SOLUCIONES CLÁSICAS A LA ECUACIÒN DE CALOR LINEAL.

Trabajo de Grado
Proyecto Curricular de Matemáticas

David Andrés Paloma Cruz

Director: Arturo Sanjuán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2017

A mi madre y mi abuela. Esto es por ellas.

Agradecimientos

Mi estancia en la universidad fue mucho más larga de lo planeado, pero es una experiencia que no solo me ha hecho profesional si no también mejor persona y me ha llevado a conocer personas a las que aprecio y admiro mucho. En estas lineas quiero agradecer el apoyo y amistad de Javier Aldana, Joan Amaya y Cindy Reyes quienes fueron un gran apoyo tanto academico como moral dentro de la universidad en los momentos mas difíciles. Al profesor Arturo Sanjuán por la paciencia que tuvo para conmigo durante el desarrollo de este trabajo y de la línea del análisis.

A Jennyfer Homez por ese cariño y apoyo que me ayudó a permanecer de pie en los momentos más difíciles de estos último años de universidad. Y por último agradecer todo el apoyo incondicional, las palabras de animo, el amor, la fé y la paciencia que me brindaron mi mamá y mi abuelita, sin esos detalles nada de esto sería posible.

Índice general

INTRODUCCIÓN **III**

1. PRELIMINARES **1**

1.1. Deducción de la Ecuación de Calor en una Dimensión 1

1.2. Una Solución de la Ecuación de Calor Unidimensional 3

1.3. Algunas Definiciones y Conceptos Necesarios 8

1.3.1. Transformada de Fourier y Algunas Propiedades 8

1.3.2. La Función $\vartheta_3(z,\tau)$ 9

2. ECUACIÓN DE CALOR EN $\mathbb{R}^n$ **13**

2.1. El Problema de Valor Inicial 13

2.2. Principio del Máximo y Unicidad 18

2.3. Un Problema Mixto 23

CONCLUSIONES **26**

BIBLIOGRAFÍA **27**

INTRODUCCIÓN

Dentro del curso de ecuaciones diferenciales parciales uno de los ejemplos más importantes es la ecuación de calor, ya que ésta se presta para ejemplificar cada unos de los conceptos básicos necesarios para un primer acercamiento a las ecuaciones diferenciales parciales. Los primeros resultados referentes a dicha ecuación, empezando por su deducción, fueron presentados por *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768-1830) inspirado en los primero trabajos realizados por *Daniel Bernoulli* (1700-1782) para dar solución a la ecuación de onda (o ecuación de la cuerda vibrante). El trabajo desarrollado por Fourier no quedaría limitado solo a la solución de la ecuación de calor, sino que además motivaría el nacimiento de toda una rama de las matemáticas como lo es el análisis de Fourier [Ibarra, 2014].

El objetivo del presente texto es estudiar algunos de los métodos utilizados para hallar soluciones a la ecuación de calor, analizar algunas de las propiedades de las soluciones encontradas y ver que posibles relaciones existen entre dichas soluciones. Para tal fin las ideas aquí presentadas estarán guiadas por [Simmons, 1991],[Iorio and Magalhães, 2001] y [John, 1981].

En el primer capítulo se hace la deducción de la ecuación de calor unidimensional partiendo de la consideración del fenómeno físico que pretender ser modelado con esta ecuación. Luego se utilizará el método de separación de variables para encontrar una primera solución a la ecuación de calor y por último se mostrara un resultado referente a la regularidad de la solución encontrada.

En el segundo capítulo, nos alejaremos del fenómeno físico representado por la ecuación de calor para estudiar una solución al problema en dimensiones mayores haciendo uso de la transformada de Fourier para el caso no periódico. Es posible estudiar la existencia y unicidad de las soluciones encontradas por este método, siendo resultados que bajo las hipótesis adecuadas se pueden aplicar a las soluciones encontradas en el primer capítulo. Para finalizar este capítulo se presenta un último método llamado reflexión el cual le da mayor alcance a cada uno de los resultados estudiados con anterioridad.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Deducción de la Ecuación de Calor en una Dimensión

Cuando consideramos un objeto en 3 dimensiones a través del cual puede "fluir" el calor la temperatura u varía respecto al tiempo t y las coordenadas (x, y, z) en el espacio. Para describir de forma explícita la función u haremos una reconstrucción del trabajo realizado por el físico-matemático Jean-Baptiste Fourier quien afirma que por medio de la consideración de algunos principios físicos propios de la temperatura y el flujo de calor en un objeto, es posible mostrar que la función u debe satisfacer la llamada *ecuación de calor*

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t, \tag{1.1}$$

donde α depende de la densidad del objeto, su conductividad térmica y el calor específico del material del que esta hecho el objeto. Esta reconstrucción la realizaremos para el caso unidimensional recreando el enfoque expuesto por [Simmons, 1991, p. 311].

Para empezar debemos tener en cuenta los siguientes principios físicos:

(a) El flujo de calor se dice decreciente, cuando este va de una región caliente a una menos caliente.

(b) La rapidez de cambio con la cual fluye el calor a través de un área es proporcional a el área y a la rapidez de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en dirección perpendicular al área. (Este factor de proporcionalidad se denota por k y es llamado *conductividad térmica* de la sustancia.)

(c) La cantidad de calor ganado o perdido por un objeto cuando su temperatura cambia, es decir, el cambio en la energía térmica, es proporcional a la masa del objeto y al cambio de temperatura. (Este factor de proporcionalidad se denota por c y es llamado *calor específico* de la sustancia.)

Ahora consideremos el flujo de calor dentro de una barra cilíndrica delgada cuya sección transversal tiene área A (Figura 1.1). Si la superficie está completamente aislada el flujo de calor no circulara fuera de la barra y la temperatura solo depende de la posición sobre el eje x y el tiempo t. Es decir, $u = u(x,t)$. Además, supongamos que no se está generando calor dentro de la barra así que la cantidad de calor ganada depende sólo del flujo de calor que pasa a través de las caras de la barra.

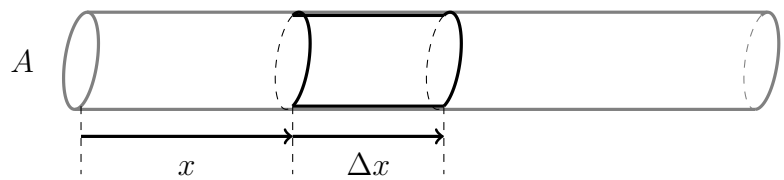


Figura 1.1: Esquema Barra Cilíndrica.

