguales a las planteadas por Newton.

A continuación vamos a exponer algunos de los referentes teóricos que pueden conocer los estudiantes en los primeros semestres de su formación. Al momento de expresar las ecuaciones de movimiento, es importante elegir un marco de referencia en donde las leyes de la mecánica se presenten de la manera más sencilla. En casi todos los casos se busca que en el marco de referencia escogido, el espacio sea isotrópico (es decir sin importar la dirección desde donde se observe, tendrá siempre las mismas características), y homogéneo (es decir que en cualquier parte del universo tendrá las mismas características). La formulación de Lagrange realiza un análisis por medio de cantidades escalares como la energía y la conservación de cantidades físicas (magnitudes que no cambian en el tiempo).

A partir de este conocimiento se puede introducir al estudiante en el análisis de algunas propiedades de la dinámica analítica. A continuación definimos la función Lagrangiana para un sistema denotada con la letra L .

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n\,;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t\,) \qquad (4-5)$$

En la interpretación física de L, esta es una función que depende de dos variables generalizadas, q (posición) y $\dot{q}$ (velocidad); y está definida como la diferencia entre la energía cinética (T) y la energía potencial (U) debida a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, las cuales deben ser conservativas, de lo contrario el análisis del sistema puede llegar a ser mucho mas complejo.

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U\,(q) \qquad (4-6)$$

Dónde se tienen en cuenta la ecuación (3-7) y cualquiera de las posibles representaciones de la energía potencial expuestas en el capítulo anterior.

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U\,(q) \qquad (4-7)$$

También es importante notar que T es una función dependiente de la velocidad y U, es una función dependiente únicamente de la posición. Ahora, si tenemos en cuenta los principios de la formulación de Newton (ecuación 3-3), y la definición $\vec{F}_{(x)} = -\frac{dU}{dq}$, es posible exponer a los estudiantes la ecuación de Lagrange o (Euler- Lagrange), que reemplaza la dinámica de Newton, teniendo en cuenta algunas derivadas parciales (ver anexo). Todo esto sin predisposición alguna ya que la idea se espera sea simple y fácil de abordar sin preocuparse tanto por el nivel matemático que el estudiante tenga.

Con el fin de explicar esa idea vamos a analizar el problema en una sola dimensión. La ecuación (3 - 3) se define así:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dicha fuerza (en el caso conservativo) puede expresarse en términos del potencial

$$\vec{F}_{(q)} = -\frac{dU}{dq} \qquad (4-8)$$

Podemos igualar ambas ecuaciones, teniendo en cuenta que $\vec{a} = \ddot{x} = \ddot{q}$.

$$-\frac{dU}{dq} = m\ddot{q} \qquad (4-9)$$

A partir de (4-3) podemos derivar la función $L(q,\dot{q},t)$, respecto a cada una de sus variables.

Derivando respecto a (q); eliminamos la derivada de T, puesto que no depende de (q)

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = \cancel{\frac{dT}{dq}} - \frac{dU}{dq}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dU}{dq} \qquad (4-10)$$

Ahora derivamos respecto a $(\dot{q})$,

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{dT}{d\dot{q}} - \cancel{\frac{dU}{d\dot{q}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{dT}{d\dot{q}} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2\right)}{d\dot{q}} = m\dot{q} \qquad (4-11)$$

Si recordamos la definición del momento lineal $(P = m\vec{v} = m\dot{x} = m\dot{q})$, que mencionamos en el Capítulo 3, podemos obtener la misma magnitud.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = P \qquad (4-12)$$

Podemos derivar respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q} \qquad (4-13)$$

Ahora, si relacionamos las ecuaciones (5-9), (5-10) y (5-13)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q} = -\frac{dU}{dq} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Lo que nos lleva a escribir una nueva presentación de la ecuación (3-3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (4-14)$$

Generalizando la ecuación de movimiento (4-6), para un sistema conservativo con *n* grados de libertad.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad i = 1,2,\dots,n \quad (4-15)$$

Esta última es, efectivamente, la ya conocida ecuación de Euler – Lagrange, válida para representar la dinámica de un objeto pero desde otra perspectiva. Lagrange continuó los trabajos que años antes había iniciado Galileo, solo que su descripción de la mecánica era (como se mencionó en líneas anteriores) matemáticamente más estructurada. Lagrange finalmente plasmo sus ideas en el año 1788, por medio en un libro que llamo “Mecánica Analítica”, trabajando de la mano con las ecuaciones diferenciales que él mismo había planteado, desarrolló junto a Euler esta formulación más general, que permite la solución de muchos problemas de la mecánica.

Poco a poco nos acercamos al final de este trabajo después de relatar algunos de los años maravillosos de la historia del movimiento y el desarrollo de una de las ramas de la física más conocidas como es la mecánica clásica; es por esto que cabe resaltar la importancia de la epistemología de la física en la inclusión de nuevos conceptos que acerquen más los estudiantes al momento de conocer nuevas propuestas equivalentes de fenómenos similares, facilitando la introducción de abordajes programáticos en la formación de profesores de física.

Nos acercamos al siglo XIX y la física como ciencia se encuentra en auge y para finalizar vamos a mencionar el último de nuestros protagonistas y uno de los principios que revolucionaría la manera de analizar y visualizar el comportamiento de la naturaleza.

4.3 Mecánica Hamiltoniana

Históricamente, durante los siglos XVIII y XIX, los análisis y estudios de la mecánica clásica se estructuraron de tal modo que su lenguaje y campos de acción fueron cada vez mayores. En la sección anterior mediante el análisis de algunas herramientas y la formulación de las ideas propuestas por Lagrange, se presenta a la comunidad académica otra de las perspectivas al momento de abordar diferentes tipos de problemas de la mecánica. Sostenemos su importancia, ya que permite la descripción del movimiento de un sistema mecánico sin recurrir a agentes externos, como las fuerzas aplicadas en la formulación Newtoniana, lo que permite realizar un análisis de tipo escalar teniendo en cuenta cantidades asociadas al sistema como las energías Durante sus últimos años de vida, pensadores como Euler, en muchos de sus escritos durante 1768 y 1794 y Lagrange, en sus "Lecciones sobre el cálculo de funciones" durante 1801 y 1806 trabajaron fuertemente en el análisis de movimientos tan complejos como los que describían los planetas alrededor del sol; años atrás Newton había resuelto el problema del movimiento para dos cuerpos unidos por medio de la fuerza de gravedad, pero no el caso de tres o más cuerpos. Sin embargo no fueron los únicos que intentaron plasmar la conversión de fenómenos del cosmos desde un punto de vista mecánico a uno matemáticamente más estructurado, conocido por muchos como mecánica celeste. Uno de los problemas centrales durante estos años fue conocido como el problema de los "N" cuerpos, que para nuestro caso podría ser el sistema solar bajo las interacciones gravitacionales. Otro de los pensadores que analizó y aportó de manera significativa (junto con los ya mencionados y otros tan importantes) fue el matemático y astrónomo británico Sr William Rowan Hamilton (1805 - 1865), quien trabajó en fenómenos asociados con la óptica, vectores y la dinámica, desde muy joven. Y aunque sus aportes a la óptica contribuyeron al establecimiento definitivo de la teoría ondulatoria de la luz, es uno de nuestros protagonistas por sus aportes a la mecánica clásica, la cual refinó por medio de sus funciones logrando un análisis más general e igualmente analítico después de los trabajos realizados por Lagrange. No obstante durante toda esta época se evidenciaban cambios inimaginables a nivel científico y social en campos como la electricidad y el magnetismo y otros que influenciarían en la dinámica actual y la mecánica cuántica. Sin embargo no vamos a adentrarnos en ellos ya que esta última parte se abordará de la misma manera, es decir, definiendo las características y propiedades del movimiento para un sistema, no desde otras teorías o leyes si no desde otras perspectivas. La óptica no sería ajena a dichas formulaciones pues, "por analogía quizá a las leyes de la Óptica, deducibles a partir del llamado principio de Fermat, según la cual la trayectoria de los rayos luminosos es aquella que minimiza el tiempo de transito de los mismos. Maupertuis, Gauss, Hertz y finalmente Rower Hamilton investigaron estos aspectos" (Falcón 2012, p. 22). Dichos análisis permitieron plantear otro de los principios de mayor contundencia en los análisis del movimiento y la física como ciencia de la naturaleza. Con la descripción de estos análisis es que vamos a concluir este trabajo.

4.3.1 Principio de Hamilton o principio de mínima acción

La formulación Hamiltoniana al igual que la Lagrangiana, presentan una visión de la mecánica clásica, con características y un lenguaje más elaborados y aunque desde el punto de vista físico no genera ninguna innovación, si se presenta una nueva herramienta con fundamentos mucho más fuertes y generales al momento de abordar cualquiera de los principios ya trabajados. Hamilton quien apoyaba y admiraba la elegancia con la que Lagrange había desarrollado sus ideas, demostró en 1835 las condiciones necesarias para obtener la ecuación de Euler-Lagrange, para un sistema que es mecánico y se conserva, teniendo en cuenta otra perspectiva muy interesante.

En la mecánica Newtoniana cuando se quiere describir la trayectoria y la evolución espacio temporal de una partícula basta conocer la posición inicial x_1 y la velocidad inicial v_1. Ahora se plantea el mismo problema desde la visión de Hamilton, donde el estado de un sistema viene dado por el *espacio de configuración;* este es el lugar geométrico de los puntos que describen su evolución dinámica, generalmente son conocidas solo la posición inicial x_1 y final x_2 en ciertos intervalos de tiempo; Inicialmente este análisis no es tan sencillo ya que podían existir infinidad de trayectorias posibles entre dichos puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2).

Hamilton asumió un criterio, que generalmente es válido para todos los fenómenos de la naturaleza, donde se elige la trayectoria para la cual la distancia recorrida es la mínima. Si tenemos en cuenta un sistema descrito mediante una función escalar L, de la forma (5-6), que depende de las posiciones y velocidades generalizadas (y posiblemente del tiempo), tal que $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n \,;\, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n ; t\,)$ es expresada así:

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U\,(q) \qquad (4-6)$$

Como lo vimos en la sección anterior, dicha función se denomina el Lagrangiano del sistema, donde $T(\dot{q})$ y $U\,(q)$ son la energía cinética y potencial, respectivamente, expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.

