Potenciando el razonamiento proporcional en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria.

Reporte de una experiencia

Luz Janeth Zabaleta Castillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, Mayo 2019

Potenciando el razonamiento proporcional en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria. Reporte de una experiencia

Luz Janeth Zabaleta Castillo

Trabajo de grado como requisito para optar al título de Magister en Educación

Director

Pedro Javier Rojas Garzón

Doctor en Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, Junio de 2019

Dedicatoria

A Dios por permitirme llegar al cumplimiento del logro.

A Jaime por ser mi amor y cómplice de pequeñas y grandes causas

A mis hijos Alejandro y Angie por su apoyo incondicional y por ser la inspiración que me impulsa a asumir retos.

Agradecimientos

Al director de tesis Dr Pedro Javier Rojas, por su orientación y acompañamiento

A Liliana por mostrarme el camino para retomar la academia

A mis estudiantes por su disposición en el desarrollo del trabajo

A mis compañeros y profesores del Énfasis en Educación Matemática por sus aportes y retroalimentación.

Tabla de contenido

Tabla de figuras

RESUMEN

El razonamiento proporcional ha sido materia de estudio tanto a nivel nacional como internacional, identificando dificultades al momento de abordar en el aula de manera desarticulada y descontextualizada los contenidos matemáticos razón y proporción, en los que se hace uso de procedimientos algoritmizados sin que se proporcione para su comprensión, situaciones donde se aborde inicialmente su aspecto cualitativo, para luego cuantificar la relación entre las magnitudes y de esta manera identificar si son del mismo tipo (*razones internas*) o de diferente tipo (*razones externas*).

El trabajo de investigación desarrollado describe la intervención en el aula cuyo propósito es el de potenciar el razonamiento proporcional a través de la implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, que permitan la constitución del objeto mental comparativamente, el cual se constituye en el recurso fenomenológico que aproxima en el proceso de enseñanza- aprendizaje a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria a niveles de comprensión de los objetos matemáticos razón y proporción.

Palabras claves: *Fenomenológico, objeto mental, comparativamente, razón y proporción.*

ABSTRACT.

The proportional reasoning has been a matter of study not only at the national but also at the international level, identifying difficulties at the moment of dealing inside the classroom with decontextualized and unarticulated the mathematical contents reasoning and proportion, in which it is used to do one of the algorithms procedure without using the proportion to its understanding, situations in which it deals firstly with its qualitative aspect then to quantify the relation between the magnitudes thus in this way identify if they are the same type (internal reasons) or different type (external reasons)

The researching developed paperwork describes the classroom intervention whose purpose is to strengthen the proportional reasoning through the implementation of a contextualized group of tasks which allow the formation of the mental object comparatively, which is the phenomenological resource which approaches the teaching-learning process to fifth grade students in primary school to understand the mathematical objects reasoning and proportion.

Key words : Phenomenological , mental object, , comparatively , reasoning and proportion.

1. Aspectos generales de la investigación

1.1. Introducción

En diversas investigaciones tanto a nivel nacional como internacional se han realizado estudios orientados a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción, sin embargo, las dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes persisten, aspecto evidente cuando, por ejemplo, se da un tratamiento algoritmizado a situaciones de hallazgo de la cuarta proporcional por medio del uso de la *regla de tres*[1], dejando de lado la relación entre las magnitudes involucradas.

En este sentido y con el fin de abordar desde la fenomenología didáctica, la enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción, desde el trabajo de investigación, se propuso potenciar la constitución del objeto mental comparativamente, el cual a partir de los trabajos realizados por Freudenthal (1983), se constituye en el recurso fenomenológico que permite la aproximación a los contenidos matemáticos en mención, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas con estudiantes de grado quinto de Educación básica primaria. Esto con el fin de identificar la evolución progresiva en los niveles de comprensión en los estudiantes, describiendo los avances y dificultades durante la intervención en el aula.

Para la selección del grado quinto de Educación básica primaria, se tuvo en cuenta lo planteado en los Estándares Básicos de Aprendizaje en matemáticas (MEN, 2006), que establecen para este nivel de escolaridad, la modelación de situaciones de proporcionalidad directa e inversa, aspecto que permite iniciar desde edad temprana la constitución de la relación entre magnitudes a través de la comparación.

Se tomó como soporte el enfoque de la *Educación Matemática Realista* (EMR) Bressan (2004), con el objetivo de plantear desde contextos reales, fenómenos que sean medios de organización del concepto matemático. Se busca que los estudiantes inicien con sus producciones libres, para luego socializar con el grupo en pleno, es decir, son ellos quienes, a

[1] Situación que fue evidenciada en los resultados dados en el instrumento de indagación aplicado a 23 estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria en un colegio ubicado al sur de Bogotá.

partir del diálogo, la interacción entre pares, la negociación junto con la mediación del profesor, están encargados de constituir su propio conocimiento, utilizando situaciones reales como punto de partida para aprender.

En este sentido la educación matemática debe mantener relación con la realidad, cercanía a los niños y relevancia para la sociedad; el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática.

En la primera parte del capítulo se presenta la contextualización y delimitación del tema de investigación, dado a partir de la experiencia como docente que ha tenido la autora y de la literatura consultada al respecto; en un segundo momento, se describe el propósito de la investigación; en tercer lugar, se dan a conocer los antecedentes desde lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y de los referentes acerca de las investigaciones en el proceso cognitivo y en la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional; por último, se presentan los resultados del instrumento de indagación aplicado a 28 estudiantes de una institución educativa, de grado noveno, en donde se plantearon situaciones de proporcionalidad.

1.2. Contextualización de la problemática

Diversos trabajos de investigación como Rojas, Romero, Bonilla, Mora, Rodríguez (2011) y Obando (2014) entre otros, han aportado en torno a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, reportando la forma desarticulada y fuera de contextos reales como se presentan a los estudiantes los objetos matemáticos de razón y proporción, sin tener en cuenta la relación entre cantidades, y la relación entre razones, aspecto relevante para su comprensión.

Desde la experiencia del aula como docente se ha observado la introducción de métodos mecánicos y algoritmizados como son los esquemas de regla de tres para resolver situaciones de proporcionalidad, aspecto que ha sido reportado en diversos trabajos de investigación a nivel nacional e internacional, entre ellos Guacaneme (2002), se refiere a,

> La forma como se abordan en algunos textos escolares los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad en el aula, al inducir las situaciones de proporcionalidad directa o inversa con el modelo intuitivo de “regla de tres”, utilizando el producto de extremos igual al producto de medios, formando de esta manera un modelo, que conlleva a la superficialidad de la comprensión de la proporcionalidad (p. 9).

En este sentido se encuentra el estudio realizado con un grupo de estudiantes para optar al título de profesores, (Rojas, Romero, Bonilla, Mora, Rodriguez (2011) quienes plantean:

> En la escuela aparece con el tema de proporcionalidad, aunque sin un tratamiento adecuado de las proporciones, pues una manera usual, socialmente aceptada e incluso exigida, de escamotear dicho estudio es la reducción de cierta clase de problemas al manejo algorítmico de reglas, particularmente de la conocida como “regla de tres”, pero sin el reconocimiento explícito de las condiciones de proporcionalidad (p. 63).

Al respecto Obando (2014) se refiere a la manera de abordar en el aula la enseñanza del razonamiento proporcional en niños de edad escolar, cuando se mira la capacidad de tal razonamiento en función de las habilidades de los estudiantes para resolver problemas de cuarta proporcional en donde el éxito en este tipo de tareas radica en la aplicación del algoritmo de regla de tres, al margen de un pensamiento proporcional. Al respecto el autor afirma:

> En relación a las indagaciones por los problemas didácticos en los aprendizajes relativos a la proporcionalidad, se puede citar la línea que trata la sobre-generalización de la linealidad. En breve, esta línea, que tomó gran fuerza en los últimos 10 años, documentó una tendencia generalizada de los estudiantes para aplicar modelos lineales (en general el uso de la regla de tres) en situaciones en donde no eran aplicables, encontrando esta situación en todos los años de la Educación Básica y media, aumentando con la escolaridad, y extendiéndose incluso a otros campos de la matemática y de otras ciencias (p.17).

Desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), se plantea el inicio y el desarrollo del contenido matemático, razón y proporción desde los primeros años de escolaridad, ubicándolos dentro el pensamiento numérico y sistemas numéricos como uno de los tipos de problemas asociados a la multiplicación y división (p.33). En cuanto a la proporcionalidad se refieren en el pensamiento variacional, “en la búsqueda de las interrelaciones que permitan identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación, como son entre otros los modelos de tipo variacional: aditivo, multiplicativo, y dentro de ellos los que permitan medir el cambio absoluto y el cambio relativo” (MEN, 1998, p.55).

Sobre la variación, los lineamientos establecen que puede ser iniciada pronto en el currículo de matemáticas, a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica, (MEN, 1998, p.51). En este sentido García & Serrano (1999, p.38) muestran que, en el campo de la enseñanza de la proporcionalidad, en nuestro sistema educativo, aún subsisten dificultades, puesto que la organización curricular relativa a la enseñanza de la aritmética en la educación básica es descontextualizada, y, por lo tanto, la solución de problemas no juega un papel de mediador en la construcción del conocimiento. Las dificultades de los alumnos se encuentran en “función de la estructura característica de los enunciados, la estructura semántica de la proporcionalidad y los procesos cuantitativos de solución” (Obando, 2014, p. 28).

En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas no se considera de manera explícita la relación entre el razonamiento proporcional y el pensamiento variacional, se hace un acercamiento al pensamiento variacional en un primer momento al generalizar patrones aritméticos y posteriormente, se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, por ello, debe involucrar, entre otros aspectos, el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, aspecto importante en la resolución de problemas, además del análisis de relaciones funcionales y de variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra. (MEN, 1998, p.17).

En los Estándares Básicos de Aprendizaje en matemáticas (MEN, 2006) se considera que las situaciones de aprendizaje propician el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas (p.54).

En la Institución Educativa en la que se implementó la propuesta, se planea desarrollar los contenidos de razón y proporción en el grado tercero de educación básica primaria como lo contemplan los Estándares Básicos de aprendizaje en matemáticas, (MEN, 2006), los que frecuentemente se dejan pendientes, para ser trabajados con mayor énfasis a partir de grado séptimo, así las cosas, se deja de lado la progresión que se puede iniciar desde la básica primaria en el pensamiento numérico y la conexión con el pensamiento variacional, con los objetos matemáticos en mención.

Para el grado quinto de educación básica primaria, población a la que está dirigida la investigación, los contenidos de razón y proporción según los Estándares Básicos de Aprendizaje en matemáticas (MEN, 2006), plantean su estudio a partir del pensamiento numérico, relacionando la razón con un tipo de multiplicación, conectando, a su vez, la proporción con otros tipos de pensamiento como son el pensamiento métrico y el variacional. Esto contempla "ir avanzando con los primeros aprendizajes sobre multiplicación en la educación básica para posteriormente realizar el cálculo sobre funciones en la Educación media" (Obando 2014, p.24).

Respecto a la experiencia que la docente- investigadora ha tenido con la enseñanza de los conceptos de razón y proporción, objetos matemáticos que deben ser abordados en quinto grado a la luz de los Estándares y, por lo tanto, contemplados en el plan de estudios. Se ha observado que usualmente estos contenidos son abordados como un producto acabado, al ser presentados a través de representaciones numéricas, en las que se asigna a la razón un valor, de ahí que si la razón se lee como el valor que se obtiene al efectuar la división correspondiente, la razón desaparece. Esto para Freudenthal (1983) se traduce en que el significado de la razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de hablar de igualdad (o desigualdad) de razones, sin conocer el tamaño de la razón, y, en cuanto, a la proporción, como el contexto en el que se le puede dar sentido a la igualdad de razones.

En este sentido el desarrollo del trabajo de investigación abordó el proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón y la proporción en grado quinto de educación básica primaria a partir del análisis fenomenológico, desde el que se plantea "tomar los fenómenos del mundo real, y de las matemáticas mismas, estudiar las formas de organizarlos y abordarlos a través de objetos mentales que posibiliten la constitución de los objetos matemáticos" (Puig, 2014, p.1).

A partir de los resultados obtenidos por estudiantes colombianos en ciertos tipos de pruebas estandarizadas nacionales como son las pruebas Saber y pruebas internacionales, como las pruebas TIMSS, se ha identificado la forma cómo resuelven situaciones de proporcionalidad. Esta no es ajena a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción en el aula, hecho que permite confirmar la forma cómo la enseñanza de la proporcionalidad se centra en procesos algoritmicos (fundamentalmente la regla de tres) sin que sean explícitas “las relaciones de proporcionalidad con la covariacion entre magnitudes, las representaciones en tablas, gráficas cartesianas y ecuaciones, esto hace que no se logren niveles de significación en los estudiantes en lo relativo a la solución de problemas y la aplicación de estos conceptos” (Obando, 2014, p.25).

Al respecto la evaluación Saber (2009), realizada en los grados 3o y 5o de educación básica, da cuenta del alto rendimiento que presentan los estudiantes cuando se trata de efectuar los algoritmos de las operaciones básicas, presentando mejores resultados en la suma y la multiplicación, y un poco menos en los algoritmos de la resta y la división. La situación se torna más crítica con los problemas del tipo razonamiento multiplicativo o que impliquen la concatenación de dos o más operaciones, pues en estos casos los niveles de rendimiento son muy bajos (Obando, 2014, p.25).

Por otro lado, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y en los Estándares Básicos de Aprendizaje, el trabajo sobre la estructura multiplicativa, no entra a problematizar la multiplicación como relación cuaternaria, y, por ende, queda totalmente desligada de la proporcionalidad, aspecto que posibilita presentar los objetos matemáticos de razón y proporción de manera descontextualizada (Garcia & Serrano, 1999).

Por lo expuesto anteriormente, es pertinente realizar una intervención en el aula, que posibilite la constitución del objeto mental comparativamente que, de acuerdo a las ideas de Freudenthal (1983), se constituye en un recurso fenomenológico fundamental en la aproximación a la constitución de los objetos matemáticos de razón y proporción, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, con estudiantes de grado quinto de educación básica primaria. Por último, y considerando la situación planteada hasta este punto, es oportuno plantear la siguiente pregunta que orienta el desarrollo de este trabajo de investigación, ¿De qué manera se posibilita la constitución del objeto mental *comparativamente*, para aproximar a la comprensión de los objetos matemáticos de razón, como relación entre magnitudes y el de proporción, como relación entre razones, en los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria?

1.3. Propósito de la investigación

El propósito del trabajo de investigación es posibilitar en los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, la constitución del objeto mental *comparativamente* que potencie los niveles de comprensión de los objetos matemáticos de razón y proporción, al tomar fenómenos del mundo real y de las matemáticas que permitan organizar dichos contenidos.

Para tal fin, se realizó la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, enmarcadas en la constitución del objeto mental c*omparativamente* que posibilite a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, aproximarse a los contenidos matemáticos de razón y proporción, identificando la evolución progresiva en los niveles de comprensión, dados a partir de la Educación Matemática Realista (EMR), describiendo durante la implementación, los logros y las dificultades presentadas a partir de la intervención en el aula.

1.4. Antecedentes

El trabajo de investigación toma como referente el enfoque de los objetos matemáticos de razón y proporción, como parte del pensamiento numérico y el pensamiento variacional, planteados en los Lineamiento Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (2006); así como el estudio de su aspecto cognitivo y el de su enseñanza y aprendizaje, razón por la cual se han revisado trabajos, tanto a nivel nacional como a nivel internacional, con el fin de establecer referentes teóricos que puedan orientar el desarrollo de esta investigación.

Se hace referencia a estudios realizados en su aspecto, cognitivo y de enseñanza y aprendizaje del contenido matemático razón y proporción. Para ello se ha tomado lo planteado por Obando (2014).

> El campo relacionado con las razones y proporciones y la proporcionalidad, ha sido ampliamente investigado desde diferentes puntos de vista (cognitivos, epistemológico, didácticos, matemáticos)**,** lo que permite concluir su importancia para el desarrollo mismo de la didáctica de las matemáticas. Esta importancia también se ve reflejada en los currículos de matemáticas que organizan los procesos de estudio de los estudiantes en edad escolar. (p.23)

Finalmente, se presentan los resultados de un instrumento de indagación, aplicado a 28 estudiantes del grado noveno de educación básica secundaria, pertenecientes a la misma institución educativa en donde se hizo la intervención en el aula.

1.4.1 Desde lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional

Al revisar los Estándares Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2006), se encuentra una serie de enunciados que hacen referencia a los diferentes contenidos y competencias que los estudiantes deben alcanzar a lo largo de su vida escolar, entre los que se encuentran las razones y las proporciones. Temas distribuidos por niveles a lo largo de la educación básica y media, y que hacen parte del eje llamado pensamiento numérico y sistemas numéricos, y pensamiento variacional y sistemas algebraicos.

El razonamiento proporcional, en este documento se relaciona con el pensamiento numérico y sistemas de numeración a partir de grados 1° a 3°, al proponer "resolver y formular problemas en situaciones de variación proporcional", (MEN, 2006, p.80). También se relaciona con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos, al "describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas" (MEN, 2006, p.81).

En cuanto a los Estándares Básicos de Aprendizaje en Matemáticas, relacionan el razonamiento proporcional a partir de los primeros grados de escolaridad con el pensamiento numérico y el pensamiento variacional, con el propósito de ir avanzando en la construcción de los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) que involucran la variación proporcional.

La organización escolar descrita propone en el desarrollo de aula, presentar la multiplicación y la proporcionalidad, sin establecer relación explícita entre ellas, al respecto Obando (2016) afirma: "presentar la proporcionalidad al margen del estudio de las magnitudes; estudiar multiplicación y proporcionalidad al margen del análisis de los procesos de covariación entre magnitudes; y finalmente, se deslinda una separación entre la proporcionalidad y las funciones" (p.26).

En cuanto la resolución de problemas se plantean, tanto en los Lineamientos Curriculares como en los Estándares Básicos de Aprendizaje en Matemáticas, las conexiones entre las operaciones y los números para estimular un alto nivel de pensamiento numérico, así como la relación inversa entre operaciones para proporcionar al estudiante otra forma de pensar sobre el problema, además en los tipos de pensamientos (numérico, métrico, espacial, variacional y aleatorio) es posible evidenciar una relación con diferentes temas de los otros ejes.

En los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), se expresa que en el desarrollo del eje pensamiento numérico se debe realizar el estudio de los sistemas numéricos, evidenciando la necesidad de situarse en un contexto amplio en el que, desde su estudio se desarrollen habilidades para comprender los números, usarlos en métodos cualitativos o cuantitativos, realizar estimaciones, aproximaciones, y, en general, utilizar los números como herramientas para procesar, interpretar y comunicar información.

En este sentido Obando, (2014, p. 24), considera que esta mirada sobre el currículo es reafirmada en el documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) "en donde se amplían los horizontes conceptuales presentados en los lineamientos curriculares, y se proponen en forma de estándares, las competencias básicas en matemáticas que deben alcanzar todos los estudiantes del sistema educativo colombiano".

En relación al razonamiento matemático los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), lo considera como uno de los ejes curriculares asociado a la comunicación y resolución de problemas. "Se le entiende como los actos en los cuales el niño justifica, conjetura, explica y predice entre otros actos" García & Serrano (1999, p. 31).

De esta manera los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad no son un dominio exclusivo de lo numérico, sino que están en relación con el desarrollo de conceptos importantes en lo geométrico, lo estadístico, lo variacional, lo métrico, e incluso en otras disciplinas; de ahí la necesidad de abordar, desde los primeros años de escolaridad, estas temáticas, llevando al aula procesos de enseñanza- aprendizaje que posibiliten la comprensión de las relaciones existentes en estos contenidos objeto de estudio del trabajo de investigación.

1.4.2 Referentes acerca de las investigaciones en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de Razón y Proporción

Las investigaciones didácticas en torno a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, han venido cobrando importancia debido a las dificultades que reportan los estudiantes en su proceso de enseñanza- aprendizaje. Por ello, en el desarrollo de la propuesta y, tomando planteamientos de Obando (2014, p. 8) los antecedentes se reportan en dos sentidos: en el campo cognitivo y en el de la enseñanza - aprendizaje.

1.4.2.1. En el Campo Cognitivo

En el desarrollo del trabajo se toman aspectos de los trabajos de Inhelder y Piaget (1958, citado por Obando, 2014, p.24), por cuanto fueron los pioneros en estudiar los aspectos cognitivos, en torno al desarrollo del pensamiento lógico alrededor de la proporcionalidad, además de brindar elementos desde lo cualitativo, como una primera aproximación a la razón y proporción de los estudiantes para posteriormente pasar a lo cuantitativo.

Los autores consideran que el razonamiento proporcional es el que marca el cambio de las operaciones concretas a las operaciones formales, en tanto permite a los sujetos la capacidad del manejo simultáneo de clases de multiplicación, entendida como la coordinación de los cambios en dos o más variables, de tal forma que aumentos o transformaciones en una de ellas conlleva a cambios en la otra, de tal forma que el efecto total del cambio en las variables mantiene invariante un determinado fenómeno en el evento o situación estudiada.

Esta invariancia es inicialmente cualitativa (a partir de formulaciones proposicionales que manifiestan la manera como los procesos de variación garantizan la invariancia en el fenómeno observado) y, posteriormente cuantitativa a través de la constancia de un producto o de un cociente entre los valores numéricos de las variables en estudio (al menos para la proporcionalidad directa o inversa, ampliamente estudiadas por Piaget) (Obando, 2014, p.8).

El otro aspecto del razonamiento proporcional es el matemático, a partir de la constitución del grupo INRC, que según Piaget:

> Se da sobre las 16 operaciones (lógicas) binarias definibles sobre un conjunto de objetos, en donde opera un conjunto de cuatro transformaciones (acciones sobre las operaciones): la Idéntica (I), que transforma una operación sobre sí misma; la Negación (N), la cual anula los

> efectos de una operación; la Recíproca (R), que anula los efectos de una operación por compensación de las diferencias; y la Correlativa (C), que anula el efecto de la operación, pero combinando la negación con la reciprocidad (N.R =C). Así, el grupo INRC es equivalente a las proporciones lógicas I*x*/ C*x* = R*x*/ N*x* o R*x* / I*x* = C*x* / N*x*, donde x es la operación transformada por I, N, R o C (Obando, 2014, p.9).

Tanto en su aspecto lógico como en el matemático, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón se presenta como una relación entre dos variables, y la proporción como una relación de equivalencia entre dos razones). En el aspecto matemático, Obando (2014) considera que "la comprensión de las compensaciones cuantitativas en forma de equivalencias (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) para que conserven invariante un cociente o un producto, (si x/y = x`/ y` entonces xy` = x`y)" (Obando, 2014, p. 8).

El punto de partida para numerosas investigaciones, desde el punto de vista cognitivo, es la caracterización de la construcción del razonamiento proporcional, para así ver qué pasa en la escuela con el desarrollo de estos procesos y si es posible enseñarlos directamente o no (Obando, 2014, p.10).

Continuando con los trabajos desarrollados en el campo cognitivo se encuentra Vergnaud (1984) quien realiza el análisis de la estructura multiplicativa como un campo conceptual conformado por la presencia de la multiplicación y la división; para el autor:

> El razonamiento proporcional es el de las estructuras multiplicativas, es decir, el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, puesto que en las situaciones de razonamiento proporcional las relaciones son cuaternarias, porque los problemas más simples de multiplicación y de división implican la proporción de dos variables una en relación a la otra. (1984, citado por García y Serrano 1999, p.20).

El autor se refiere a algunos problemas de comparación en donde se relacionan dos conjuntos arbitrariamente como, por ejemplo: cuándo se comparan pizzas con niños, la comparación es de la forma p a q. De igual forma se puede utilizar este tipo de razón para dar lugar a una nueva dimensión, como es el caso de la razón entre el tiempo y la distancia, que genera la velocidad, en este caso la razón recibe el nombre de rata (García y Serrano 1999, p.21).

1.4.2.2. En el Campo de la Enseñanza y Aprendizaje

Desde la Educación Matemática con los trabajos realizados por Hans Freudenthal[2]:

> Se da un giro de los estudios realizados desde el foco de los procesos cognitivos, para empezar a mirar el problema del desarrollo del razonamiento proporcional desde la óptica de la escuela, es decir, teniendo ya una caracterización del razonamiento proporcional desde una perspectiva cognitiva, el problema es ahora cómo enseñar dicho razonamiento en la escuela, cómo lograr que la escuela favorezca los procesos de enseñanza, orientados a la constitución del razonamiento proporcional (1983, citado por Obando 2014, p.26).

Continuando con los trabajos de investigación en Educación Matemática en torno a la enseñanza - aprendizaje de los objetos matemáticos de razón y proporción, se encuentra Schwartz (1988), en relación a la comparación de cantidades intensivas y cantidades extensivas, entendidas como aquellas que para el primer tipo generan operaciones que preservan el referente y en el segundo tipo, como aquellas operaciones que resultan en composiciones de cantidades que transforman el referente, este aspecto puede proveer la base para un nuevo enfoque de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, en razón a que el enfoque se basa en una visión de las matemáticas como una herramienta para la modelación. Al respecto Schwartz (1988, p.10) afirma:

> Las cantidades que aparecen en los problemas de estructura multiplicativa pueden ser extensivas o intensivas. Las cantidades extensivas se pueden clasificar en: discretas (D) y continuas C, puesto que, en general, las intensivas son el cociente indicado de dos extensivas, clasificadas en cuatro tipos: D/D, C/D, D/C, C/C (Schwartz, 1988, p. 44).

En cuanto a la comprensión del razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar, se caracterizan elementos fundamentales a partir de las estructuras multiplicativas y la relación con la variación y covariación, en tanto su estrecha relación con la multiplicación y la división, en este sentido Susan Lamon (1994), aporta al objeto de estudio, la *unitización* entendida como la habilidad para construir una unidad de

---

[2] Es de anotar que al ser los estudios de Freudenthal (1983) el soporte teórico y metodológico del trabajo de investigación, es en los siguientes capítulos que serán tratados los aportes en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la razón y proporción a partir de la fenomenología didáctica.

referencia o un todo-unidad, para luego reinterpretar una situación en términos de esta unidad. Según la autora esta habilidad es importante para el desarrollo de ideas matemáticas de sofisticación creciente. Este proceso, que empieza en la temprana infancia (Steffe y Cobb, 1988 citado por Lamon 1994, p.3), supone la composición progresiva de unidades para formar estructuras de cantidades cada vez más complejas.

La normación o la adopción de algún marco de unidades en el cual se conceptualiza una situación, es prevalente en el pensamiento matemático sugiriendo que el pensamiento más sofisticado resulta cuando se reelabora una situación en términos de una unidad más colectiva, porque esto invoca un esquema parte-todo que permite al estudiante pensar acerca tanto del agregado como del ítem individual que lo compone (Lamon, 1994, p. 4).

Los análisis teóricos de Lamon, (1994) entre otros, como los resultados empíricos sugieren que los procesos de *unitización* y *normación* pueden ser un mecanismo importante para el desarrollo de un razonamiento avanzado. Comprender razón y proporción depende de la habilidad para visualizarlos.

En Colombia se encuentran los estudios realizados alrededor de la enseñanza - aprendizaje de la proporcionalidad por el grupo MESCUD de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Rojas *et al*, 2011), quienes plantean que los aprendizajes necesarios en el campo de las estructuras multiplicativas, campo al que pertenece la proporcionalidad, están estrechamente ligados a los procesos de conteo, centrados en el tratamiento de las cantidades, unido al tratamiento de lo multiplicativo a partir del cambio de unidad.[3]

En este sentido los autores presentan los hallazgos encontrados en el diseño e implementación de un experimento de enseñanza, desarrollado con un grupo de estudiantes de educación inicial para ser profesores de matemáticas, cuyo propósito consistió en transformar los esquemas multiplicativos con que ingresan los estudiantes al programa.

[3] Para los autores la multiplicación, como cambio de unidad es entender que cuando se multiplica, se expresa una cantidad – no necesariamente entera- de cierta unidad en función de otra unidad, y que, para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitización o de normaciòn. La multiplicación como cambio de unidad, hace que la división no se entienda como una operación distinta a la multiplicación, ya que ella también corresponde a un cambio de unidad. Cuando se habla de cantidad, se habla de cantidad de algo, de cantidad de cierta unidad.

> El proceso de enseñanza estuvo guiado, por las prácticas que conceptúan la multiplicación como cambio de unidad y la extensión del dominio de la multiplicación al de las magnitudes aspecto que pueden propiciar la constitución de esquemas multiplicativos amplios, densos y complejos en los procesos iniciales de aprendizaje de la multiplicación así como la modificación de ciertos esquemas multiplicativos… como el esquema de la Regla de tres (R3) el cual es utilizado sin conciencia de las condiciones de proporcionalidad implicadas en este (p.111).

En este estudio se hizo el análisis de los resultados obtenidos en pruebas internacionales (TIMSS, 1997), a partir de la comparación entre el desempeño de los estudiantes colombianos con los de otros países, encontrando que para las preguntas relativas a la temática de proporcionalidad, se encuentra un comportamiento similar, el cual estuvo cercano al 50% respecto a este promedio, aspecto "que puede dar cuenta de la complejidad de los conceptos involucrados y de las condiciones que cada sociedad ofrece para promover aprendizaje significativo de la matemática que requieren sus ciudadanos" (Rojas et al, 2011, p.23).