Estudiaremos la rapidez de cambio de la cantidad de calor almacenada en el trozo de barra dado por las posiciones x y $x+\Delta x$. Si denotamos la densidad de este trozo de la barra por ρ, entonces la masa de dicho trozo estará dada por

$$\Delta m = \rho A \Delta x.$$

Adicional a esto, si denotamos por Δu el cambio de temperatura en el punto x en un pequeño intervalo de tiempo Δt, entonces por (c) se tiene que la cantidad de calor almacenada en este trozo durante este periodo de tiempo estará dada por

$$\Delta H = c\Delta m \Delta u = c\rho A \Delta x \Delta w.$$

Con lo anterior, la rapidez con la que el calor es almacenado es aproximadamente

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c\rho A \Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Ahora, por (b) se tiene que la rapidez en que fluye el calor a través de la cara izquierda está dada por

$$kAu_x|_x.$$

De igual forma, para la cara derecha se tiene que

$$kAu_x|_{x+\Delta x}.$$

Así la variación total en el trozo de barra considerado será

$$kAu_x|_{x+\Delta x} - kAu_x|_x. \tag{1.3}$$

Combinando las ecuaciones (1.2) y (1.3) se tiene

$$\frac{k}{c\rho}\left(\frac{u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x}{\Delta x}\right) = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Haciendo $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$ se obtiene

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \tag{1.4}$$

donde $\alpha^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, (1.4) es la ecuación de calor para el caso unidimensional. Así que el problema de valores iniciales estaría dado por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t & u \in C^2((0,l)\times(0,\infty)) \cap C([0,l]\times[0,\infty)) \\ u(x,0) = \mu(x) & x \in [0,l] \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}, \tag{1.5}$$

donde $\mu(x)$ es una función continua sobre $[0,l]$ la cual representa la distribución inicial de la temperatura sobre la barra y l es la longitud de la barra.

1.2. Una Solución de la Ecuación de Calor Unidimensional

En la sección anterior encontramos la forma de la ecuación de calor para el caso unidimensional. Ahora procederemos a encontrar soluciones a ese problema siguiendo la idea en [Iorio and Magalhães, 2001, Sec. 1.4], consideremos sin ninguna perdida de generalidad que la longitud de la barra es $l = \pi$ y la constante $\alpha = 1$. Así, el problema (1.5) queda reescrito de la siguiente manera

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & u \in C^2((0,\pi)\times(0,\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,\infty)) \\ u(x,0) = \mu(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}, \tag{1.6}$$

en principio consideraremos que $\mu \in C([0,\pi])$, a medida que vayamos avanzando en el proceso se irán imponiendo más condiciones sobre μ.

Para encontrar las soluciones deseadas haremos uso del *método de varíables separable*. Suponemos que las soluciones a (1.6) son de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1.7}$$

al aplicar las condiciones de frontera de (1.6) a (1.7) obtenemos

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0.$$

Si $X(0) \neq 0$ o $X(\pi) \neq 0$ entonces $T(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, lo que implica que $u(x,t)$ sería idénticamente cero en la región considerada. Así que es necesario que $X(0) = X(\pi) = 0$. Aplicando (1.7) a la EDP en (1.6) se obtiene

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t),$$

lo anterior nos implica que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}. \tag{1.8}$$

Como x y t son variables independientes y cada lado de (1.8) depende sólo de una de estas variables, estos deben ser iguales a un valor constante λ, es decir,

$$X''(x) = -\lambda X(x) \tag{1.9}$$

y

$$T'(t) = -\lambda T(t) \tag{1.10}$$

Antes de hallar las soluciones a este par de ecuaciones, nótese que si $X(x)$ es solución de la ecuación (1.9) entonces $X \in C^2(0,\pi)$. Pero como X'' difiere de X por un factor constante, entonces $X'' \in C^2(0,\pi)$, lo que implica que $X \in C^4(0,\pi)$. En consecuencia $X'' \in C^4(0,\pi)$, continuando este razonamiento de forma inductiva podemos concluir que $X \in C^\infty(0,\pi)$. Lo mismo sucede para las soluciones de (1.10), sus soluciones son de clase $C^\infty(0,\infty)$. En conclusión, si $u(x,t) = X(x)T(t)$, $u(x,t) \in C^\infty((0,\pi)\times(0,\infty))$.

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) son EDO a las cuales podemos encontrar soluciones explícitas de forma sencilla. En el caso de (1.9) su polinomio característico es

$$m^2 + \lambda = 0.$$

Entonces se tiene que $m = \pm\sqrt{-\lambda}$, lo cual hace que consideremos tres casos diferentes para $-\lambda$.

Caso 1. Cuando $-\lambda = 0$. En este caso las soluciones serán de la forma $X(x) = ax + b$. Pero al aplicar la condición $X(0) = X(\pi) = 0$ se tendría que $a = b = 0$, lo que resulta en la solución trivial, por tanto $X(x) \equiv 0$

Caso 2. Cuando $-\lambda > 0$. En este caso las soluciones son de la forma

$$X(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$, al aplicar de nuevo la condición $X(0) = 0$ se tiene que $a = -b$ y al aplicar la condición $X(\pi) = 0$ tenemos

$$a\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0.$$

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo anterior nos implica que $a = 0$. Lo cual nuevamente resulta en la solución trivial.

Caso 3. Cuando $-\lambda < 0$. Para este tipo de valores las soluciones son de la forma

$$X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x.$$

Procediendo de forma similar al caso anterior, se tiene que $X(0) = 0$ implica $a = 0$ y $X(\pi) = 0$ implica

$$b\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi = 0,$$

sin embargo esta última igualdad es cierta si $\sqrt{\lambda} = n$ con $n \in \mathbb{N}$. Es así que si se toma $\lambda = n^2$ entonces las soluciones estarían dadas por

$$X_n(x) = b_n \operatorname{sen} nx \quad \text{con } n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Al utilizar el método de separación de variables para EDO en (1.10), encontramos que sus soluciones son de la forma

$$T(t) = ce^{-\lambda t}$$

con $c \neq 0$. Teniendo en cuenta que anteriormente consideramos $\lambda = n^2$ tendríamos soluciones de la forma

$$T_n(t) = c_n e^{-n^2 t}. \tag{1.12}$$

Combinando (1.11) y (1.12) tenemos una familia de soluciones dada por

$$b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

El principio de superposición nos dice que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{k} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

también es una solución de (1.6). Así que una solución más general sería

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx, \tag{1.13}$$

pero para afirmar esto con toda certeza, primero debemos saber como es la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y segundo debemos garantizar que la serie tiene las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de cada uno de sus términos. A continuación procedemos a dar solución a estos problemas, bajo el supuesto de que esta serie efectivamente es solución.

Teniendo en cuenta la condición inicial en (1.6) tenemos que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe satisfacer la siguiente igualdad

$$u(x,0) = \mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \tag{1.14}$$

esto quiere decir que, $\mu(x)$ debe ser representada por una *serie senoidal de Fourier* sobre $[0,\pi]$. Para encontrar una forma de calcular los términos b_n necesitamos del siguiente resultado.

Proposición 1.1. *Consideremos $X_n(x)$ y $X_m(x)$ definidas como en (1.11) con $b_n = 1$, entonces*

$$\int_0^{\pi} X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & si\ m = n \end{cases} \tag{1.15}$$

Demostración. Si $m \neq n$ entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} X_m(x) X_n(x) dx &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \cos x(m-n) dx - \int_0^{\pi} \cos x(m+n) dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x(m-n)}{m-n} - \frac{\operatorname{sen} x(m+n)}{m+n}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $m = n$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi X_m(x)X_n(x)dx &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mxdx \\ &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2mx}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2mx}{2m}\right)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

□

Ahora, si multiplicamos por $\operatorname{sen} mx$ e integramos sobre $[0,\pi]$ en (1.14) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mu(x)\operatorname{sen} mxdx &= \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx \sin mx\right] dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty b_n \int_0^\pi \sin nx \sin mxdx \\ &= \frac{\pi}{2} b_m,\end{aligned}$$

lo que implica que

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mu(x)\operatorname{sen} mxdx. \tag{1.16}$$

Ahora que podemos expresar de forma explícita la sucesión $\{b_n\}$, sólo nos queda mostrar que (1.13) es continua y posee derivadas de todos los ordenes. Para eso haremos uso del siguiente teorema cuya demostración está en [Apostol, 1976, pag. 278].