Si analizamos el estado del sistema en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 tal que

$$t_1\!:\!\{q_j(t_1), \dot{q}_j(t_1)\} \ \text{ y } \ t_2\!:\!\{q_j(t_2), \dot{q}_j(t_2)\}$$

y asumimos que nuestro sistema es conservativo, podemos determinar la variación temporal de la función de Lagrange entre dos instante determinados, tal que al elegir la trayectoria, la distancia recorrida sea la mínima. Si se elige una curva con una distancia S_{12} entre el punto 1 y el punto 2, dicha condición sobre la trayectoria se cumple a partir de requerir que la acción S del sistema, definida como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q_j, \dot{q}_j, t\big)dt \ , \qquad (4-16)$$

> *"El Principio de mínima acción fue formulado en distintas formas por Maupertuis y por Hamilton; también se llama Principio de Hamilton. El Principio de mínima acción es un principio variacional; implica que las ecuaciones de movimiento de un sistema, en términos de sus coordenadas generalizadas, pueden formularse a partir del requerimiento que una cierta condición sobre la acción S del sistema sea satisfecha".* (Falcón 2012, p. 51).

Si se pretende encontrar las ecuaciones del movimiento en donde las trayectorias adquieran un valor extremo, es necesario tener en cuenta la variación de las coordenadas de posición (δq_1), velocidad $(\delta \dot{q}_1)$ y del tiempo (δt)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \qquad (4-17)$$

Para una función $L = L(q_1, \dot{q}_1, t)$ dependiente de una sola coordenada generalizada, una sola velocidad generalizada y posiblemente del tiempo t, δL se determina como

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

El principio de mínima acción para una función con n grados de libertad $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ se puede expresar en general como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right) dt = 0 \qquad (4-18)$$

Teniendo en cuenta que las fuerzas del sistema son conservativas, asumimos que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, podemos eliminar el segundo término de la segunda sumatoria, tal que:

$$\delta\, S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right] dt = 0 \qquad (4-19)$$

Así podemos expresar el segundo término dentro del corchete de la siguiente manera, con el fin de realizar una integral por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\delta q_j) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j\, dt \qquad (4-20)$$

Donde el término de frontera se anula

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Luego,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j dt - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j\, dt \right] = 0 \qquad (4-21)$$

Factorizando δq_j y dt se tiene:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \right] \delta q_j\, dt = 0 \qquad (4-22)$$

Para que $\delta S = 0$, se debe cumplir.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \text{Donde } j = 1,2,\dots,s \qquad (4-15)$$

Esta última expresión que se analizó en la sección anterior, lo que quiere decir que el principio de Hamilton implica el cumplimiento de las ecuaciones de Euler – Lagrange, encargada de la evolución del sistema en determinados intervalos de tiempo.

4.3.2 Dinámica Hamiltoniana

Nuestro recorrido a través del desarrollo y evolución de la mecánica clásica llega a su fin, y que mejor manera que mostrando las ecuaciones y otras de las perspectivas que planteó Hamilton, ya que fue de gran importancia durante la etapa de transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica a comienzos del siglo XX.

A diferencia de la dinámica Lagrangiana, el formalismo de Hamilton define otro tipo de espacio, conocido como *espacio de fase*. Dicho espacio nos describe el comportamiento de la función sin depender de las velocidades generalizadas $(\dot{q}_i)$, es decir que el estado físico vendrá caracterizado por las posiciones generalizadas (q_i) de cada una de las partículas y sus respectivos momentos generalizados $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Aquí es importante que los estudiantes sepan que no en todos los casos la definición del momento es la misma que se analizó desde el punto de vista newtoniano en el capítulo 3, $(\vec{P} = m\vec{v})$. Se hace uso de la definición de un concepto conocido como *momento* conjugado P_j o asociado a las coordenadas generalizadas $\{q_j\}$

$$P_j(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{j}} \qquad (4-23)$$

A partir de la ecuación anterior podemos expresar las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$ en términos o como función del momento $P_{j,}$ las coordenadas q_j y t de la siguiente manera

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(P_j, q_j, t) \qquad (4-24)$$

La ecuación (5-15) puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (4-15)$$

Donde la derivada del momento $\dot{P}_j$ se define

$$\dot{P}_j(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (4-25)$$

Si se considera el Lagrangiano del sistema como $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, el diferencial total puede representase como

$$dL(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4-26)$$

Reescribiendo este diferencial a partir de (4 - 23) y (4 - 25) tenemos:

$$dL = \sum_j \dot{P}_j dq_j + \sum_j P_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4-27)$$

El primer término de la segunda sumatoria $\sum_j P_j d\dot{q}_j$ puede escribirse dento de un paréntesis así:

$$dL = \sum_j \dot{P}_j dq_j + \left(\sum_j d(P_j \dot{q}_j) - \sum_j \dot{q}_j \, dP_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4-28)$$

Por lo que podemos realizar algunos despejes tal que,

$$\sum_j \dot{q}_j \, dP_j - \sum_j \dot{P}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_j d(P_j \dot{q}_j) - dL \qquad (4-29)$$

Si factorizamos el diferencial total de los términos de la derecha y reorganizamos esta ecuación tenemos:

$$d\left(\sum_j P_j \dot{q}_j - L\right) = \sum_j \dot{q}_j \, dP_j - \sum_j \dot{P}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4-30)$$

Al analizar ambos miembros de la ecuación anterior, puede notarse que en la parte izquierda hay un diferencial total de una función que depende de varias variables; en la parte derecha son notables los diferenciales totales (dP_j, dq_j, dt), que nos muestra una función dependiente de dichas variables. Ahora podemos representar la formulación de la mecánica Hamiltoniana, al definir el Hamiltoniano como una función $H(P_j, q_j, t)$ que puede escribirse de la siguiente manera:

$$H(P_j, q_j, t) = \sum_j P_j \dot{q}_j - L \qquad (4-31)$$

Y de la misma manera podemos escribir el diferencial total del Hamiltoniano así:

$$dH(P_j, q_j, t) = \sum_j \dot{q}_j \, dP_j - \sum_j \dot{P}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4-32)$$

Por otro lado según Cosenza, (2015, p. 225.), también puede expresarse como una función de sus argumentos

$$dH(P_j, q_j, t) = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial P_j} dP_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (4-33)$$

Si asociamos estas dos ecuaciones (4-36) y (4-37), podremos encontrar las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \qquad (4-34) \qquad ; \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (4-35)$$

Y por otro lado:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (4-36)$$

Si consideramos al igual que con el Lagrangiano, que las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, es decir que no depende explícitamente del tiempo, podemos afirmar que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ y la energía se conserva. Analizando la ecuación (4 - 31), podemos notar que esta formulación es equivalente a la energía total del sistema $T + U$:

$$H(P_j, q_j, t) = P_j \dot{q}_j - L \qquad (4-31)$$

Donde podemos tomar las forma más sencilla del momento y el Lagrangiano

$$H(P_j, q_j, t) = (\dot{q}_j \, m)\dot{q}_j - \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^{\,2} - U\right) \qquad (4-37)$$

Operando se tiene:

$$H(P_j, q_j, t) = m\dot{q}_i^{\,2} - \frac{1}{2} m \dot{q}_i^{\,2} + U \qquad (4-38)$$

Siendo esta la energía total del sistema:

$$H(P_j, q_j, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^{\,2} + U \qquad (4-39)$$

$$H(P_j, q_j, t) = T + U \qquad (4-40)$$

Estas son las ecuaciones que representan otra de las perspectivas en el análisis del movimiento, y consideramos que de igual manera a la propuesta de Lagrange podría abordarse de manera paralela a la dinámica de Newton.

4.4 Sintesis y recomendaciones

A pesar de las dificultades que encontraron en la construcción de sus propuestas todos los pensadores que mencionamos durante este trabajo, es de resaltar la manera como se estructuraron todas sus teorías y conceptos para el análisis del movimiento. Fue tanta la conexión entre las ideas físicas y matemáticas desde la llegada de la revolución copernicana hasta inicios del siglo XIX, que alcanzó un grado de precisión notable gracias a los aportes del cálculo diferencial y de sus ecuaciones que poco a poco hicieron posibles el tratamiento de muchos otros problemas que hasta el momento no habían tenido solución. Finalmente, tanto Newton como Lagrange y Hamilton, vivieron sus últimos años en medio de altibajos personales que nunca opacaron su grandeza, al contrario fueron circunstancias tan efímeras que pocas veces son nombradas o tenidas en cuenta dentro de las discusiones en sus nombres.

No obstante sus ideas y aportes a la ciencia retumbaron de manera trascendental en la construcción del pensamiento no solo desde las nociones del movimiento sino a nivel general en la comprensión del universo. Estos tres genios basaron algunos de sus trabajos en ideas de otros pensadores que tardaríamos en mencionar, sin embargo es de resaltar su importancia como la cúspide e infinidad de brillantes ideas que solidificaron la mecánica clásica como herramienta para la descripción de fenómenos naturales. Como se evidenció en el transcurso de este trabajo, la existencia de diferentes formulaciones o formalismos aumentan las posibilidades y el campo de acción desde el que se quiere abordar un problema. Esto permite enunciar de manera coherente y desde diferentes puntos de vista, algunos sistemas en donde se está analizando el mismo fenómeno, e implica un mayor reconocimiento de cada uno de estos componentes, sin importar el nivel en el que el estudiante se encuentre siempre y cuando exista interés por conocer más a fondo el comportamiento y análisis de los objetos en movimiento. Durante todo nuestro recorrido histórico-epistemológico y teórico, se evidenciaron ciertos enlaces que nos permitieron generar conexiones a través de diferentes propuestas bajo una misma acción. Todo esto con el fin de proponer una metodología alterna, sin generar tantos vacíos o interrupciones epistemológicas entre cada uno de estos planteamientos. Dentro de mi corta experiencia como estudiante de licenciatura y docente en formación considero que esta propuesta podría ser solo el inicio de futuras propuestas de trabajo e investigación, donde las metodologías pueden adecuarse teniendo en cuenta los intereses del curso y la comunidad académica, sin llegar a crear confusiones o problemas en el proceso de aprendizaje. Es así como este trabajo muestra la importancia de la contextualización historio-epistemológica y conceptual como herramientas adicionales en los procesos de formación, donde los estudiantes pueden ser motivados a pensar los mismos problemas desde diferentes perspectivas, esto es, subsumir un fenómeno (o un conjunto de ellos) bajo diversos modelos teóricos, algo ya usual y reconocido en la historia y epistemología contemporánea, y algo necesario dentro de las explicaciones que los profesores llevamos a las aulas de clases de nuestros días.