Otra de las investigaciones a nivel nacional, es la de Obando (2014), quien en su tesis doctoral, plantea la caracterización del Razonamiento Proporcional, como una red conceptual que, a partir de lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en los Lineamientos de Matemáticas (1998) y en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), se puede desarrollar desde los primeros grados de escolaridad, lo que invita a los profesores a realizar la implementación de propuestas didácticas con los objetos matemáticos de razón y proporción, a partir de los primeros grados de educación básica y media con el siguiente argumento:

> El Razonamiento Proporcional en la organización curricular del sistema educativo colombiano, se encuentra vinculado a través de una red conceptual iniciando desde la Educación Básica (con los primeros aprendizajes sobre la multiplicación) y se extiende hasta finales de la Educación Media (con el trabajo propio del cálculo sobre funciones), y, además, conectan los diferentes tipos de pensamiento (al menos de manera directa toca con lo numérico, lo variacional y lo métrico) (Obando, 2014, p. 41).

Este trabajo corresponde al campo del razonamiento proporcional, en el que el autor indaga sobre el estatus epistemológico y el sistema de prácticas matemáticas que permiten la constitución de los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad, en estudiantes de grados tercero y cuarto de educación básica primaria de una institución educativa de la ciudad de Cali.

1.4.3 Resultados del instrumento de indagación sobre situaciones de proporcionalidad aplicado a estudiantes de grado noveno de educación básica.

Previo al diseño, implementación y desarrollo del conjunto de tareas propuesto para la intervención en el aula que hace parte del trabajo de investigación, se aplicó un instrumento de indagación, a 28 estudiantes de grado noveno de educación básica, pertenecientes a la misma institución en donde se hizo la intervención.

El instrumento buscó establecer la forma de resolver situaciones de proporcionalidad con cantidades discretas, en el que los estudiantes, a partir de sus producciones escritas, puedan dar cuenta del uso de algoritmos de algunas operaciones, estableciendo la relación entre las magnitudes involucradas.

La población seleccionada cuenta, según los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) y con el plan de estudios diseñado por la institución, con el desarrollo de las temáticas sobre proporcionalidad.

Instrumento de indagación

1	Angie, Jaime y Alejandro compraron 3 bombas infladas con helio y pagaron $2.000 por las tres. Decidieron volver a la tienda y comprar bombas para cada uno de los de su clase. ¿Cuánto tuvieron que pagar por las 24 bombas?
2	Un salón de clase tiene 28 estudiantes. Se sabe que la proporción de niñas a niños es 4:3. ¿Cuántas niñas hay en el salón de clase?
3	En una ladrillera los niños jugaban a construir montones de ladrillos y los ordenaban del más pequeño al más grande. Se encontró que en el primer montón solo había un ladrillo,

	en el décimo montón 19 ladrillos. Calcula cuántos ladrillos hay en el montón que ocupa el lugar 100.
4	La suma de dos números es 28, ¿cuáles son los números, teniendo en cuenta que uno es múltiplo de 4 y el otro múltiplo de 3?

Figura 1. Instrumento de indagación.

El diseño del instrumento de indagación fue el resultado de tomar algunas preguntas del documento de Rojas et al, (2011), pensadas para ser organizadas a través de la multiplicación y de la relación entre magnitudes en situaciones de proporcionalidad, posibilitando en cada una de ellas la complejidad de lo multiplicativo.

En la pregunta 1 se buscó ver cómo el estudiante aborda la proporcionalidad a través del uso de algoritmos y si establece la relación entre las magnitudes precio y número de bombas. Se obtuvieron los siguientes resultados en las producciones escritas.

Reconoce la relación de forma aditiva olvidando las magnitudes*: *17.85 %

En las producciones escritas, los estudiantes establecen la relación de manera aditiva, dejando de lado las sumas reiteradas y las magnitudes que acompañan a cada cantidad. Razón por la que el resultado es dado solo con el número, dejando de lado la magnitud que lo acompaña.

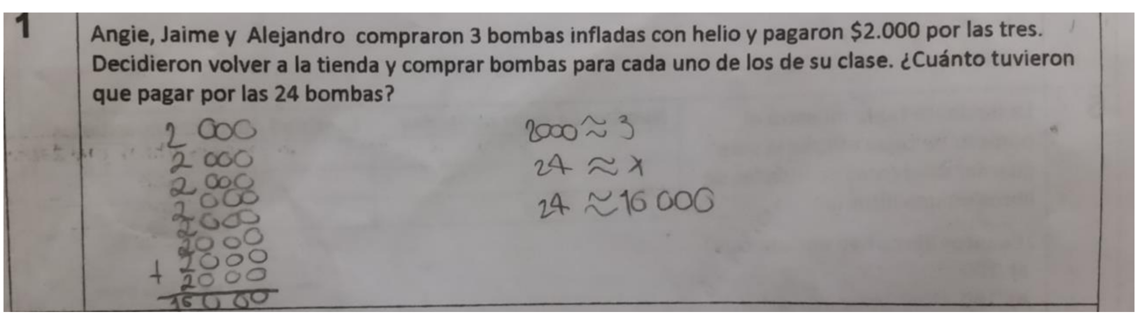


Figura 2. Ejemplo de estudiantes que reconocen la relación entre magnitudes de forma aditiva olvidando las magnitudes involucradas.

Utilizan la regla de tres dejando de lado las magnitudes que intervienen: 71.44%

Los estudiantes que evidencian en su producción escrita la utilización de la regla de tres, acompañada de las operaciones multiplicación y división, se enfocan en el tratamiento algorítmico a través del planteamiento de la cuarta proporcional, obteniendo tres datos para encontrar el cuarto hacen uso de la multiplicación y la división, dejando de lado las unidades que intervienen en la situación, como son el número de bombas y el precio.

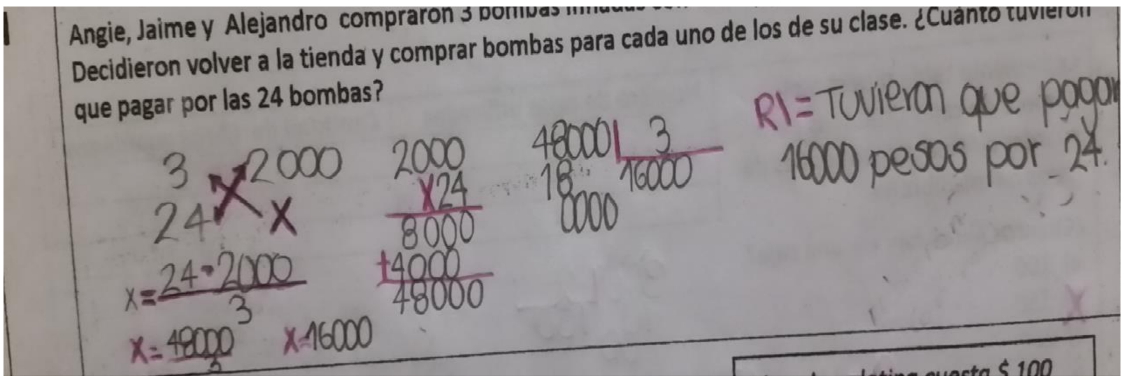


Figura 3. Ejemplo de producción escrita que utiliza la regla de tres sin relacionar las magnitudes que intervienen.

No reconocen la relación de las magnitudes, utilizando la multiplicación: 10.71%

Estas producciones escritas dejan de lado en el tratamiento algorítmico de la multiplicación la relación entre número de bombas y precio, establecen la multiplicación directa de precio y la cantidad de bombas que desean comprar. Dejan de lado las unidades involucradas en la situación.

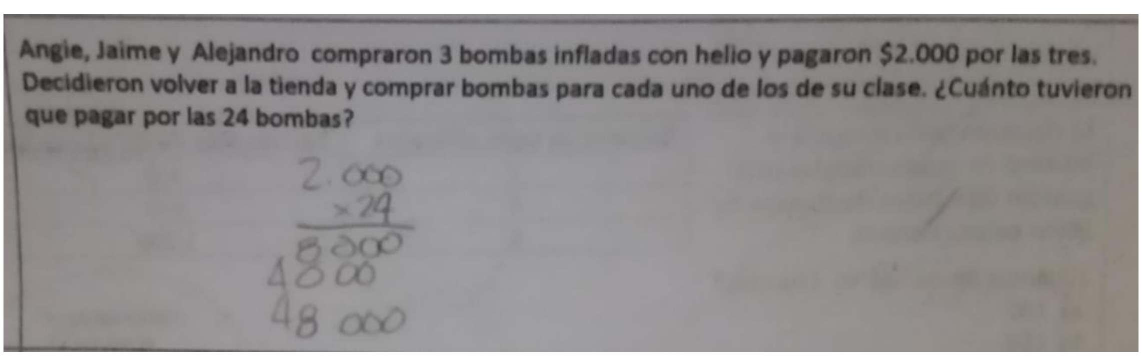


Figura 4. Producción escrita en la que no se establece relación entre las magnitudes a través de la multiplicación.

En cuanto a la segunda pregunta, se indagó por la forma en que se resuelven situaciones en las que la relación entre número de niños y de niñas abarca más que la relación de la cuarta proporcional. Las producciones escritas dan cuenta de la ausencia en la forma consciente entre el uso de la multiplicación o la división y la relación entre las magnitudes, además del total de estudiantes del salón, para este caso 28. De acuerdo a las producciones escritas de los estudiantes se pudo encontrar:

Realizan operaciones de multiplicación y división sin relacionar las magnitudes: 42.85%

El grupo de producciones que hacen parte de este resultado, hace uso de la división y multiplicación, sin asumir conscientemente el por qué se utiliza cada una de ellas como estrategia para hallar el total de estudiantes, dejan de lado la proporción entre las magnitudes y el total de niños y de niñas que hacen parte del salón de clase.

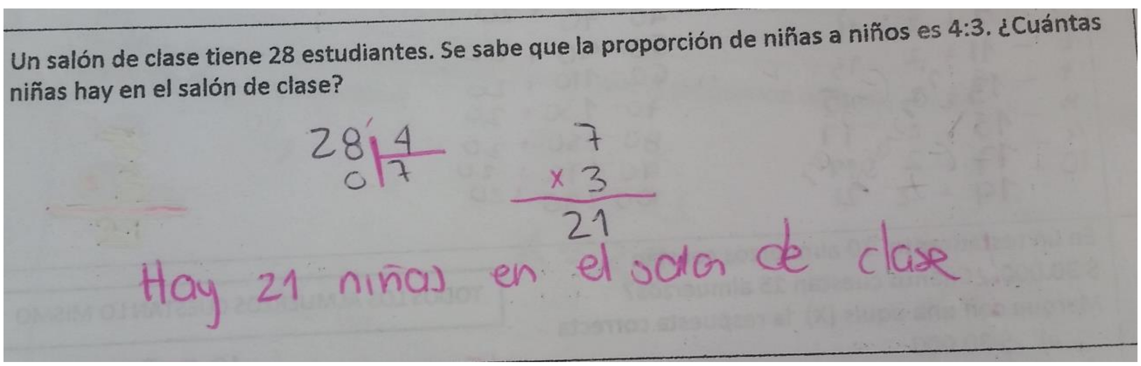


Figura 5. Ejemplo de uso de la multiplicación y la división sin relación entre las magnitudes.

Utilizan el hallazgo de la cuarta proporcional sin relacionar las magnitudes involucradas: 57.15%

En este grupo se ubican las producciones que plantean la cuarta proporcional de forma algorítmica, sin establecer la relación entre el número de niñas y el número de niños, sólo encuentran el número de niñas.

Para este grupo de estudiantes la solución de la situación es mediante el uso de la regla de tres de forma algoritmizada, en este proceso les interesó hallar solo una de las magnitudes en cuestión sin obtener la otra que les permitiera llegar al total, esto posibilita contrastar si la proporción dada en la situación se cumplía.

Como se pudo observar en la situación planteada, en la pregunta 2, el 57.15% de las producciones escritas de los estudiantes hicieron uso de la *regla de tres* a partir de la relación entre fracciones: $4/3 = 28/x$, que no da cuenta de la relación entre las magnitudes involucradas, evidenciando lo que al respecto plantean Perry y Guacaneme:

> En la escuela las razones terminan trabajándose como los números fraccionarios, la proporción termina siendo una igualdad entre fracciones y el cálculo de la cuarta proporcional termina reduciéndose al problema de resolver la ecuación del estilo a.b = c.x; de esta manera se hace desaparecer el problema del carácter elusivo de la razón y la proporción y con ello la naturaleza misma de tales conceptos (2003, p. 24).

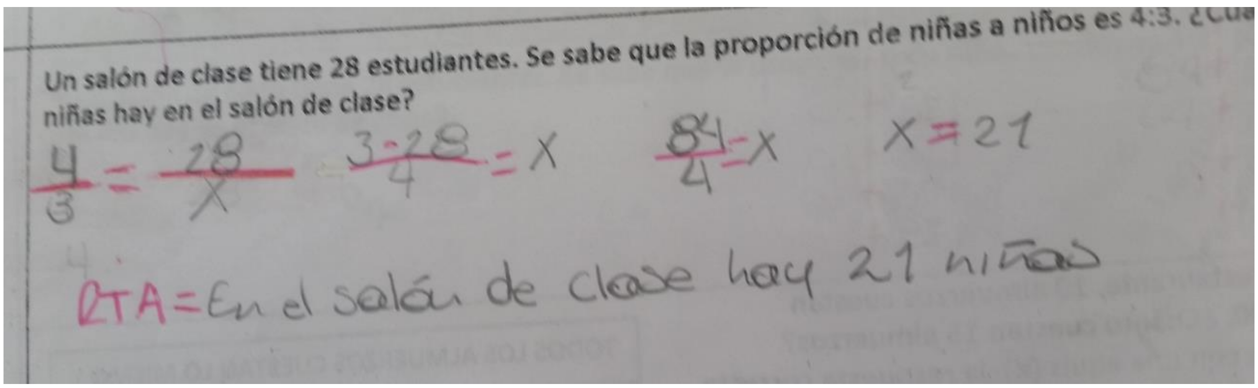


Figura 6. Ejemplo de producción escrita en la que se utiliza la cuarta proporcional sin relación de las magnitudes.

En la tercera pregunta del instrumento de indagación, se pretende que los estudiantes modelen la situación de proporcionalidad a partir del número de montones y ladrillos, lo que se posibilita en la medida que se encuentre el comportamiento de la variación de los ladrillos de acuerdo al montón. Esta relación se puede encontrar a través de una tabla que permita visualizar la relación entre las magnitudes involucradas.

En este ítem se pudo observar que en las producciones escritas de los estudiantes se trabaja de manera inconsciente la solución de los problemas por medio de la *regla de tres* acondicionándolo a situaciones de proporcionalidad.

De acuerdo a las soluciones se establecen los siguientes grupos de respuestas:

Uso de tabla manteniendo la relación entre las magnitudes hasta el montón 10: 42.85%

En este grupo de producciones se observa que, de manera implícita, ya que no escribe a qué hace relación en cada columna de la tabla, se establece la relación entre el número del montón y la cantidad de ladrillos para cada uno de ellos. Se realiza una secuencia hasta el montón 10, pero para los siguientes montones, hace la relación de 10 en 10 para cada montón con 20 ladrillos cada uno. De esta manera llega a 190 sin establecer a qué magnitud se refiere, es decir, dejan de lado la relación de cada magnitud y queda solo el número en las sumas que se realizaron en la tabla.

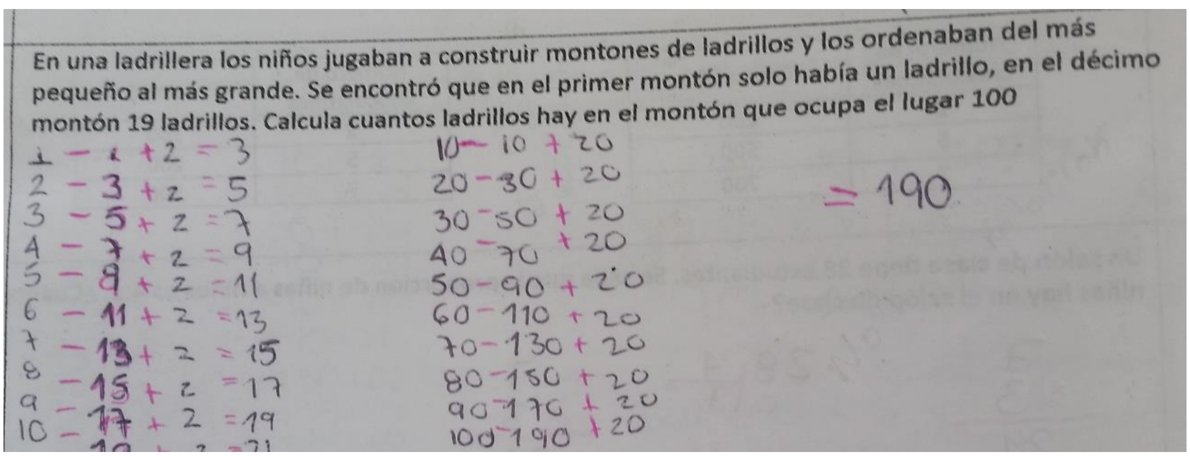


Figura 7. Ejemplo de tabla en la que no se establece la relación entre las magnitudes involucradas.

Realiza la multiplicación sin tener en cuenta la relación de las magnitudes involucradas: 3.5%

Esta producción escrita da cuenta del uso de la multiplicación en la que se relaciona por cada 10 montones, 190 ladrillos, dejando de lado las magnitudes que intervienen en la situación.

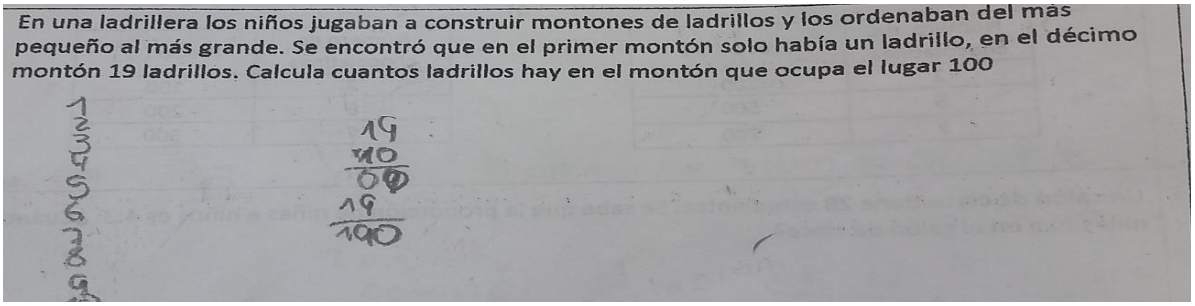


Figura 8. Ejemplo de solución haciendo uso de la multiplicación sin establecer relación entre las magnitudes involucradas.

Uso de la cuarta proporcional sin relación entre las magnitudes: 35%

Dentro de estas producciones se encuentra el manejo de la regla de tres de manera inconsciente con respecto a la variación entre las magnitudes que intervienen. Predomina en estos resultados la tradición del uso de algoritmos perdiendo de vista la relación entre las magnitudes.

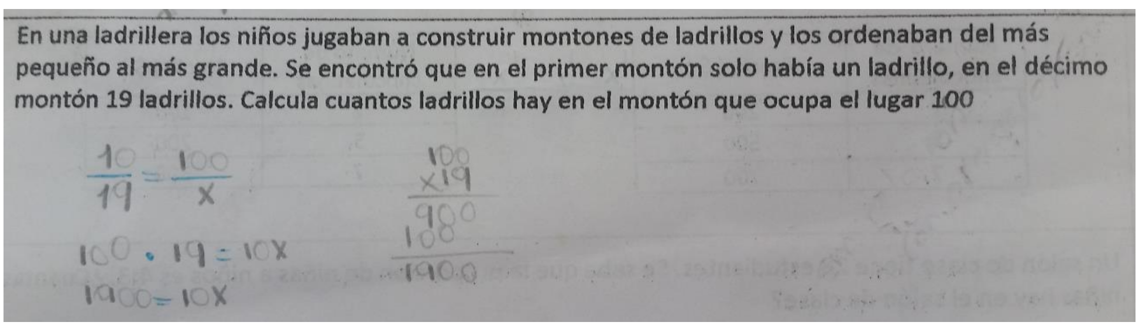


Figura 9. Ejemplo del uso de la regla de tres sin relación entre las magnitudes.

Uso de la secuencia entre número de ladrillos y número de montones sin relacionar las magnitudes: 18.65%

Este grupo toma la secuencia de 19 ladrillos por cada 10 niveles a través de la relación que establecen mediante el uso de la secuencia en una tabla, llegando hasta el montón número 60. Así concluyen que en el nivel 100 hay 190 sin ser explícitos en las magnitudes que intervienen.

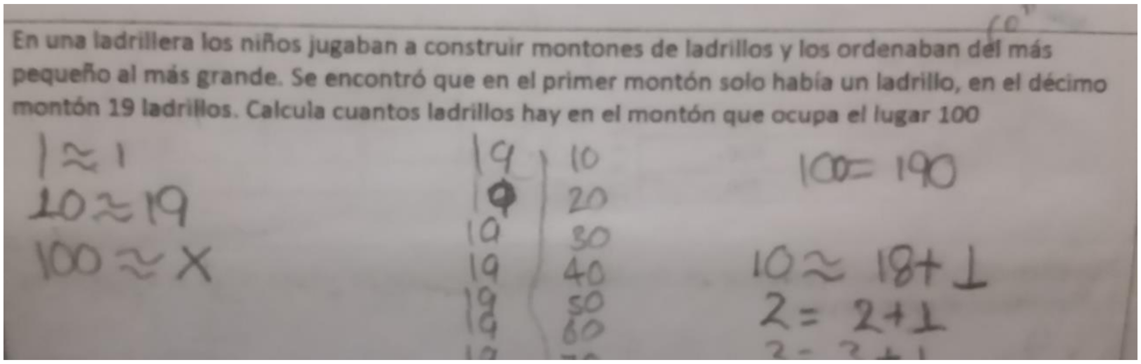


Figura 10. Ejemplo del uso de la tabla entre montones y ladrillos sin relacionar las magnitudes.

La cuarta pregunta del instrumento de indagación fue el resultado de la adaptación de la situación proporcional del ítem 2 a una situación con estructura multiplicativa y aditiva, es decir, el problema se dirige más a la parte más operativa, que a la relación entre las magnitudes. En las producciones escritas de los estudiantes se observa mayor análisis con respecto a los números que debían ser múltiplos.

En este problema se relacionan las variables que no estuvieron presentes en la relación 4:3, aquí se pregunta por los múltiplos de tres y de cuatro que posibiliten hallar el total de 28 estudiantes.

En las soluciones propuestas se encuentran los siguientes grupos:

Suma de los múltiplos para hallar el total: 14.28%

En este grupo se ubican las producciones en las que no es explícito el hallazgo de los múltiplos, sino que se remite a la comprobación de que estos sumen el total dado en el problema**.**

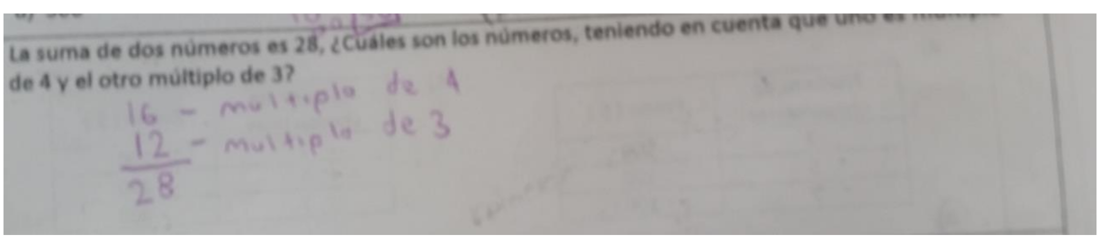


Figura 11. Ejemplo de suma de los múltiplos para hallar el total.

Hallazgo del múltiplo con la división: 25.01%

En estas producciones comprueban que los números sean múltiplos de 3 y de 4, haciendo uso de la multiplicación, para luego comprobar mediante la suma que cumplen el total de 28.

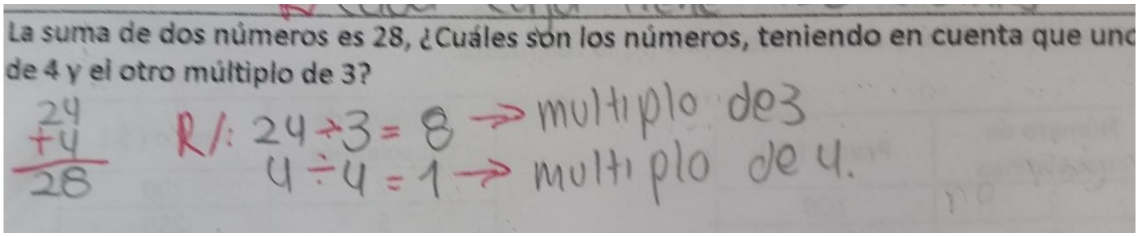


Figura 12. Ejemplo de hallazgo del múltiplo con la división.

Hallazgo de los múltiplos con ecuación: 7,14 %

En este grupo se ubican las soluciones que hacen uso del lenguaje matemático, mediante el planteamiento de la ecuación lineal para encontrar los múltiplos.

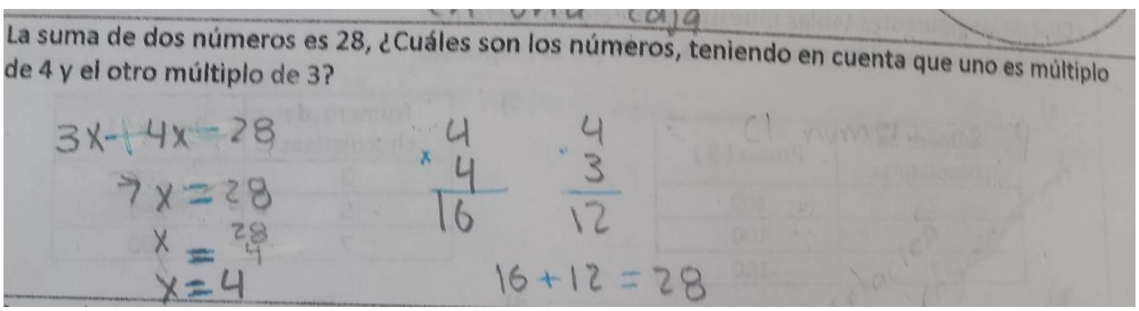


Figura 13. Ejemplo de hallazgo de los múltiplos a través de la ecuación.

Hallazgo de los múltiplos con la multiplicación y la suma: 53.57%

En este tipo de resultados se ubicaron las soluciones que establecen la relación entre ser múltiplo y el total de su suma, lo que se observa es que la misma situación de proporcionalidad, llevada al hallazgo de los múltiplos permitió que los estudiantes pudieran tener más elementos desde el uso de la multiplicación y la suma para encontrar el total**.**

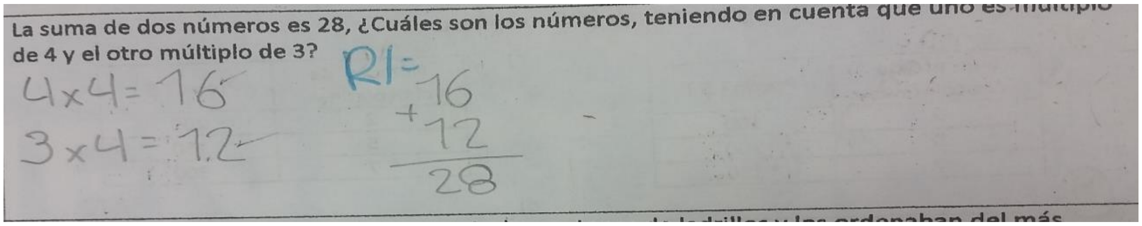


Figura 14. Hallazgo de los múltiplos con la suma y la multiplicación.

En los resultados obtenidos en el instrumento de indagación, se puede observar que la temática de razón y proporción, aun cuando se esté planteando desde grado tercero en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en relación al pensamiento numérico, de los 28 estudiantes de Grado 9° la mayoría de ellos utilizan la regla de tres aplicando el algoritmo de la aritmética de fracciones para despejar la incógnita (Fernández & Llinares, 2010), pero dejan de lado la caracterización de la situación de proporcionalidad por medio de la razón.

A manera de síntesis, los resultados están dados a partir del desarrollo de multiplicaciones y divisiones entre las cantidades que intervienen en la situación, sin escribir de forma explícita una relación entre las magnitudes que intervienen, en este mismo sentido, desde lo planteado por Freudenthal (2001), esta dificultad podría deberse a la forma cómo se aborda la razón, la proporción y la proporcionalidad en la escuela, que induce a que los estudiantes asuman la proporción como un fenómeno completamente algoritmizado o automatizado, perdiendo de vista la característica de las proporciones como la equivalencia entre las razones.

2. Marco referencial

Diversos trabajos de investigación en Educación Matemática dan cuenta de la forma como se ha abordado el proceso de enseñanza - aprendizaje, a partir de contextos que resulten significativos para los estudiantes. En este sentido, la intención llevada al aula es la de posibilitar la aproximación de los contenidos de razón y proporción a estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, al trabajar la matemática "como una actividad humana, a la que las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola" (Freudenthal, 1983 citado por Bressan, 2004, p.3).

El soporte de la investigación, tanto en su aspecto teórico como en el metodológico, está dado por la fenomenología didáctica y los principios de la Educación Matemática Realista (EMR), según los cuales la actividad de *matematiza*r es entendida en tanto permite organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma (Freudenthal, 1973, citado por Bressan *et al*, 2016, p.2). Es por esta razón que se posibilitaron procesos de matematización en los estudiantes al desarrollar tareas en contextos reales y de la matemática misma, que permitieron observar los diferentes niveles de comprensión alcanzados por ellos.