Teorema 1.1. *Supongamos que cada término de $\{f_n\}$ es una función real continua finita en cada punto de un intervalo abierto (a,b). Supongamos que para un punto x_0, por lo menos, de (a,b) la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $f_n' \to g$ uniformemente en (a,b). Entonces:*

(a) Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en (a,b).

(b) Para cada x de (a,b) la derivada f_n' existe y es igual a $g(x)$.

Ahora podemos demostrar la siguiente proposición siguiendo la idea presente en [Iorio and Magalhães, 2001, pag. 42].

Proposición 1.2. *Sea $\mu(x) \in C[0,\pi]$ tal que*

$$\mu(0) = \mu(\pi) = 0$$

y sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por (1.16). Entonces la serie (1.13) y sus derivadas término a término de todos los ordenes convergen absoluta y uniformemente sobre $[0,\pi]\times[T,\infty)$, para todo $T > 0$. En particular la función $u(x,t)$ definida en (1.13) pertenece a $C^\infty([0,\pi]\times(0,\infty))$. Además satisface la EDP y las condiciones de frontera en (1.6).

Demostración. Sean $i, j \geq 0$ y consideremos la derivada parcial de cada uno de los terminos de la serie (1.13) dada por

$$D_x^i D_t^j \left(b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \right) = \begin{cases} (-1)^j b_n n^{2j+i} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx & i \cong 0 (\mathrm{mod} 4) \\ (-1)^j b_n n^{2j+i} e^{-n^2 t} \cos nx & i \cong 1 (\mathrm{mod} 4) \\ (-1)^{j+1} b_n n^{2j+i} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx & i \cong 2 (\mathrm{mod} 4) \\ (-1)^{j+1} b_n n^{2j+i} e^{-n^2 t} \cos nx & i \cong 3 (\mathrm{mod} 4) \end{cases}$$

teniendo en cuenta la ecuación (1.16) se tiene que

$$|b_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\mu(x)| dx = K$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \left| D_x^i D_t^j \left(b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \right) \right| &\leq K |(-n)^{2j+i} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx| \\ &\leq K n^{2j+i} e^{-n^2 T}. \end{aligned}$$

Para aplicar el *criterio M de Weierstrass*, debemos ver la que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} K n^{2j+i} e^{-n^2 T} \tag{1.17}$$

converge. Utilizando el *criterio de la razón* tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^{2j+i} e^{-(n+1)^2 T}}{n^{2j+i} e^{-n^2 T}} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2j+i} e^{n^2 T - (n+1)^2 T} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2j+i} e^{-T(2n+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que demuestra que (1.17) converge. Para $i = j = 0$ tenemos la convergencia uniforme de la serie a la función $u(x,t)$. Para los demás valores de i y j las sumas parciales de estas derivadas convergen uniformemente a la serie

$$D_x^i D_t^j \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx.$$

Por otro lado, tenemos que

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-n^2) e^{-n2t} \operatorname{sen} nx = u_{xx}(x,t)$$

esto para todo $(x,t) \in [0,\pi] \times (T, \infty)$. Las condiciones de frontera también se satisfacen ya que

$$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} n\pi = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

El siguiente cololario nos muestra una forma de reescribir $u(x,t)$.

Corolario 1.1. *La función $u(x,t)$, con $(x,t) \in (0,\infty) \times [0,\pi]$, definida por (1.13) puede ser reescrita como*

$$u(x,t) = \int_0^\pi K(t,x,y)\mu(y)dy$$

donde

$$K(x,y,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} ny$$

Demostración. En principio

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx e^{-n^2 t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mu(y) \operatorname{sen} ny dy \right) e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \end{aligned}$$

como ya demostramos que (1.13) converge uniformemente en $[0,\pi] \times [T,\infty)$ para todo $T > 0$, es posible intercambiar la integral con la suma, lo que nos permite concluir que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^\pi \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} ny \right] \mu(y)dy \\ &= \int_0^\pi K(x,y,t)\mu(y)dy. \end{aligned}$$

□

A $K(x,y,t)$ se le conoce como el *núcleo del calor* asociado a (1.6).

1.3. Algunas Definiciones y Conceptos Necesarios

Los conceptos que se definirán a continuación, serán de gran utilidad para el desarrollo y deducción de algunos de los resultados que se presentaran en el siguiente capítulo.

1.3.1. Transformada de Fourier y Algunas Propiedades

Definición. Sea $g \in C_c^s(\mathbb{R}^n)$, la *transformada de Fourier* $\widehat{g}$ asociada a g esta dada por

$$\widehat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g(x)dx \tag{1.18}$$

donde $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$.

Proposición 1.3. *Sean $f, g \in C_c^s$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que*

$$(\widehat{\alpha f + g})(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(\widehat{\alpha f+g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left(\alpha f+g(\xi)\right)d\xi \\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi+\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi \\ &= \alpha\widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4. *Sea $g\in C_c^s(\mathbb{R}^n)$ y $k=1,2,\ldots,n$ entonces $\widehat{\partial_{x_k}g}=(i\xi_k)\widehat{g}$.*

Demostración. Consideremos $k=1,2,\ldots,n$ entonces

$$i\xi_k\widehat{g}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_k e^{-ix\cdot\xi}g(x)dx_k,$$

haciendo integración por partes con respecto a x_k tenemos

$$\begin{aligned}i\xi_k\widehat{g}(\xi) &= -e^{-ix\cdot\xi}g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi}\partial_{x_k}g(x)dx_k \\ &= \widehat{\partial_{x_k}g}(\xi).\end{aligned}$$

□

1.3.2. La Función $\vartheta_3(z,\tau)$

Las funciones theta son un conjunto de funciones muy usado en el trabajo con funciones elípticas y las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, son funciones cuyas variables son complejas y se expresan como una serie infinita de funciones exponenciales. Estas funciones fueron ampliamente estudiadas por Jacobi en su *Fundamental Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*. Ahí describió la mayoría de resultados conocidos sobre estas funciones los cuales darían pie a la teoría de funciones theta. Los resultados y definiciones sobre las funciones theta presentados en este texto están orientados por [Bellman, 1961] y [Whittaker and Watson, 1927, cap. 21].

Un tipo de función theta se puede definir como

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2t+2niz}, \tag{1.19}$$

donde z es una variable compleja la cual en principio puede tomar cualquier valor, mientras que t es un parámetro de valor complejo donde $\mathrm{Re}(t)>0$, ya que al considerar $t=\alpha+i\beta$ se tiene

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2(\alpha+i\beta)+2niz}\right|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e^{-n^2\alpha}\right|$$

que bajo la hipótesis de $\mathrm{Re}(t)>0$ implica la convergencia uniforme de $f(z)$ sobre todo el plano complejo. Ya que la función e^z tiene periodo $2\pi i$, entonces f tendrá periodo π. Dentro de este texto consideraremos a t como una variable compleja y no como un parámetro manteniendo $\mathrm{Re}(t)>0$.