5. Ejercicios complementarios

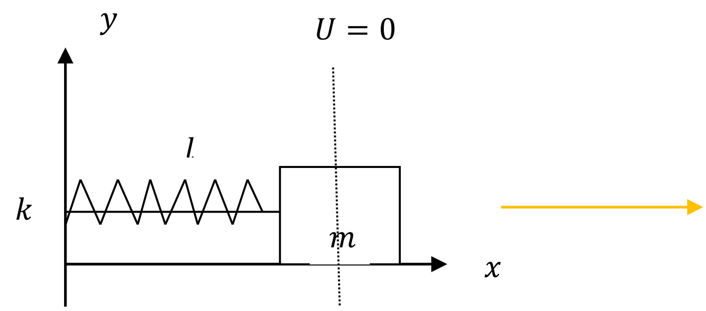
Es evidente que los estudiantes querrán analizar algunos ejercicios teniendo en cuenta las diferentes visiones analizadas durante esta propuesta; es por esto, que a continuación se plantearán e Identificarán ejercicios o situaciones problema que puedan ser abordados desde las dos formulaciones y a su vez puedan dar soporte a la propuesta planteada en este trabajo. Los ejercicios que se muestran a continuación son habitualmente trabajados en los cursos de mecánica clásica I y mecánica clásica II, con la diferencia que se analizan de manera paralela desde diferentes puntos de vista, intentando plasmar cada uno de los elementos necesarios en la comprensión de dichos fenómenos.

La lección que se diseñó para desarrollar e implementar la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana de manera paralela a la mecánica de Newton, consta de los siguientes sistemas.

- Oscilador armónico
- Caída libre
- Tiro parabólico
- Plano inclinado
- Máquina de Atwood
- Péndulo simple

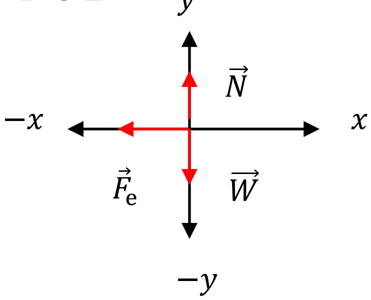
Así se realiza un análisis sencillo y detallado con el fin de aplicar muchos de los conceptos trabajados con anterioridad desde ambas perspectivas, mostrando al lector de manera puntual algunas de las ventajas y efectos que pueden obtenerse si se proponen metodologías alternas al momento de trabajar con diferentes situaciones problema.

1. Uno de los sistemas que habitualmente se trabajan en los cursos de mecánica se conoce como **oscilador armónico**. En este caso tenemos un objeto de masa (m), atado a una pared por medio de un resorte ideal con una longitud (l) y constante de elasticidad (k). Suponiendo que no existe rozamiento, vamos a encontrar las ecuaciones que describan el movimiento y la aceleración de dicho objeto.



Método Newtoniano:

D.C.L



Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton:

$$\vec{F_N} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

La fuerza elástica puede ser representada de la siguiente manera:

$$\vec{F_e} = -k.\vec{x} \qquad (2)$$

Donde k es la constante de elasticidad del resorte y x es el cambio de la posicion. Generalmente tomamos la posición inicial como cero por lo tanto podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$m\,.\vec{a} = -k.\vec{x} \qquad (3)$$

Si tomamos la aceleración como $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$, entonces:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k.\vec{x} \qquad (4)$$

La cual puede ser escrita así:

$$m.\ddot{x} = -k.\vec{x} \qquad (5)$$

Despejando $\ddot{x}$ tenemos.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad (6)$$

Despejando nuevamente obtenemos lo siguiente:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (7)$$

Siendo esta la ecuación que describe un oscilador armónico.

Método de Lagrange:

Para este sistema se toma (x) como coordenada generalizada.

Ahora podemos plantear el Lagrangiano

$$L = T - U \qquad (1)$$

Donde la energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad (2)$$

Y la energía potencial por:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (3)$$

Por lo tanto la función de Lagrange es:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \qquad (4)$$

Ahora podemos reemplazar L en la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (5)$$

Calculamos.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

Y: $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Euler-Lagrange.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (6)$$

Dividiendo sobre m Tenemos

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad (7)$$

Método de Hamilton:

Ahora vamos a abordar este sistema considerando la formulación de la dinámica de Hamilton, teniendo en cuenta una función de dos variables (P, x). De esta manera podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H_{(P,x)} = P\dot{x} - L(x, \dot{x}) \qquad (1)$$

Reemplazando el valor de L, tenemos.

$$H_{(P,x)} = P\dot{x} - \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \qquad (2)$$

$$H_{(P,x)} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 \qquad (3)$$

Como H es una función que solo depende de (P, x), es posible sustituir a $\dot{x}$ por $\frac{P}{m}$, por lo tanto:

$$H_{(P,x)} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \qquad (4)$$

Ahora, si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

Sabiendo lo siguiente:

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \qquad (5)$$

Y

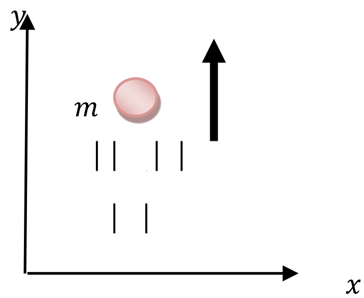
$$\dot{P} = -kx \qquad (6)$$

Podemos afirmar que:

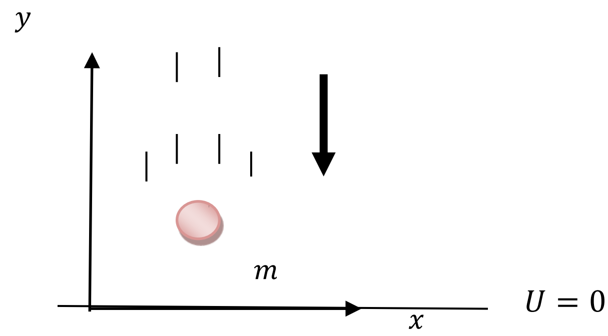
$$\ddot{x} - \frac{\dot{P}}{m} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad (7)$$

A continuación vamos a presentar algunos de los sistemas más trabajados al momento de estudiar las ecuaciones de movimiento para un sistema. La perspectiva newtoniana de estos tres ejercicios se analizó anteriormentel. Por lo tanto solo serán analizados desde el método Lagrangiano, y así encontrar las ecuaciones que describan el movimiento;

2. Lanzamiento vertical hacia arriba y la caída libre de una partícula.



Sistema 1



Sistema 2

Método de Lagrange (Sistema 1 y 2)

Este movimiento ocurre solo a lo largo del eje y ;es por esto que tomamos la coordenada cartesiana (y) como coordenada generalizada. Teniendo en cuenta que hay una restricción al movimiento de la partícula en los ejes x y z $(k = 2)$, los grados de libertad vienen dados así:

$$S = 3N - K$$

$$S = 3(1) - 2 = 1$$

Podemos plantear el Lagrangiano

$$L = T - U \qquad (1)$$

Calculamos

Donde la energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) \qquad (2)$$

La energía potencial así:

$$U = mgy \qquad (3)$$

Por lo tanto la función de Lagrange (1) queda:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) - mgy \qquad (4)$$

Ahora podemos reemplazar L en la ecuación de Euler-Lagrange, para y**:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Reemplazando estos valores en (5) y agregando un signo menos al primer término ya que a medida que aumenta su altura máxima el objeto disminuye su velocidad.

$$m\ddot{y} + mg = 0 \qquad (6)$$

Por lo tanto:

$$\ddot{y} = -g \qquad (7)$$

En el sistema 2 la ecuación (6) queda así:

$$-m\ddot{y} + mg = 0 \qquad (8)$$

$$\ddot{y} = g \qquad (9)$$

Método de Hamilton

Para abordar este sistema considerando la formulación de la dinámica de Hamilton, se tiene en cuenta una función de dos variables (P, x). De tal manera que podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H_{(P,y)} = P\dot{y} - L(y, \dot{y}) \qquad (1)$$

Reemplazando el valor de L, tenemos.

$$H_{(P,y)} = P\dot{y} - \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) + mgy \qquad (2)$$

Ahora tenemos en cuenta el momento conjugado:

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad (3)$$

Reemplazamos (3) en (2).

$$H_{(P,y)} = m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) + mgy \qquad (4)$$

Sumando los primeros dos términos.

$$H_{(P,y)} = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) + mgy$$

Ahora podemos reescribir el primer términos empleando nuevamente la ecuación (3), ya que dicha función debe ser dependiente de (P, y)

$$\frac{P}{m} = \dot{y}$$

$$H_{(P,y)} = \frac{P^2}{2m} + mgy \qquad (5)$$

Ahora, si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg$$

Así podemos expresar la aceleración del sistema como:

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{m}\right) \qquad (6)$$

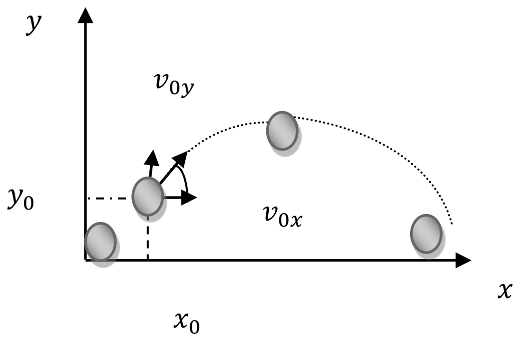
Por lo tanto:

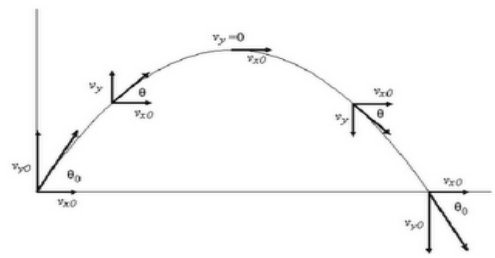
$$\ddot{y} = \frac{\dot{p}}{m} = \frac{-mg}{m} \qquad (7)$$

Así,

$$\ddot{y} = -g \qquad (8)$$

3. Este sistema es conocido de manera formal como la partícula en el campo gravitacional terrestre, aunque normalmente se analiza en los cursos de mecánica con el nombre de **tiro parabólico**.