Por lo tanto, al abordar los temas matemáticos a partir de procesos de matematización y niveles de compresión, esta investigación se aleja de la enseñanza de la matemática como un producto terminado, aspecto que ocurre en la educación matemática tradicional, cuando el resultado de la actividad matemática de otros es tomada como punto de partida, lo que para el autor es considerado una "*inversión anti didáctica*". En este sentido, el primer contacto con el contenido matemático que se le da a conocer a los estudiantes es de manera deductiva. En la instrucción tradicional se da el concepto y luego la aplicación del mismo, esto se ilustra cuando Freudenthal afirma: "las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma" (1983, citado por Gravemeije y Teruel, 2004, p.3).

Hace parte del estudio, como referentes, las ideas de Freudenthal (1983, citado por Puig, 1997) respecto a la fenomenología didáctica, en la que, para el proceso de enseñanza - aprendizaje, "se aborda un concepto o una estructura matemática describiendo los fenómenos para los que el medio de organización posibilita la aproximación al contenido matemático" (p.7), aspecto que será tratado con mayor extensión más adelante. Al momento de hacer la intervención en el aula se toman dos relaciones: i. la relación entre fenómenos y medios de organización y ii. la de objetos mentales y conceptos, con el fin de constituir el objeto mental comparativamente, con el ánimo de permitir a los estudiantes, la aproximación a los objetos matemáticos razón y proporción.

Con el propósito de ahondar sobre la fenomenología didáctica en el proceso de enseñanza- aprendizaje, se dan a conocer algunos de los fenómenos relacionados con la fracción como medio de organización para constituir el objeto matemático número racional, ya que el autor los vincula con la razón al considerar que ésta se establece a partir de la comparación o descripción de objetos, la división de substancias medidas por magnitudes, la distribución de

cantidades y el sistema decimal de medida, además en el uso del lenguaje cotidiano.

En este sentido Real, Gómez y Figueras afirma:

> Sirven para expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud, lo cual se asocia con la fracción como comparador, en un primer nivel de abstracción. Las fracciones también pueden describir: cantidades o valores de magnitud por medio de otros valores o cantidades, razones, procesos cíclicos o periódicos. En un segundo nivel de abstracción de la fracción como comparador se incluyen los aspectos de operador fracturante, relación de fractura, relación razón, operador razón y transformador (2013, p. 23).

En este sentido dice el autor que cuando se presenta sólo como parte de un todo, se restringe al campo de las fracciones propias, además, organizar estos fenómenos posibilita la constitución posterior de número racional. Los fenómenos enunciados permiten en un comienzo abordar la enseñanza de las fracciones desde diferentes miradas.

En un segundo momento, se toman aspectos de la evolución histórica que han permeado el proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón y la proporción, a partir de la revisión de dos textos, en los que se da a conocer el origen del tratamiento numérico de la razón o su aritmetización y el uso de la regla de tres para encontrar la cuarta proporcional en situaciones en los que se plantee la proporción. Al respecto Perry *et al*, (2003) afirman:

> En la escuela las razones terminan trabajándose como los números fraccionarios, la proporción termina siendo una igualdad entre fracciones y el cálculo de la cuarta proporcional termina reduciéndose al problema de resolver la ecuación del estilo $a \times b = c \times x$; de esta manera se hace desaparecer el problema del carácter elusivo de la razón y la proporción, y con ello la naturaleza misma de tales conceptos (p.32).

En un tercer momento, tomamos las ideas de Freudenthal (1973, 1991, citado por Bressan et al. 2004,) relacionadas con contextos reales, matematización progresiva y el aprendizaje contemplado en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), en la que se reconoce que "la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano". Este aspecto se tuvo en cuenta para el desarrollo de la investigación en el diseño de las tareas, de igual manera que para la implementación de la secuencia de las mismas en el aula.

2.1. La fenomenología didáctica de la razón y la proporción

Como se mencionó anteriormente, para el desarrollo de la investigación se tomaron las ideas de Freudenthal (1983, citado por Puig 1997) sobre la fenomenología didáctica, para ello es importante aclarar que, si bien la connotación de fenómeno tiene raíces filosóficas, para este autor éste se entenderá como, "de lo que se tiene experiencia". A partir de este planteamiento las situaciones planteadas en las tareas proporcionaron una serie de fenómenos que puedan constituirse en un medio de organización que posibilite a los estudiantes la aproximación a los contenidos matemáticos, razón y proporción.

Freudenthal (1983, citado por Puig 1997) señala que "un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno o unos fenómenos, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, y este proceso se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan" (p.3).

Para ilustrar lo que el autor plantea en relación a fenómenos/medios de organización es necesario precisar "cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos," (Puig, 1997, p.2). Para ello, se retoma el ejemplo de la fracción, pues los fenómenos que posibilitan organizarla están dados entre otros, por la experiencia que los estudiantes tienen frente a la fracturación (entendida como la partición, cuando se habla de media libra de algo), pues antes de llegar a la constitución de la fracción se han tenido que confrontar situaciones en las que este fenómeno permite organizar la fracción. En este sentido, el análisis fenomenológico que establece el autor, tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas sin pretender elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas. (Puig, 1997, p.7). De esta manera se ha ilustrado la relación, fenómenos/medios de organización, seguidamente se establece lo propuesto por el autor en torno a la relación entre objeto mental y contenido matemático.

Freudenthal (1983, citado por Puig, 1997) se refiere a la constitución de objetos mentales en la educación matemática, como aquellos que permiten caracterizar los conceptos o estructuras matemáticas a partir de procesos cognitivos, de ahí que afirme:

> El objetivo de la acción educativa en el sistema escolar, ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos —en segundo lugar, tanto temporalmente como en orden de importancia. Esta toma de partido es además particularmente importante para la etapa obligatoria de la escolaridad ya que en ella hay que considerar qué hay que ofrecer de las matemáticas al conjunto de la población (p.17).

Para el autor en el proceso de enseñanza - aprendizaje se debe distinguir el objeto mental y el contenido matemático, lo que según Puig (1997), "radica en lo que está en la cabeza de las personas —los objetos mentales— y lo que está en las matemáticas como disciplina — los conceptos. La idea de objeto mental hay que verla como un medio de organización de fenómenos" (p.18). Para Freudenthal la constitución de objeto mental, permite dar cuenta de él en todos los usos y contextos.

Por otra parte, en relación con el objeto de interés de esta investigación, como es el del proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón y la proporción, Freudenthal (2001), propone la fenomenología didáctica de estos contenidos, a través del estatuto lógico de la razón, afirmando:

> La razón es una función de un par ordenado de números o de valores de una magnitud, las operaciones aritméticas elementales también lo son, pero en ellas lo que importa es el valor que la función asigna a cada par y éste puede obtenerse por procedimientos algorítmicos. Ahora bien, si una razón se lee como el valor que se obtiene al efectuar la división correspondiente, la

> razón desaparece. El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de hablar de igualdad (o desigualdad) de razones, sin conocer el tamaño de la razón. El significado de razón viene de poder decir con sentido "a es a b como c es a d", sin anticipar que "a es a b" se puede reducir a un número que es el mismo al que se puede reducir "c es a d" (p.26).

Según las ideas del autor, en el proceso de enseñanza de la razón, se hace la distinción en cuanto "expresar" la relación entre magnitudes por medio de un número real al momento de establecer la comparación entre las cantidades respectivas de cada magnitud, lo que no quiere decir que las razones sean números, pues ellas también están acompañadas de unidades. Para nuestro objeto de estudio, este aspecto es relevante en la enseñanza de la razón en cuanto se entenderá que una razón es una comparación entre dos magnitudes, "Esta comparación expresa o bien el tamaño relativo de una magnitud respecto de la otra, o una nueva magnitud" (Obando, 2000, p.72).

En el proceso de enseñanza es relevante establecer la relación entre magnitudes, que se caracterizan en razones internas cuando son del mismo tipo (por ejemplo, centímetros con centímetros) y externas, cuando son de diferente tipo (como número de porciones y gramos), esto, por considerar que la razón al tener en cuenta la relación entre las unidades de cada magnitud se desprende del tratamiento numérico, como es llevado al aula en la educación matemática tradicional, en este sentido afirma:

> Las razones internas y externas, es preciso tomarlas en cuenta en el proceso de enseñanza, la razón puede ser una relación en una magnitud o entre magnitudes. La situación se puede esquematizar así: Hay dos espacios de medida —o magnitudes— y una aplicación lineal entre ellos. La razón en una de las magnitudes es interna; entre las dos magnitudes, externa. Una proporción conlleva una función lineal entre los espacios de medida. El que sea lineal significa que las razones internas son invariantes bajo la función y que las razones externas entre elementos que la función hace corresponder son constantes. La linealidad viene dada respecto de las razones internas implícitamente —"en tiempos iguales se recorren espacios iguales"—, y respecto de las razones externas, explícitamente — $f(x)=a\,x$, para todo x., Freudenthal. (2001, p.27).

Para Freudenthal (2001) las razones internas y externas tienen un rol importante en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón y la proporción. En el tratamiento de unidades de las magnitudes que se involucran en la relación, lo cual no es tratado en el aula cuando usualmente se abordan las razones homogéneas y heterogéneas en la educación escolar dejando de lado este aspecto. En este sentido Schwartz afirma:

> Se niega a los estudiantes la posibilidad de comprender que las razones heterogéneas son algo más que un simple cociente, y que en algunos casos éstas generan nuevas magnitudes. Por ejemplo, si 3 libras de arroz cuestan $3300, ¿qué significan los cocientes 3300 / 3 o 3/3300? El primero de ellos da como resultado 1100 pesos /libra que significa la cantidad de pesos que cuesta una libra, el cual en la escuela generalmente se expresa como $1100 (nótese la diferencia), y significa la cantidad de pesos que cuesta cada libra. Por su parte el segundo, da como resultado 0, 0099 libra/ pesos, cociente que casi nunca se pide calcular a los alumnos, y que significa la cantidad de libras que se pueden comprar con un peso. Ambos cocientes pueden ser interpretados como razones de una magnitud (libras de arroz) a la otra (cantidad de dinero), o viceversa (1988, citado por Obando 2000, p.74).

Como lo plantea Freudenthal (2001) es importante abordar la enseñanza de la razón desde el tratamiento fenomenológico a partir de la *semejanza*, tomada en el marco de la sensibilidad y la vista, al respecto afirma: “a una edad temprana, un niño reconoce dibujos y modelos de animales, muebles, coches, bicicletas, barcos como imágenes de esos objetos —no importa a qué escala ni si están dibujados a diferentes escalas uno al lado del otro”. (p.17). Este tratamiento cobra sentido para el autor, en cuanto en la comparación de las imágenes a escala, la relación visual de lo que mutuamente es igual en el original, debe ser mutuamente igual en la imagen, lo que implica la invariancia de razones internas, caracterizando las aplicaciones como *semejanzas*. De ahí que los niños se familiarizan a una edad muy temprana con estas aplicaciones que conservan las razones. Para el desarrollo de la investigación este tratamiento fenomenológico se propuso en el diseño de las primeras tareas, pues ofrecen el sustento de aproximar de manera cualitativa a los estudiantes al objeto de estudio.

El autor al hacer referencia a la *semejanza* se refiere a dar un tratamiento fenomenológico a la razón a partir de la sensibilidad y la vista, y del objeto mental comparativamente, pues con ello se comparten los planteamientos desde el aspecto cognitivo de la proporción de Piaget e Inhelder (1972, citado por Ruiz y Valdemoros, 2006) quienes afirman que, “la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica antes de estructurarse cuantitativamente, define lo cualitativo a través de categorías o clases de palabras de esta forma se apoya en reconocimientos lingüístico, creando categorías de comparación, como grande o pequeño” (p.4). Posteriormente Piaget (1978, citado por Ruiz y Valdemoros, 2006) indica que “en el paso de lo cualitativo a lo cuantitativo, aparece la idea de orden sin que todavía emerja la cantidad” (p.4).

La connotación de *semejanza* se relaciona con la de *visualización,* desde la comparación en la que lo que importa didácticamente, es la verbalización gradual del razonamiento visual, es decir, lo que interesa es la comparación entre el tamaño más que la relación de semejanza entre ángulos o lados, esto implica un mayor nivel de razonamiento, alcance que en el trabajo de investigación no se establece como propósito.

El tránsito de las verbalizaciones que hacen los estudiantes cuando expresan todo lo que puede ser visto, experimentado o construido como razón, se debe dar hacia contextos en los que se requiera una verbalización más temprana de ideas tales como *relativa o comparativamente*, según Freudenthal (2001, p.21). Dentro de la fenomenología didáctica este aspecto es la constitución del objeto mental que posibilita la aproximación a la razón y la proporción. Para el desarrollo de estas ideas el autor establece niveles, iniciando por entender las ordenaciones mayor y menor, más y menos, que pueden ser *relativamente* mayor, menor, más o menos; además de entender *en relación con,* con el criterio de comparación, y comprender *en relación con* en un contexto, conocer operativamente lo que *en relación con* significa en general” (p.23).

Respecto al tratamiento de la razón, inicialmente desde su aspecto cualitativo y luego desde el cuantitativo en su enseñanza, se toma en cuenta la propuesta en el diseño de la un conjunto de tareas, a partir de la aproximación didáctica dada por Streefland (1984, 1985 citado por Ruiz y Valdemoros, 2006) en la que se establece que “la enseñanza temprana de la razón y la proporción, debe partir de niveles cualitativos, en los que haya un reconocimiento de ellas”, este planteamiento aporta para el uso de recursos didácticos como figuras y dibujos, expresiones que favorecen el desarrollo de patrones perceptuales en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación" (p.4).

2.2. Una aproximación a la evolución histórica de los conceptos razón y proporción

Autores como Puig (1997), resaltan la importancia de la historia y su papel en el proceso de enseñanza - aprendizaje, en virtud de que permite abordar los conceptos como una actividad matemática que los crea, y no como un producto terminado. En este sentido se hizo revisión de aspectos históricos, con el propósito de establecer la evolución de los contenidos matemáticos, razón y proporción, para ello se tomaron aspectos que influyen en la forma de su enseñanza, a partir de dos escritos: *Génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización,* de Ollen y Marcen (2013*),* y *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural de* García y Serrano (1999).

Ollen y Marce (2013), hacen un análisis de los libros V y VII de *Elementos* de Euclides, para dar a conocer el concepto de razón, que se presenta a partir de lo teórico, dejando de lado la aplicación en la solución de problemas. Esta es la primera aproximación histórica de la que se pueda dar cuenta. Plantean a partir del libro V, de *Elementos* que "una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas" (V, Def. 3), en esta definición se da el tratamiento a la razón en relación al tamaño, dejando claro que no es un número. Los autores resaltan esta forma de abordar el contenido matemático lo que corresponde a una forma de iniciar con su estudio. De otro lado, una descripción, un poco más general, se da en la definición 3 del libro V, *Elementos* de Euclides: "una razón es una clase de relación entre dos magnitudes del mismo tipo con respecto a su tamaño" (Joyce, 1996, citado por Ollen y Marce 2013, p.8). En la segunda definición, a diferencia de la primera, se plantea que una razón es una relación entre magnitudes, pero sólo cobija a aquellas en las que las magnitudes que se relacionan pertenecen a un mismo tipo de magnitud sistemática a las operaciones entre razones, además nunca se habla de igualdad de razones, sino de *guardar la misma razón* (V, Def. 5) o de *guardar una razón mayor* (V, Def. 7), (Oller y Marcen 2013, p.5).

En esta aproximación inicial se establece la razón como la relación entre magnitudes, pero fue Eudoxo quien le dio significado a *guardar la misma razón* y *guardar una razón* *mayor*, desde un punto de vista geométrico, cuando establece que estas afirmaciones son válidas para cualquier tipo de magnitudes, conmensurables o inconmensurables. (Oller y Marcen 2013, p.8). En la escuela pitagórica, tanto el número como las magnitudes pertenecen a la categoría cantidad, pero número y magnitud son entidades separadas. El número corresponde al estudio de lo discreto, la magnitud al estudio de lo continuo (Moreno, 1991 citado por García y Serrano, 1999, p.13). En la revisión de las definiciones 3 y 7 del libro V de *Elementos* de Euclides, Ollen y Marce (2013) dan a conocer el tratamiento que se le da en el libro a la razón a partir de razones homogéneas, (internas) y se dejan de lado las razones heterogéneas (externas). Estos dos tipos de razones, como se planteó anteriormente, son necesarias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la razón.

Para la proporción se revisa por parte de los autores la forma como se aborda en los libros VI y VII.

La proporción en la cultura griega fue trabajada en contextos geométricos, por ejemplo, "si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias" (VI, Prop.16). No tenía sentido considerar el producto de dos magnitudes y sus resultados como "si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero" (VII, Prop. 19). En estos postulados se plantea que la proporción "requiere de tratamientos radicalmente diferentes, ambos enunciados se basan en definiciones distintas de la proporcionalidad y mientras que el primer se circunscribe a un ámbito muy concreto (rectas y rectángulos) el segundo se presenta de forma más general" (Oller y Marcen 2013, p.9).

Siguiendo estas ideas, en el libro *Elementos* se le da un tratamiento geométrico a la proporción, desarrollando dos teorías aparentemente distintas. Una para números y otra para magnitudes, al respecto García y Serrano (1999) afirman, "durante la edad de oro del mundo griego (finales del siglo Va C.), las matemáticas representan el inicio de una etapa de consolidación del pensamiento matemático en un cuerpo estructurado racionalmente. El principio que reguló el desarrollo del pensamiento pitagórico fue determinado por la afirmación "todo es número" que significaba que todas las cosas se podían explicar con las propiedades intrínsecas de los números y sus razones" (p.13).

Por otra parte, es importante precisar que en traducciones posteriores se hizo un tratamiento básicamente numérico a la razón, por ejemplo, la que aparece a mediados del siglo XIII de Giovanni Campano (citado por Oller y Marcen, 2013), en la que afirma:

> Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese [número] menor que están en el mayor. Y [de una razón] de un número más grande en relación a otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es (p.16).

Esta definición conlleva a introducir la aritmetizacion de la razón, que ha sido llevada al contexto escolar, dejando de lado lo planteado en *Elementos* donde se aborda como la relación entre magnitudes.

La misma traducción introduce la proporción, como la semejanza de dos razones, cuando establece que, “se dicen semejantes a las razones que reciben la misma denominación, y más grande a la que [recibe] una más grande, y más pequeña a aquella que [recibe] una menor.” A partir de estas definiciones tanto para razón como para la proporción se da inicio a la asociación de la razón con un número racional y al de la proporción con el de la igualdad o la relación de orden entre razones con los respectivos conceptos numéricos.

Oller y Marcen (2013) han dado a conocer, en un primer momento, el contexto histórico de los contenidos objeto de estudio a partir de un planteamiento teórico, como lo hace el libro *Elementos* de Euclides. Posteriormente afirman que en el siglo II se establece la aparición de su aplicación en situaciones mercantiles a través del concepto *hino de lü* , cuya traducción en inglés es *proportional value*, la interpretación que los autores hacen de este concepto es, “ *la lü* es un conjunto de valores entre varias magnitudes directamente proporcionales”, Este concepto de *lü*, de acuerdo a los autores, es fundamental en la cultura china porque permitirá comprender el tipo de razonamiento subyacente a la génesis de la Regla de Tres” (p.12).

Para estos autores, la concepción de proporcionalidad, permite relacionar directamente dos magnitudes distintas. De hecho, se consideran simultáneamente pares de magnitudes diferentes. “Esta forma de enfocar la situación está mucho más cerca de una concepción funcional puesto que mientras en el enfoque griego se relacionan por separado cada una de las magnitudes y después se comparan dichas relaciones, en el chino se entra directamente a analizar la relación existente entre ambas magnitudes, predominando la idea de razón externa frente a la interna." (Oller y Marcen, 2013, p.12).

Esta breve mirada histórica, permite dar a conocer la manera como se ha abordado el proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón y la proporción. La aparición de la aritmetización de estos conceptos sigue siendo una de las maneras de darle tratamiento a la razón y la proporción en el proceso de enseñanza - aprendizaje, dejando de lado la relación entre las magnitudes, de igual manera, sólo el tratamiento de las razones internas, por ser un escalar no permite el paso a la proporción cuando se trata las razones externas, es decir, entre dos magnitudes.

Finalmente, abordar la razón desde un aspecto numérico y el trabajar sólo con razones homogéneas (internas) ha permitido llevar en el sistema escolar la enseñanza de la razón y la proporción en el planteamiento de situaciones de proporcionalidad que son tratadas en su solución, con procedimientos netamente numéricos, como es la regla de tres.

2.3. Principios del enfoque de la educación matemática realista

Las ideas que soportan el cómo y el qué en el desarrollo del trabajo de investigación, a partir del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), están sustentadas por los aportes dados por Freudenthal, a quien se le atribuye ver las matemáticas más que como un proceso, como una *actividad humana,* desde esta perspectiva se retoman las ideas de la EMR que forman un conjunto de principios y teorías locales de enseñanza de temas de la matemática. Según Bressan *et al*. (2016), el análisis y la reflexión continua de estas ideas, ha dado lugar a lo que se reconoce como la relación con la realidad, manteniéndose cercana a los niños y siendo relevante para la sociedad; para ello, el uso de contextos realistas es una de las características determinantes de este enfoque, es decir, son los estudiantes quienes a partir del diálogo, la interacción entre pares, la negociación y mediación del profesor, están encargados de construir su propio conocimiento, utilizando situaciones reales como punto de partida para aprender matemáticas.

En este sentido, se dan a conocer los principios de la EMR, que fueron tomados como referentes en el trabajo de investigación para el diseño de las tareas y la posterior implementación en el aula, así como las herramientas que, desde el enfoque, hicieron parte del análisis de la información a partir de las producciones escritas de los estudiantes y del registro audiovisual de los mismos.

2.3.1. Los contextos y la realidad

Según Freudenthal (1973, 1991) dado que, gran parte de la matemática surge históricamente como herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Esto no significa restringirse a fenómenos del mundo real (perceptual), dado que esto limitaría las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro de la matemática misma. Sustenta esta idea, diciendo que con bastante frecuencia las estrategias informales de los estudiantes pueden interpretarse como anticipaciones más que como procesos formales (Gravemeijer y Teruel, citado por Bressan et al 2004 p. 7). La pretensión en la enseñanza es que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas, puedan reinventarlas al abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas (Bressan, *et al*, 2016, p.3).

Los contextos realistas que dependen de la experiencia de los alumnos o de su capacidad para imaginarlos o visualizarlos, cumplen un papel importante en el aprendizaje matemático, en tanto:

- En el proceso de enseñanza - aprendizaje, son puntos de partida para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.
- La adecuada selección puede resultar interesante para los alumnos.
- Se constituyen en objetos de trabajo, haciendo accesible el contenido matemático y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización según sus posibilidades.
- Promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.

- Admiten estrategias variadas dando lugar a discusiones matemáticas entre los alumnos.
- Se usan a profundidad (Bressan *et al*, 2016, p.4).

En este sentido, la educación matemática debe apuntar a matematizar la realidad de todos los días. Los niños no pueden matematizar la matemática, ya que, en un principio, no hay objetos matemáticos que sean de su experiencia real. (Gravemeijer y Teruel, citado por Bressan et al 2004 p. 4), de esta manera en el enfoque de la EMR, el rol del estudiante deja de ser pasivo contrario a lo que ocurre cuando se lleva al aula un planteamiento de la enseñanza a partir de la "transposición" de conocimientos que hacen parte de la intervención "anti didáctica", criticada por Freudenthal (1983).

2.3.2. Proceso de matematización

Una de las ideas principales de la EMR es concebir la matemática como una actividad humana, a la que todas las personas tienen acceso; en coherencia con este enunciado los aportes de Freudenthal (1973,1991), están referidos a facilitar el encuentro entre la organización matemática de situaciones bajo un contexto realista y la matemática formal, profundizando en el proceso de matematización progresiva, que se puede obtener mediante la formulación de secuencias didácticas, que posibiliten reconocer la utilidad de los saberes matemáticos a enseñar y las diferentes maneras de apropiación de dichos saberes por parte de los estudiantes.

En palabras de Bressan *et al,* (2004) en el proceso de matematización progresiva la EMR admite que los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión, caracterizados por el tipo de actividad mental y lingüística: Estos niveles son:

Nivel situacional: asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma y la puesta en marcha de las estrategias personales de los estudiantes, su sentido común y su experiencia para identificar y descubrir la matemática existente en el contexto.

Nivel referencial: aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como **modelos de** en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.

Nivel General: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables de los mismos y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los **modelos para** la resolución de los mismos.

Nivel Formal: está relacionado con la comprensión; utilización de procedimientos y notaciones convencionales que hacen parte de la matemática vinculada al contexto trabajado (p. 7).

Los niveles de comprensión están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada (Bressan *et al*, 2004, p.7).

Treffers (1987) se refiere a la idea de matematizar de Freudenthal, diferenciando la matematización horizontal y la matematización vertical al plantear:

> la primera se refiere a convertir una situación dada en un contexto, en un problema matemático, es decir conduce desde el mundo de la vida (entendida como realidad) al mundo de los símbolos. Este proceso consiste básicamente en la organización de situaciones reales mediante herramientas matemáticas, apoyados en la intuición, el sentido común, el uso de estrategias informales ligadas directamente al contexto, con el fin de alcanzar diferentes niveles de abstracción y la segunda toma la disciplina matemática como parte del proceso que permite la reorganización dentro de la matemática misma, lo cual conlleva a estrategias de reflexión, procesos de abstracción, generalización, prueba, simbolización y esquematización, con lo cual se espera alcanzar mayores niveles de formalización matemática (Bressan *et al*, 2004, p.7).

En este sentido, los modelos se constituyen en un recurso para cerrar la brecha entre la matematización contextualizada de los estudiantes (informales) y la matematización formal de la disciplina, lo que se constituye "en el paso de *modelos de* relacionado directamente con los contextos, a *modelos para*, que permiten organizar matemáticamente otro tipo de situaciones, posibilitando de esta manera un razonamiento matemático más formal (Bressan *et al*, 2004, p.4).

2.4. El aprendizaje en la EMR

El aprendizaje en la EMR, es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos. Las interacciones sociales verticales (docente-alumno) y horizontales (alumno-alumno) ocupan un lugar central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos (Dekker *et al*., 2004; Elbers, 2003; Zolkower & Shreyar, 2002, 2007). No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener la clase general junta como una unidad de organización o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos, lo que fue defendido por Freudenthal (1983,1991). Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

En cuanto a las representaciones, la visión de Freudenthal (1973, 1991) desde la EMR, en relación a la enseñanza - aprendizaje, se basa en la organización de este tipo de situaciones, a través de lo que denomina la *reinvención guiada* aclarando que no sólo son fenómenos del mundo real (perceptual), dado que esto limitaría las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro de la matemática misma. Se trata que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas (Bressan *et al*, 2016, p.3).

Siguiendo con las ideas de la EMR en el proceso de aprendizaje, es central poner especial atención a las soluciones informales y las producciones libres de los estudiantes, dado que se pueden resolver de distintas maneras, aspecto que permite observar los niveles de comprensión y habilidades de cálculo que estos poseen en un determinado momento.

En tal sentido, para la investigación es relevante analizar a partir de las producciones escritas de los estudiantes, y de las diferentes formas de representación, las cuales son soportadas en procesos de verbalización dadas en la solución de las tareas, aspecto que permite establecer la relación entre las dificultades y los avances en los diferentes niveles de comprensión.

2.5 Algunas ideas sobre la representación

Dentro de los aspectos que dan cuenta del aprendizaje de los estudiantes, se encuentra el de la representación, que permite establecer los niveles de comprensión de los estudiantes, pues no solo desde el lenguaje natural se establecen relaciones que encuentran en el desarrollo de la tarea, sino también desde la introducción de símbolos en donde a partir del uso de algunos elementos matemáticos, y con diferentes representaciones, se pueden dar registros de una mayor comprensión.

En los trabajos de Freudenthal (1983) se evidencia el reconocimiento que tienen las formas de representación cuando se abordan objetos mentales. Da cuenta de ello en lo planteado en el estudio de las fracciones al referirse al todo y a la parte, cuando se establece el modo de dividir el todo, que puede ser estructurado o no estructurado, para ello toma el ejemplo "de una bolsa de canicas - todo definido discreto- en donde toma arbitrariamente una décima parte - una elección no estructurada- o la primera décima parte o una de cada diez – una elección estructurada-" (p.17).

La representación ha sido tomada como punto de reflexión en estudios recientes de Duval quien reconoce su importancia al plantear que:

> En matemáticas, a diferencia de la mayoría de disciplinas, no es posible acceder a sus objetos desde la percepción, sino a través de representaciones usando una gran variedad de sistemas semióticos de representación, los cuales requieren ser apropiados por un sujeto que pretenda adquirir conocimientos y estudiar los objetos propios de esta disciplina, en tanto algunos de estos sistemas culturalmente se han constituido en instrumentos generadores de conocimiento. (citado por Rojas 2013, p.37).

Este trabajo se apoyó en los planteamientos de Duval, en cuanto a la relación entre sistemas de representación y niveles de comprensión dados por el enfoque de la EMR, estableciendo la diferencia, desde la mirada de la fenomenología didáctica, soporte de la investigación, en la constitución de objetos mentales a cambio de la adquisición de conocimiento.