Dentro de este conjunto de funciones nos interesara la función $\vartheta_3(z,\tau)$ la cual se define como

$$1 + 2q\cos 2z + 2q^4\cos 4z + 2q^9\cos 6z + \dots,$$

donde $q = e^{i\pi\tau}$. $\vartheta_3(z,t)$ cuenta con el siguiente resultado:

Teorema 1.2. *Sean $z,\tau \in \mathbb{C}$. La función $\vartheta_3(z,\tau)$ satisface*

$$\vartheta_3(z,\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{i\pi z^2/\tau} \vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right). \tag{1.20}$$

Tanto la demostración como la teoría necesaria para el desarrollo de está se encuentran en [Bellman, 1961]

Este resultado no es útil para reescribir la función $\vartheta_3(z,t)$ de forma similar a (1.19).

Consideremos la identidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i n y} dy, \tag{1.21}$$

donde $f \in C(\mathbb{R})$ y hace que la serie de la izquierda converja uniformemente sobre todo intervalo acotado en $\mathbb{R}$. Para obtener esta identidad definimos

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n),$$

ya que se cumple que $g(x) = g(x+1)$, entonces g es periódica y por tanto tendrá una expansión en serie de Fourier. Al calcular los coeficiente de Fourier correspondientes a g tenemos

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \end{aligned} \tag{1.22}$$

lo que implica (1.21). El siguiente teorema reune las condiciones bajo las cuales (1.21) es siempre válida

Teorema 1.3. *Supongamos que la función $f \in C(\mathbb{R})$, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge uniformemente en cualquier intervalo acotado, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge y la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|$ converge, donde a_k son los coeficientes de Fourier en (1.22). Entonces, las series en (1.21) existen y son iguales para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Ahora consideremos la función $f(x,t) = e^{-tx^2}$ con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(t) > 0$, veamos que esta función satisface las hipótesis del teorema anterior. Para empezar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t(x+n)^2} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{-t(x+n)^2} \right| < \infty,$$

ya que sin importar que valor tome x se tendrá que $\left| e^{-t(x+n)^2} \right| < 1$. Ahora veremos que $\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-tx^2} \right| dx$ converge, para ello consideremos $t = a + ib$ y así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Para verificar la tercera hipótesis se calculará la integral dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2+2xy} dx \tag{1.23}$$

haciendo la sustitución $u = \sqrt{t}x$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2+2xy} dx &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+\frac{2uy}{\sqrt{t}}} du \\ &= \frac{e^{y^2/t}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2} du \\ &= \frac{e^{y^2/t}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{y^2/t}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.22) y considerando $y = i\pi k$ en (1.23) se tiene

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2-2\pi ikx} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\pi^2 k^2/t}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\left| e^{-\pi^2 k^2/t} \right| < 1$ para todo $k \neq 0$, lo anterior implica

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2/t} < \infty.$$

En conclusión es posible usar el teorema para $f(x,t) = e^{-tx^2}$, lo que nos implica

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t(x+n)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2-2\pi iny} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inx-(\pi^2 n^2/t)}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Para encontrar una expresión en serie de la función $\vartheta_3(z,\tau)$ utilizando la identidad en (1.24) y las sustituciones

$$t = -i\pi\tau \qquad\qquad x = \frac{z}{\tau},$$

obtenemos por un lado

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t(x+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau\left(\frac{z}{\tau}+n\right)^2}$$

y en el otro

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x-(\pi^3 n^2/t)} &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-tx2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(xt+\pi i n)^2/t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{i\pi z^2/\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(z+n)^2/\tau},\end{aligned}$$

así que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau\left(\frac{z}{\tau}+n\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{i\pi z^2/\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(z+n)^2/\tau},$$

multiplicando a ambos lados por $\sqrt{-i\tau}$ lo anterior se convierte en

$$\sqrt{-i\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau\left(\frac{z}{\tau}+n\right)^2} = \sqrt{-i\tau} e^{i\pi z^2/\tau} \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(z+n)^2/\tau}.$$

Al tomar en la igualdad anterior

$$\vartheta_3(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(z+n)^2/\tau} \tag{1.25}$$

obtenemos

$$\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} e^{i\pi z^2/\tau} \vartheta_3(z,\tau),$$

que junto con el Teorema 1.2 nos implica que la función definida en (1.25) era la que se estaba buscando, donde $\mathrm{Im}(\tau) < 0$.

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE CALOR EN $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se hará una reconstrucción de la teoría expuesta por [John, 1981, p. 206-221]

2.1. El Problema de Valor Inicial

Podemos escribir el problema de valor inicial para (1.5) en el caso de $\mathbb{R}^n$ como

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cup C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Es posible obtener una *solución formal* usando la *transformada de Fourier* definida por (1.18). Consideremos una solución $u(x,t)$ la cual puede ser escrita como

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi,t) d\xi,$$

teniendo en cuenta que

$$\partial_t u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) d\xi$$

y como $i\xi_k \widehat{g} = \widehat{\partial_k g}$ se tiene

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_k} u(x,t) &= \partial^2_{x_k} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi,t) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (i\xi_k)^2 \widehat{u}(\xi,t) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\partial^2_{x_k} u}(\xi,t) d\xi. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \triangle_x)u(x,t) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left[\partial_t\widehat{u}(\xi,t)d\xi - \widehat{\triangle_x u}(\xi,t)\right]d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left[\partial_t - \sum_{k=1}^{n}(i\xi)^2\right]\widehat{u}(\xi,t)d\xi,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

por su parte

$$
u(x,0) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi,
$$

como $u(x,t)$ es solución de (2.1) entonces

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left[\partial_t - \sum_{k=1}^{n}(i\xi)^2\right]\widehat{u}(\xi,t)d\xi = 0
$$

donde $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$. Esto nos permite plantear el siguiente problema de valor inicial el cual solo depende de t

$$
\begin{cases}
\widehat{u}_t - \sum_{k=1}^{n}(i\xi_k)^2\widehat{u} = 0 & \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0 \\
\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) & \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

Si $Z(\xi,t)$ es una solución del problema ordinario de condiciones iniciales

$$
\begin{cases}
\left[\partial_t - \sum_{k=1}^{n}(i\xi_k)^2\right]Z(\xi,t) = 0 & \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0 \\
Z(\xi,0) = 1 & \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{cases}
$$

la función $Z(\xi,t)\widehat{f}(\xi)$ será solución de (2.3), así que la función

$$
u(x,t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{x\cdot\xi}Z(\xi,t)\widehat{f}(\xi)d\xi
$$

es solución de (2.1). Si tomamos $Z(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t}$ la función

$$
u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi - |\xi|^2 t}\widehat{f}(\xi)d\xi \tag{2.4}
$$

y tomando $\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy$, (2.4) se convierte en

$$
u(x,t) = \int_{\mathbb{R}n} K(x,y,t)f(y)dy, \tag{2.5}
$$

donde

$$
K(x,y,t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi - |\xi|^2 t}d\xi. \tag{2.6}
$$

La integral en (2.6) se puede resolver haciendo uso de la sustitución

$$
\xi = \frac{i(x-y)}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\eta.
$$

De donde

$$i(x-y)\cdot\xi - |\xi|^2 t = -\frac{|x-y|^2}{4t} - |\eta|^2.$$

Así $K(x,y,t)$ queda reescrita como

$$K(x,y,t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}-|\eta|^2}t^{-n/2}\right)d\eta.$$

Haciendo uso de la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}d\eta = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds\right)^n = \pi^{n/2} \tag{2.7}$$

obtenemos

$$K(x,y,t) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-|x-y|^2/4t}. \tag{2.8}$$

Las expresiones en (2.6) y (2.8) representan el *núcleo del calor* en $\mathbb{R}^n$, el siguiente lema muestra algunas propiedades de K.