Método de Lagrange

Este movimiento ocurre en el plano x, y. Es por esto que podemos tomar las coordenadas cartesianas (x, y) como coordenadas generalizadas. Teniendo en cuenta que hay una restricción en el movimiento de la partícula en el eje z $(K = 1)$, los grados de libertad vienen dados así:

$$S = 3N - K$$

$$S = 3(1) - 1 = 2$$

Podemos plantear el Lagrangiano

$$L = T - U \qquad (1)$$

donde la energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2)$$

La energía potencial así:

$$U = mgy \qquad (3)$$

Por lo tanto la función de Lagrange (1) queda:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \ (4)$$

Reemplazamos L en la ecuación de Euler-Lagrange, para x.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

Calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

La ecuación (5) queda así:

$$m\ddot{x} = 0$$

Así que:

$$\ddot{x} = 0 \qquad (6)$$

Lo que indica que la partícula no está acelerándose a lo largo de x. Hacemos lo mismo reemplazando L en la ecuación de Euler-Lagrange, para y**:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Reemplazando estos valores en (7).

$$m\ddot{y} + mg = 0$$

Por lo tanto:

$$\ddot{y} = -g \qquad (8)$$

Si tenemos en cuenta algunas de las ecuaciones de la cinemática podremos analizar la trayectoria de la partícula.

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad (9)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (10)$$

Despejando el tiempo de la ecuación (9) y reemplazándolo en la ecuación (10) teniendo:

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}(x - x_0)^2 \qquad (11)$$

Si analizamos esta ecuación, puede observarse que la partícula describe una trayectoria parabólica, que corresponde a la mínima acción de dicho movimiento.

Método de Hamilton

Para abordar este sistema considerando la formulación de la dinámica de Hamilton, se tiene en cuenta una función de dos variables (P, x). Así mismo es importante tener claro que dicho análisis se realiza siempre y cuando el sistema sea conservativo.

$$H = T + U \qquad (1)$$

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta el momento conjugado:

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad Y \quad \dot{x} = \frac{P_x}{m} \qquad (3)$$

Y

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad Y \quad \dot{y} = \frac{P_y}{m} \qquad (4)$$

Entonces

$$H = \frac{1}{2m}\left({P_x}^2 + {P_y}^2\right) + mgy \qquad (5)$$

Si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg \qquad (7)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m} \qquad (8)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} \qquad (9)$$

Por lo tanto al derivar (8) y (9)

$$\ddot{x} = \frac{\dot{P}_x}{m} \qquad (10)$$

Y

$$\ddot{y} = \frac{\dot{P}_y}{m} \qquad (11)$$

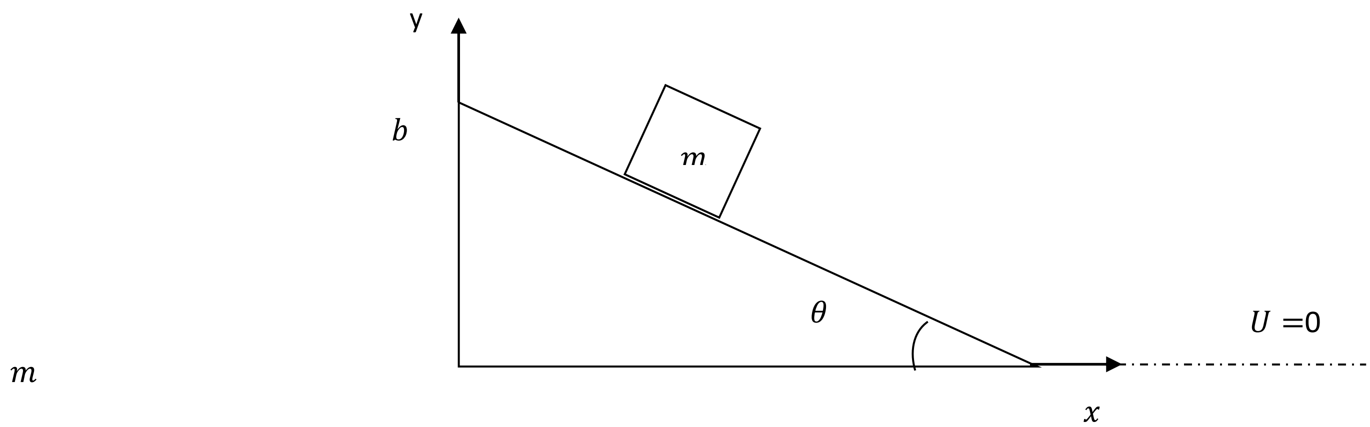
Y reemplazar (6) y (10) en (7) (9) tenemos:

$$\ddot{x} = 0 \qquad (12)$$

Y

$$\ddot{y} = -g \qquad (13)$$

4. El cuarto de estos sistemas es conocido como **plano inclinado**, mediante el cual se desliza un bloque de masa (m), despreciando la fricción con la superficie. Por lo tanto vamos a encontrar la ecuación que nos describa el movimiento y la aceleración $(\vec{a})$ de dicho objeto.



Podemos plantear el análisis para este ejercicio de tal manera que el lector visualice las diferentes estrategias que podrían abordar.

Método Newtoniano:

De acuerdo con la 2da Ley de Newton la fuerza neta para la masa viene dada así:

$$\vec{F}_N = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

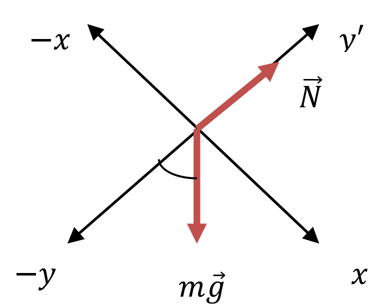
Donde $\vec{F}_N$ es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

$$\vec{F}_N = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso $(m\vec{g})$, y la normal $(\vec{N}\,)$ ejercida por la superficie sobre el bloque. Vectorialmente se tiene:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\,\vec{a} \quad (2)$$

Ahora representamos las fuerzas en términos de sus componentes por medio de un Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.)



Representamos las ecuaciones teniendo en cuenta los ejes de referencia.

$$x': \quad mg\sin\theta = ma_x$$

$$y': \; N - mg\cos\theta = ma_y$$

El objeto de masa (m) solo tiene movimiento en el eje x, lo cual indica que no se acelera a lo largo del eje y. Por lo tanto, existe una única aceleración a lo largo del eje x.

$$\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a_x$$

$$a_x = g\sin\theta \qquad (3)$$

y $$N - mg\cos\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta \qquad (4)$$

Método de Lagrange:

Las ligaduras pueden representarse mediante las ecuaciones de ligadura.

$$y = -x\tan\theta + b(t) \qquad (1)$$

$$z = 0 \qquad (2)$$

Donde la 1ra ecuación restringe la partícula a moverse sobre el plano inclinado. La 2da ecuación restringe la partícula a moverse sobre el plano (x, y). Por lo tanto existen dos ligaduras holónomas.

Los grados de libertad y el número de coordenadas generalizadas vienen dados por:

$$S = 3N - K$$

$$S = 3(1) - 2 = 1$$

Ahora podemos plantear el Lagrangiano

$$L = T - U \qquad (3)$$

Donde la energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad (4)$$

Y la energía potencial así:

$$U = mgh = mgy \qquad (5)$$

Derivando $y = -x\tan\theta + b(t)$ tenemos:

$$\dot{y} = -\dot{x}\tan\theta$$

Ahora expresamos L en términos de $\dot{x}$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 tan^2\theta) + \left(mg(-\dot{x}\tan\theta + b)\right)$$

Si factorizamos $\dot{x}^2$ nos queda:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + tan^2\theta) + \left(mg(-\dot{x}\tan\theta + b)\right) \qquad (6)$$

Si tenemos en cuenta algunas identidades trigonométricas podremos reescribir los términos del primer paréntesis.