Para el análisis de los niveles de comprensión de los estudiantes en el desarrollo de la investigación, se tuvo en cuenta el soporte desde el lenguaje natural y el uso de símbolos matemáticos que cumplieron el propósito de comunicar, y de establecer si los estudiantes utilizan más de una representación para ubicar sus producciones escritas en algún nivel de comprensión.

En este sentido tomamos lo relacionado a la comunicación aportado por Rojas (2013) quien plantea:

> En el caso de las matemáticas, resulta fundamental reconocer no sòlo la importancia de las representaciones semióticas, sino también la diversidad y las múltiples posibilidades de dichas representaciones. Se insiste en que, si existe un interés de comunicar, resulta importante no solo contar con diversos registros de representación, sino también escoger cuál de ellos permite representar mejor el rasgo que se quiere destacar, teniendo en cuenta a quien se quiere comunicar; por lo tanto, la elección de los rasgos no es neutral, pues depende de la comunidad en la cual se desarrolla la comunicación y de la intencionalidad de quien elige la representación (p.40).

Se resaltan, en la investigación, las representaciones de los estudiantes, orientadas a los niveles de comprensión, en las que son capaces de hacer uso de más de una representación, no solo con el lenguaje natural, sino con la incorporación de símbolos matemáticos que pueden dar cuenta de su comprensión.

3. Marco metodológico de la investigación

En este capítulo se dan a conocer los elementos que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de la investigación. Inicialmente se describe la metodología del estudio que corresponde al enfoque cualitativo, apoyado por las etapas del método de la investigación-acción, con el propósito de transformar la manera como se enseñan los objetos matemáticos, razón y proporción. Posteriormente, se dan a conocer las características de la población que hizo parte de la investigación; así mismo, la justificación de cada una de las seis tareas que hicieron parte de la secuencia didáctica; finalmente, se describe el proceso de la organización y sistematización de la información y la constitución de los datos.

3.1. Enfoque metodológico de la investigación

La intervención de aula se orientó a posibilitar la constitución del objeto mental *Comparativamente*, con el fin de aproximar a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, a abordar de manera comprensiva la razón como relación entre magnitudes y la proporción como relación entre razones, en la enseñanza- aprendizaje de dichos contenidos. Para ello se implementó en el aula una un conjunto de tareas a partir de situaciones contextualizadas, susceptibles de ser organizadas matemáticamente.

La investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo[4] de tipo descriptivo, interpretativo cuyo interés de estudio, se centró en el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, con el propósito de dar cuenta de los avances y dificultades, en los niveles de comprensión que reportaron al organizar fenómenos que permitan la constitución del objeto mental comparativamente.

En este sentido la investigación-acción en educación se desarrolló en ciclos (Elliot, 1990), teniendo en cuenta las siguientes etapas: planificación, acción, observación y reflexión, desde una mirada retrospectiva. A continuación, se da una descripción general de cada uno de

[4] Por cuanto permite “la descripción de manera detallada de las situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, permitiendo incorporar lo que los participantes dicen, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones , tal y como son expresadas por ellos mismos” (Watson, 1988, citado por Pérez, 2007, p.3).

los momentos, que fueron enriquecidos con algunos de los principios de la Educación Matemática Realista.

Planificación: se realizó el diseño y la adaptación de seis tareas a partir de contextos realistas, con el propósito de potenciar la constitución del objeto mental "comparativamente", y de esta manera, la aproximación a los contenidos, razón y proporción, iniciando por su aspecto cualitativo para luego ir haciendo el tránsito hacia el aspecto cuantitativo.

Acción: se realizó la implementación de las seis tareas, iniciando con el trabajo individual de los estudiantes, permitiendo las producciones libres, para luego hacer la interacción con los compañeros al trabajar en grupos de tres y, posteriormente, la socialización con todo el grupo de los 19 estudiantes, de esta forma se tuvo en cuenta la "reinvención guiada" que en palabras de Freudenthal, (1991, citado por Bressan *et al*,2016), entendido como "el proceso en el que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente" (p.5).

En el desarrollo de la investigación se buscó que el rol de la docente-investigadora, fuera, siguiendo al autor, "la de didactizar" entendida como la actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal, cuando los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas, como a nivel vertical, cuando reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones para facilitar la "matematización" de los estudiantes".

Para el análisis de las producciones escritas se toman los niveles de comprensión a partir de la EMR, como son: *nivel situacional, nivel referencial, nivel general y nivel formal.* Bressan (2011).

Observación**:** se da en dos momentos, el primero, en la actividad desarrollada en el aula cuando hacen el trabajo individual, el de grupos y la socialización entre todos los integrantes del curso y otra, a posteriori, basada en el registro audiovisual y las producciones escritas de los estudiantes.

Reflexión**:** el proceso de reflexión se da desde lo que se evidenció en la producción de los estudiantes, desde lo revisado en contextos teóricos y el propósito de la investigación, aspecto que permitió la toma de decisiones y el análisis e interpretación de lo realizado por los 19 estudiantes.

3.2. Población

El trabajo se desarrolló con 19 estudiantes del curso quinto de educación básica primaria, en una institución de carácter privado al sur de la ciudad de Bogotá, en un segmento socio- económico de estratos 2 y 3,[5] durante el segundo y tercer bimestre académico del año escolar 2018, en 16 sesiones, entre abril y septiembre, con una duración aproximada de 90 minutos cada una. Las sesiones se desarrollaron en el horario de clases, una vez a la semana, por cuanto existe a nivel institucional un calendario académico que se debe cubrir.

La organización de los grupos con un máximo de tres estudiantes, se hizo de manera voluntaria, pues este aspecto les dio la libertad de poder interactuar con las personas con quienes tienen mayor afinidad, y, de esta manera, poder compartir de forma desprevenida la forma de abordar cada situación planteada en las tareas.

3.3. Diseño de la un conjunto de tareas

En esta investigación se desarrolló una intervención de aula, orientada a fortalecer los procesos de enseñanza - aprendizaje de los objetos matemáticos, razón y proporción con estudiantes de quinto grado de educación básica primaria, a partir de la implementación de un conjunto de tareas en las que se consideraron situaciones cotidianas, susceptibles de ser organizadas matemáticamente a través de la relación entre magnitudes, como una aproximación a la razón y la relación entre razones como aproximación a la proporción, en donde el objeto mental comparativamente se constituye en elemento fundamental en la posibilidad de la constitución de dichos conceptos.

Por otro lado, con el conjunto de tareas se asumió la adaptación curricular de una de las temáticas del área de matemáticas en grado quinto, establecida en los estándares curriculares y en la malla curricular de la institución en donde se implementó la propuesta a los 19 estudiantes de grado quinto.

---

[5]5. En Colombia existen 6 estratos socioeconómicos, los estratos 1 y 2 se caracterizan por sus bajos ingresos económicos, y por su ubicación geográfica entre otras.

En relación al diseño de las tareas se tuvo en cuenta, en primer lugar, la fenomenología didáctica para los contenidos matemáticos, razón y proporción; en segundo lugar, se consideraron algunas herramientas teóricas y metodológicas, relacionadas con el enfoque de la EMR, lo que permitió establecer el diseño del conjunto de tareas. Es de anotar que el análisis de estos elementos relacionados con el enfoque, hacen parte del marco referencial, desarrollado en capítulos anteriores.

Para el diseño de las tareas se buscaron fenómenos que, desde contextos realistas cercanos a los estudiantes posibilitaran la constitución del objeto mental comparativamente, para ello, se revisó la fenomenología didáctica propuesta por Freudenthal (1983) respecto a la razón y la proporción, para comenzar a acercar de manera perceptual a los estudiantes a la relación de la magnitud, tamaño de algunas fichas, a partir de la manipulación de material concreto en donde desde el uso del lenguaje natural *ser más grande* o *más pequeño* se tenga aproximación a la relación entre magnitudes. Posteriormente, mediante la ampliación y reducción de un documento de Identidad, la estimación de estaturas, la relación entre los ingredientes de una receta de cocina, se aproxime a la relación entre las magnitudes a partir de razones internas y externas.

En la investigación al diseñar las tareas también se resalta la importancia de presentar situaciones no proporcionales y, finalmente, tomar elementos de la primera tarea para involucrar más elementos de la comparación en la última.

Resultado de la indagación se realiza el diseño de 6 tareas, las cuales se desarrollan y se analizan en el siguiente capítulo y se organizaron de acuerdo a los propósitos que se ilustran a continuación:

Tarea 1. Comparando superficies. En esta tarea se inicia con la comparación del tamaño de las superficies de algunas fichas del tangram chino a partir de lo cualitativo, es decir, desde aspectos perceptuales en donde se posibilite establecer la relación en cuanto ser *más grande* o *más pequeño*. El propósito es posibilitar a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, el reconocimiento cualitativo de la noción de razón interna a través de la comparación del tamaño de algunas fichas del tangram.

Tarea 2. Reduciendo y ampliando documentos. Se compone de un juego de fotocopias de un documento de identidad, el cual está ampliado al 200%, y al 150%, reducido al 50%y en el tamaño original. El propósito es utilizar las nociones de reducción y ampliación de una fotocopia, para hacer comparaciones de tipo cualitativo que permitan el tránsito a lo cuantitativo, para posibilitar el reconocimiento de razones internas.

***Tarea 3. Comparación de estaturas*.** A partir de la fotografía de la mujer más pequeña y el hombre más alto del mundo, realizar estimaciones para comparar. El propósito de la tarea es aproximar a los estudiantes de grado quinto a la comparación a través de la estimación de estaturas, para abordar la razón interna de manera cuantitativa.

***Tarea 4. Receta de cocina*.** A partir de una receta de cocina para 4 personas, establecer la relación entre las magnitudes al variar el número de porciones que se van a preparar. El propósito es identificar la variación entre cantidades de diferente magnitud para comparar de forma cuantitativa las razones externas en relación a la proporcionalidad entre ellas.

Tarea 5. Relación entre estatura y número de calzado: Realizar la tabla de medición de la estatura de 10 estudiantes y su número de calzado para encontrar la existencia o no de alguna relación entre las magnitudes. El propósito es realizar comparaciones, a partir de completar una tabla con los datos solicitados, para identificar la no proporcionalidad entre las razones externas de las magnitudes estatura y número de calzado.

***Tarea 6. Relación entre los catetos del triángulo pequeño y el triple del lado del cuadrado de 7 fichas*.** Dado el cuadrado construido con el tangram chino de 7 fichas, encontrar la relación entre el cuadrado original (formado con las 7 fichas del tangram) y el tamaño de la ficha del triángulo pequeño, para luego encontrar la relación con la misma ficha al duplicar y triplicar el lado del cuadrado original. El propósito es identificar la razón entre el tamaño de la ficha del triángulo pequeño al ampliar el lado del cuadrado original.

3.4. Recolección de la información

La recolección de la información se desarrolló durante el segundo y tercer periodo académico, a través de la implementación en el aula de las 6 tareas a 19 estudiantes del grado quinto, proceso que se encuentra registrado en las producciones escritas de los estudiantes, de forma individual y grupal, y en los episodios audiovisuales de cada una de las sesiones.

En un primer momento, se trabajó individualmente para registrar las *producciones libres* de los estudiantes, forma como se denomina el trabajo individual en la EMR. En un segundo momento, se realizó la interacción con pares, al trabajar en grupos de 3. Por último, en la plenaria con todo el grupo, se buscó escuchar los aportes en la solución de cada una de las tareas, para propiciar el diálogo y la actividad social propia del aprendizaje del enfoque que soporta el trabajo de investigación.

En cuanto al rol de la docente, consistió en describir el trabajo a desarrollar al momento de la implementación, resaltando la importancia de escribir las explicaciones que dieran a cada una de las soluciones, con el propósito de analizar los niveles de comprensión dados por la EMR, que alcanzaron los estudiantes.

En este sentido, se realizó el análisis de las producciones escritas de cada uno de los estudiantes, en relación con las tareas propuestas, análisis que se complementó con la transcripción de fragmentos de las videograbaciones, orientado a identificar si los estudiantes se aproximan o no a la constitución del objeto mental comparativamente y a la identificación de las magnitudes y la relación entre ellas, como aproximación a la razón y la proporción.

3.5. Organización y sistematización de la información

El proceso de organización y sistematización de la información en este trabajo, se desarrolló desde la teoría de la EMR y de la fenomenología didáctica de razón y proporción. Esto permitió comprender las habilidades, las experiencias cotidianas y las prácticas de los estudiantes; a través de la variedad de estrategias que utilizaron al resolver cada una de las situaciones presentadas en las tareas.

Tomando como referencia los niveles de la matematización horizontal y matematización vertical de la EMR, Henao y Vanegas (2012), establecen las siguientes características en los cuatro niveles de comprensión, estos han sido adaptados al propósito de la investigación para el análisis a priori de las producciones escritas de los estudiantes.

Nivel situacional

- Identifica las magnitudes que intervienen en la situación.
- Utiliza referentes específicos para representar la situación.

- Plantea modelo de solución elaborada a partir de esquemas, dibujos donde se evidencia la manera en que comprende el patrón.

Nivel referencial

- Justifica y explica con sus propias palabras (oral - escrito) las relaciones y regularidades encontradas entre las magnitudes involucradas.
- Enriquece las representaciones gráficas con objetos matemáticos.
- Plantea diferentes modelos matemáticos particulares de la situación-problema, aunque se visualiza un vínculo con el contexto, modelos de solución en el que, por ejemplo, cada término de la secuencia está determinado por la figura inmediatamente anterior.
- Propone un modelo de solución asociado a valores particulares, en donde invisibilizan la expresión para cualquier figura, por valores específicos en la secuencia.

Nivel general

- Enuncia modelos en los que utiliza notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales.
- Propone las primeras relaciones entre magnitudes generalizadas, que dan cuenta de la comparación entre las magnitudes involucradas en cada una de las situaciones planteadas.
- Constituye expresiones generalizadas que modelen la situación planteada y valida el modelo encontrado.

Nivel Formal

- Reconocen los conceptos implicados en la situación problema.
- Valida el modelo matemático encontrado.
- Reconoce y coordina diversos modelos de la situación-problema.

3.6. Categorías de análisis

Para efectos de la organización y sistematización de la información, se realizó un análisis previo de cada una de las tareas, relacionado con las posibles maneras en que los estudiantes abordarían la tarea, frente a la constitución del objeto mental comparativamente, y a la relación entre las magnitudes, a partir de lo cual se establecieron categorías de análisis previas, las cuales son complementadas con las producciones de los estudiantes a través de un análisis a posteriori.

En la investigación es importante el proceso de sistematización y organización de la información que debe ser analizada e interpretada, tanto a la luz de la pregunta de investigación y los objetivos planteados, como desde los principios teóricos y metodológicos de la EMR, por tal razón se han establecido categorías de análisis a partir del análisis fenomenológico que sustenta el estudio y de los aportes teóricos de la EMR.

Para la construcción de las categorías de análisis se han tomado las producciones e interacciones de los estudiantes que hacen parte del objeto de estudio, teniendo en cuenta el análisis a priori, que se estará ajustando a partir de las respuestas a las tareas propuestas; y las propuestas de solución planteadas por los estudiantes, con el fin de contrastar las predicciones con lo que realmente ocurrió en la implementación. Desde esta perspectiva, la implementación del conjunto de tareas pretende esencialmente dar cuenta de la constitución del objeto mental comparativamente.

Categoría 1. Reconoce las comparaciones a través de la percepción visual, sin establecer relación entre las magnitudes involucradas.

Categoría 2. Reconoce las comparaciones a través de la representación de dibujos o esquemas asociados al contexto. Establece la relación entre las magnitudes involucradas de forma cualitativa.

Categoría 3. Reconoce las comparaciones por medio del lenguaje natural, asociando a una situación específica. Establece la relación entre las magnitudes involucradas de forma cualitativa.

Categoría 4. Reconoce las comparaciones a través del tránsito entre la representación en el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Establece la relación entre las magnitudes involucradas de forma cualitativa y/o cuantitativa.

Categoría 5 Reconoce las comparaciones a través de la representación con lenguaje matemático. Establece la relación entre las magnitudes involucradas de forma cuantitativa**.**

Constitución del objeto mental comparativamente

El análisis de la información, las producciones escritas y las interacciones de los estudiantes, se han interpretado a través de los niveles de comprensión establecidos desde el enfoque de la EMR, mediante descriptores que permitieron establecer propuestas y, de esta manera identificar el avance progresivo de los estudiantes respecto a los niveles de comprensión de una tarea a la otra. Evidentemente, la tarea de comprender cada uno de los procesos individuales no es una tarea sencilla, Henao y Vanegas (2012) consideran que: el análisis de la información debe descansar sobre el marco teórico adoptado y por lo tanto, los niveles de comprensión representan un aspecto importante, puesto que ayudan a seguir los procesos de aprendizaje, situando tanto el trabajo que hacen los estudiantes en niveles de matematización horizontal, como en niveles de matematización vertical.

4. Desarrollo de la propuesta

En este capítulo se dan a conocer los análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de cada una de las tareas propuestas, a partir de las producciones individuales de los estudiantes, el trabajo por grupos y la socialización con todos los estudiantes. Para el análisis se han tomado el propósito de la tarea y las categorías de análisis a priori que proporcionaron elementos para ubicar el nivel de comprensión en que se encuentran los estudiantes de acuerdo a las respuestas dadas a la totalidad de preguntas planteadas en el conjunto de tareas.

4.1. Análisis de los resultados de las tareas implementadas

Como aspecto a resaltar, se observó que, aun cuando trabajaban en grupos, cada uno hacía de manera independiente la solución de la situación, aspecto que poco a poco se fue corrigiendo, con la reflexión hecha por parte de la docente- investigadora al resaltar la importancia de compartir entre los compañeros la forma de abordar la solución para concertar y llegar a acuerdos.

En esta sección se presenta el análisis del propósito del diseño de cada una de las tareas que hacen parte de la secuencia, así mismo el análisis de las producciones de los estudiantes y, finalmente, una breve síntesis de los resultados obtenidos, aspecto que permitió la toma de decisiones en la continuación de la implementación programada.

En un comienzo se realizó el análisis específico de la producción individual de los estudiantes para cada una de las tareas, en el contexto del grupo, que fue complementado con las videograbaciones de las interacciones de los estudiantes durante el trabajo en grupo y la socialización, al igual que por las notas de campo de la docente investigadora. Con el fin de presentar las interacciones durante la socialización que dan cuenta de las diferentes categorías de análisis se presentan fragmentos de diálogos que dan cuenta de ello.

4.1.1. Tarea 1. Comparación de superficies

En esta tarea se pretende posibilitar a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, el reconocimiento cualitativo de la noción de razón interna a través de la comparación del tamaño de algunas fichas del tangram.

El tangram chino es un rompecabezas compuesto por siete fichas o piezas con formas geométricas: 5 triángulos rectángulos (dos pequeños, uno mediano y dos grandes) y 2 cuadriláteros (un cuadrado y un paralelogramo), como se muestra a continuación:

a) ¿Qué relación encuentra entre el tamaño de la superficie de un triángulo grande y el tamaño de la superficie de un triángulo mediano?

Relación:

Justifique su respuesta:

b) Sofía construyó un cuadrado con dos triángulos grandes. Si le pidiera construir un cuadrado del mismo tamaño que el de ella, pero usando sólo triángulos pequeños (asumiendo que se puede hacer uso de las fichas de varios tangram), ¿cuántos triángulos pequeños en total requeriría para hacerlo?

Relación:

Justifique su respuesta:

Figura 15. Diseño de la tarea.

Esta tarea, tal como fue dada a conocer en el capítulo de los referentes metodológicos, se constituye en la primera aproximación al objeto mental comparativamente a partir de un contexto realista como es la manipulación del material concreto, con el tangram chino de siete fichas se espera que los estudiantes identifiquen la comparación y la relación entre las magnitudes involucradas, como el tamaño de la superficie de algunas fichas del tangram de manera perceptual, al ser una forma de aproximación cualitativa representada a través de dibujos, esquemas, lenguaje natural o lenguaje matemático.

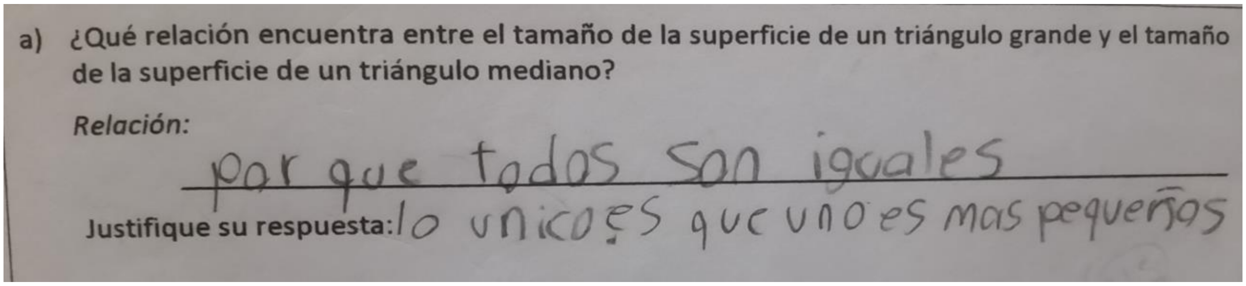
La sesión se inicia haciendo una descripción general del trabajo a desarrollar, resaltando la importancia de cada uno de los aportes, ya sea a nivel individual o grupal, en este sentido se plantea por parte de la docente- investigadora la necesidad de no utilizar hojas adicionales y registrar todos los aportes en el documento que les fue entregado.

Luego de organizados los grupos con máximo tres estudiantes, se observó que varios de ellos continuaban haciendo el trabajo de manera individual, situación que hizo necesaria la intervención de la docente- investigadora en donde explica la importancia de desarrollar el trabajo en grupo porque permite escuchar las diferentes opciones de solución que cada uno de los compañeros puede aportar, proceso que posibilita enriquecer los diferentes caminos para lograr el hallazgo de múltiples resultados de la tarea. Durante el desarrollo, la docente pasó por cada uno de los grupos con la intención de escuchar las discusiones al interior de cada uno de ellos y así poder tener el registro del video para el posterior análisis.

Las propuestas de solución dadas por las producciones escritas de los estudiantes para la primera tarea están caracterizadas por:

Categoría 1. Representación a partir de lo visual: 5.25%

- Estudiantes que reconocen las comparaciones a través de la percepción visual, sin establecer relación entre las magnitudes involucradas.


a) ¿Qué relación encuentra entre el tamaño de la superficie de un triángulo grande y el tamaño de la superficie de un triángulo mediano?

Relación: por que todos son iguales

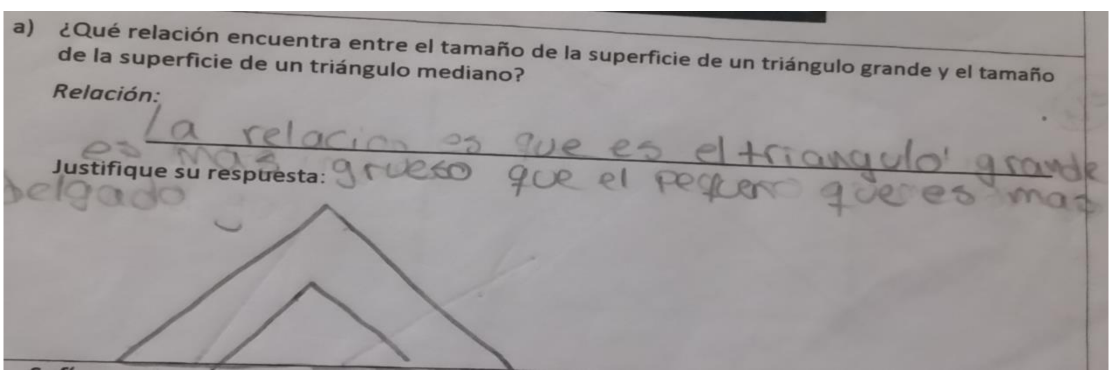
Justifique su respuesta: lo unico es que uno es mas pequeños

Figura 16. Producción escrita de solución que no establece relación entre las magnitudes involucradas.

En esta solución aparece en lenguaje natural la expresión es “más pequeño”, como soporte de lo que a través de la visualización le permite al estudiante establecer la comparación entre las fichas, sin considerar el tamaño de las superficies en relación a la magnitud involucrada.

Categoría 2. Reconocen la comparación a través de la representación figural: 68.42%

En esta categoría se ubican las producciones de los estudiantes que reconocen las comparaciones a través de la representación de dibujos o esquemas asociados de forma cualitativa.


a) ¿Qué relación encuentra entre el tamaño de la superficie de un triángulo grande y el tamaño de la superficie de un triángulo mediano?

Relación: La relacion es que es el triangulo grande es mas

Justifique su respuesta: grueso que el pequeño que es mas delgado

Figura 17. Modelo de solución de comparación de manera figural.

En este grupo de soluciones la relación entre las magnitudes se establece de forma cualitativa a través del uso de expresiones como es “más grueso”, es “más pequeño”, tienen el mismo ángulo, son triángulos que tienen diferente tamaño.

En la revisión del registro audiovisual algunos estudiantes hacen referencia a estos términos.

Profesora: ¿A qué se refieren con respecto a la ficha cuando dicen que es más grueso o es más ancho?

Luisa: Que el grande es más ancho a los lados en los bordes, y el pequeño es más delgado en los bordes, es más fácil de doblar.

Profesora: ¿A qué te refieres cuando dices es más grueso?

Danna: (otra estudiante decide intervenir) Estábamos comenzando a ver el triángulo, y lo cogimos así (muestra con sus manos que sobrepuso uno al otro) y vimos que tenía el grosor más ancho que el pequeño y nos dimos cuenta que era más grueso por el grosor.

Figura 18. Comparación perceptual de las fichas del tangram.

En este grupo de soluciones se puede evidenciar que los estudiantes reconocen la diferencia entre los tamaños cuando establecen ser más grande o más pequeño uno de otro, lo que según Freudenthal (2001) posibilita manejar la semejanza como una equivalencia, aspecto que le da significado propio a la razón al hablar de igualdad o desigualdad de razones.

Dentro de las soluciones pertenecientes a la categoría 2 también se encuentran las que establecen la comparación a partir de la representación figural acompañada de elementos matemáticos como la siguiente:

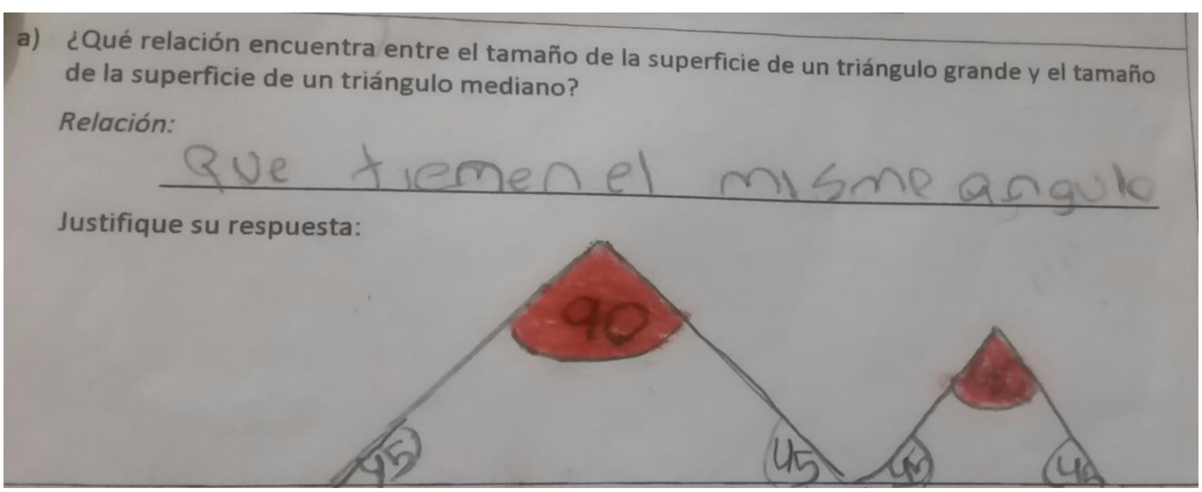


Figura 19. Representación figural de la comparación acompañada de elementos geométricos.

En esta producción se establece a partir del dibujo la comparación en cuanto tamaño, manteniendo la conservación de los ángulos internos de los triángulos, en relación a esta producción la estudiante registra en el audiovisual lo siguiente:

Profesora: Shenoa dime, ¿qué relación encuentras entre el triángulo grande y el triángulo mediano?

Shenoa: que tienen ángulos internos.

Profesora: qué son para ti ángulos internos.

Shenoa: es lo de las esquinas, el ángulo que hay por dentro.

Profesora: entonces, ¿qué pasa con los ángulos internos Shenoa?

Shenoa: pues que ambos triángulos tienen arriba noventa grados y a los lados 45 grados.

Figura 20. Relación entre los ángulos de las fichas del tangram.

En un porcentaje alto las producciones dan cuenta de la comparación a través de la percepción visual, en donde la relación entre el tamaño de la superficie se da desde su aspecto cualitativo, haciendo uso de expresiones tales como es "más grande", "más pequeño" o "diferente", reconociendo además la conservación de los ángulos.

Este tipo de producciones corresponden a *un nivel de comprensión situacional* por cuanto las soluciones planteadas por los estudiantes se encuentran ligadas al contexto, reconociendo la relación de las magnitudes mediante la manipulación de material concreto.

Con respecto a la segunda pregunta, las soluciones de estas producciones se dan mediante la representación del dibujo de las ocho fichas de los triángulos pequeños, necesarios para armar el cuadrado resultante al unir dos fichas del triángulo grande, sin ninguna representación que involucre alguna relación propia del lenguaje matemático.