Lema 2.1. *Sea $K(x,y,t)$ definida por (2.6) o (2.8), entonces:*

(a) $K(x,y,t)\in C^\infty$ *para* $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$ *y* $t>0$.

(b) $(\partial_t - \triangle_x)\,K(x,y,t) = 0$ *para todo* $t>0$.

(c) $K(x,y,t)>0$ *para todo* $t>0$.

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)dy = 1$ *para todo* $x\in\mathbb{R}^n$ *y* $t>0$.

(e) Para todo $\delta>0$ *se tiene que*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)dy = 0$$

uniformemente para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Demostración. Para demostrar (a) tomemos (2.8) y teniendo en cuenta que $e^z\in C^\infty(\mathbb{R})$ y $-|x-y|2/4t$ tiene derivadas continuas de todos los ordenes entonces $K(x,y,t)\in C^\infty$.

Para (b), al considerar (2.6) se tiene que

$$\partial_t K(x,y,t) = -|\xi|^2\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi-|\xi|^2 t}d\xi$$

y

$$\triangle_x K(x,y,t) = -|\xi|^2\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi-|xi|^2 t}d\xi,$$

lo que nos implica que

$$(\partial_t - \triangle_x)K(x,y,t) = 0.$$

Considerando (2.8) y teniendo en cuenta que $e^{-|x-y|^2/4t}>0$ para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$ y $t>0$ es posible concluir (c).

Ahora, considerando la sustitución $y = x + (4t)^{1/2}\eta$ en (2.8), tenemos que

$$\int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)dy = \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} d\eta.$$

Si tomamos $\delta = 0$ y por (2.7), podemos concluir (d). Para demostrar (e) sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} d\eta \right| < \epsilon.$$

Dado que para todo $z > 0$ existe M tal que $z^{n+1} \leq Me^{z^2}$ (con $n \in \mathbb{N}$) tomemos $\delta' = \dfrac{(\epsilon\delta)^2\pi^n}{M^2 4}$ y $|t| < \delta'$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} d\eta \right| &\leq \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} d\eta \\ &\leq \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} \frac{M}{|\eta|^{n+1}} d\eta \end{aligned}$$

tomando $|\eta| = r$ y cambiando a coordenadas hiperesféricas tenemos

$$\begin{aligned} \pi^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/2\sqrt{t}} \frac{M}{|\eta|^{n+1}} d\eta &\leq \pi^{-n/2} M \int_{r>\delta/2\sqrt{t}} r^{-2} dr \\ &= \pi^{-n/2} M \frac{2\sqrt{t}}{\delta} \\ &< \pi^{-n/2} M \frac{2\sqrt{\delta'}}{\delta} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir (e). □

Considerar a f en (2.1) como una función continua y acotada sobre todo $\mathbb{R}^n$ nos proporciona el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sea $f(x)$ continua y acotada sobre todo $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{R^n} K(x,y,t) f(y) dy \\ &= (4\pi t)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y) dy \end{aligned} \tag{2.9}$$

pertenece a C^∞ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, y satisface $u_t = \triangle u$ para todo $t > 0$. Además u tiene valor inicial f, en el sentido de que cuando extendemos u por $u(x,0) = f(x)$ a $t = 0$, entonces u es continua para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$.

Demostración. El hecho de que la función $e^{-|x-y|^2/4t}$ sea C^∞ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, más la posibilidad de poder derivar respecto al signo de la integral nos permiten concluir que u es C^∞ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y

$t > 0$. Además

$$\begin{aligned}(\partial_t - \triangle_x)u(x,y,t) &= (4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)f(y)dy \\ &= (4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t - \triangle_x)K(x,y,t)f(y)dy \\ &= 0\end{aligned}$$

así que $u_t = \triangle u$ para todo $t > 0$.

Ahora veremos que la extensión de u es continua en $t = 0$, que $u(x,t) \to f(\xi)$ cuando $x \to \xi$ y $t \to 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ para $|y - \xi| < 2\epsilon$ y sea $M = \sup|f(y)|$. Entonces para $|x - \xi| < \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(\xi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)(f(y) - f(\xi)dy\right| \\ &\leq \int_{|y-x|<\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)dy| + \int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)|dy \\ &\leq \int_{|y-\xi|<2\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)|dy + 2M\int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)dy \\ &\leq \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)dy + 2M\int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)dy \\ &< 2\epsilon\end{aligned}$$

para un t lo suficientemente pequeño. □

Ejemplo 1. Si consideramos el problema de valores iniciales en (2.1) para $n = 1$ y donde f esta dada como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

ya que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ el teorema anterior nos garantiza que la solución a este problema esta dada por

$$\begin{aligned}u(x,t) &= (4\pi t)^{-n/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|^2/4t}f(y)dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t}dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\sqrt{4t}}\right)^2}dy\end{aligned}$$

haciendo la sustitución $v = \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$ lo anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}u(x,t) &= -\pi^{-1/2}\int_{\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{-\infty} e^{-v^2}dv \\ &= \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-v^2}dv,\end{aligned}$$

ya que este planteamiento es váido para $x > 0$ entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \pi^{-1/2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-v^2}dv + \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-v^2}dv\right) \\ &= \pi^{-1/2}\left(\frac{\pi^{1/2}}{2} + \frac{2\pi^{1/2}}{2\pi^{1/2}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-v^2}dv\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-v^2}dv\right), \end{aligned}$$

el termino $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-v^2}dv$ puede ser reescrito como $\phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)$, donde ϕ representa la "función error de Gauss", así que la solución al problema estaría dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right].$$

Anotación. Dar una solución de la ecuación

$$u_t = \mu u_{xx} \tag{2.10}$$

hace posible definir una solución de otras ecuaciones cuyas caracteristicas pueden ser bastante diferentes a las de (2.10). Por ejemplo, consideremos la ecuación de Burgers dada por

$$\theta_t + \theta\theta_x = \mu\theta_{xx} \text{ para } t > 0 \tag{2.11}$$

y sea u una solución de (2.10), entonces la función $\theta = \frac{-2\mu u_x}{u}$ será solución de la ecuación de Burgers. Para ver esto calculamos cada una de las derivadas involucradas en la ecuación

$$\begin{aligned} \theta_t &= \frac{2(\mu u_x u_t - \mu u u_{xt})}{u^2} \\ \theta_x &= \frac{2(\mu u_x^2 - u u_t)}{u^2} \\ \theta_{xx} &= \frac{6u u_x u_t - 2u^2 u_{xt} - 4\mu u_x^3}{u^3}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \theta_t + \theta\theta_x - \mu\theta_{xx} = \theta_t &= \frac{2(\mu u_x u_t - \mu u u_{xt})}{u^2} - \frac{2\mu u_x}{u}\left[\frac{2(\mu u_x^2 - u u_t)}{u^2}\right] - \mu\left(\frac{6u u_x u_t - 2u^2 u_{xt} - 4\mu u_x^3}{u^3}\right) \\ &= \frac{2\mu u u_x u_t - 2\mu u^2 u_{xt} - 4\mu^2 u_x^3 + 4\mu u u_x u_t - 6\mu u u_x u_t + 2\mu u^2 u_{xt} + 4\mu^2 u_x^3}{u^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Principio del Máximo y Unicidad