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$$

Como:

$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

$$sec^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$$

Por lo tanto (6) queda:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}^2}{cos^2\theta}\right) + \left(mg(-\dot{x}\tan\theta + b)\right)$$

Ahora podemos reemplazar L en la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}^2}{cos^2\theta}\right)\right]}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{cos^2\theta}$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}m\left[\frac{\dot{x}}{cos^2\theta}\right] = \frac{m\ddot{x}}{cos^2\theta}$$

Por último derivamos $\frac{\partial L}{\partial x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial[mg(b - x\tan\theta)]}{\partial x} = mgtan\theta$$

De esta manera se reescribe la ecuación de Euler- Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{m\ddot{x}}{cos^2\theta} - mgtan\theta = 0$$

$$\frac{m\ddot{x}}{cos^2\theta} = mgtan\theta$$

$$\ddot{x} = gtan\theta\, cos^2\theta$$

$$\ddot{x} = gsin\theta\, cos\theta \qquad (8)$$

Siendo esta la ecuación que describe la aceleración de manera general. Por lo tanto ahora tenemos en cuenta las condiciones iniciales.

$$x_{(0)} = 0; \qquad y_{(0)} = b; \qquad v_{(o)} = 0$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}(gsin\theta\cos\theta)t^2 \qquad (9)$$

$$y(t) = b - (gsin\theta\cos\theta)\frac{t^2}{2}tan\theta \qquad (10)$$

$$y(t) = b - (gsin^2\theta)\frac{t^2}{2}$$

Ahora se representa la magnitud del desplazamiento así:

$$s(t) = \sqrt{x^2 + (b-y)^2} \qquad (11)$$

$$s(t) = \sqrt{x^2 + \big(b - (b - x\tan\theta)\big)^2}$$

Resolviendo,

$$s(t) = \sqrt{x^2 + x^2tan^2\theta} = \sqrt{x^2(1 + tan^2\theta)}$$

$$s(t) = \sqrt{x^2\, sec^2\theta} = x\, sec\theta$$

Reemplazando $xsec\theta$, tenemos

$$s(t) = \frac{1}{2}(gsin\theta\cos\theta)t^2\frac{1}{\cos\theta}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 gsin\theta \qquad (12)$$

Derivando $s(t)$, respecto al tiempo.

$$\dot{s}(t) = g\, t\, sin\theta \qquad (13)$$

Volviendo a derivar

$$\ddot{s}(t) = gsin\theta \qquad (14)$$

Método de Hamilton

Para abordar este sistema considerando la formulación de la dinámica de Hamilton, se tiene en cuenta una función de dos variables (P, x). Así mismo es importante tener claro que dicho análisis se realiza siempre y cuando el sistema sea conservativo.

$$H(P, y) = T + U \qquad (1)$$

$$H(P,y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 sec^2\theta + mg(b - xtan\theta)$$

De tal manera podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H(P,y) = P\dot{x} - L(x,\dot{x}) \qquad (2)$$

Reemplazando la expresión para L, tenemos

$$H(P,y) = P\dot{x} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2) + mgx \qquad (3)$$

Ahora tenemos en cuenta el momento conjugado:

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}sec^2\theta \qquad (4)$$

Entonces

$$\dot{x} = \frac{P}{msec^2\theta} = \frac{Pcos^2\theta}{m}$$

Reemplazamos (4) en (3),

$$H(P,y) = \frac{1}{2}m\frac{P^2cos^4\theta}{m^2}sec^2\theta + mg(b - xtan\theta)$$

Así:

$$H(P,y) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{m}cos^2\theta + mg(b - xtan\theta) \quad (5)$$

Ahora, si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m}cos^2\theta$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial y} = mgtan\theta$$

Por lo tanto al derivar $\dot{x}$ tenemos lo siguiente:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{P}}{m}cos^2\theta \qquad (6)$$

Reemplazando $\dot{P}$ tenemos.

$$\ddot{x} = \frac{mgtan\theta}{m}cos^2\theta$$

$$\ddot{x} = g\ sin\theta\ cos\theta \qquad (7)$$

Sabiendo que:

$$y = xtan\theta \qquad (8)$$

y

$$\ddot{y} = \ddot{x}tan\theta \qquad (9)$$

Ahora se representa la magnitud del desplazamiento así:

$$\ddot{s}(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \qquad (10)$$

$$\ddot{s}(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{x}^2tan^2\theta}$$

$$\ddot{s}(t) = \ddot{x}\sqrt{1 + tan^2\theta}$$

$$\ddot{s}(t) = \ddot{x}\ sec\theta$$

Reemplazando $\ddot{x}$ tenemos

$$\ddot{s}(t) = g\ sin\theta\ cos\theta\ sec\theta \quad (11)$$

Y así:

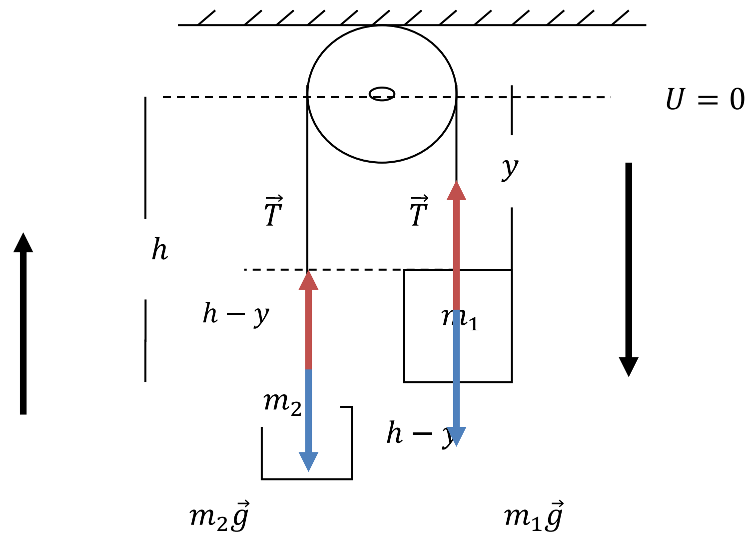
$$\ddot{s}(t) = g\ sin\theta \qquad (12)$$

Si queremos encontrar $s(t)$ entonces

$$s(t) = \sqrt{x^2 + x^2tan^2\theta} = \sqrt{x^2(1 + tan^2\theta)}$$

$$s(t) = \sqrt{x^2\ sec^2\theta} = x\ \mathrm{sec}\theta \qquad (13)$$

5. Este sistema es conocido como máquina de Atwood, la cual consiste en dos masas m_1 y m_2, conectadas con una cuerda inelástica de masa despreciable mediante una polea también de masa despreciable. Si $m_1 \neq m_2$ ambas masas experimentan una aceleración uniforme. La idea es encontrar las ecuaciones que describan dicha aceleración.



Método Newtoniano:

En este sistema el movimiento se realiza a lo largo del eje y, y la magnitud de la fuerza de tensión es la misma para todo el sistema. Analizando la 2da Ley de Newton, la fuerza resultante para cada masa viene dada así:

$$\vec{F}_r = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

Para $\boldsymbol{m_1}$:

$$\sum \vec{F}_y = m_1\vec{a}_1$$

Donde $\vec{F}_Y$ es la sumatoria vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula m_1.

$$m_1\vec{g} - \vec{T} = m_1\vec{a}_1 \qquad (2)$$

Para $\boldsymbol{m_2}$:

$$\sum \vec{F}_y = m_2\vec{a}_2$$

De la misma manera las fuerzas actuantes son:

$$\vec{T} - m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2 \qquad (3)$$

Para reducir el número de ecuaciones podemos analizar la aceleración de todo el sistema, teniendo en cuenta que ambas masas se aceleran de la misma manera al estar unidas por la misma cuerda:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$$

Despejando la tensión (T) de (3).

$$\vec{T} = m_2\vec{g} + m_2\vec{a} \qquad (4)$$

Ahora reemplazando los términos de la tensión en la ecuación (2).

$$m_1\vec{g} - m_2\vec{g} - m_2\vec{a} = m_1\vec{a}_1 \qquad (5)$$

Despejando el tercer término del miembro izquierdo y factorizando la gravedad y aceleración, respectivamente

$$(m_1 - m_2)\vec{g} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

Despejando la aceleración tenemos:

$$\vec{a} = \vec{g}\,\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

Si queremos hallar la magnitud de la velocidad del sistema, podemos emplear la siguiente ecuación una vez tengamos la aceleración.

$$\vec{v}^2 = \cancel{v_0^2} + 2\vec{a}(y - y_0)$$

Donde y_0 representa la posición inicial de la partícula. Eliminamos la velocidad inicial, pues suponemos que ambas masas parten del reposo.

$$\vec{v}_y = \sqrt{2\vec{a}(y - y_0)}$$

Método de Lagrange:

Para este sistema se toma (y) como coordenada generalizada. Ahora podemos plantear el Lagrangiano

$$L = T - U \qquad (1)$$

donde la energía cinética viene dada por

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 \qquad (2)$$

La energía potencial corresponde a

$$U = -m_1 g y - m_2 g(h - y) \qquad (3)$$

Por lo tanto la función de Lagrange (1) queda:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1 g y + m_2 g(h - y) \qquad (4)$$

Podemos reemplazar L en la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

Calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_1\dot{y} + m_2\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m_1\ddot{y} + m_2\ddot{y} = \ddot{y}(m_1 + m_2)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m_1 g - m_2 g = g(m_1 - m_2)$$

Reemplazando estos valores en (5):

$$\ddot{y}(m_1 + m_2) - g(m_1 - m_2) = 0 \qquad (6)$$

Despejando $\ddot{y}$, tenemos:

$$\ddot{y} = g\,\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \qquad (7)$$

Siendo esta la misma ecuación que encontramos por medio del método anterior.

Método de Hamilton:

Analizando el sistema desde la perspectiva de Hamilton, se tiene en cuenta una función dependiente de dos variables (P, y). De tal manera podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H(y, P_y) = P_y \dot{y} - L \qquad (1)$$

Reemplazando los términos de L obtenidos en el método anterior tenemos

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + m_1 g y + m_2 g (h - y)$$

Reescribiendo el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + (m_1 - m_2) g y + m_2 g h \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$H\left(y, P_y\right) = P_y\, \dot{y} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 - (m_1 - m_2) g y - m_2 g h \qquad (3)$$

Ahora, podemos expresar el momento conjugado:

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} \qquad (4)$$

Y la velocidad expresada en términos del momento conjugado

$$\dot{y} = \frac{P_y}{(m_1 + m_2)} \qquad (5)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2) y sumando los dos primeros términos tendríamos:

$$H(y, P_y) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + (m_2 - m_1) g y - m_2 g h \qquad (6)$$

Ahora se escribe el Hamiltoniano en términos de las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados

$$H(y, P_y) = \frac{{P_y}^2}{2(m_1 + m_2)} + (m_2 - m_1) g y - m_2 g h \qquad (7)$$

Si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{(m_1 + m_2)}$$

y

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = (m_1 - m_2) g$$

Así podemos expresar la aceleración del sistema como:

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_y}{(m_1 + m_2)}\right) \qquad (8)$$