Categoría 3. Nivel de comprensión referencial: 15.78%

En esta categoría se encuentran las soluciones dadas en las producciones escritas que reconocen las comparaciones por medio del lenguaje natural, estableciendo la relación entre el tamaño de la superficie de forma cualitativa.

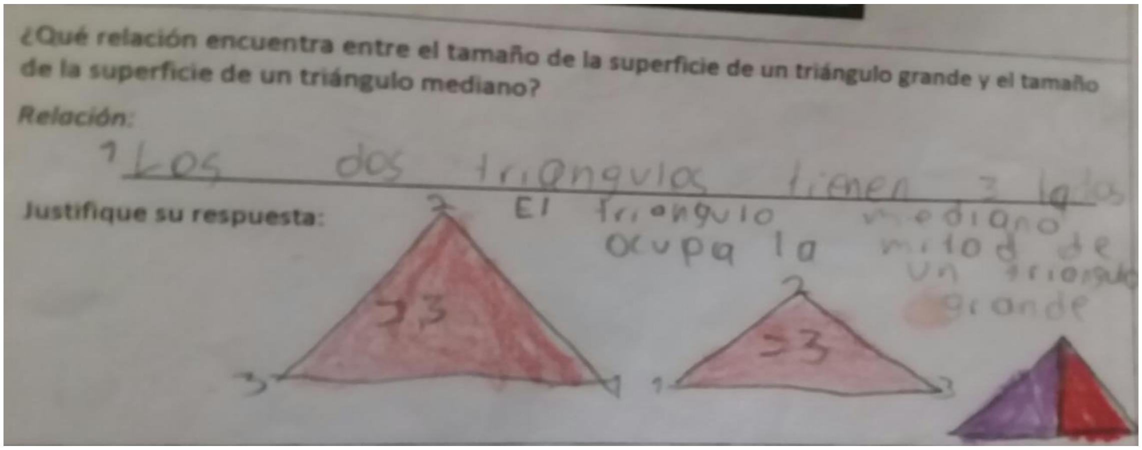


Figura 21. Modelo de producción escrita utilizando el lenguaje natural para relacionar el tamaño de la superficie.

En el registro audiovisual el estudiante argumenta la solución de la siguiente manera:

Profesora: Diego, ¿me puedes recordar la respuesta que diste para el primer punto?

Diego: Que los dos triángulos tienen tres lados.

Profesora: el hecho que tengan tres lados, ¿qué tiene que ver con el tamaño de la ficha del triángulo mediano y la ficha del triángulo grande?

Diego: son iguales en los lados los dos triángulos.

Profesora: ¿hay algo más que hayas observado?

Diego: Que el triángulo mediano ocupa la mitad del triángulo grande.

Figura 22. Relación de los lados entre las fichas del tangram.

El grupo de soluciones de la categoría 3 corresponden al *nivel de comprensión referencial* porque consiguen establecer la relación entre el tamaño de la superficie a través de expresar cómo la mitad de la ficha del triángulo mediano con respecto a la ficha del triángulo grande, aun cuando sigue representando de forma figural esta relación la sustenta desde el lenguaje natural.

Este tipo de soluciones están dando el paso de la matematización horizontal a la matematización vertical de acuerdo al enfoque de la EMR, al plantear un modelo de soluciones para un caso particular, puesto que mantienen desde el dibujo la comparación, a partir de elementos que visualmente perciben.

En este sentido la visualización dada desde el contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos, posibilita que se vaya dando la verbalización gradual del razonamiento visual. Freudenthal, (2001, p.20)

Categoría 4. Nivel de comprensión general: 10.52%

En esta categoría se encuentran las producciones que reconocen las comparaciones a través del tránsito entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático de forma cuantitativa.

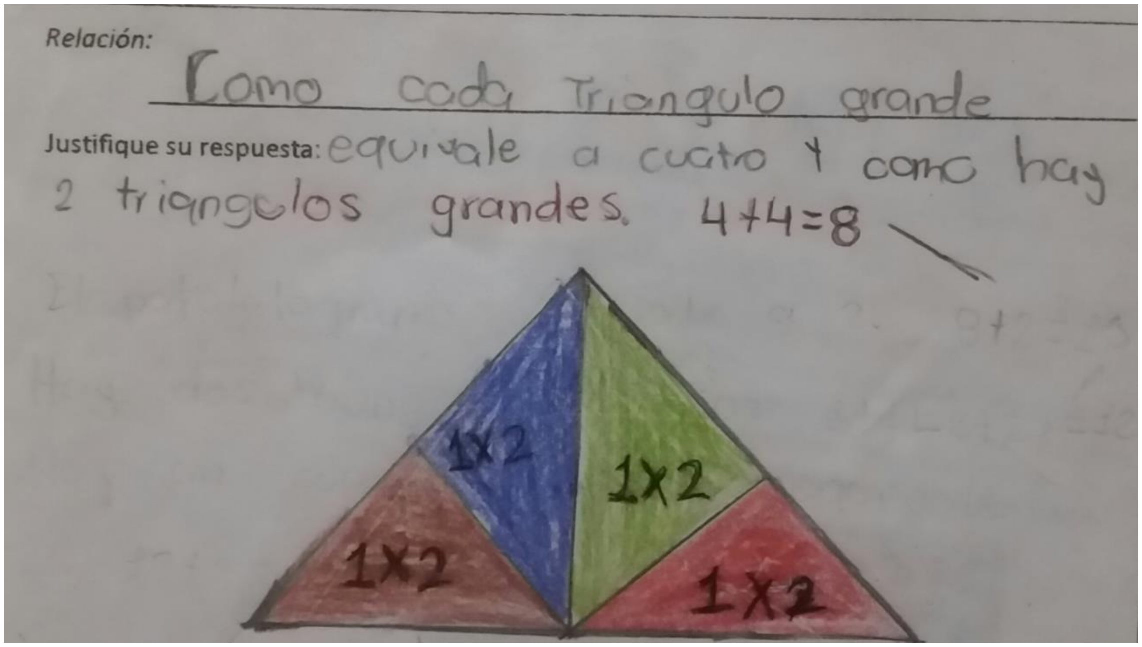


Figura 23. Solución correspondiente al nivel de comprensión general.

Esta solución hace uso tanto del lenguaje natural como del lenguaje matemático de forma aditiva y multiplicativa.

Este tipo de soluciones se encuentran en un *nivel de comprensión general* ya que enuncian modelos en los que utilizan notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales. Además, en estas soluciones se introduce la base para el trabajo con las multiplicaciones, al respecto Obando afirma, "multiplicar por 2 tiene como base la razón doble de…, multiplicar por 3, la razón triple de…, y así sucesivamente" (2014, p.175).

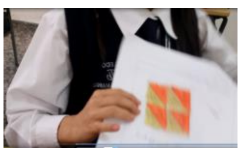
Durante la socialización de las diferentes soluciones con los 19 estudiantes, se registran momentos en los que un estudiante, que en la pregunta 2 había encontrado que son 16 las fichas del triángulo pequeño las necesarias para formar el cuadrado producto de dos fichas del triángulo grande, hace la reflexión a partir de la interacción con sus compañeros. A continuación, se transcriben partes del episodio.

Profesora: ¿Cuántas fichas del triángulo pequeño se necesitarían para armar el cuadrado formado por dos triángulos grandes?

Lenin: En un triángulo grande caben cuatro triángulos pequeños, entonces como hay dos triángulos grandes, entonces seria cuatro más cuatro ahí comencé a sumar y me dieron 16.

Profesora: 16 triángulos pequeños. Lenin dice que serían 16 fichas del triángulo pequeño las que se necesitarían para formar el cuadrado que resulta de dos fichas del triángulo grande. Shenoa, ¿qué opinas al respecto?

Shenoa: Pues no estoy de acuerdo porque son 8, nosotros hicimos este dibujito, cogimos totalmente el cuadrado, pues lo dibujamos y con los triángulos pequeños lo pusimos en cada uno y nos dio ocho.



Lenin: Yo empecé a sumar de dos en dos y me dio 16.

Profesora: pero porque sumabas de 2 en 2 si ya tenías la figura que te había pedido.

Paula: profe, a mí me dieron ocho, porque yo como había hecho que dos triángulos medianos cabían en dos grandes; y los dos triángulos chiquitos que venían eran los dos que formaban el mediano, entonces cogí la mitad del triángulo grande y conté de dos en dos y medio 8. A mí al principio medio 16 como Lenin, porque miraba todo el cuadrado, señalando el de las 7 fichas.

Figura 24. Manera de hallar la relación entre la ficha del triángulo pequeño y el cuadrado, formado por dos fichas del triángulo grande.

Como se puede observar, el mayor porcentaje de las soluciones se dieron en *el nivel de Comprensión situacional*, en este sentido se cumplió con el propósito de la tarea pues al utilizar el material concreto, como fue el tangram chino de 7 piezas, se potenció la comparación a partir de la percepción visual. Lo que de acuerdo a Freudenthal (2002, p.16) posibilita establecer la semejanza desde la conservación de la razón en cuanto concepto e incluso en cuanto objeto mental, en tanto la comprensión de la razón puede guiarse y profundizarse mediante visualización.

Profesora: ¿Cuántos triángulos pequeños conforman el cuadrado que construyó Sofía (refiriéndose al punto 2)? Santiago: ocho. Profesora: ahora te pregunto…. Un solo triangulo pequeñito, ¿qué parte es del cuadrado formado por dos fichas del triángulo grande? Santiago: es un octavo. Profesora: porque es un octavo. Santiago: Porque caben ocho triángulos en el cuadrado.

Figura 25. Representación de la fracción, un octavo, en la comparación de tamaño de la superficie.

Es de anotar que, aun cuando se encontraron en un alto porcentaje las soluciones apoyadas desde la percepción, en la socialización ya se comenzaron a dar evidencias de la representación de las magnitudes mediante el uso de la fracción para encontrar la razón entre los tamaños.

En la toma de decisiones, se plantea continuar la aproximación comparativamente entre las magnitudes, pasando de su aspecto cualitativo al cuantitativo, razón por la cual, se plantea la tarea 2, sobre ampliación y reducción de un documento de identidad el cual se presenta con las fotocopias ampliadas al 200%, al 150 %, en su tamaño original y en la reducción al 50%.

4.1.2. Tarea 2. Ampliación y reducción de documentos

El propósito de la tarea 2, es utilizar las nociones de reducción y ampliación de un documento de identidad para hacer comparaciones de tipo cualitativo que permitan el tránsito a lo cuantitativo, con el fin de posibilitar el reconocimiento de razones internas.

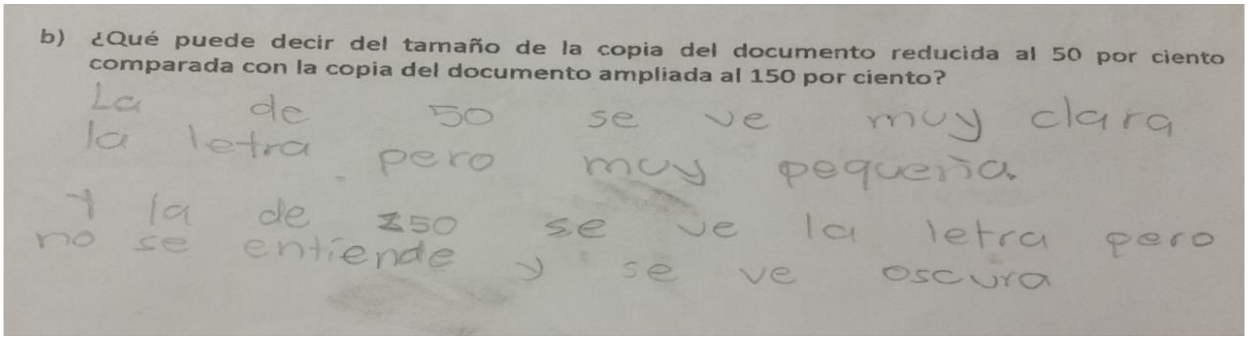
1	Angie está reuniendo la documentación para afiliarse a la EPS y un requisito es llevar la fotocopia de su documento de identidad ampliado al 150 por ciento; en la papelería donde va a sacar las copias se encuentra una persona en su primer día de trabajo que está aprendiendo a manejar la fotocopiadora, y después de varios ensayos terminó sacando copias del documento en cuatro tamaños diferentes: igual al original, reducido al 50 por ciento, ampliado al 200 y finalmente al 150 por ciento, como se ilustra en el material con las 4 copias obtenidas. a) ¿Qué puede afirmar de la copia a tamaño original comparada con la copia del documento ampliada al 200 por ciento? b) ¿Qué puede decir del tamaño de la copia del documento reducida al 50 por ciento comparada con la copia del documento ampliada al 150 por ciento? c) ¿Qué puede afirmar del tamaño de la copia del documento ampliada al 150 por ciento comparada con la copia ampliada al 200 por ciento? d) ¿Qué podría afirmar del tamaño de una copia del documento reducida al 25 por ciento comparara con la copia del documento aumentada al 200 por ciento?

Figura 26. Tarea 2. Ampliación y reducción de documentos.

Para el desarrollo de la tarea 2, se organizaron los grupos de manera autónoma por parte de los estudiantes, la docente-investigadora fue pasando por cada uno de los grupos para hacer el registro audiovisual de la forma como abordaron la solución, a diferencia de la anterior tarea ya se empezó a evidenciar mayor disposición de parte de los niños para el trabajo en grupo. Las soluciones se caracterizaron de la siguiente forma:

Categoría 1. Nivel de comprensión situacional: 36.84%

Las producciones de esta categoría establecen la comparación desde su aspecto visual, utilizando como criterio, en la relación entre las magnitudes frente al tamaño, el hecho de observar cuál de las dos copias permite una mejor lectura de la información proporcionada en el documento.

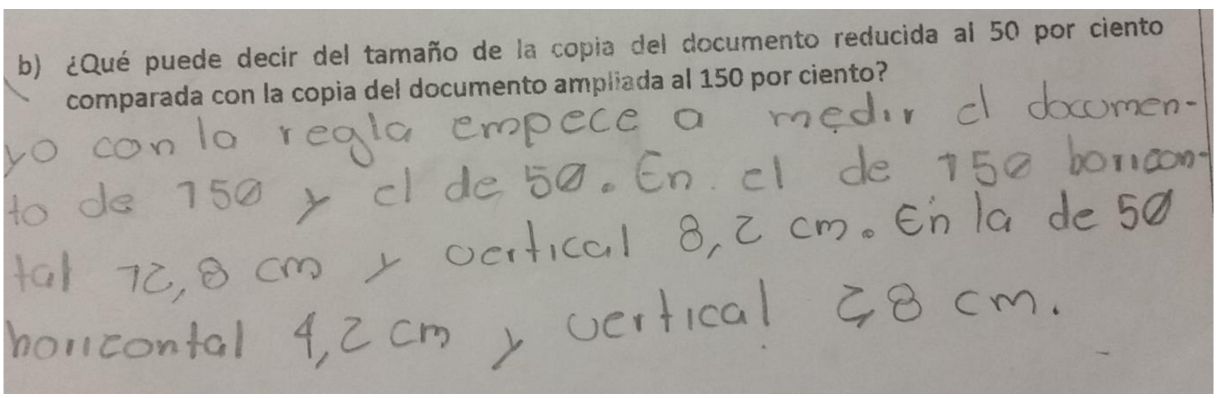


b) ¿Qué puede decir del tamaño de la copia del documento reducida al 50 por ciento comparada con la copia del documento ampliada al 150 por ciento?

La de 50 se ve muy clara
la letra pero muy pequeña
y la de 150 se ve la letra pero
no se entiende y se ve oscura

Figura 27. Modelo de solución perceptual en la ampliación y reducción del documento de identidad.

En este mismo grupo se encuentran la solución en la que utilizan como instrumento de medida, la regla, pero terminan igual que en la anterior solución estableciendo la diferencia del tamaño en relación a cuál es el tamaño que es más legible en su lectura.



b) ¿Qué puede decir del tamaño de la copia del documento reducida al 50 por ciento comparada con la copia del documento ampliada al 150 por ciento?

yo con la regla empece a medir el documen-
to de 150 y el de 50. En el de 150 horizon-
tal 12,8 cm y vertical 8,2 cm. En la de 50
horizontal 4,2 cm y vertical 2,8 cm.

Figura 28. Solución de medición sin relacionar los tamaños de las fotocopias.

Este tipo de producciones escritas se ubican en un *nivel de comprensión situacional* por cuanto establecen el resultado a partir de la percepción sin encontrar relación entre las magnitudes, intentan utilizar la medición, pero mantienen la solución desde la visualización cuando realizan la comparación, sin establecer relación entre las magnitudes involucradas.

Profesora: ¿Qué han hecho para el primer punto?

Luisa: La copia del tamaño original comparado con el documento ampliado al 200%, que es más pequeña y la otra es más grande y que la letra se entiende más, (señalando la copia del 200%) y en la original se entiende qué es. y en la otra no se ve bien.

Figura 29. Modelo de solución perceptual apoyada por la visualización.

En este nivel de comprensión situacional se evidencia que lo que es mutuamente igual en el original, debe ser mutuamente igual en la imagen, lo que implica, que “a una edad temprana la familiaridad con las aplicaciones que conservan la razón es un soporte para visualizar los contextos de la razón que no son visuales a priori. Sin embargo, esto requiere que la razón visualizada se suelte en cierta forma del contexto de las semejanzas globales. Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales” (Freudenthal, 2001, p.20).

En este sentido el autor afirma que la fuerte visualización es una ventaja del contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos. Lo que didácticamente importa es la verbalización gradual del razonamiento visual.

En esta categoría se pudo evidenciar en el registro audiovisual el cambio de planteamiento de dos estudiantes que en un comienzo hacían la comparación de tipo perceptual, muy parecido a lo transcrito en el diálogo con Luisa. Pero que luego observan la relación entre el tamaño de las copias por medio del uso de la representación matemática, como es la de parte y todo, para involucrar la fracción.

Profesora: ¿En la relación de la copia al 50%, comparada con la del 150% que pudieron encontrar?

Ángel: que la del 50% es un tercio de la del 150%.

Figura 30. Relación de la fracción respecto al tamaño de la copia al 50% y 150%.

Categoría 3. Relación entre magnitudes: 47.36%

Estas producciones forman parte de la categoría 3 por cuanto buscan la relación entre las magnitudes que intervienen por medio de la suma, la multiplicación o la división.

Shenoa: descubrimos que en el punto D, 25 es la octava parte de 200, porque 25 por 8 da 200 y 200 dividido entre 8 da 25.
Profesora: ¿Cuántas reducciones del 25% necesito para llegar a la del 200%?
Shenoa: ocho.
Profesora: ¿Por qué ocho, Shenoa?
Shenoa: porque si sumamos 25, 8 veces me daría 200.
Helen: pero también podemos multiplicar 25 por 8.
Shenoa: Así también se puede multiplicar.

Figura 31. Modelo de relación entre ampliación del 200% y reducción del 25% con la multiplicación.

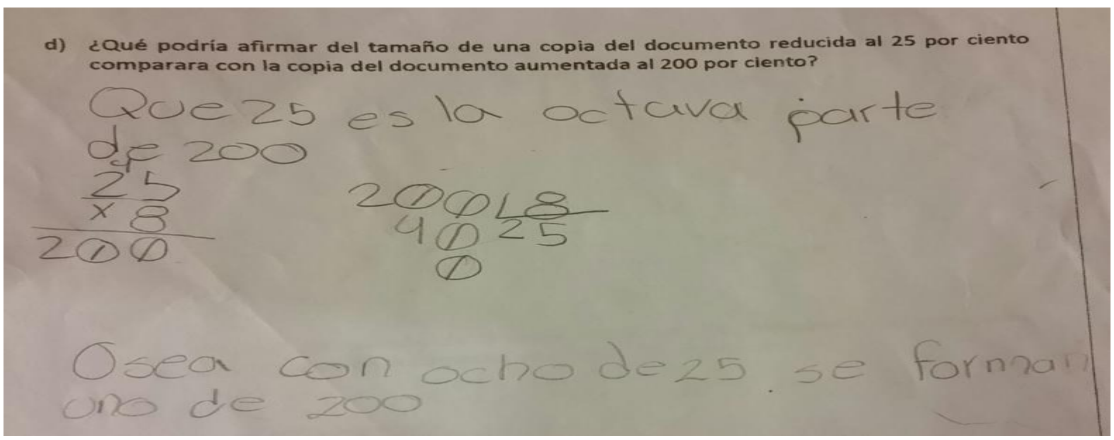
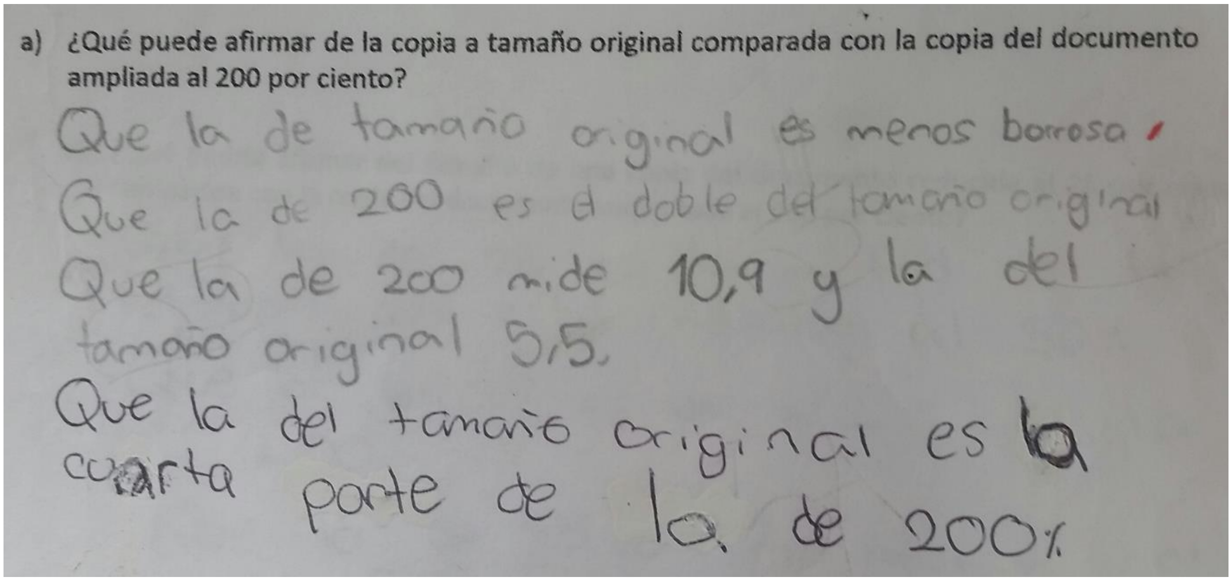


Figura 32. Modelo de solución a través de algoritmos.

Estas producciones se enmarcan en el proceso de algoritmización, lo cual permite: "Entender las relaciones entre estos principios operativamente y describirlos… entender las razones de forma operativa en el contexto de la aritmética de fracciones, y describir esa relación" (Freudenthal, 2001, p.31).

En la misma categoría 3 se establece la comparación de forma visual, apoyados en el lenguaje natural al utilizar términos como *el doble*, o *el medio*. Para la pregunta 1, algunos hacen la representación de fracción de ¼ para relacionar la parte del todo en el tamaño de la copia original comparada con la del tamaño al 200%.


a) ¿Qué puede afirmar de la copia a tamaño original comparada con la copia del documento ampliada al 200 por ciento?

Que la de tamaño original es menos borrosa

Que la de 200 es el doble del tamaño original

Que la de 200 mide 10,9 y la del tamaño original 5,5.

Que la del tamaño original es la cuarta parte de la de 200%

Figura 33. Modelo de solución correspondiente a la categoría 3 en la tarea de ampliación y reducción del documento.

En esta solución se introduce de forma verbal la cuarta parte como relación entre los tamaños originales y la del 200%.

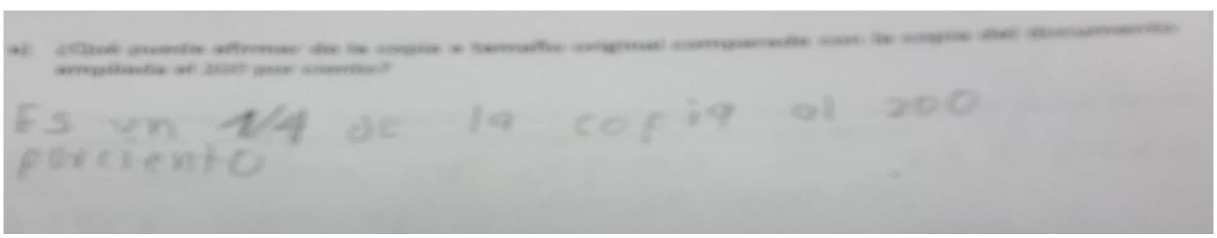

Es un 1/4 de la copia al 200 porciento

Figura 34. Modelo de solución donde se introduce la fracción al relacionar las magnitudes.

Como se puede observar, en esta categoría se hace uso de otro tipo de representación como es la de fracción para encontrar la relación entre las magnitudes involucradas, la comparación en estas producciones escritas se da a través de la adición cuando la reducción del 50 % es menor 100% de la que esta ampliada al 150%.

Hay dos tipos de comparaciones, “la aditiva, por medio de una diferencia y la multiplicativa, por medio de un cociente la cual llamamos razón” (Cohen, 2012, p.4).

Esta categoría corresponde a un *nivel de comprensión referencial* ya que reconoce las comparaciones a través del lenguaje natural, asociado a una situación específica, en una sola de sus respuestas establece la solución a partir del uso de operaciones y se aproxima desde la fracción a la razón entre las magnitudes, que para la tarea 2, son los tamaños de cada una de las ampliaciones y reducciones del documento.

Categoría 4. Nivel de comprensión general: 15.8%

En la categoría 4 se ubican las producciones en donde realizan el dibujo y además escriben la fracción que relaciona los tamaños de las copias. Se evidencia la aparición de las primeras relaciones entre magnitudes generalizadas, que dan cuenta de la comparación entre las magnitudes involucradas en cada una de las situaciones planteadas, haciendo el tránsito entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático al expresar la unidad, que es la ampliación del 150%, y la parte que es la reducción del 50%, para deducir que es la novena parte.

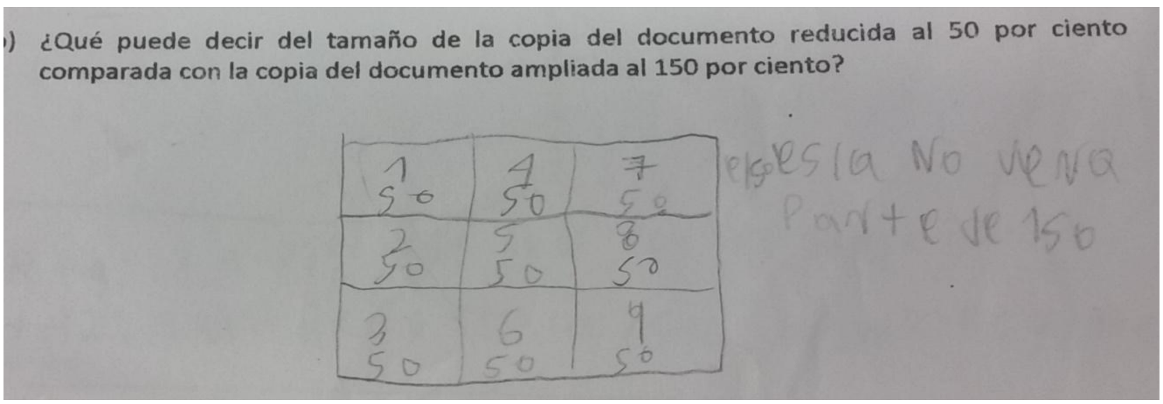


Figura 35. Modelo de solución de la categoría 4 para la ampliación y reducción del documento.

En la revisión del video se encuentra que en un comienzo los estudiantes tienen una primera aproximación a la solución similar a la de la categoría 1, pero a uno de ellos le surge la idea de recortar las copias. El siguiente diálogo da a conocer la forma como soportan la solución.

Profesora: ¿Qué resultaron haciendo? (los tres estudiantes están cortando con tijeras los documentos ampliados y reducidos).

Diego: la copia del tamaño original es la cuarta parte de la de 200%.

Profesora: ¿Cómo lo hicieron?, muéstrame.

Diego: Solo tuvimos así (traslada la parte cortada de la copia original por la copia ampliada al 200 %) mira así, uno, dos, tres y cuatro.

Andrés: o sea que es cuatro cuartos.

Profesora: ¿Qué parte es el documento original de la ampliación al 200%?

Andrés: Una cuarta parte.

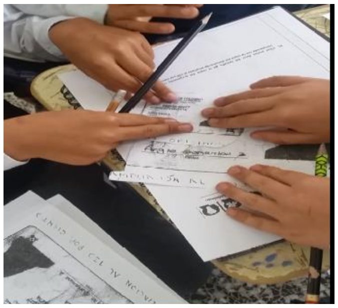


Figura 36. Hallazgo de la cuarta parte entre el documento original y la ampliación al 200%.

Es de anotar que para esta solución los estudiantes utilizaron diferentes representaciones para la fracción, por ejemplo, para un cuarto 4/1 y 1/4 de igual manera para 9/1 y 1/9, sin perder el sentido de lo que quieren significar, como es establecer la fracción como parte de un todo.