En el caso de la ecuación de calor es posible enunciar una versión del principio del máximo. Para esto, consideremos una abierto acotado $\omega \subset \mathbb{R}^n$ y $T > 0$ los cuales formarán el "cilindro" $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definido como

$$\Omega = \{(x,t) | x \in \omega, 0 < t < T\},$$

la frontera $\partial\Omega$ la podemos considerar como la unión de dos conjuntos disyuntos $\partial'\Omega$ (que depende de T) y $\partial''\Omega$ (Figura 2.1) donde

$$\partial'\Omega = \{(x,t)|x \in \partial\omega, 0 \leq t \leq T \text{ o } x \in \omega, t = 0\}$$
$$\partial''\Omega = \{(x,t)|x \in \omega, t = T\},$$

en el caso de un problema elíptico de segundo orden el máximo de la solución en Ω se encontrará sobre $\partial\Omega$, para el caso de la ecuación de calor este máximo se encontrará sobre $\partial'\Omega$.

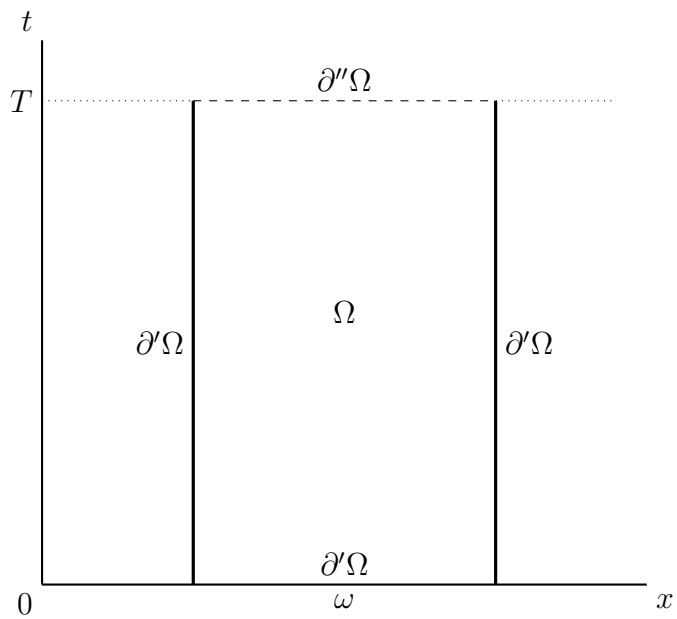


Figura 2.1: Conjunto $\overline{\Omega}$.

Teorema 2.5 (Principio del Máximo para la Ecuación de Calor)**.** *Sea u continua en $\overline{\Omega}$ y tanto u_t como $u_{x_j x_k}$ existen y son continuas sobre Ω y satisface $u_t - \triangle u \leq 0$. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial'\Omega} u. \tag{2.12}$$

Demostración. Primero supongamos que $u_t - \triangle u < 0$ sobre Ω. Sea Ω_ϵ con $0 < \epsilon < T$ el conjunto

$$\Omega_\epsilon = \{(x,t)|x \in \omega, 0 < t < T - \epsilon\}.$$

Dado que $u \in C^0(\Omega)$ el teorema de optimización de Weierstrass garantiza la existencia de un punto $(x,t) \in \overline{\Omega}_\epsilon$ tal que

$$u(x,t) = \max_{\overline{\Omega}_\epsilon} u(x', t^prima).$$

Si suponemos que $(x,t) \in \Omega_\epsilon$ entonces se debe tener que $u_t = 0$, además por el criterio de la segunda derivada $\triangle u \leq 0$, lo que contradice que $u_t - \triangle u < 0$. Si $(x,t) \in \partial''\Omega_\epsilon$ entonces se debe tener que $u_t \geq 0$ y

$\triangle u \leq 0$, lo que implica $u_t - \triangle u \geq 0$, obteniendo una contradicción igual a la anterior. Así que $(x,t) \in \partial'\Omega_\epsilon$ y como $\partial'\Omega_\epsilon \subset \partial'\Omega$ entonces

$$\max_{\overline{\Omega}_\epsilon} u = \max_{\partial'\Omega_\epsilon} u \leq \max_{\partial'\Omega} u.$$

Ya que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ entonces $\max_{\overline{\Omega}} u$ existe, por otro lado, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega}$ con $t < T$ existe un $\overline{\Omega}_\epsilon$ tal que $(x,t) \in \overline{\Omega}_\epsilon$ lo que implica la existencia de un ϵ' tal que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}_{\epsilon'}} = \max_{\partial'\Omega_{\epsilon'}} u \leq \max_{\partial'\Omega} u,$$

como $\partial'\Omega \subset \overline{\Omega}$ entonces

$$\max_{\partial'\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u,$$

lo que implica (2.12).

A continuación, supongamos que $u_t - \triangle u \leq 0$ en Ω. Definamos

$$\nu(x,t) = u(x,t) - kt$$

con k una constante positiva. Se tiene que $\nu_t - \triangle\nu = u_t - \triangle u - k < 0$, en virtud del análisis realizado en la primera parte, se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}}(\nu + kt) \leq \max_{\overline{\Omega}} \nu + kT = \max_{\partial'\Omega} \nu + kT \leq \max_{\partial'\Omega} u + kT.$$

Haciendo $k \to 0$ y usando nuevamente el hecho de que $\partial^{'}\Omega \subset \Omega$ se concluye (2.12). □

La utilidad de este principio del máximo se ve reflejada en el siguiente teorema sobre unicidad.

Teorema 2.6. *Sea $u \in C^0(\overline{\Omega})$ y tanto u_t como u_{x_j,x_k} existen y son continuas sobre Ω. Entonces u esta únicamente determinada en $\overline{\Omega}$ por el valor de $u_t - \triangle u$ en Ω y de u en $\partial'\Omega$.*

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 satisfacen las hipótesis requeridas y que no son idénticamente iguales en $\overline{\Omega}$, supongamos también que $(\partial_t - \triangle)\, u_1 = (\partial_t - \triangle)\, u_2 = \alpha$ sobre Ω y $u_1 = u_2 = \beta$ sobre $\partial'\Omega$, donde α y β son los valores mencionados por el teorema no necesariamente constantes, entonces se tiene que $\partial_t - \triangle(u_1 - u_2) = 0$ sobre Ω y $u_1 - u_2 = 0$ sobre $\partial'\Omega$. Tomando $u = u_1 - u_2$, tanto u como $-u$ satisfacen las hipótesis del teorema 2.5 sobre Ω lo que implica

$$\max_{\partial'\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u = 0 = \max_{\partial'\Omega} (-u) = \max_{\overline{\Omega}} (-u),$$

como u y $-u$ tiene el mismo máximo sobre $\overline{\Omega}$ entonces $u = 0$, así que $u_1 = u_2$ sobre todo $\overline{\Omega}$ lo que es una contradicción. En conclusión, la función u esta únicamente determinada por las condiciones sobre Ω y $\partial'\Omega$. □