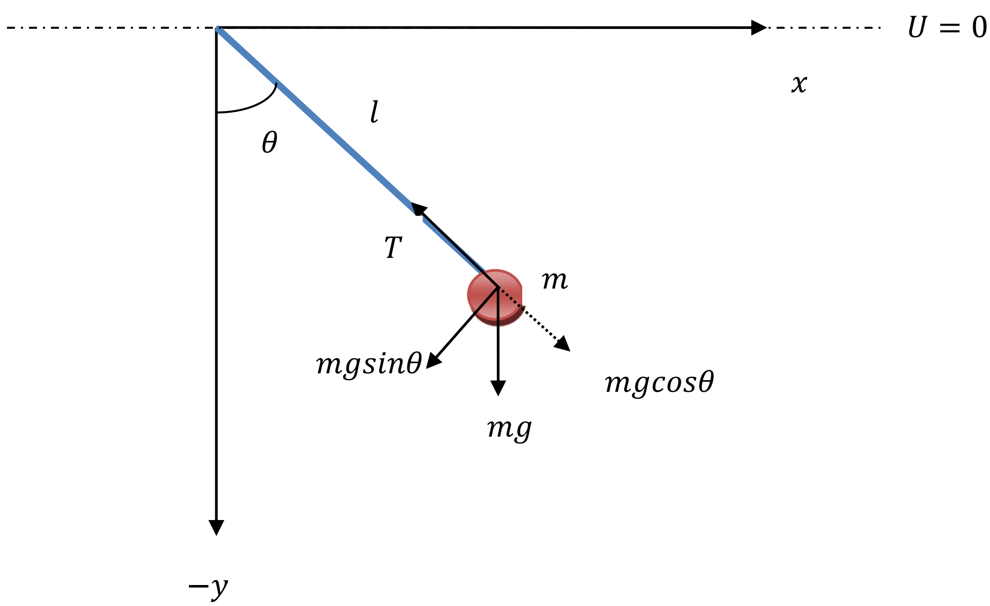
Por lo tanto:

$$\ddot{y} = \frac{\dot{P}_y}{(m_1 + m_2)} \qquad (9)$$

Así:

$$\ddot{y} = g\,\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \qquad (10)$$

6. El último de estos sistemas es conocido como **péndulo simple**, trabajado habitualmente desde los cursos de básica secundaria. Este consta de un objeto de masa (m) y una longitud (l) constante. Por lo tanto vamos a encontrar la ecuación que nos describa el movimiento de dicho objeto.



Método Newtoniano

Para obtener las ecuaciones del movimiento aplicando la dinámica de newton, es mejor realizar el análisis en coordenadas polares.

$$\vec{F}_r = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad (2)$$

Donde el peso tiene dos componentes: una componente radial y una tangencial.

$$m\vec{g} = (mgcos(\theta))\hat{u}_\rho + (-mgsin(\theta))\hat{u}_\theta$$

La tensión ($-T$) a lo largo del hilo es hacia el centro de rotación, es por esto que aparece el signo negativo.

$$\vec{T} = -|T|\,\hat{u}_\rho$$

Ahora analizamos las ecuaciones de movimiento para cada coordenada.

Para $\hat{u}_\rho$

$$-\vec{T} + mgcos\theta = ma_\rho \qquad (3)$$

$$-\vec{T} + mgcos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

También podemos analizar la aceleración radial en coordenadas polares $a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$$-\vec{T} + mgcos\theta = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \qquad (4)$$

Para $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$

$$-mgsin\theta = ma_\theta \qquad (5)$$

Donde a_θ es la aceleración tangencial. Entonces

Si $|\vec{v}| = \omega l = \frac{d\theta}{dt} l$,

$$a_\theta = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por lo tanto (5) puede reescribirse como.

$$-\cancel{m}gsin\theta = \cancel{m}\, l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\frac{g}{l} gsin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \qquad (6)$$

De la misma manera si tenemos a_θ representado en polares tal que

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$mgsin\theta = mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} \qquad (7)$$

Para finalizar podemos analizar las ecuaciones (4) y (7), teniendo en cuenta que el hilo tiene una longitud constante (l)

$$l = r = cte$$

Entonces:

$$\dot{r} = 0 \quad ; \quad \ddot{r} = 0$$

Por lo tanto (4) queda así:

$$-T + mgcos\theta = -ml\dot{\theta}^2$$

$$mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2 = T$$

$$T = m(l\dot{\theta}^2 + gcos\theta)$$

Y la ecuación (7) queda:

$$-\cancel{m}gsin\theta = \cancel{m}l\ddot{\theta}$$

$$-\frac{g}{l} gsin\theta = \ddot{\theta} \qquad (8)$$

Método Lagrange:

Inicialmente las ligaduras pueden representarse por medio de sus ecuaciones y fuerzas de ligadura.

La primera restringe el movimiento al plano x, y

$z = 0$; $f_1 = z = 0$ (1)

La segunda restringe el movimiento de m, haciendo que describa una circunferencia de radio constante l.

$x^2 + y^2 = l^2$; $f_2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0$ (2)

Teniendo en cuenta que hay dos ligaduras en el sistema $(K = 2)$, los grados de libertad vienen dados así:

$S = 3N - K = 3(1) - 2 = 1$

Hay una coordenada generalizada, y de acuerdo con el diagrama asociado al sistema es pertinente escoger a θ como coordenada generalizada. Las transformaciones necesarias $r(q)$ son:

$$x = l\,sin\theta \;\; ; \;\; \dot{x} = l\,cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y = -l\,cos\theta \;\; ; \;\; \dot{y} = l\,sin\,\theta\,\dot{\theta}$$

Dividiendo las dos ecuaciones de la izquierda obtenemos:

$$tan\theta = -\frac{x}{y} \quad ; \quad \theta = tan^{-1}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

El Lagrangiano del sistema L

$$L = T - U \qquad (3)$$

Ahora expresamos T y U en función de θ, donde T es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\left(lcos\theta\,\dot{\theta}\;\right)^2 + \left(lsin\theta\,\dot{\theta}\right)^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2cos^2\theta\dot{\theta}^{\,2} + l^2sin^{\,2}\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^{\,2}(cos^2\theta + sin^{\,2}\theta\,)$$

Y U es:

$$U = mgh = mgy = -mglcos\theta \quad (5)$$

Entonces podemos reescribir (3) como:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^{\,2} + mglcos\theta$$

Ahora podemos reemplazar L en la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

Donde

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad ; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mlgsin\theta$$

Finalmente, la ecuación de Euler–Lagrange quedaría

$$ml^2\ddot{\theta} + mlgsin\theta = 0$$

$$l^2\ddot{\theta} + lgsin\theta = 0$$

Dividiendo entre l^2 obtenemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\,\theta = 0$$

Finalmente obtenemos la ecuación que nos describe la aceleración de dicho objeto: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin\,\theta$ (6)

Método de Hamilton:

Analizando el sistema desde la perspectiva de Hamilton, se tiene en cuenta una función dependiente de dos variables (P,θ). De esta manera podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H(\theta,P_\theta) = P_\theta\,\dot{\theta} - L \qquad (1)$$

Reemplazando los términos de L obtenidos en el método anterior tenemos,

$$H(\theta,P_\theta) = P_\theta\,\dot{\theta} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^{\,2} - mglcos\theta \quad (2)$$

Ahora podemos hacer uso de la definición de un concepto conocido como *momento* conjugado o asociado a las coordenadas generalizadas trabajadas en el Capítulo 5, el cual está descrito por medio de la ecuación $(5-27)$.

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad (3)$$

Por lo tanto tenemos:

$$H(\theta,P_\theta) = ml^2\dot{\theta}^{\,2} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^{\,2} - mglcos\theta$$

Sumando los dos primeros términos.

$$H(\theta,P_\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^{\,2} - mglcos\theta \qquad (4)$$

Ahora podemos reescribir el primer términos empleando nuevamente la ecuación $(5-27)$, ya que dicha función debe ser dependiente de (P,θ).

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{ml^2} \qquad (5)$$

$$H(\theta,P_\theta) = \frac{1}{2}ml^2\,\frac{P_\theta}{m^2l^4}^{\,2} - mglcos\theta \qquad (6)$$

$$H(\theta,P_\theta) = \frac{1}{2}\frac{P_\theta}{ml^2}^{\,2} - mglcos\theta \qquad (7)$$

Si analizamos las ecuaciones de Hamilton, tenemos lo siguiente:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{ml^2} \qquad (8)$$

y

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -mglsin\theta \qquad (9)$$

Así podemos expresar la aceleración del sistema como:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_\theta}{ml^2}\right) \qquad (10)$$

Por lo tanto:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{P}_\theta}{ml^2} = \frac{-mglsin\theta}{ml^2} \qquad (11)$$

Resultando

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{l^2}sin\theta \qquad (12)$$

6. Conclusiones

La manera como se presentó este trabajo, permite la elaboración de una propuesta alterna con el fin de generar un acercamiento a una nueva metodología que puede ser considerada arriesgada, en el sentido de involucrar algunas herramientas matemáticas y conceptuales poco usuales respecto al orden del pensum actual, sin embargo la manera como se ha presentado podría generar mayor interés por parte de los docentes y estudiantes hasta el punto de encontrar conexiones con otras disciplinas, áreas o procesos de formación (incluyendo el bachillerato), que incentivan la inclusión de nuevos conceptos y estrategias didacticas.

Finalmente los docentes pueden mostrar a los estudiantes una visión alterna de la mecánica Newtoniana en donde sus análisis son más de tipo vectorial basándose en las fuerzas, mientras que la dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana, basan sus análisis mediante cantidades escalares como la energía, generando otra perspectiva más general y matemáticamente más estructurada.También es de resaltar la facilidad y elegancia con que se representan estas formulaciones alternas; así, no siempre será necesario esperar hasta los niveles avanzados para conocer el trasfondo y la esencia de la mecánica clásica y sus múltiples interpretaciones, todo como un acercamiento didáctico entre temáticas que generalmente se visualizan de manera independiente estableciendo unas bases conceptuales y epistemológicas que sin duda alguna fortalecerá el proceso de formación e incentivarán la investigación entre todos los que se identifiquen con este análisis.