Este tipo de soluciones se ubican en un *nivel de comprensión general,* por cuanto hacen el tránsito de la relación entre las magnitudes de forma cualitativa, introduciendo elementos de tipo cuantitativo, al expresar un *modelo para* desde la fracción.

En este sentido Lamon (1994) hace referencia a la investigación en razón y proporción con estudiantes preadolescentes, afirma que, "parece que las representaciones de los estudiantes de situaciones que involucran razón y proporción ocurren sobre una extensa base cualitativa informal antes que los estudiantes sean capaces de tratar el tópico cuantitativamente… Esto es, los niños naturalmente emplean una forma de intuición matemática, en un sistema de conocimiento informal" (p.8).

Dentro del propósito contemplado para esta tarea como es el de dar herramientas a los estudiantes para empezar a aproximarse a la razón desde su aspecto cuantitativo, en cierta forma se cumplió pues se redujo el número de soluciones dadas desde lo visualmente percibido a establecer la comparación, tomando elementos cuantitativos como fue la algoritmización o la fracción para relacionar los tamaños de las copias.

Aunque algunos estudiantes hicieron uso de la regla para observar el cambio del largo y el ancho cuando se amplió o se redujo la copia, este tipo de solución pasó a un segundo plano, puesto que continuaron estableciendo las comparaciones desde la visualización.

Para el caso de la representación de la fracción autores como Obando (2014) consideran que "la fracción sigue estrechamente ligada al concepto de razón, siendo precisamente una forma de expresar la relación cuantitativa, la medida relativa, entre la parte y el todo" (p.131).

En este aspecto ya se está dando la aproximación de la razón por medio de la comparación y la relación entre las magnitudes por cuanto es mayor el porcentaje de estudiantes que están relacionando la fracción con la razón, a partir de la relación entre las magnitudes.

Para las dos primeras tareas las razones involucradas son de la misma magnitud que para la investigación y con el soporte teórico de Freudenthal (2001). Se denominan *razones internas*, puesto que se ha establecido la comparación y la relación entre el tamaño tanto de la superficie de las fichas del tangram chino, como el de las copias del documento ampliado o reducido.

Estos resultados sugieren la necesidad de ofrecer más herramientas para que desde la enseñanza se aborde la aproximación de la razón desde su aspecto cuantitativo, de ahí que para la tarea 3 se involucre la estimación de la magnitud estatura.

4.1.3. Tarea 3. Comparación de estatura

1

Mira la fotografía de la mujer más pequeña, la india Jyoti Amge, y el hombre más alto del mundo, el turco Sultan Kosen, quienes se reunieron en Egipto a comienzos del año 2018.

Tomado de https://www.infobae.com/america/fotos/2018/01/29/cumbre-record-en-egipto-la-mujermas- pequena-del-mundo-se-reunio-con-el-hombre-mas-alto/ Copyright © www.infobae.comes

Si la mujer más pequeña del mundo mide aproximadamente 62 cm, ¿qué estatura estimas que tiene el hombre más alto?

La estatura del hombre más alto del mundo sería: ________________________________

Justifica tu respuesta:

	La estatura promedio de un niño colombiano de 10 años es de 137 centímetros aproximadamente, si se ubicara al lado de Sultan Kosen, ¿crees que podría llegarle hasta la cadera? Marca tu respuesta con una equis, Sí ( ) No ( ) Justifica tu respuesta: Si la mujer más pequeña del mundo se parara al lado de un niño colombiano de 10 años con la estatura promedio, ¿hasta dónde le llegaría? Le llegaría hasta: ____ Justifica tu respuesta.

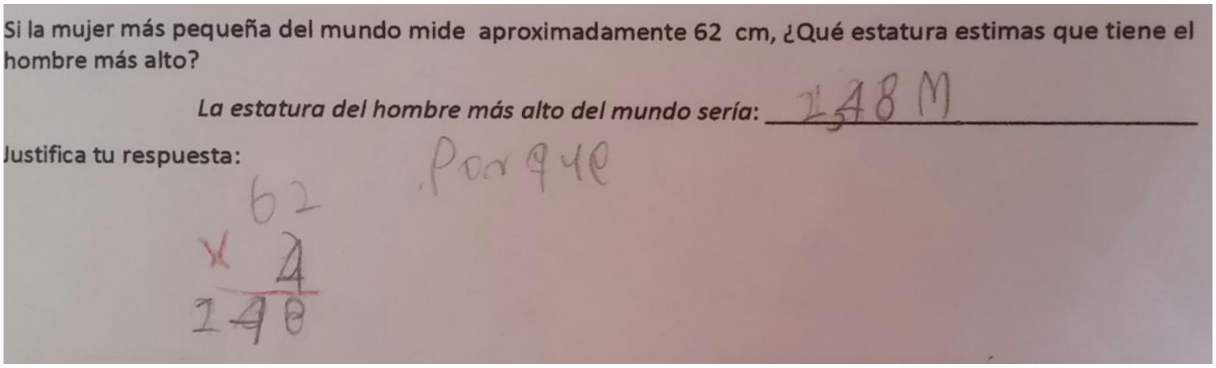
Figura 37. Tarea 3. Comparación de estatura.

Previo al desarrollo de la tarea 3, se motivó a los estudiantes a buscar por internet según el libro *Record Guinness,* al hombre más alto y la mujer más pequeña del mundo, lo que despertó la curiosidad de los estudiantes y, en cierta forma los conmovió al observar la diferencia de tamaño entre cada uno. Adicionalmente, la docente- investigadora les llevó un video en donde se hablaba de la vida de la mujer más pequeña del mundo, de su familia y la manera como ella se convirtió en una actriz de televisión, hecho que permitió hacer la reflexión sobre la forma de sobrellevar alguna diferencia de estatura de acuerdo al promedio normal. De esta manera se posibilita el contexto de una situación para continuar con el enfoque de la EMR.

La caracterización de los resultados, dados por los estudiantes se establecen de acuerdo a lo siguiente:

Categoría 2. Nivel de comprensión situacional: 15.78%

En la categoría 2 se ubican el 15.78% de las producciones escritas, que establecen la relación entre la estatura del hombre más alto y la mujer más pequeña del mundo, al tomar la medida de la foto de la mujer con los dedos y luego trasladar esa medida a la foto del hombre, paso seguido, calculan la multiplicación entre la estatura de la mujer y las veces en que cabe.


Si la mujer más pequeña del mundo mide aproximadamente 62 cm, ¿Qué estatura estimas que tiene el hombre más alto?

La estatura del hombre más alto del mundo sería: ______

Justifica tu respuesta: Porque

62
x 4

Figura 38. Solución a partir del traslado de una estatura en la otra.

En esta categoría los estudiantes realizan la operación, sin tener en cuenta la unidad de medida, ya sea en centímetros o en metros. A continuación, el registro audiovisual, da cuenta de este aspecto y la forma como la docente- investigadora hace énfasis en tener presente la unidad de medida.

Andrés: (Está explicando cómo encontró la estatura del hombre más alto) Primero cogí a la mujer más pequeña del mundo, luego con mis dedos, empecé a hacer así (trasladando la longitud de los dedos por la foto del hombre) hasta la cabeza y me dio cuatro y para asegurar otra vez multipliqué 62 por 4 y me dio 248.

Profesora: por favor coloca en qué medida estás hablando, si en centímetros o en metros porque esto nos da una aproximación de cómo es la estatura. Entonces para ti esa es la estatura del señor Sultán, cuatro veces la de la mujer.

Andrés: si, esa es.

Figura 39. Comparación de estaturas entre la mujer más pequeña y hombre más alto.

Para la segunda pregunta, Andrés junto con sus compañeros de grupo de trabajo, Lenin y Julián, toman como referencia la altura de la puerta del salón de clase, para poder observar la estatura de un niño promedio colombiano que se pusiera al lado de Sultán, hasta dónde le daría.

Lenin: yo, con Julián y Riaño medimos la puerta.

Andrés: y para medir la puerta tomamos el metro y una regla.

Lenin: tomamos del piso allá (señalando la parte más alta de la puerta) era 1,72 metros

Profesora: ¿Para qué midieron la puerta?

Andrés: La medimos ya que 137 centímetros es lo que mide aproximadamente lo que mide un niño colombiano, entonces tomamos la puerta como referencia, Luego, 217 centímetros que es la estatura de Sultán menos 137 centímetros, son 80 centímetros (se dirige a la puerta en donde tienen pegado un flexómetro, y observan donde da la medida de 80 centímetros).

Lenin: nosotros antes de hacer eso, vemos que el hombre más alto llega como por acá, (lanza un marcador para señalar la altura llegando al techo) por ahí más o menos, entonces necesitaría agacharse para poder entrar, entonces (llama a Diego estudiante que mide 138 cm). Lo ubican frente a la puerta.

Profesora: ¿con lo que han hecho hasta el momento dirían que llega o no a la cadera un niño colombiano de estatura promedio?

Lenin: nosotros concluimos que llega a la cadera.

Figura 40. Estimación entre la puerta del salón y la estatura del hombre más alto del mundo.

Como se puede observar, los estudiantes tienen en cuenta la unidad de medida cuando hacen la comparación entre la altura de la puerta y la estatura de Sultán, establecida, en la socialización, como de 217 centímetros, hecho que ellos utilizan para las comparaciones que realizan como herramienta para la solución de la pregunta 2.

En este diálogo se pudo establecer como, por medio de la altura de la puerta, es posible que el hombre más alto del mundo entre al salón, aun cuando se hubiese esperado que lo hicieran sin ningún elemento de medición sino por medio de la estimación de magnitudes que, según Godino (2002) es tomado, “como el proceso de obtener una medida sin la ayuda de instrumentos, es decir, realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos. También podemos decir que es la “medida” realizada a ojo” de una cualidad de un objeto” (pág. 645).

En este sentido la solución dada por los estudiantes está dentro de *un nivel de comprensión situacional*, por cuanto fue necesario tomar como referencia la puerta del salón de clase para poder encontrar hasta dónde daba un niño colombiano de 10 años de estatura promedio, si se ubicara al lado del hombre más alto del mundo. De ahí que la estimación como un proceso para comparar las razones internas que se involucran en la tarea como es la estatura, en este nivel se da a partir de un material concreto como es la altura de la puerta, es decir, aún está presente desde el contexto la comparación.

Categoría 3. Nivel de comprensión referencial: 63.15%

En esta categoría se ubican las producciones que realizan el cálculo de la estatura mayor a partir de las veces que cabe en la estatura menor, complementan con el cálculo de la estatura por medio de la multiplicación, la división o la suma, además, toman como referente la estatura de un familiar o la de ellos para tener una idea de la situación.

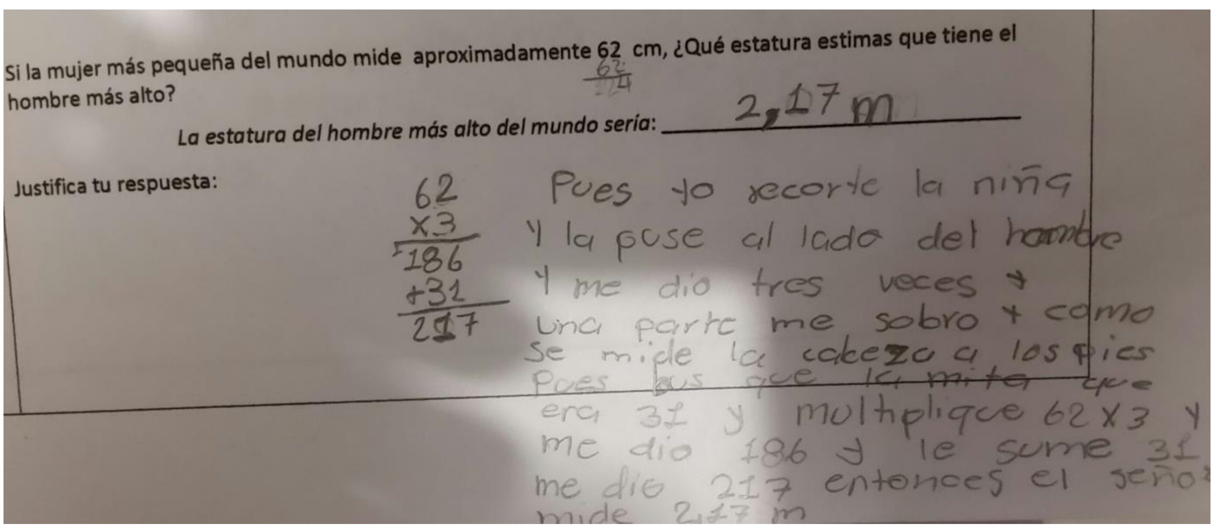


Figura 41. Modelo de solución haciendo uso de operaciones para estimar estatura.

En esta categoría se establece la comparación de las estaturas a partir de definir una unidad de medida, que para el caso es la estatura de la mujer, que se desplaza por la foto del hombre para, de esta manera, hacer la multiplicación de ella por tres, posteriormente la parte que no cabe exactamente la dividen entre dos, para establecer que la estatura del hombre es

2,17m. Es de anotar que en este punto hubo soluciones haciendo uso de la multiplicación y la división, y otros utilizaron la suma.

En cuanto a la conversión de centímetros, medida en la que se dio la estatura de la mujer para encontrar la estatura del hombre, en metros no se presentó ninguna dificultad, evidenciando que la unidad de medida se debe tener en cuenta para poder visualizar la altura de cada uno.

Para la pregunta 2 en la que se buscaba realizar la estimación entre las estaturas, fue necesario establecer acuerdos ya que la estatura que vamos a tomar como referencia es la del promedio de estatura de un niño colombiano, para ello fue necesario, como aparece en el registro audiovisual, ponernos de acuerdo con el significado que para la tarea 3 tiene el termino promedio.

Profesora: ¿Para ustedes qué significa el promedio de la estatura?

Santiago: que es más o menos lo que miden todos.

Profesora: entonces es lo que vamos a tomar así existan más altos o más bajos, entre las estaturas de los niños colombianos de 10 años. El promedio de estatura para ellos es 137 centímetros.

Figura 42. Acuerdo sobre lo que es el promedio de estatura.

En la socialización fue necesario tener claro este término, por cuanto algunas de las producciones hacían la comparación con la estatura de ellos, pues la edad coincide con la de la pregunta 2, en este sentido se ve el cambio de solución que da Luisa quien dice "yo mido 1,51 m y le llegaría al abdomen" en el registro audiovisual, da cuenta de otra solución:

Luisa: No le llega hasta la cadera.

Profesora: ¿Por qué?

Luisa: yo mido 1,51 metros, con zapato es 1,52 y sin zapato 1,51 metros.

Shenoa: pero como es con la estatura del niño de 137 cm.

Profesora: ¿Qué es lo que tomamos como el promedio de estatura?, Santiago vuélveles a decir que entendemos por la palabra promedio.

Santiago: es la estatura en la que están casi todos.

Profesora: (dirigiéndose a Luisa) Mira lo que te está diciendo Shenoa, la estimación es con un niño de estatura promedio de 137 centímetros. Ahora, imagínate que Sultán con 2,17 metros está al lado de un niño de estatura promedio de 1,34 metros, ¿a dónde crees que le llegaría?

Luisa: en un comienzo yo creo que yo le llegaría hasta al abdomen, pues yo creo y como un niño de estatura promedio tiene 1,34 metros para mí si llegaría a la cadera.

Profesora: entonces cambias tu respuesta, tú no le llegarías a la cadera, pero otro niño con estatura promedio si le llegaría a la cadera.

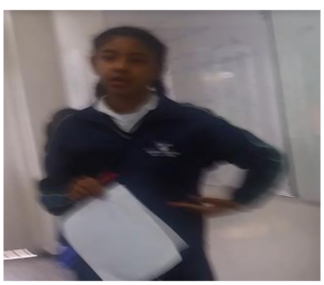


Figura 43. Estimación entre la estatura de Luisa y la del niño promedio colombiano de 10 años.

En la categoría 3, además de hacer referencia a la estatura del estudiante o de uno de sus familiares, también se dieron soluciones a partir de cálculos aritméticos tales como:

Santiago: Diego mide 138 centímetros, así que voy a dividir 138 dividido dos y después voy a ver cuánto mide la cadera.

Profesora: a ver, ¿cuál es la mitad de 138?

Andrés: 69

Santiago: Medí la altura de la cadera de Diego y dice que son 63 centímetros.

Profesora: pero, ¿a dónde le da a Diego los 69 centímetros en la cadera?

Santiago: un poquito más abajo de la cadera.

Profesora: ¿entonces la mitad de la estatura de Diego queda en la cadera?

Santiago: no, queda un poco más abajo la cadera, porque la cadera de Diego queda a 63 centímetros (señalando desde el piso hasta la cadera). Así que son 6 centímetros lo que le falta desde la cadera para llegar a la mitad del cuerpo humano.

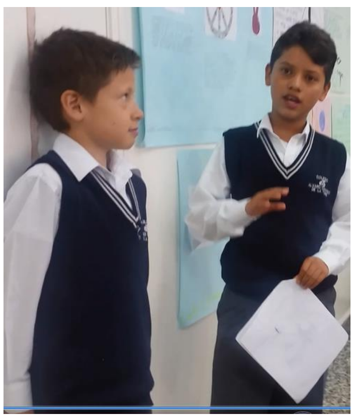


Figura 44. Estimación de la medida de la cadera en un niño de estatura promedio de 10 años.

Este tipo de soluciones son de un *nivel de comprensión referencial*, puesto que hacen uso de algún referente, como puede ser la estatura de un compañero o la de ellos mismos para efectuar la estimación de las estaturas, por medio del uso de operaciones, aspecto que permitió evidenciar que cuando Santiago toma la decisión de hacer el ejercicio, tuvo la oportunidad de trabajar con la estatura de otro compañero que era de 133 centímetros, pero decide trabajar con la de Diego por la siguiente razón:

Profesora: escoge a uno de los dos compañeros para hacer el ejercicio, ¿a cuál de los dos escoges?

Santiago: escojo a Diego, que mide 138 centímetros, voy a dividir entre dos para saber si esa mitad llega a la cadera. La estatura de Andrés sí me servía, pero era más difícil.

Profesora: ¿Por qué?

Santiago: porque es más difícil dividir un número impar entre dos.

Figura 45. Decisión de dividir número par entre dos.

Para este nivel se puede dar cuenta de la relación que hace entre ser un número par y la división entre dos, por cuanto al ser exacta, le da la posibilidad de no trabajar con números decimales.

En este sentido con esta situación se potenció en el aula lo que autores como Bonilla y Romero (2006) plantean en torno a situaciones multiplicativas, "las cuales deben tener una base experiencial para que los estudiantes puedan construir posibles mundos multiplicativos (sus estructuras multiplicativas, sus esquemas multiplicativos de manera versátil y flexible) es una necesidad ineludible si nuestro objetivo educativo es que los estudiantes aprendan *procesos matemáticos sofisticados*" (p. 120).

De acuerdo al marco referencial, la razón y la proporción hacen parte de procesos matemáticos sofisticados, por cuanto ponen en juego la relación entre las magnitudes que, para este caso es la relación entre las estaturas y la estimación entre ellas, como aproximación a las razones internas.

Categoría 4. Nivel de comprensión general: 21.07%

En la categoría se ubican aquellas soluciones que buscan separarse de un referente para hacer la estimación de las estaturas, se apoyan en procesos aritméticos como más adelante se va a mostrar, en el punto 1 observaron, con procesos de comparación al cortar la foto de la mujer y llevarla a la foto del hombre contando las veces que la estatura más pequeña cabe en la estatura más grande.

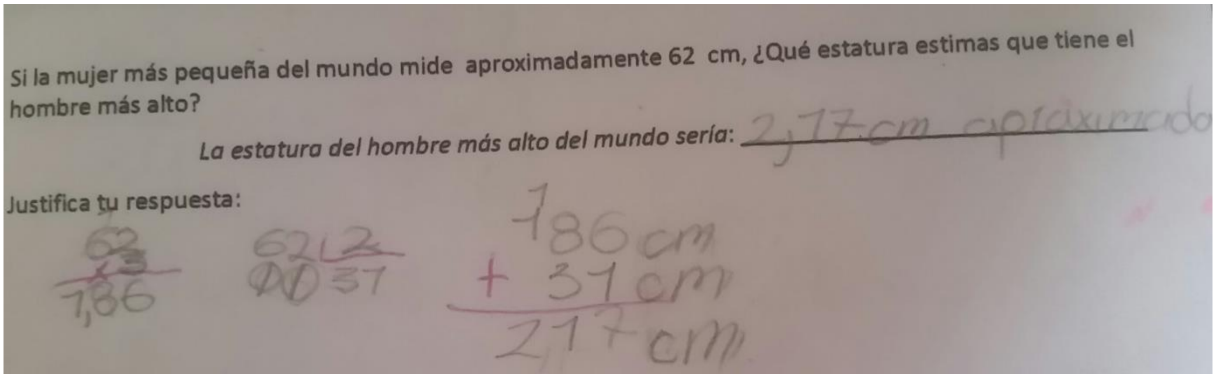


Figura 46. Respuesta correspondiente a la categoría 4 de la tarea 3.

En esta categoría hacen uso de la comparación a partir de comprobar las veces que cabe una foto en la otra, que para el caso es de 3 veces y media, luego hacen los cálculos numéricos, se observa que las unidades de la estatura la tomaron en centímetros, llegando a establecer que la estatura de Sultán es de 217 centímetros.

En el registro audiovisual uno de los estudiantes pertenecientes a esta categoría sustenta lo siguiente:

Diego: primero a mí me había quedado mal porque no llegaba hasta la cabeza, entonces yo hice las operaciones, ahora que llega hasta la cabeza y luego de hacer eso en la casa miré por internet la medida de Sultán y ahí aparece que es 2,17 metros como me había dado.

Profesora: Diego además verificó por internet el resultado.

Figura 47. Hallazgo de la estatura del hombre más alto del mundo.

Las producciones de la categoría 4 en el punto 3 de la tarea establecen la estimación de la estatura de la mujer con la de la estatura de un niño colombiano de estatura promedio, haciendo uso de la suma y la resta como se evidencia a continuación:

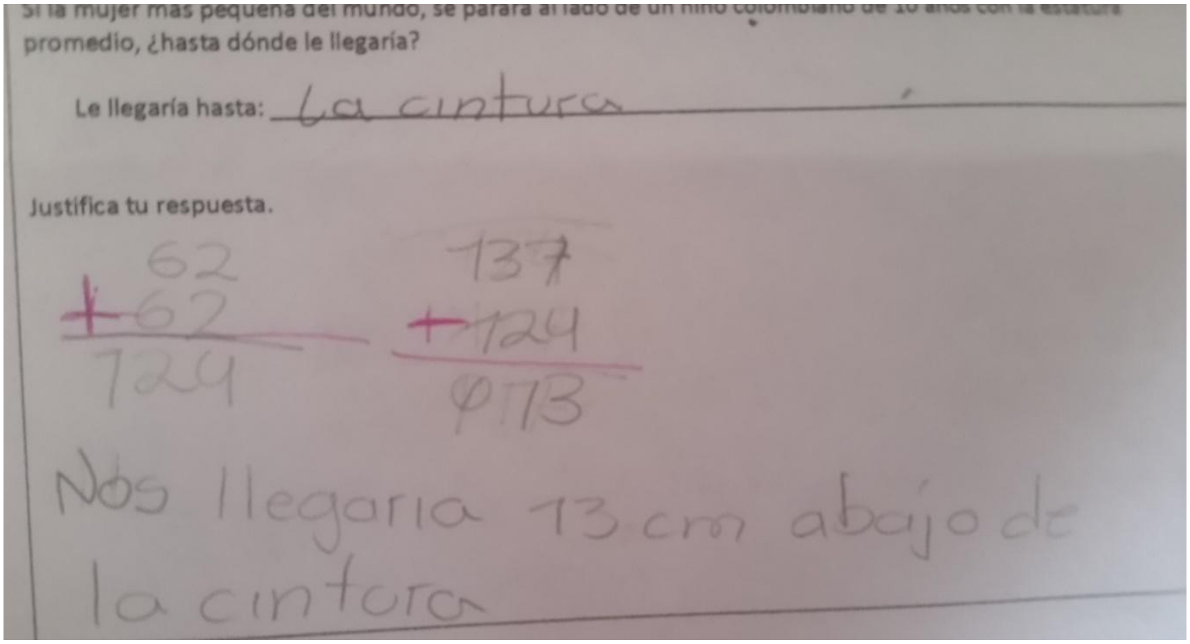


Figura 48. Modelo de solución de estimación de la categoría 4.

En esta solución toman dos veces la estatura de la mujer más pequeña del mundo y la restan de la estatura del niño promedio, para este tipo de solución se sigue teniendo en cuenta la relación entre las estaturas de forma cualitativa, pero para dar un argumento desde lo cuantitativo se apoyan en procesos aditivos la cintura está en donde se ubique la mitad de la estatura, razón por la cual la mujer más pequeña del mundo se ubicaría 13 centímetros debajo de la cintura.

Los resultados de esta categoría corresponden a un *nivel de comprensión general* porque la solución se halla al relacionar las estaturas, es decir, de forma cualitativa con acercamientos a lo cuantitativo, en cuanto a la estimación consideran de forma autónoma en donde se ubica la parte del cuerpo que se pide estimar.

En la relación de duplicar para este nivel es el de combinar dos iguales, de ahí que según Freudenthal (2001) "La pregunta central es la de duplicar. El proceso de duplicar es el de Combinar dos iguales. Éste es cómo transformar una torre en una de altura doble, a saber, poniendo una torre "igual" encima de ella, …los parámetros que, cuando las cosas se combinan, se comportan aditivamente se llaman extensivos" (p.34) en este sentido el autor afirma que "Dos parámetros que son extensivos bajo la misma operación de combinación están en una relación que conserva la razón."

El propósito al plantear la tarea 3 consistió en aproximar a los estudiantes de grado quinto a la comparación a través de la estimación de estaturas, para abordar la proporción de manera cuantitativa, aspecto en el que se tuvieron aproximaciones, pues el manejo de operaciones ha potenciado la relación entre las magnitudes de manera cuantitativa sin desprenderse de lo cualitativo, pues el fuerte arraigo que experimentan los estudiantes por tener desde la tarea 1, el material concreto aún se mantiene, si bien es cierto para las tareas 2 y 3 no se han dado sino las copias y la foto de las personas que hacen parte de la estimación, los estudiantes han recurrido al recorte de las copias o al de la foto de la mujer más pequeña del mundo para tener una unidad de medida, la que para el caso de la estimación de la tarea 3 es constante, mientras que para la de ampliación y reducción del documento es variable de acuerdo a los tamaños que se van a comparar.

En la tarea 3 se ha potenciado, de acuerdo a Obando (2014) que en "el proceso de medir, el cual implica que dadas dos cantidades se determine la razón entre ellas, es decir, definir cuántas veces está contenida la cantidad menor en la mayor, o definir cuánto es la cantidad menor de la mayor. En este sentido, dadas dos cantidades, el proceso de medir implica tomar una de las cantidades como unidad, y determinar la razón que la otra cantidad tiene con esa que se ha tomado como unidad" (p. 154).

Junto con ello se ha potenciado que los estudiantes se aproximen a matematizar los procesos de percepción, así como sus procesos de variación, cuando se estudian diferentes estados de un determinado evento o fenómeno.

En este momento de la investigación se toma la decisión de plantear la tarea 4 en donde se continúe con la comparación y la relación entre las magnitudes introduciendo las razones externas, es decir, las que son de diferente tipo.

4.1.4. Tarea 4. Receta de cocina

Los padres de Paula realizaron la celebración de su cumpleaños con sus 20 compañeros de grado. Primero, como es costumbre, se les ofreció a todos, jugo, galletas y un delicioso postre casero, un arroz con leche, que preparó la Señora Patricia, madre de Paula, usando la siguiente receta que encontró en internet, para 4 personas (4 porciones):

INGREDIENTES PARA 4 PERSONAS.

INGREDIENTE	**CANTIDAD**
Arroz	120 gramos
Leche	1000 mililitros (1 litro)
Azúcar	100 gramos
Canela	1 astilla
Esencia de Vainilla	Una pizca
Mantequilla	30 gramos
Sal	Una pizca

Receta tomada y adaptada de http://elcocinerocasero.com/receta/como-hacer-arroz-con-leche-para-4-personas.

Los padres de Paula prepararon 24 porciones de arroz de leche, para los niños, la profesora y ellos usando la receta anterior.

a) Escribe en la siguiente tabla la cantidad de cada uno de los ingredientes que usaron los padres de Paula para las 24 porciones:

INGREDIENTES PARA 24 PERSONAS

INGREDIENTE	**CANTIDAD**

Arroz	
Leche	
Azúcar	
Canela	
Esencia de Vainilla	
Mantequilla	
Sal	

Justifica tu respuesta.

a) Los abuelos de Paula irán el próximo fin de semana a almorzar con Paula y sus papás. Paula le pide a su mamá que juntas hagan el postre, nuevamente arroz con leche. Si quieren preparar 6 porciones de postre usando la receta que bajaron de internet, ¿qué cantidad de cada ingrediente necesitarán?

Ayuda a Paula a completar la siguiente tabla:

INGREDIENTES PARA 6 PERSONAS

INGREDIENTE	**CANTIDAD**
Arroz	

Leche	
Azúcar	
Canela	
Esencia de Vainilla	
Mantequilla	
Sal	

Justifica tu respuesta.