Teorema 2.7. *Sea u una función continua para $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq t \leq T$, supongamos que las derivadas u_t y $u_{x_j x_k}$ existen y son continuas para $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 < t < T$, y satisface que*

$$\begin{aligned} &u_t - \triangle u \leq 0 \quad \textit{para } x \in \mathbb{R}^n \textit{ y } 0 < t < T \\ &u(x,t) \leq M e^{a|x|^2} \quad \textit{para } x \in \mathbb{R}^n \textit{ y } 0 < t < T \\ &u(x,0) = f(x) \quad \textit{para } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Entonces

$$u(x,t) \leq \operatorname*{máx}_z f(z) \quad \textit{para } x \in \mathbb{R}^n \textit{ y } 0 < t < T. \tag{2.13}$$

Demostración. Es suficiente mostrar (2.13) bajo la suposición de que $4aT < 1$. Teniendo en cuenta que siempre es posible dividir el intervalo $[0,T]$ en partes iguales, para este caso cada una de estas partes tendrá longitud $\tau < 1/4a$, así que en total habrán T/τ particiones del intervalo $[0,T]$, para cada una de las particiones se tiene que si$k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$ entonces

$$u(x,t) \leq \sup_y u(y,k\tau) \leq \sup_y u(y,0).$$

Asumamos que $4aT < 1$, es posible encontrar un $\epsilon > 0$ tal que

$$4a(T+\epsilon) < 1. \tag{2.14}$$

Fijando $y \in \mathbb{R}^n$ podemos tomar una constante $\mu > 0$ y definir la siguiente función

$$\nu_\mu(x,t) = u(x,t) - \mu(4\pi(T+\epsilon-t))^{-n/2} exp[|x-y|^2/4(t+\epsilon-t)]$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$ y$0 \leq t \leq T$. Teniendo en cuenta (2.8) y tomando $|x-y|^2 = (x-y)\dot{(}x-y)$ la función se puede reescribir como

$$\nu_\mu(x,t) = u(x,t) - \mu K(ix, iy, T+\epsilon-t). \tag{2.15}$$

Ya que $K_t = \triangle K$ para cualquier x, y y t complejos con $t \neq 0$ podemos afirmar que

$$\partial_t \nu_\mu - \triangle \nu_\mu = u_t - \triangle u \leq 0. \tag{2.16}$$

Consideremos el cilindro "circular"

$$\Omega = \{(x,t) | \, |x-y| < \rho, 0 < t < T\}$$

de radio ρ. Por el teorema 2.5

$$\nu_\mu(y,t) \leq \operatorname*{máx}_{\partial'\Omega} \nu_\mu. \tag{2.17}$$

Tomando $t = 0$ se tiene $\mu K(ix, iy, T+\epsilon) > 0$, así que

$$\nu_\mu(x,0) \leq u(x,0) \leq \sup_z f(z).$$

Por otro lado, si consideramos la parte curva de $\partial'\Omega$ dada por los (x,t) con $|x-y|=\rho$ y $0\leq t\leq T$ por (2.15), (2.14) y las hipótesis sobre $u(x,y)$

$$\begin{aligned}\nu_\mu(x,t) &\leq Me^{a|x|^2}-\mu(4\pi(T+\epsilon-t))^{-n/2}exp[\rho^2/4(t+\epsilon-t)]\\ &\leq Me^{a(|y|+\rho)^2}-\mu(4\pi(T+\epsilon))^{-n/2}e^{\rho^2/4(t+\epsilon)}\\ &\leq \sup_z f(z)\end{aligned}$$

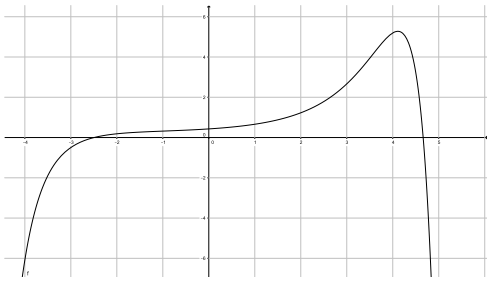
para un ρ tan grande como sea necesario. Esto nos permite concluir que

$$\operatorname*{máx}_{\partial'\Omega}\nu_\mu \leq \sup_z f(z).$$

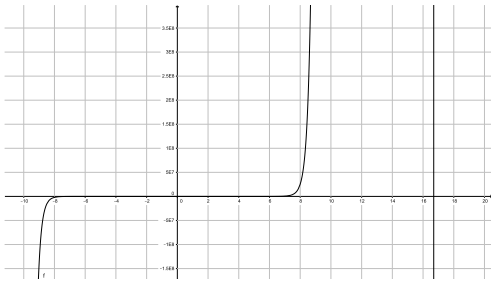
Lo anterior junto con (2.15) y (2.17) implica

$$\nu_\mu(y,t)=u(y,t)-\mu(4\pi(T+\epsilon-t))^{-n/2}\leq \sup_z f(z).$$

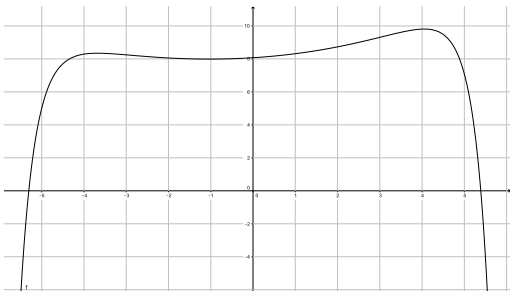
haciendo $\mu\to 0$ nosotros obtenemos el resultado deseado. □



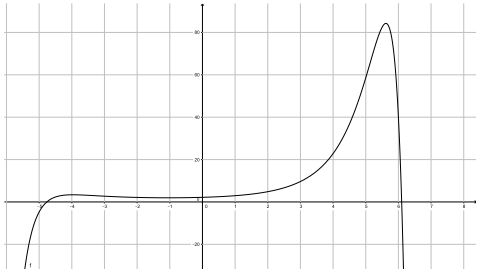
$M=0{,}5$, $a=0{,}13$ y $\mu=0{,}5$



$M=0{,}5$, $a=0{,}22$ y $\mu=0{,}8$



$M=8$, $a=0{,}01$ y $mu=0{,}01$



$M=2$, $a=0{,}1$ y $\mu=0{,}1$

Figura 2.2: Gráficos para diferentes valores de M,μ y a

Anotación. La razón por la cual se afirma en la demostración anterior que

$$Me^{a(|y|+\rho)^2}-\mu(4\pi(T\epsilon))^{-n/2}e^{\rho^2/4(t+\epsilon)}\leq \sup_z f(z) \tag{2.18}$$

para un ρ lo suficientemente grande se puede verificar de forma gráfica. Consideremos la parte de la izquierda en (2.18) como una función de ρ, tomando $T + \epsilon = |y| = n = 1$ la figura 2.2 muestra el comportamiento para diferentes valores de M, μ y a, recordando que en la demostración $a < 1/4(T + \epsilon)$. Es posible observar que el número de puntos críticos varia según cual sea la combinación de valores de cada uno de los parámetros, eventualmente sin importar que tan crezca la función siempre habrá un valor de ρ a partir del cual los valores de la función empiezan a decaer rápidamente. Es por esta razón que sin importar cual sea el valor de $\sup_z f(z)$ siempre sera posible escoger un valor de ρ para el cual se satisfaga (2.18).