Es importante antes de finalizar, dejar en claro que debido a la extensión del presente trabajo es inevitable omitir algunos referentes teóricos lo cual puede ser motivo para futuras investigaciones. Es así como esta propuesta puede ser solo el inicio para que otros trabajos de investigación tengan la oportunidad y el camino abierto para analizar la mecánica clásica desde otras perspectivas; y así otros compañeros en formación pueden continuar aportando ideas e implementando métodos y alternativas igualmente válidos y elaborados que generen la integración de infinidad de conceptos y representaciones que en algún momento fueron objetivos de otro nivel en el proceso de formación.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Alaníz, J. Espejel, R. Flores, M. Luque, A. Martínez, A. (1999). *Calculo diferencial e integral I.* Ciudad de México, México. Colegio de bachilleres. p. (7). [Fecha de consulta: 21 Enero 2016]. Recuperado desde http://www.conevyt.org.mx/bachillerato/material_bachilleres/cb6/5sempdf/cad2pdf/calculo1_fasc2.pdf

[2] Artigue, V. Pollrtio, A. (2013). *Aspectos históricos del problema de la n cuerpos y su Influencia en el desarrollo de la física y la matemática: motivación para diseñar actividades de enseñanza*. Universidad de Montevideo- Uruguay. p.954. [Fecha de consulta: 21 Enero 2016]. Recuperado desde: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/673.pdf

[3] *Blinn, J. (1985).Universo mecánico.* California Institute of Technology. [Archivo de video]. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: https://www.youtube.com/watch?v=dArBILlw0co

[4] Castiblanco, O. Nardi, R. (2013). *Un uso de la historia en la enseñanza de la didáctica de la física.* Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias. Vol. (8) p.53. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/viewFile/5139/6860

[5] Cosenza, M. (2015). *Mecánica Clásica*. Departamento de física, Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela: grupo de caos y sistemas complejos. p. (27, 225). [Fecha de consulta: 21 Enero 2016]. Recuperado desde: http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos/PDFs/guiaMecanicaClasica.pdf

[6] Costa, V. & Arlego, M. (2013). *El rol de la historia de las ciencias en la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería*. Revista iberoamericana de educación matemática. Vol. (36). p. (31). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/36/archivo6.pdf

[7] Falcón, N. (2012). *Mecánica Clásica, Física teórica en formalismos de Lagrange, Hamilton y Hamilton- Jacobi.* Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela. Vol. 1. p. (22, 51). [Fecha de consulta: 21 Enero 2016]. Recuperado desde: http://www.researchgate.net/publication/234719996_MECNICA_CLSICA_Fsica_Terica_en_formalismos_de_Lagrange_Hamilton_y_Hamilton-Jacobi

[8] Flores, S. Alfaro, L. Dena, O (2007). *Student understanding of vectors in mechanics.* Tesis para obtener el grado de doctor en física. Universidad estatal de Nuevo México. Revista mexicana de física. Vol. (1). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v54n1/v54n1a2.pdf

[9] Gamow, G. (1971). *Biografía de la física*. Navarra, España: Salvat Editores. p (11,12, 19 -37, 53)

[10] González, A. Revuelta, F. Saeta, I. García, E. Maciá, B. (2009*). Mecánica Lagrangiana, teoría y práctica*: Alqua, made in Community. p. (5, 25, 26). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015].
Recuperado desde: http://forja.rediris.es/frs/download.php/1917/LAG-0_10_1.pdf

[11] Goodstein, D. & Goodstein, J. (1999). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del sol*. California, E.E.U.U: Tusquets Editores. p (20, 21, 28)

[12] Gregory, D. (2006). *Classical Mechanics*. Cambridge University. Inglaterra: [s. n]. p. (131). [Fecha de consulta: 21 Junio 2016]. Recuperado desde: http://ebooks.cambridge.org/ebook.jsf?bid=CBO9780511803789

[13] Hewitt, P. (2007). *Física conceptual.* México. Pearson, Addison Wesley. p. (36). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015].Recuperado desde:http://www.hverdugo.cl/varios/libros/fISica%20Conceptual%20-%20Hewit.pdf

[14] Lanciano, N. (1989). *Historia de las ciencias y la enseñanza.* Departamento de matemáticas. Universidad de Roma. Vol. (7). p. (175). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015].
Recuperado desde: *http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v7n2/02124521v7n2p173.pdf*

[15] Norbury, J. (2000). *Lagrangians and Hamiltonians for high school students*. Physics Department and Center for Science Education, University of Wisconsin - Milwaukee. [Fecha de consulta: 21 junio 2016]. Recuperado desde: http://arxiv.org/pdf/physics/0004029.pdf

[16] Maravall, D. (1988). *Desarrollo de la mecánica y de la física matemática en el siglo XVIII*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, España: [s. n]. p. (156). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1992_00_00_07.pdf

[17] Pensum créditos – pensum horas [en línea]. Bogotá, D.C.: PCLF [fecha de consulta: 19 enero 2016]. Disponible desde internet: http://licfisica.udistrital.edu.co:8080/contenidos-programaticos-syllabus
[18] Pérez, F. (2004). Calculo *diferencial e integral de funciones de una sola variable.* Departamento de análisis matemático, Universidad de Granada. Creative commons. p. (202). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde:http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/dragan/licenc/calcI-inf-1213/perez-glez_calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

[19] Salinas de Sandoval, J. Colombo de Cudmani, L. (1993). *La epistemología e historia de la física en la formación de los profesores de física*. Revista Brasileira de Ensino de Fisica.vol. (15), p. 103. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol15a12.pdf

[20] Salinas de Sandoval, J. Colombo de Cudmani, L. Jaén de Madozzo, M. (1995). *Las concepciones epistemológicas de los docentes en la enseñanza de las ciencias fácticas.* Revista Brasileira de Ensino de Fisica.vol. (17), p. 55. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v17_55.pdf.

[21] Sanmartí, N. (1997). *Enseñar y aprender ciencias: algunas reflexiones*. En Sanmartí, N. y Pujol, R.M. (Eds.) (2000), p. 5.Guía praxis de ciencias de la naturaleza. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://www.guiasensenanzasmedias.es/verpdf.asp?area=natura&archivo=GR104.pdf

[22] Sofonea, L. (1993). *La génesis de las entidades físicas conceptuales .Ejemplos históricos*. Llull, vol. (16), p. 313-325. [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=62111

[23] Torres, B. Ayala, M. (1996). *La mecánica analítica de Lagrange un estudio histórico-crítico*. Departamento de física, Universidad Pedagógica. Bogotá, Colombia. Vol. (1). p. (30). [Fecha de consulta: 15 Diciembre 2015]. Recuperado desde: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RFC/article/view/2563/2375

8. Anexos

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL Y VECTORIAL

Hemos ido contextualizando la evolución histórico- epistemológica de las concepciones del movimiento con el fin de generar ciertas nociones conceptuales que permitan abordar con mayor facilidad las formulaciones propuestas por Newton, Lagrange Y Hamilton. A continuación haremos una breve introducción al cálculo diferencial, de la mano de algunos elementos teóricos, sin dejar de lado la formidable historia a través de algunas de las ideas de los grandes pensadores de la ciencia y especialmente de la física en su intención de comprender las reglas y el comportamiento del universo.

En nuestro recorrido hacia la formulación Newtoniana, Lagrangiana y Hamiltoniana consideramos importante que el estudiante conozca e identifique algunas ideas y conceptos previos; por otro lado, en el plan de estudios de licenciatura en física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas antes de abordar los cursos de mecánica clásica I y II, se ofrecen otros contenidos de física y matemática básica, posterior a esto se realizan los respectivos cursos de cálculo diferencial e integral, con el fin de generar herramientas que faciliten la comprensión de la mecánica desde cualquier formulación o perspectiva. Sin embargo tras plantear algunas preguntas sobre la viabilidad de abordar una propuesta que evidencie diferentes formulaciones de la mecánica clásica en un mismo curso, las respuestas de los docentes no fueron del todo buenas. A preguntas como: *"Un fenómeno puede tener diversas teorías que pretenden explicarlo. En el caso del movimiento, la mecánica Lagrangiana, Hamiltoniana y Newtoniana podrían tenerse en cuenta al momento de explicar el mismo fenómeno: ¿Qué razones podrían generar que solo se aborde la mecánica newtoniana en los primeros semestres de Licenciatura en Física?* Algunos profesores (una buena parte de ellos) opinan que una de las razones para abordar estas temáticas de manera independiente es la ausencia de conceptos e ideas previas (cálculo diferencial y vectorial) que permitan el desarrollo óptimo de los desempeños y objetivos propuestos durante el curso.

De esta manera queremos hacer un breve paréntesis en cuanto a conceptos físicos y matemáticos. Aquí hablaremos de algunas magnitudes físicas analizando sus características escalares y vectoriales, y a su vez introduciendo los elementos correspondientes a las funciones y sus variaciones respecto a otras variables.

Magnitudes del movimiento

Tanto en la comprensión de la Física, como en el análisis del movimiento los estudiantes deben manejar algunas herramientas básicas (cálculo diferencial, integral y vectorial) que permitan una visión generalizada en el estudio de la naturaleza no solo desde el punto de vista de la mecánica clásica, si no en otras áreas de igual importancia como termodinámica, hidrostática, hidrodinámica, campos y ondas, entre otras. Iniciaremos hablando de estas herramientas matematicas, dando a conocer algunas de sus características, y propiedades. Es importante mencionar que nuestro objetivo no es reconstruir todo su desarrollo ya que nos llevaría más tiempo y podríamos extendernos, sin embargo mostraremos algunos elementos claves, que de una u otra manera hacen parte de la mecánica Newtoniana, también conocida como mecánica vectorial. Algunas de las magnitudes o cantidades físicas de las que hemos hablado y hablaremos durante este trabajo tienen una característica especial: podemos escribirlas como un número (magnitud) acompañado de una unidad (dimensión) y son conocidas como ***cantidades escalares***. Estas magnitudes emplean las operaciones aritméticas comunes. Existen otras magnitudes que se definen completamente cuando además de su magnitud y dimensión, presentan un origen (punto de aplicación), una dirección (orientación en el sistema de coordenadas) y un sentido (indica la línea de acción del vector). Si cumple con estas características podemos afirmar que la cantidad física es una **cantidad vectorial.** Algunos textos representan geométricamente cantidades vectoriales por una flecha denominada vector; si queremos representar un vector en un sistema de coordenadas (x, y, z) se hace uso de vectores unitarios correspondientes al eje de coordenadas respectivamente ($\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$).