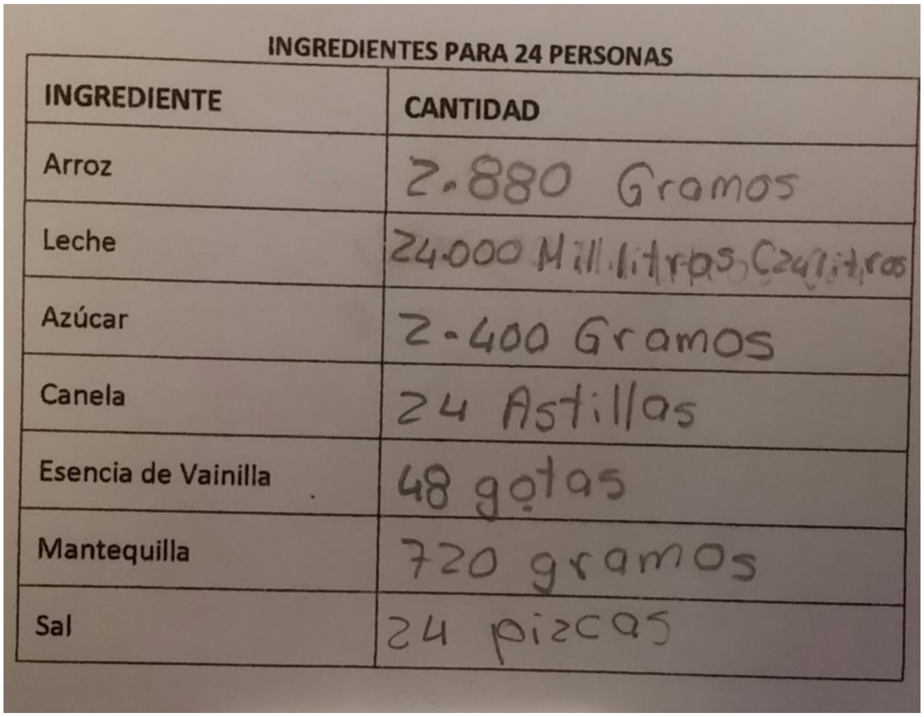
Figura 49. Tarea 4. Receta de cocina.

Para la tarea 4 se aprovechó el hecho de haber celebrado el cumpleaños en el salón de clase por parte de los padres de la estudiante Paula, días antes a la sesión en que se implementó la tarea 4, situación que permitió presentar un contexto real para la preparación del arroz con leche.

La distribución de los grupos de trabajo se continuó haciendo de manera autónoma, pues la docente- investigadora, sigue sin intervenir en la conformación de los mismos. Para esta tarea aparece una situación que antes no se había presentado y es que algunos estudiantes, luego de hacer la retroalimentación con sus compañeros, buscan la forma de borrar la solución que se dio en el espacio de las *producciones libres* a lo que se les solicita que por favor no borren, que antes por el contrario hagan una anotación sobre el nuevo hallazgo, cuando así lo requieran.

Categoría 1. Nivel de comprensión situacional: 47.36%

En la categoría 1 se ubican las producciones que multiplican cada uno de los ingredientes de la tabla para cuatro porciones por el número de porciones solicitadas, pasan por alto la relación entre la cantidad de porciones y la tabla con los ingredientes de 4 porciones.



INGREDIENTES PARA 24 PERSONAS

INGREDIENTE	CANTIDAD
Arroz	2.880 Gramos
Leche	24.000 Millilitros (24litros
Azúcar	2.400 Gramos
Canela	24 Astillas
Esencia de Vainilla	48 gotas
Mantequilla	720 gramos
Sal	24 pizcas

Figura 50. Modelo de solución en donde no relaciona la cantidad de porciones y los ingredientes.

Para esta solución tomaron cada uno de los ingredientes que hacen parte de la receta para 4 porciones y los multiplicaron por 24, que es la cantidad de porciones que se pide preparar, se toma como si la tabla inicial llevara la cantidad de ingredientes para una persona, dejando de lado la relación entre 4 y 24.

Profesora: Cuéntame Danna, ¿cómo estás haciendo la tabla para 24 porciones?

Danna: yo empecé a mirar y vi que el arroz de 4 porciones es 120 gramos, entonces multipliqué 120 por 24 y me dio 2.880 gramos y así seguí para la leche, y demás ingredientes.

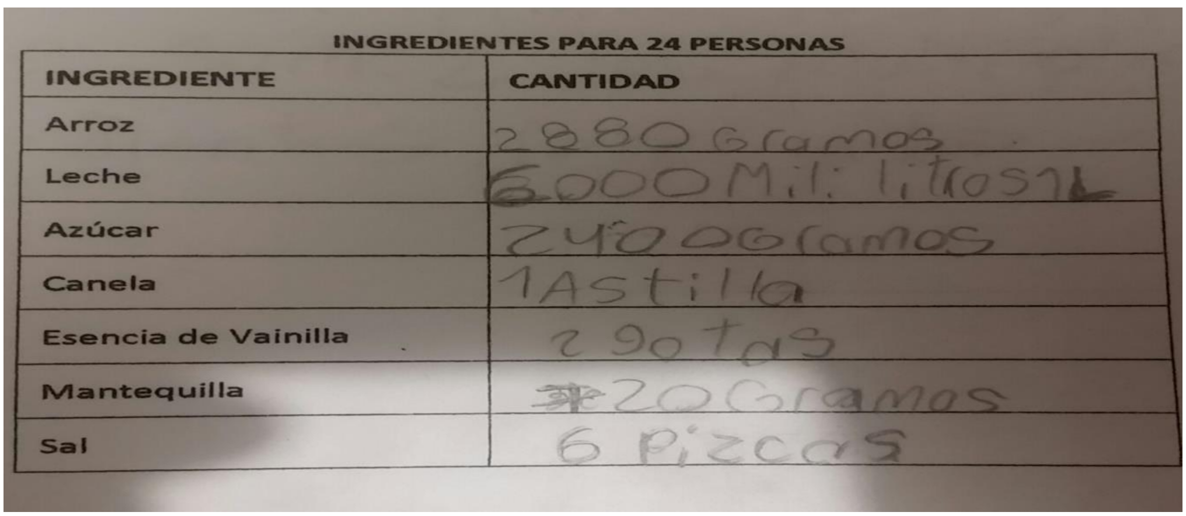
Profesora: ¿Cómo se te ocurre hacer la tabla para 6 porciones?

Danna: debe ser lo mismo que la otra, pero se multiplica por 6.

Figura 51. Modelo de solución sin relación entre la receta de 4 porciones.

En algunas producciones de esta categoría se observa que no se mantiene la multiplicación por 24 para todos los ingredientes, como lo observado cuando para la cantidad de las astillas de canela, deducen que se necesitan 6, o para el número de gotas de esencia de vainilla deciden que son 12 gotas, evidenciando que allí ya no multiplican por 24 sino por 6, dejando ver la relación entre 4 y 24.

Es de anotar que en la solución de Danna se establece como constante para cada uno de los ingredientes la multiplicación, por 24, lo que en otras producciones de esta categoría cambia, como lo dado en la solución del estudiante Lenin, quien cambia para cada ingrediente la razón:



INGREDIENTES PARA 24 PERSONAS

INGREDIENTE	CANTIDAD
Arroz	2880 Gramos
Leche	6000 Mililitros 6L
Azúcar	2400 Gramos
Canela	1 Astilla
Esencia de Vainilla	2 gotas
Mantequilla	20 Gramos
Sal	6 Pizcas

Figura 52. Solución en donde no se mantienen la variación de los ingredientes para la misma cantidad de porciones.

En el registro audiovisual se le preguntó a Lenin sobre la forma cómo abordo la construcción de la tabla para 24 y 6 porciones, con el fin de obtener la cantidad de ingredientes necesarios para cada una de las porciones pedidas.

Profesora: ¿Cuéntame cómo hiciste para preparar un arroz de leche para 24 personas?

Lenin: multipliqué 120 gramos (señalando el ingrediente arroz) y lo multipliqué por 24 y me dio 2.880 gramos, porque si digamos 120 son para 4 personas entonces para 24 faltan 20 y sume 20 más 4 y me dio 24.

Profesora: para 24 porciones multiplicaste por 24, ¿entonces me puedes decir cómo lo haces para 6 porciones?

Lenin: para la de 6 multipliqué por 2.

Profesora: porque multiplicaste por 2.

Lenin: como en los ingredientes de 4 personas le faltan 2 para llegar a 6 entonces multipliqué por 2 y ahí me dan los ingredientes para 6 personas.

Profesora: Cuando multiplicas 4 por 2, ¿cuánto te da?

Lenin: ocho.

Profesora: O sea que lo hallaste para para 8 o para 6 personas.

Lenin: para 6 personas porque a 4 le faltaba 2 para llegar a 6.

Profesora: ¿Cómo harías para encontrar los ingredientes para 8 personas?

Lenin: lo multiplicaría por 4 porque a 4 le faltan 4 para llegar a 8

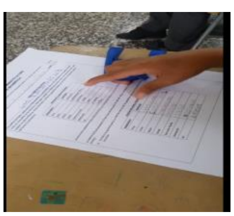


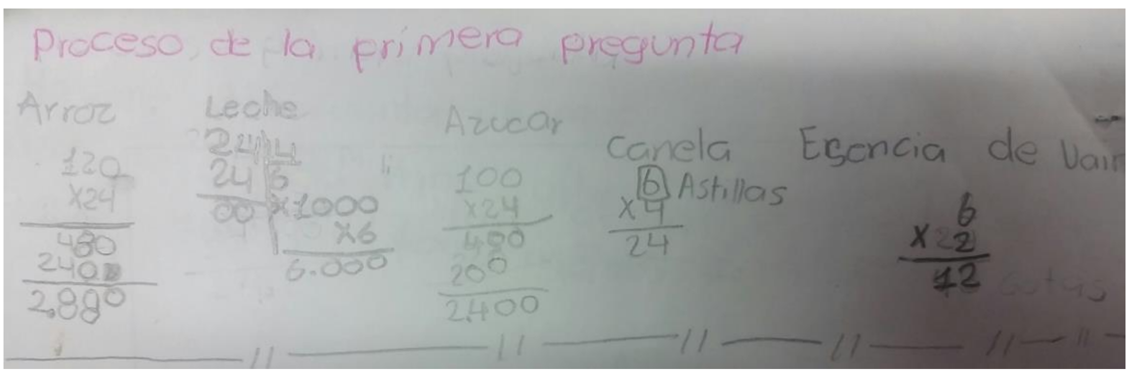
Figura 53. Modelo aditivo para encontrar los ingredientes para 24 y 6 porciones.

Las producciones de la categoría 1, para la tarea 4 se ubican en un *nivel de comprensión situacional* por cuanto en la comparación tienen la intuición que para una receta de 4 porciones tomada como referencia para hacer una de mayor numero de porciones, la cantidad para cada uno de los ingredientes debe aumentar, pero en relación a las magnitudes que intervienen para establecer lo que se requiere de cada uno de los ingredientes se pierde la relación entre número de porciones y la cantidad de los ingredientes, dejando de lado la relación entre 4 porciones y 24 así mismo que para 4 porciones y 6 porciones.

Al realizar la tabla se buscó que pudieran encontrar la razón entre las magnitudes, al observar entre cada uno de sus hallazgos la variación de las cantidades, este hecho permitió que, para el caso de Paula, se detuviera y observara que algo estaba cambiando de forma irregular, aspecto que permitió la indagación por parte de la docente- investigadora sobre la solución dada por la estudiante. En el registro audiovisual se aprecia cómo Paula, quien venía multiplicando por 24 cada uno de los ingredientes, hace un cambio en la solución, a continuación, se describe parte del dialogo que da cuenta de este hecho:

Paula: yo lo estaba haciendo casi igual que ellas, multiplicando por 24, para el arroz, que son 120 me dio 2.880.

Profesora: ¿Por qué para la leche que son 1000 mililitros cambiaste a 6000 mililitros la cantidad para 24 personas?



Paula: porque yo ahí dividí 24 entre 4 y me dio 6, eso lo multipliqué por 1000 mililitros y me dio 6000ml.

Profesora: ¿qué te hizo cambiar?

Paula: que en la tabla del 4 aparece el 24, porque 6 por 4 es 24, y me pareció que era mucha leche, por eso multipliqué lo de la receta de 4 porciones por 6, así mismo lo hice para la esencia de vainilla, para la canela y la sal.

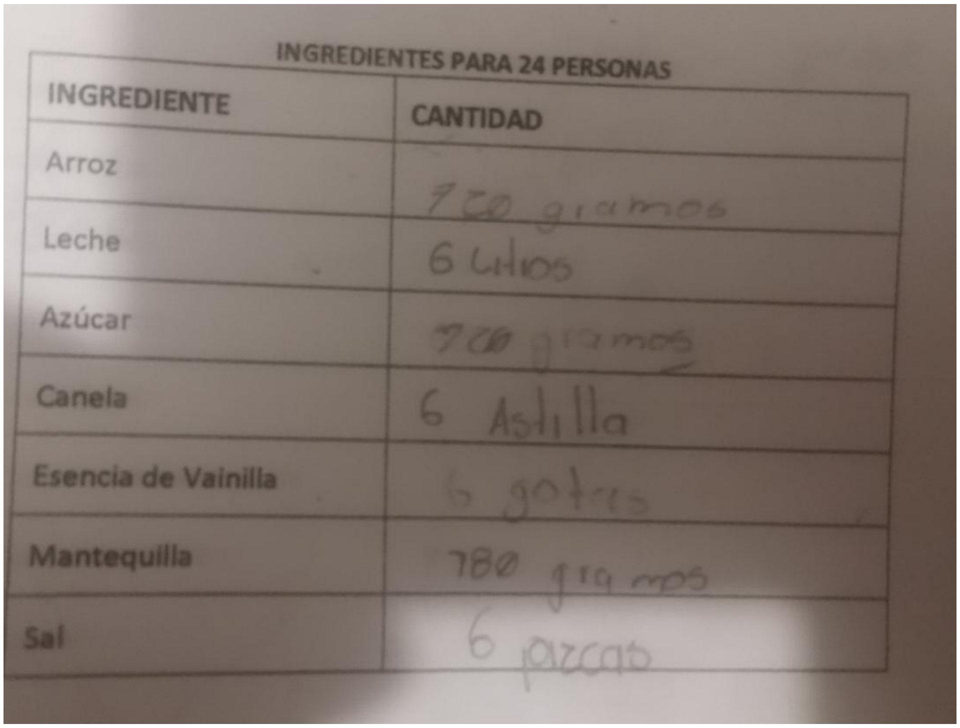
Figura 54. Relación entre los ingredientes de 4 porciones para la leche.

Como se puede evidenciar, para Paula la solución tiene discontinuidad en el proceso del hallazgo de la razón pues aquí desde el uso de la percepción, a través de elementos cualitativos, en su resultado sólo multiplica los ingredientes de la tabla de 4 porciones por 6, cuando le parece que es *mucha la cantidad*, pero en los demás ingredientes continúa multiplicando por 24.

En este sentido las producciones ubicadas en el *nivel de comprensión situacional* aun no establecen cuántas unidades de 4 hay en 24 o en 6, para dar sentido a la razón y la proporción para ellos la relación entre las magnitudes se soportan en la suma y la multiplicación, de acuerdo a lo planteado por Lamon (1994), "la habilidad para construir una unidad de referencia o un todo - unidad, y luego reinterpretar una situación en términos de esta unidad, resulta métrico para el desarrollo de ideas matemáticas de sofisticación creciente" (p.3), de ahí que en este nivel se continúa manteniendo la relación entre las magnitudes de forma cualitativa por cuanto el criterio es que a mayor número de porciones mayor cantidad de ingredientes, lo que se logra a través de la suma o la multiplicación.

Categoría 3. Nivel de comprensión referencial: 26.32%

En la categoría 3 se encuentra un 26.32% de las producciones escritas, porque reconocen la relación entre la cantidad de ingredientes para 24 y 6 porciones a partir de la receta para 4 porciones, por medio del uso de la suma o de la multiplicación, además, algunos toman como referencia la cantidad de ingredientes para una porción y así encontrar la cantidad de ingredientes para las porciones solicitadas.



INGREDIENTES PARA 24 PERSONAS

INGREDIENTE	CANTIDAD
Arroz	720 gramos
Leche	6 Litros
Azúcar	720 gramos
Canela	6 Astilla
Esencia de Vainilla	6 gotas
Mantequilla	780 gramos
Sal	6 pizcas

Figura 55. Modelo de solución de relación entre 4 porciones y 24 porciones.

En este tipo de solución se establece la relación entre 24 y 4, y entre 6 y 4, por medio de la división para la primera y la suma para la segunda. Para el punto 1 realizan la división de 24 entre 4 y da 6, razón por la cual multiplican cada uno de los ingredientes por 6 para hallar la cantidad de ingredientes para la preparación de 24 porciones. En la pregunta 2 dividen la cantidad de cada ingrediente entre 4 y luego lo multiplican por 6.

Algunas de las soluciones que permitieron construir la tabla de la figura 55, se dieron a partir de la suma o de la multiplicación.

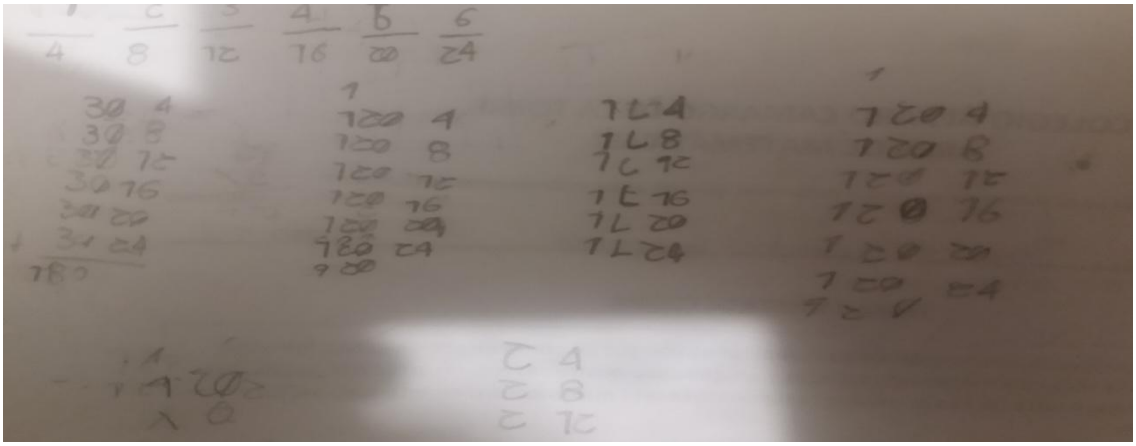
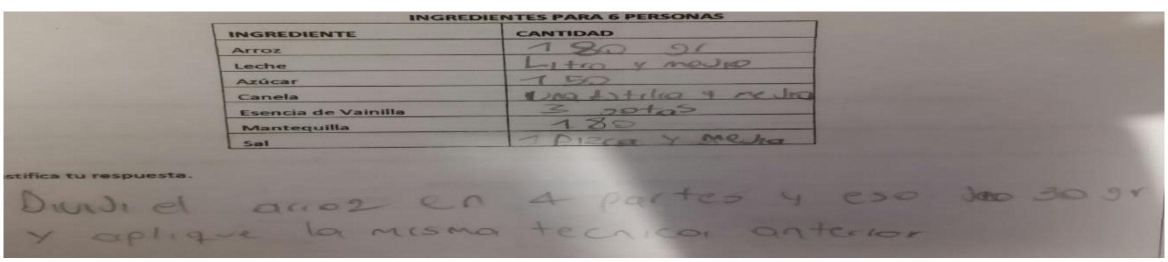


Figura 56. Modelo de solución a partir de la suma para la receta de 24 porciones.

En este modelo de solución se toma como referencia la receta para cuatro porciones de forma aditiva para llegar hasta 24 en cada uno de los ingredientes, en esta categoría, de acuerdo a Rapetti (2003) “se desarrolla una secuencia de relaciones aditivas que permiten vincular la cantidad inicial de la primera razón con la que se desea alcanzar y extender dicha secuencia a la otra razón” (p.68).

Este tipo de producciones corresponden a *un nivel de comprensión referencial* porque para llegar a la cantidad de ingredientes necesarios, abordan tanto de manera aditiva como multiplicativa, la relación entre las porciones, tomando como referencia la receta de 4 porciones, aspecto que se pudo evidenciar a partir de la construcción de la tabla para la receta de 6 porciones.



INGREDIENTES PARA 6 PERSONAS

INGREDIENTE	CANTIDAD
Arroz	180 gr
Leche	Litro y medio
Azúcar	150
Canela	Una astilla y media
Esencia de Vainilla	3 gotas
Mantequilla	180
Sal	1 pizca y media

stifica tu respuesta.

Dividí el arroz en 4 partes y eso dio 30 gr y aplique la misma tecnica anterior

Figura 57. Modelo de solución de nivel de comprensión referencial en la relación al número de porciones.

En este tipo de solución se establece el *modelo para* por cuanto al encontrar los ingredientes para 6 porciones a partir de la división de uno de los ingredientes entre 4 y de esta forma multiplicarlo por 6, se observa que deja a un lado las unidades de medida de algunos ingredientes, en el registro del audiovisual se dialoga con el estudiante respecto a lo que soporta esta solución.

Profesora: Julián, veo que ya hiciste las dos tablas, me puedes explicar cómo las hiciste por favor.

Julián: cogí el arroz lo dividí entre cuatro y eso me dio 30.

Profesora: ¿ese 30 representa lo de cuántas porciones?

Julián: lo de una.

Profesora: entonces, ¿cómo hallo el arroz para 6 porciones?

Julián: lo multipliqué por 6.

Profesora: ¿cuántos gramos de arroz son por una porción?

Julián: 30

Profesora entonces, ¿cuánto es de azúcar?

Julián: 600 gramos.

Profesora: ¿para azúcar, 600 gramos por persona?, pero acuérdate que para cuatro personas son 100 gramos.

Julián: si cada 100 vale por cuatro.

Profesora: Entonces, ¿cuánto vale lo de una sola porción? ¿Cuánto azúcar?

Julián: para una persona son 50.

Profesora: ¿la mitad?

Julián: son 4, una cuarta parte.

Profesora: ¿cuánto es la cuarta parte de 100 gramos?

Julián: 50

Profesora: ¿seguro? Tienes 100 gramos, ¿la cuarta parte es?

Julián: ah no, son 25.

Profesora: la cuarta parte de 100 son 25 o sea, ¿para una sola porción cuanta azúcar se va?

Julián: 25 gramos.

Figura 58. Hallazgo de una porción de azúcar.

Al realizar la división entre las cantidades de cada ingrediente para encontrar lo de una porción, se está realizando lo que según Rapetti (2003) consiste en “realizar una división entre cantidades de distintas magnitudes para comparar el valor que le corresponde a la unidad, en otras palabras, compara las razones” (p.68).

Categoría 4. Nivel comprensión general: 26.32%

En esta categoría se ubican las soluciones que, por medio del lenguaje natural, establecen la relación entre el número de porciones a partir de la receta de cuatro porciones, expresándola a través de la multiplicación y la división, y la relación para cada uno de los ingredientes con su respectiva unidad de medida, además, encuentran la cantidad de cada ingrediente para un número de porciones diferente al de 24 y 6 porciones.

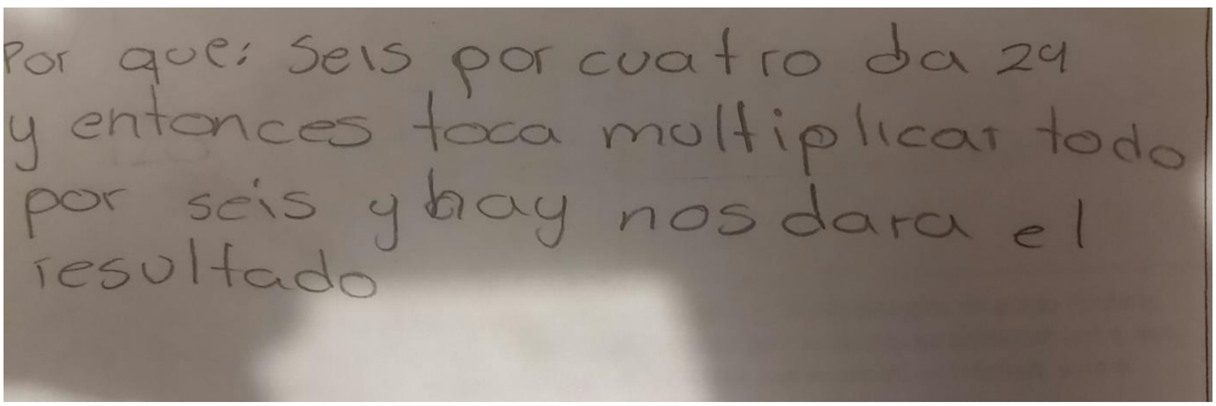


Figura 59. Solución en lenguaje natural para encontrar los ingredientes para 24 porciones.

Para esta categoría ya se ha dado el hallazgo de la unidad con la que van a comparar, buscando los múltiplos de cuatro y su mitad de acuerdo a las porciones que se van a preparar, razón por la cual las soluciones dadas en esta categoría son del *nivel de comprensión general*, pues comienzan a enfrentarse a la cantidad de arroz necesario para 20 porciones. En el registro audiovisual se da evidencia la forma cómo se pudo hallar la cantidad de arroz para 20 porciones.

Profesora: ahora quiero mirar la cantidad necesaria de arroz para 20 porciones.

Shenoa: (levantando la mano) 4 por 5 da 20, entonces tocaría multiplicar todo por cinco, entonces multiplico 120 gramos por 5 y me da 600.

Profesora: (señalando a Diego) ¿tú qué opinas? Estoy pidiendo la cantidad de arroz para 20 personas.

Diego: Hice como una secuencia, digamos que 120 más 120 era para 8 personas, luego sume 120 y me dio 360, eso era para 12 personas; luego sumé 120 y me dio 480, eso para 16 personas y después otros 120 y medio 600 eso es para 20 personas.

Paula: yo hice como dijo Shenoa, cogí 120 y lo multipliqué por 5 y me dio 600 gramos.

Figura 60. Hallazgo de la cantidad de arroz para 20 porciones.

En este diálogo se evidencia la forma cómo se encuentra la razón del ingrediente arroz a través de la multiplicación o de la suma, además, en el registro audiovisual, se evidencia que Paula, quien en la receta para cuatro personas no calculaba la razón de los ingredientes, en este caso, para 20 porciones, ya tiene en cuenta multiplicar por cinco.

En la socialización la docente- investigadora, en su papel de guía orientadora, como lo establece el enfoque de la EMR, cuestiona cuál es la cantidad necesaria de arroz si se pide hacer una receta para 100 personas, situación que se describe a continuación:

Profesora: Santiago te quiero preguntar con lo que hemos hecho hasta el momento, ¿es posible encontrar la cantidad de arroz para 1000 porciones?

María Luisa: yo creo que sí porque si pudimos hacerlo para 24 personas, para 6 y para 20, ahora podemos para 1000 personas.

Santiago: (pasa al tablero y comienza a hacer la división de 1000 entre 6).

Profesora: ¿por qué divides 1000 entre 6?

Santiago: para saber si se puede usar lo de la primera tabla para que dé 1000.

Profesora: pero si la receta original es la de 4, ¿ahí te da exacto para 6?

Santiago: ahí quedo, no me da exacto.

Profesora: Entonces, ¿qué harías?

Santiago: divido 1000 entre 4 y me da 250.

Profesora: entonces, ¿qué haces con ese 250?

Santiago: multiplico el arroz de 4 porciones que es 120 por 250.

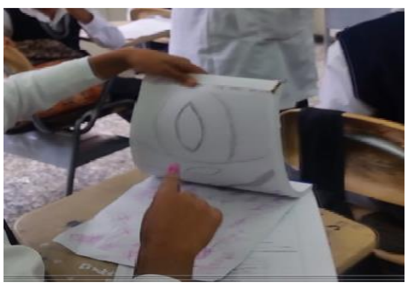


Figura 61. Hallazgo de cantidad de arroz para 250 porciones.

Para el cierre de la tarea 4 se registraron las intervenciones de estudiantes que ya relacionan las porciones encontrando la razón haciendo uso de la suma, de la multiplicación o de la división, en esta tarea en un porcentaje significativo se potenció el hallazgo de la razón, a partir de la comparación entre las tablas que permitieron observar el cambio de los ingredientes según el número de porciones.

En este sentido según Cohen (2012, p.136), la tarea 4 permitió encontrar "*la característica de proporcionalidad más básica que sirve para analizar si dos cantidades están relacionadas de una manera proporcional directa.* Si una se triplica, la otra también. Si una se reduce a la mitad, la otra también. En general, si una cantidad sufre un aumento (del doble, triple, etc.) o una disminución (de la mitad, tercera parte, etc.), la otra también tendrá ese mismo cambio multiplicativo de aumento o disminución”.

Dentro de las soluciones planteadas se encuentra, como desde las *producciones libres* nombre como se reconoce desde el enfoque de la EMR las soluciones individuales de los estudiantes, van sugiriendo que el pensamiento más sofisticado, como es el de razón y proporción resulta a partir de reelaborar una situación en términos de una unidad más colectiva, puesto que para encontrar la cantidad del ingrediente , primero encuentran lo que se requiere para una porción y a partir de allí se busca para un número mayor de porciones, dando indicios de hacer uso de un esquema parte-todo que permite al estudiante pensar acerca tanto del agregado como del ítem individual que lo compone.