2.3. Un Problema Mixto

Tomemos $n = 1$ y sea $u(x, t)$ una solución de $u_t = u_{xx}$ sobre los (x, t) tal que

$$0 < x < L \quad \text{y} \quad 0 < t \tag{2.19}$$

Para este caso se quiere que u satisfaga las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para } t > 0 \tag{2.20}$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < L. \tag{2.21}$$

Este problema ya fue solucionado en el primer capitulo haciendo uso del método de separación de variables para EDP para $L = \pi$. En esta sección lo que se quiere es encontrar una solución por *reflexión*, este método consiste en considerar sólo los valores de f sobre el intervalo $(0, L)$ ignorando los valores de f fuera de este intervalo, luego la función f es extendida de tal manera que se satisfagan las siguientes igualdades

$$f(x) = -f(-x) \qquad\qquad f(x) = -f(2L - x). \tag{2.22}$$

La igualdad $f(x) = -f(-x)$ nos permite definir f sobre el intervalo $(-L, 0)$ y la igualdad $f(x) = -f(2L-x)$ extiende a f al intervalo $(L, 2L)$, así que f ya esta definida sobre los intervalos $(-L, 0)$, $(0, L)$ y $(L, 2L)$, repitiendo el proceso anterior f quedaría definida para todo los intervalos de la forma $(kL, (k + 1)L)$ con $k \in \mathbb{Z}$. La Figura 2.3 ilustra el comportamiento de la extensión de f. Como resultado de este proceso las funciones $f(x)$ y $f(L - x)$ son impares, por lo general la función f tendrá discontinuidades en todos los puntos de la forma $x = kL$ ya que $\lim_{x \to kL^-} f(x) \neq \lim_{x \to kL^+} f(x)$ a menos que $f(0) = f(L) = 0$.

Haciendo uso de la extensión de f podemos resolver el problema de valores iniciales (2.1) usando el teorema 2.4. La función $u(x, y)$ resultante satisface la condición inicial (2.21) y ya que las funciones $u(x, t)+u(-x, t)$ y $u(x, t) + u(2L - x, t)$ satisfacen (2.20), el teorema 2.6 nos permite concluir que $u(x, t)$ también satisface (2.20).

Para definir de forma clara la extensión de f consideremos la función ϕ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ 0 & \text{para } x \notin (0, L). \end{cases}$$

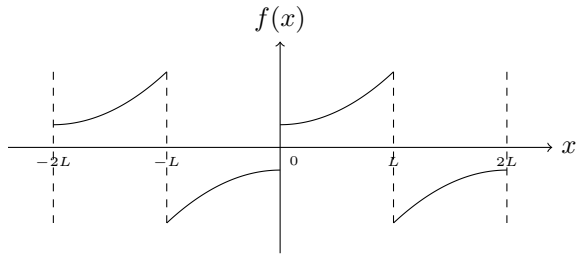


Figura 2.3: Ejemplo del comportamiento de la extensiòn de f.

La extensión de f que se describió anteriormente y que satisface (2.22) estará dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\phi(2nL + x) - \phi(2nL - x)\right). \tag{2.23}$$

La correspondiente solución dada por (2.9) es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\phi(2nL + y) - \phi(2nL - y)) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(2nL + y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(2nL - y) dy \end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones $\xi = 2nL + y$ y $\xi = 2nL - y$ en la respectiva integral se tiene

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi - 2nL, t) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} K(x, 2nL - \xi, t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (K(x, \xi - 2nL, t) - K(x, 2nL - \xi, t)) dy \end{aligned}$$

tomando $G(x,\xi,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (K(x, \xi - 2nL, t) - K(x, 2nL - \xi, t))$ y teniendo en cuenta como se definió $\phi(x)$, obtenemos

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,\xi,t) f(\xi) d\xi.$$

Por (2.8) $G(x,\xi,t)$ se puede reescribir como

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-(x-\xi+2nL)^2/4t} - e^{-(x+\xi-2nL)^2/4t} \right].$$

$G(x,\xi,t)$ puede ser reescrita en términos de la función $\vartheta_3(z,\tau)$ definida por (1.25) de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left[\frac{-\left(\frac{x-\xi}{2}+nL\right)^2}{t}\right] - exp\left[\frac{-\left(\frac{x+\xi}{2}+nL\right)^2}{t}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left[\frac{-\left(\frac{x-\xi}{2L}+n\right)^2}{\frac{t}{L^2}}\right] - exp\left[\frac{-\left(\frac{x+\xi}{2L}+n\right)^2}{\frac{t}{L^2}}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4L^2}}\left\{\sqrt{\frac{L^2}{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left[\frac{-i\pi\left(\frac{x-\xi}{2L}+n\right)^2}{\frac{i\pi t}{L^2}}\right] - exp\left[\frac{-i\pi\left(\frac{x+\xi}{2L}+n\right)^2}{\frac{i\pi t}{L^2}}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2L}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2L},\frac{i\pi t}{L^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2L},\frac{i\pi t}{L^2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

CONCLUSIONES

- La búsqueda de soluciones al problema lineal asumiendo que el comportamiento en la variable espacial es periódico permite la implementación del análisis de Fourier para el problema con condiciones de Cauchy. La regularidad de la solución encontrada por este método se desprende de manera sencilla.
- Cuando no se supone la periodicidad de la variable espacial se hizo necesario recurrir al análisis de Fourier no periódico.
- El núcleo del calor es de vital importancia para la definición de las soluciones a la ecuación, permite demostrar propiedades de regularidad para las diferentes soluciones encontradas con cada uno de los métodos estudiados.
- Para la demostración de la unicidad de las soluciones encontradas se hace necesaria una versión del principio del máximo para problemas parabólicos.
- En el caso unidimensional, es posible hallar una solución al problema de valores iniciales y de frontera considerando una función que sea acotada sobre un intervalo finito de $\mathbb{R}$.
- Con las herramientas desarrolladas, es posible combinar resultados del caso periódico y del caso no periódico. Por ejemplo algunos problemas mixtos pueden ser tratados con las técnicas del primer capitulo y viceversa.

Bibliografía

[Apostol, 1976] Apostol, T. M. (1976). *Análisis Matemático.* Reverte, 2 edition.

[Bellman, 1961] Bellman, R. (1961). *A Brief Introduction to Theta Functions.* Holt, Rinehart and Winston.

[Ibarra, 2014] Ibarra, M. d. C. (2014). La ecuación del calor de fourier: Resolución mediante métodos de análisis en variable real y en variable compleja. *II Jornadas de Investigación en Ingenieria del NEA y Países Limítrofes.*

[Iorio and Magalhães, 2001] Iorio, R. and Magalhães, V. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematicas.

[John, 1981] John, F. (1981). *Partial Differential Equations.* Springer Verlag, 4 edition.

[Simmons, 1991] Simmons, G. F. (1991). *Differential Equations with applications and historical notes.* McGraw-Hill, Inc.

[Whittaker and Watson, 1927] Whittaker, E. and Watson, G. (1927). *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 4 edition.