Los vectores en esencia son mucho más que una simple flecha, pues se rigen bajo ciertas reglas matemáticas siendo pieza clave en el desarrollo de varias teorías físicas. Aunque el cálculo vectorial se desarrolló en su totalidad hasta el siglo XIX, fue el álgebra vectorial un buen elemento en el análisis de varias cantidades físicas para la mecánica de Newton. Según Costa & Arlego (2013, p. 31):

> El Cálculo Vectorial evoluciona a partir del desarrollo del Álgebra Vectorial. El álgebra vectorial define conceptos tales como vectores, su notación, operaciones básicas y propiedades de las operaciones entre vectores.

Cabe resaltar que en esta sección no fue mencionada la existencia de cantidades escalares como la masa, el tiempo, la energía y cantidades vectoriales como la fuerza y el momento (de las que también hablamos en los capítulos anteriores mediante nuestro recorrido histórico y teórico) ya que los estudiantes de primeros semestres se encontrarán con varios de estos conceptos en sus cursos iniciales.

Cálculo diferencial

Al igual que el análisis vectorial, el cálculo infinitesimal se considera una de las herramientas matemáticas más importantes al momento de analizar el comportamiento de la naturaleza. El cálculo surgió a mediados del siglo XVII con la finalidad de comprender y estructurar algunos problemas geométricos tales como la recta tangente de una función en un punto dado y la descripción de fenómenos astronómicos donde las funciones se plantean en términos de cantidades escalares y vectoriales. Algunos pensadores se destacan en su invención y desarrollo, según Alaníz (1999, p. 7):

> "Sobresalieron *John Wallis, profesor de la Universidad de Oxford e Isaac Barrow, profesor de Newton en la Universidad de Cambridge, Inglaterra. Pero un método general de diferenciación e integración fue descubierto solo hacia 1665 por el Inglés Isaac Newton y posteriormente por Gottfried Wilhelm Von Leibniz*, *nacido en Leipzig, Alemania, por lo que a ellos se les atribuye la invención del Cálculo"*

En su intento por describir las características del movimiento desde el punto de vista físico – matemático, y haciendo uso de representaciones geométricas, estos pensadores fueron los encargados de estructurar los pilares de lo que ahora conocemos como cálculo diferencial. Es así como en esta revisión breve mostraremos algunos elementos con la finalidad que el estudiante sienta mayor seguridad al momento de abordar distintas formulaciones de la mecánica clásica. Las funciones matemáticas son una pieza importante en el estudio de los fenómenos físicos ya que podemos definir una función como una relación entre los elementos de dos conjuntos o variables, donde los primeros elementos de las parejas de una función forman el dominio de dicha función y por otro lado el conjunto formado por los segundos elementos de las parejas se denomina rango de la función. Un ejemplo habitual es el que estamos analizando en esta propuesta, pues generalmente describimos o encontramos la relación entre la posición y el tiempo de un sistema que se encuentra en movimiento. Al igual que las funciones, existen otros elementos de gran importancia como el límite, las series y las sucesiones, y aunque se relacionan entre sí sólo mencionaremos algunas de sus características; el concepto de límite se analizó indirectamente con algunas ideas y aproximaciones de Arquímedes, también conocidas como cuadraturas. Con la llegada de la revolución científica (revolución copernicana) y la adquisición de nuevas técnicas que precedían la invención del cálculo uno de los primeros indicios del concepto de límite aparece en estrecha relación con el cálculo de fluxiones (velocidades instantáneas) de Newton. Situación que representamos de manera sencilla en el capítulo donde relacionamos las ecuaciones (2- 13) y (2-14) por medio de un “límite” haciendo tender una variable a cero. No obstante muchos pensadores como D’Alembert, Lagrange, Joseph Cousin y Louis Cauchy, continuaron trabajando por muchos años en la descripción de algunas cantidades desde el punto de vista infinitesimal haciendo uso del concepto de límite. Todos estos conceptos son de gran importancia al momento de resolver diversos problemas en los cuales queramos encontrar la tangente a una curva en determinado punto y el área encerrada bajo una curva; es en estos casos en donde podemos hacer uso de los conceptos de derivada e integral.

Tanto en la mecánica clásica como en la mecánica analítica se utiliza la notación de Leibniz donde $\frac{df(x)}{dx}$ representa la derivada de la función respecto a la variable x. Sin embargo esta notación puede ser incomoda al representar derivadas en puntos concretos y podemos encontrar otras representaciones como $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$. Por otro lado, son varias las notaciones existentes durante la evolución del cálculo pero además de cómo representarlo lo que realmente nos debe importar es su trasfondo y significado. Uno de los métodos que los estudiantes deben conocer para abordar problemas de mecánica clásica es la derivada compuesta o regla de la cadena. Se usa cuando tenemos una función que depende de x, tal que $y = g(x)$ en la cual tenemos que x es función que depende de t y a la vez se relaciona a través de f, de tal modo que $x = f(t)$. Entonces la variación de y respecto a t se hace por medio de x:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dx}{dt} = g'(x) \, . \, f'(t) = g'\big(f(t)\big) \, . \, f'(t) \qquad (1)$$

Todas estas técnicas de derivación son profundizadas en sus respectivos cursos de cálculo, sin embargo consideramos importante mencionarlas pues algunos de los docentes entrevistados mostraban preocupación por las herramientas matemáticas que puedan tener los estudiantes en sus primeros semestres.

La derivada parcial es otra de las ideas que se pretende introducir en este capítulo pues será de gran ayuda al momento de abordar la dinámica de Lagrange.

- Cuando tenemos una función que solo depende de una variable $f(x)$, la notación que podemos emplear para representar esta derivada es:

$$\frac{df}{dx}$$

- Para una función de dos variables $g(x, y)$, en donde existen dos posibles derivadas para cada variable x ó y, en este caso se introduce una notación diferente para derivarlo tal que:

  $\frac{\partial g}{\partial x}$ Implica que se deriva la función solamente respecto a x; en donde x está cambiando mientras y permanece constante.

$\frac{\partial g}{\partial y}$ Implica que se deriva la función solamente respecto a y; en donde y está cambiando mientras x permanece constante.

Podemos ejemplificar este método si analizamos las siguientes funciones

$$\boldsymbol{g\ (x\,,y) = 3x^4 - 9x^2y + 12y}$$

- Se deriva la función solamente respecto a x

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 12x^3 - 18xy$$

- Se deriva la función solamente respecto a y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -9x^2 + 12$$

Todos estos conceptos pueden ser nuevos para algunos estudiantes, ya que el análisis de las derivadas parciales se analiza después de cuarto semestre y en algunos casos de manera independiente a la mecánica clásica de segundo y tercer semestre. Sin embargo se han manejado de manera simple y así podrían ser introducidos antes de iniciar sus cursos de mecánica.

Cálculo vectorial

Para concluir este breve anexo vamos a mencionar otra elemento clave denominado cálculo vectorial; es de suma importancia ya que en los capítulos anteriores encontraremos relaciones entre parámetros de tipo vectorial y escalar. Uno de los ejemplos que abordamos durante esta propuesta relaciona parámetros escalares como el tiempo con el fin de determinar un vector posición en diferentes instantes. Asumiendo que el tiempo está cambiando de manera continua podemos escribir la ecuación vectorial $\vec{r}_{(t)}$ dependiente de la variable escalar t.

A continuación vamos a analizar el cambio que experimenta la función al variar la cantidad vectorial $\vec{r}_{(t)}$ cuando t cambia a $t + \Delta t$.

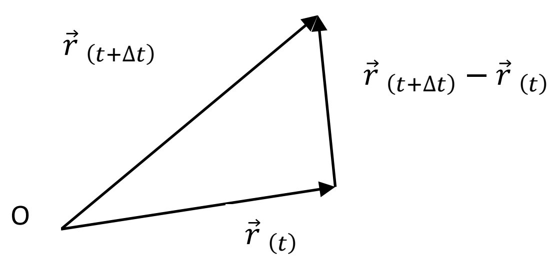


Figura 1: Representación gráfica de la diferencia entre magnituds vectoriales

Si analizamos el cambio de la función vectorial cuando el intervalo Δt se hace más pequeño, estamos realizando su derivada y podemos expresarla en los mismos términos de la sección anterior suponiendo que el límite en consideración exista, de esta manera vamos a analizar algunos de los tratamientos aplicables en los siguientes capítulos cuando hablemos sobre la dinámica del movimiento desde las dos formulaciones previstas durante este trabajo.

La derivada de dicha función se representa formalmente así:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\vec{r}_{(t+\Delta t)} - \vec{r}_{(t)}}{\Delta t}\right] \qquad (2)$$

Si queremos expresar la función bajo un sistema de referencia cartesiano puede ser escrita como:

$$\vec{r}_{(t)} = r_x(t)\hat{\imath} + r_y(t)\hat{\jmath} + r_z(t)\hat{k} \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que los vectores unitarios (en coordenadas rectangulares) cumplen la siguiente característica:

$$\frac{d}{dt}\hat{\imath} = \frac{d}{dt}\hat{\jmath} = \frac{d}{dt}\hat{k} = 0 \qquad (4)$$

Así podemos escribir la ecuación (3-2) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{(t)} = \frac{d}{dt}r_x\hat{\imath} + \frac{d}{dt}r_y\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}r_y\hat{k} \qquad (5)$$

De esta manera podemos afirmar que la derivada de la función vectorial se obtiene derivando respecto al tiempo sus componenetes cartesianas (x, y, z) cuyos vectores unitarios respectivamente son $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. .

Ahora, después de analizar diferentes características del cálculo diferencial y vectorial es posible minimizar algunas dudas e inquietudes y así mismo fortalecer los conceptos e ideas previas que puedan repercutir en el análisis del movimiento de parte de los estudiantes. De esta manera el estudiante se sentirá más cómodo con las temáticas propuestas durante este trabajo lo cual le permitirá analizar un mismo fenómeno desde diferentes visiones.