Otro aspecto observado en las soluciones, es la manera de abordar el hallazgo de la razón desde una visualización aditiva la cual mantuvieron algunos estudiantes pese a que en el trabajo por grupos se hallan establecido soluciones desde lo multiplicativo, en este sentido ocurre lo que en estudios anteriores como lo afirma Lamon (1994, p.8), “el pensamiento de los niños en relación con problemas de razón y proporción puede ser razonable, productivo y hasta creativo, ellos proporcionan poca información sobre cómo, cuándo, y en respuesta de cuáles situaciones un niño con una visión predominantemente aditiva del mundo, cambia para incluir una perspectiva multiplicativa”.

Dentro de la toma de decisiones se considera que, para continuar con el propósito del trabajo, como es el de potenciar el razonamiento proporcional a partir de la constitución del objeto mental comparativamente, planteando situaciones directamente proporcionales, también es relevante dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje, llevar situaciones que no sean proporcionales, por tal razón se plantea la tarea 5, en donde las magnitudes involucradas no son directamente proporcionales.

4.1.5. Tarea 5. Relación estatura y número de calzado.

1

Mientras Diego, estudiante del curso quinto, en un almacén de calzado se está midiendo diferentes modelos de zapatos número 32, observa que una persona de mayor altura que él, pide un número diferente, por eso se le ocurre pensar, ¿qué relación existe entre la estatura de cada persona y su número de calzado?

a) ¿Crees que hay relación entre la altura de una persona y el número de calzado?

Si (   )   No (   )

Justifica tu respuesta

b) Ahora vamos a preguntar la estatura de 10 compañeros de clase y el número de calzado, completando la siguiente tabla.

Estatura en centímetros	**Número de calzado**

c) Organiza de menor a mayor estatura, la información que obtuviste en el punto anterior.

ESTATURA EN CENTIMETROS	NUMERO DE CALZADO

¿Encuentras alguna relación entre la columna de las estaturas y el número del calzado?

Si (   )   No (   )

Justifica tu respuesta

e) Tratemos de relacionar la medida de la estatura con el número de calzado correspondiente. Como la estatura es mayor y el número del calzado es menor, vamos a hacer la división entre estatura y número de calzado. Volvamos a la tabla original con una columna adicional:

Estatura en centímetros	Numero de calzado	Cociente

Observas alguna relación a partir del cociente entre Estatura y numero de calzado

Si (   )   No (   )

	Justifica tu respuesta:

Figura 62. Tarea 5. Relación estatura y número de calzado.

El propósito de la tarea 5 es realizar comparaciones entre estatura, en centímetros, y número de calzado, comparación que se hace con datos de 10 estudiantes del curso con el objetivo de identificar la no proporcionalidad de las magnitudes que intervienen, las cuales al ser de diferente tipo corresponden a razones externas, según Freudenthal (2001).

Previo a completar la tabla de la pregunta b, la docente- investigadora indagó la estatura y número de calzado de 19 estudiantes, buscando que al momento de completar la tabla se pudieran plasmar en ella algunos números de calzado iguales para diferentes estaturas o viceversa, con el propósito de que al pedir que organizaran de menor a mayor las estaturas se pudiera observar cual es la relación entre las magnitudes involucradas.

La unidad para la estatura se dio en centímetros, la del número de calzado aparece sin unidad, lo que motivó a los estudiantes y a la docente- investigadora a indagar sobre cómo se mide el número del calzado, aspecto que nos llevó a hacer consultas en internet y a contar con la visita del abuelo de un estudiante con experiencia en la fabricación de calzado. Este momento sirvió para conocer las diferentes hormas con los que se hacen los zapatos para cada talla, además, permitió que los estudiantes tuvieran de viva voz la explicación de cómo se fabrica un par de zapatos escolar, puesto que el invitado llevó las plantillas y los instrumentos de medición, necesarios en la elaboración de calzado.

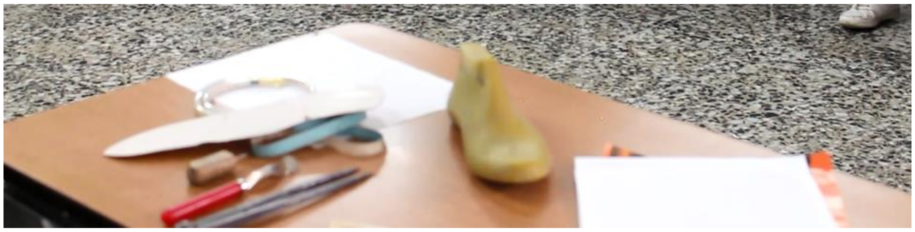


Figura 63. Imagen de los instrumentos para la fabricación de calzado.

En esta sesión los estudiantes también vivieron la experiencia de hacer un molde para el zapato colegial, identificando las líneas que hacen parte del mismo.

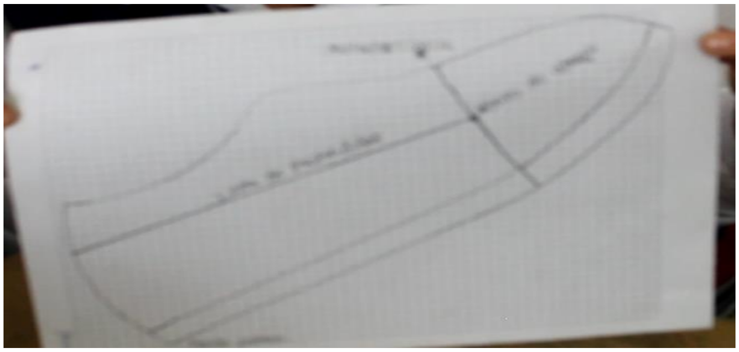
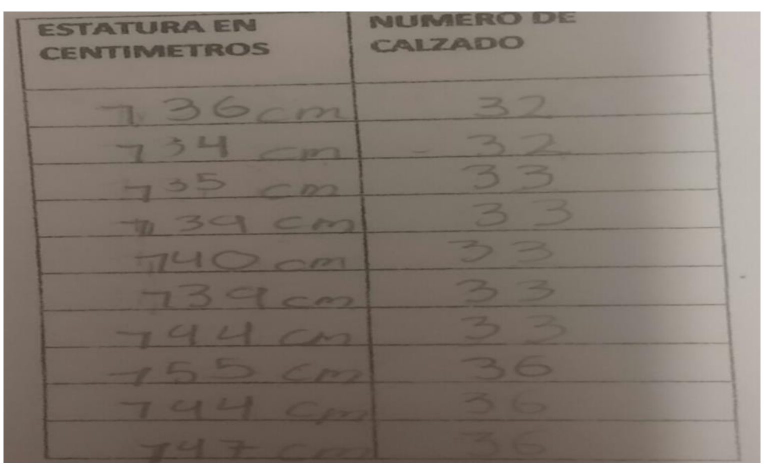


Figura 64. Imagen de la plantilla para fabricar calzado colegial.

La experiencia de aula enriqueció el desarrollo de la tarea, logrando el conocimiento de que las magnitudes de estatura y número de calzado son de diferente tipo, lo que permitió introducir en esta situación las razones externas que hacen parte del propósito planteado.

Con la visita al aula del señor Juan se logró conocer el relato de cómo se fabrica un zapato colegial con las diferentes etapas que hacen parte del proceso iniciando con el dibujo del molde y las diferentes líneas, el corte y el montaje del corte en la horma. Este contexto se originó a partir la pregunta: ¿Con qué unidades se mide el número de calzado?

Continuando con el desarrollo de la tarea 5, la tabla con las 10 estaturas y su respectivo número de calzado quedó de la siguiente manera:



ESTATURA EN CENTIMETROS	NUMERO DE CALZADO
136cm	32
134 cm	32
135 cm	33
139 cm	33
140 cm	33
139cm	33
144 cm	33
155 cm	36
144 cm	36
147 cm	36

Figura 65. Tabla de las 10 estaturas para encontrar la relación con el número de calzado.

Como aspecto a tener en cuenta, fue el momento de las producciones libres, cuando al organizar las estaturas de menor a mayor los estudiantes intentaron cambiar el orden del número de calzado de la misma manera, situación que hacía que se alterara la información inicial. Razón por la cual la explicación de la docente- investigadora, se dio a partir de organizar los dos primeros datos y de esta manera los estudiantes continuaran con la organización de la tabla.

Otro aspecto a resaltar en el desarrollo de la tarea 5, fue cuando se halló el cociente entre la estatura y número de calzado, esto permitió revisar, con todo el curso, el algoritmo para la división entre dos cifras y junto con ello la aparición de números decimales, por cuanto los 19 estudiantes aún no habían trabajado con estos números.

Con relación a las soluciones planteadas, se ubican de la siguiente manera:

***Categoría 1. Nivel de comprensión situacional:* 47.36 %**

En esta categoría se encuentran las producciones de los estudiantes que establecen la comparación a partir del tamaño del número del calzado y el de la estatura sin relacionar las magnitudes:

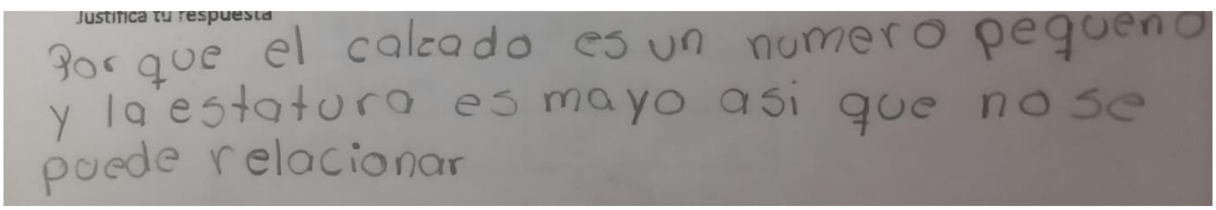


Figura 66. Modelo de solución en la que no se relacionan las magnitudes involucradas.

Esta solución también se acompañó de la comparación desde el punto de vista perceptual, al considerar que *el pie es más chiquito que uno*, es decir, para esta categoría no establecen ninguna relación entre las magnitudes, de tipo cuantitativo, aun cuando en el punto e, se pide adicionar una columna con el cociente entre estatura y número de calzado con el propósito de proporcionar elementos que ayuden a dar una mirada de tipo cuantitativo a la relación entre las magnitudes involucradas.

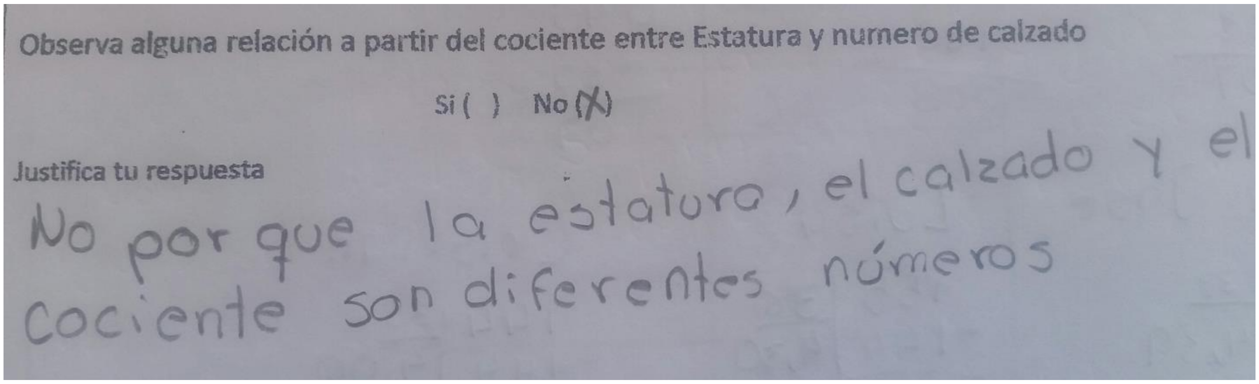


Figura 67. Solución de tipo cualitativo para relacionar estatura, número de calzado y cociente.

Como se puede observar, al establecer que son diferentes números, de manera cualitativa, Alex sustenta su solución en el siguiente diálogo:

Profesora: me puedes contar qué has hecho Alex, ¿tú crees que hay alguna relación entre estatura y número de calzado?

Alex: No, porque estatura es más diferente que calzado.

Profesora: ¿En qué es diferente?

Alex: porque calzado es para el pie y estatura es la altura de la persona.

Profesora: ¿la relacionas en cuanto a números o en cuanto a qué?

Alex: a números.

Figura 68. Relación perceptual de estatura y número de calzado.

La categoría 1 se ubica en un *nivel de comprensión situacional*, puesto que aun cuando se construyó la tabla con cantidades relacionadas a la estatura y número de calzado, estas soluciones mantienen su argumentación desde lo cualitativo, con términos *es más pequeño* o *es más grande*, sin establecer si son o no magnitudes del mismo tipo o de diferente tipo, aspecto que permite la introducción y avance en la constitución de razones internas o razones externas necesarias en la enseñanza- aprendizaje de la razón y la proporción. Al respecto Freudenthal (2001) afirma, “ya nadie es consciente hoy en día del salto mental de las razones internas a las externas, nadie plantea la cuestión de si no será un salto demasiado largo para el que aprende” (p.8).

En este sentido la tarea 5 buscó centrar la atención de los estudiantes en las unidades de medida de las magnitudes involucradas al completar las tablas, organizando de menor a mayor las estaturas y calculando el cociente entre ellas, aunque para este *nivel de comprensión situacional* se sigan ubicando las producciones en la etapa de *"comparación intuitiva"* termino con el que se describe según Rapetti (2003) "…la comparación entre las cantidades basada en una estimación aproximada, sin realizar un cálculo operatorio complejo" (p.68).

Categoría 3. Nivel de comprensión referencial 31.57 %

En esta categoría se encuentran las producciones que establecen la relación entre la estatura y el número de calzado a partir de afirmar que si la persona es alta entonces calzará más, además, identifican que la estatura tiene como unidad de medida el centímetro, mientras el número de calzado está en otra unidad.

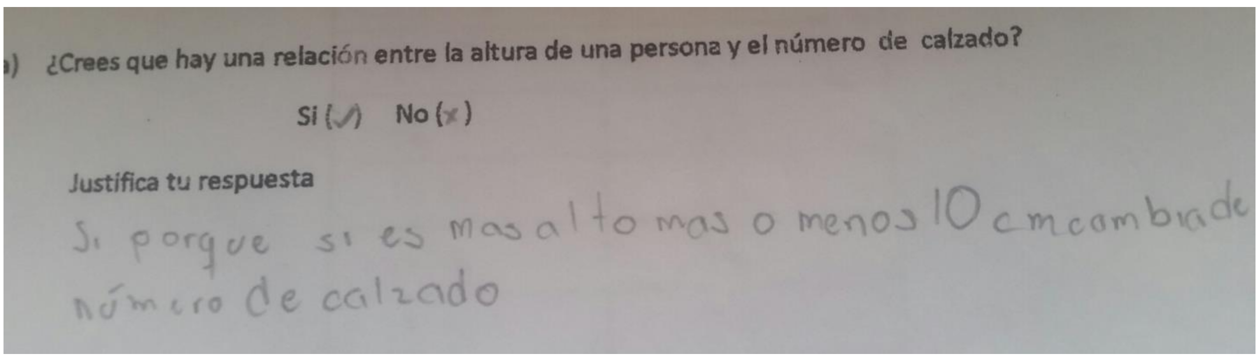


Figura 69. Solución categoría 3 nivel referencial tarea 5.

En este tipo de solución la relación entre estatura y número de calzado se establece de manera intuitiva, si es más alto calzará más, pero también toma una decisión de aumentar la talla de zapato cada 10 centímetros, en el registro audiovisual Santiago sustenta su solución de siguiente forma:

Profesora: Santiago, ¿tú crees que hay alguna relación entre estatura y numero de calzado? Santiago: si Profesora: ¿Cuál crees? Santiago: que entre más alto sea, entonces más es el número de calzado. Profesora: ¿El hombre más alto del mundo cuánto calzará? Santiago: (no responde, hace cara de sorprendido) Profesora: ¿Será que debe mandar a hacer sus zapatos? Santiago: si.

Figura 70. Relación con estatura del hombre más alto del mundo y número de calzado.

Teniendo en cuenta la relación de: *a mayor estatura mayor talla de calzado*, también se cuestionó, ¿qué pasará con la relación *a menor estatura menor talla de calzado*? razón por la cual se le preguntó:

Profesora: Santiago, ¿puedes imaginar cuál será el número de calzado de la mujer más pequeña del mundo? Santiago: debe mandar a hacer sus zapatos porque son muy pequeños.

Figura 71. Relación con estatura de la mujer pequeña y número de calzado.

En el diálogo anterior se establece la relación: *a mayor estatura, mayor número de calzado* y, *a menor estatura, menor número de calzado*. Posteriormente, para organizar la tabla de estaturas de menor a mayor, sin variar el número de calzado, el mismo estudiante se pregunta, ¿cómo se mide la talla de calzado? Dando la siguiente respuesta:

Profesora: Santiago, ¿en qué que se medirá la talla del zapato?

Santiago: en anchura

Profesora: No entiendo, ¿qué es para ti anchura?

Santiago: (señala con sus manos)

Profesora: ¿El largo no tiene que ver?

Santiago: No, el largo no tiene que ver.

Figura 72. Medida de talla del zapato en anchura.

En la categoría 3, aunque se toma un caso particular para hacer referencia, como en el contexto trabajado en la tarea 3, en cuanto a estaturas, para la tarea 5 se relaciona con el número de calzado, pero se empiezan a dar pasos para buscar la forma de observar cómo varía la talla de calzado involucrando el ancho del pie, aspecto que los ubica en *el nivel de comprensión referencial.*

Más adelante al momento de la socialización, en el registro audiovisual se observa como el mismo estudiante comenta a sus compañeros la forma como ha visto a su abuelo el señor Juan, hacer la fabricación de los zapatos, en el siguiente diálogo:

Profesora: Luego de ver el video, ¿cómo creen ustedes que los fabricantes de calzado hacen un par de zapatos 34, u otra talla?

Andrés: Yo creo que usan un molde, de acuerdo a la talla de zapato y luego ahí lo van redondeando para que quede igualito al molde.

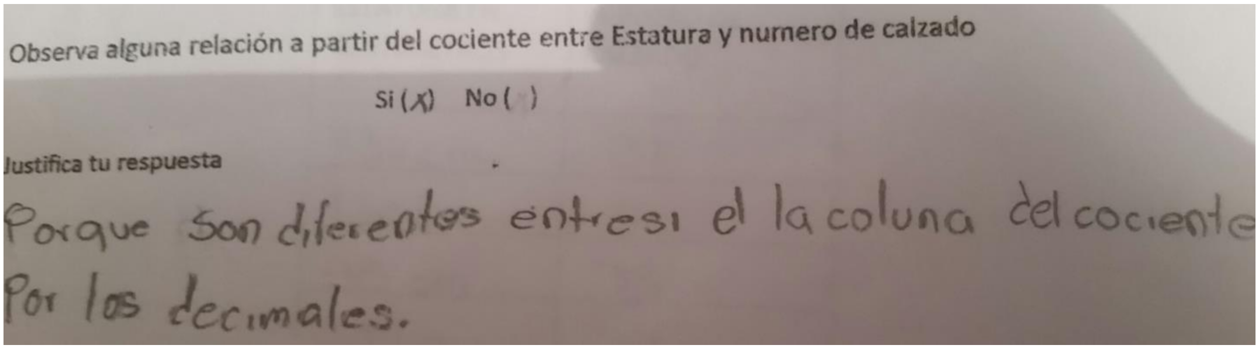
Profesora: ¿Que más ustedes pudieron ver en el video?

Santiago: Profe esto no es del video, Es que lo que dice Riaño, yo creo que no es verdad, que el zapato lo vuelven hasta que quede igualito al molde. Lo que pasa es que cuando yo veo a mi abuelo a veces hacer zapatos, yo veo que el coge un pedazo de tela y los pega en las hormas, después, quita los pedazos de tela y con un pegamento todo raro, une los pedazos de tela y después compra suelas y se las pone.

Figura 73. Santiago relata lo que ve hacer al abuelo, fabricante de calzado.

Durante los diferentes momentos, de acuerdo a la metodología planteada, se han dado evidencias de la forma cómo los estudiantes se han venido aproximando a la visualización de magnitudes de diferente tipo (razones externas), si bien estas estuvieron presenten en la tarea 4, es en la relación entre estatura y número de calzado en donde se han tratado con mayor énfasis.

Para la pregunta e), las soluciones correspondientes a la categoría 3, establecen la relación entre estatura, número de calzado y su cociente, a partir de las clases de números que componen cada una de las columnas como se registra en la figura 74.


Observa alguna relación a partir del cociente entre Estatura y numero de calzado

Si (X) No ( )

Justifica tu respuesta

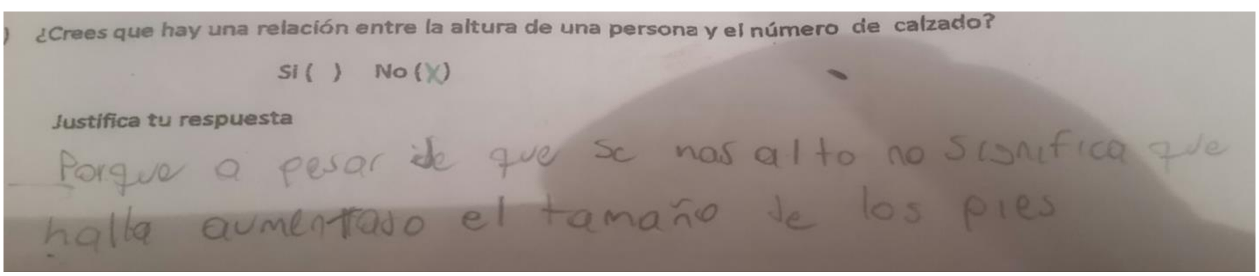
Porque son diferentes entre si el la coluna del cociente Por los decimales.

Figura 74. Solución de nivel de comprensión referencial a partir del cociente entre magnitudes.

En este grupo predomina la reflexión sobre la columna del cociente, se identifica que son números decimales, luego se continúa realizando la comparación de forma cualitativa, sin relacionar las magnitudes involucradas. En este sentido los procesos de algoritmización no han dado la aproximación a la razón para establecer un modelo que se pueda representar de forma verbal, en relación al cambio de la estatura y el número de calzado, en este sentido Freudenthal afirma, (2001) “Las aplicaciones que conservan la razón no sólo sirven en las visualizaciones, sino que también tienen su propia función cognitiva como modelos” (p.32).

Categoría 4. Nivel de comprensión general: 21.07 %

Para esta categoría se establece la comparación de las magnitudes desde su aspecto cualitativo, al relacionar las estaturas con el número de calzado, aspecto que permite la observación de las diferencias entre las magnitudes.


¿Crees que hay una relación entre la altura de una persona y el número de calzado?

Si ( ) No (X)

Justifica tu respuesta

Porque a pesar de que se mas alto no significa que halla aumentado el tamaño de los pies

Figura 75. Solución en la que encuentra diferencias entre las magnitudes.

Esta producción hace referencia a la variación entre estatura y talla de zapato, que no está directamente relacionada, lo que más adelante se confirma con la observación que hacen de la tabla con las estaturas organizadas, puesto que encuentran algunos números de calzado iguales que corresponden a estaturas diferentes, así se evidencia en la figura 76.

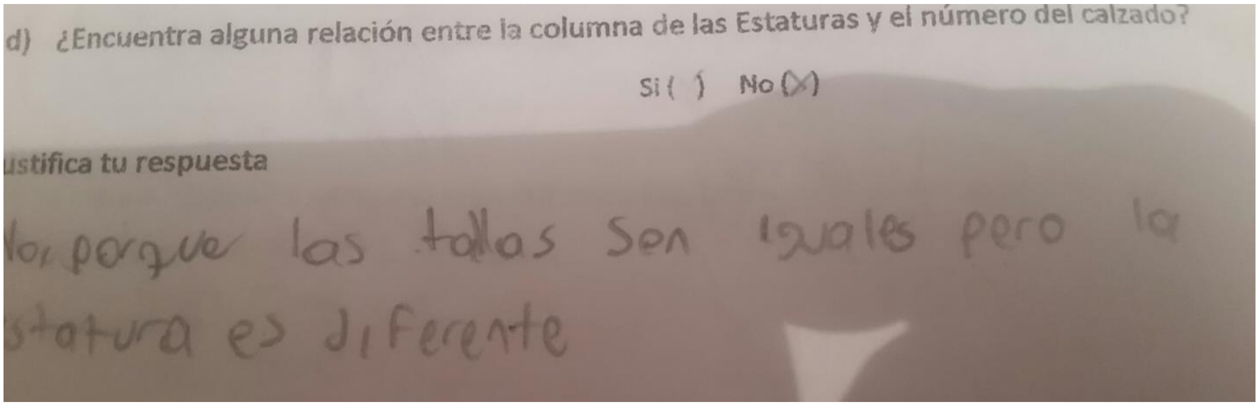


Figura 76. Solución nivel de comprensión general tarea 5.

En esta solución ya se establece la generalización a partir de la tabla por medio del lenguaje natural, aspecto que permite ubicar la categoría 4, en un *nivel de comprensión general*, por cuanto no se detiene a dar a conocer en su argumentación casos particulares, sino que inicia procesos de generalización.

En el registro audiovisual se evidencia el cambio de argumentación de Diego, estudiante que en un comienzo sostenía que la relación entre estatura y número de calzado, si creces de tamaño todo tu cuerpo crece, incluido los pies. En el dialogo con la docente-investigadora se evidencia el cambio:

Profesora: ¿Por qué cambias te de opinión cuando se pidió relacionar la estatura con el número de calzado?

Diego: en la primera teoría dije que sí hay relación entre estatura y número de calzado porque si creces de tamaño, todo tu cuerpo crece contando los pies.

Profesora: Y, ¿qué paso después?

Diego: cuando organicé la tabla de menor a mayor estatura, me di cuenta de que dos personas que miden 144 centímetros, tienen diferente calzado.

Figura 77. Diego cambia de opinión con respecto a la relación entre estatura y número de calzado.

En la reflexión hecha por el estudiante se deja ver que al observar la tabla se encuentran iguales estaturas con diferente número de calzado, pero también igual estatura con igual número de calzado como es el caso de 139 centímetros y talla de zapato 33.

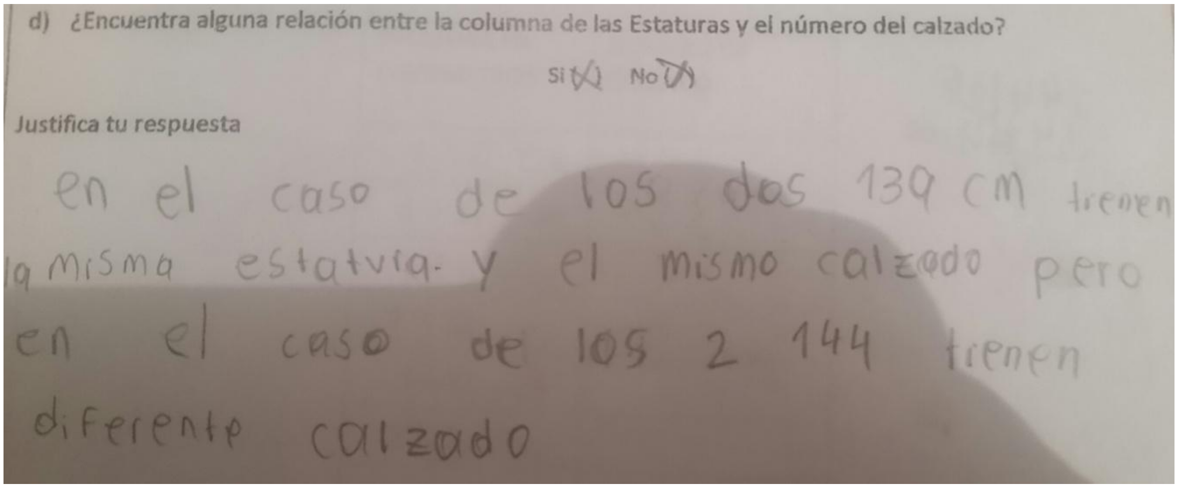


Figura 78. Cambio de opinión de acuerdo a la tabla para la tarea 5.

De acuerdo a este análisis, para establecer la relación de las magnitudes a partir del cálculo del cociente en esta categoría 4, que corresponde al *nivel de comprensión general* durante la socialización, usando una cartelera en la que se observaban las tres columnas, se pudo establecer el cociente, resultado de tomar el dividendo con la estatura, dada en centímetros, y el divisor con el número de calzado que llamamos talla. La atención de los estudiantes se centró, de acuerdo al papel orientador de la docente- investigadora, en buscar qué afirmaciones podían hacer cuando hay mayor estatura y menor número de calzado, o cuando hay menor estatura y mayor número de calzado, de acuerdo al siguiente diálogo:

Diego: Profe, mira que el que tiene como 136, el menor calzado tiene mayor cociente, que el que tiene menos estatura e igual número de calzado. (Señalando el cociente de 136 entre 32 que es 4, 25 y el cociente de 134 y 32 que es 4, 18)

Profesora: entonces, ¿tiene mayor cociente el que tenga más altura y menor número de calzado?

Diego: Sí, mira cuando hacemos el cociente de 135 centímetros con la talla 33 nos da 4,09 de cociente y cuando hacemos 139 centímetros con la misma talla nos da 4, 21, aumenta el cociente.

Profesora: Miren lo que dice su compañero Diego (dirigiéndose a todo el curso), pareciera que cuando hay más estatura y menor número de calzado el cociente es mayor.

Dilan: (Señala la estatura de 144 centímetros), estos son de igual estatura, pero este tiene más calzado (señala la talla 36) y éste tiene menos (señala la talla 33) y, en el primero el cociente es 4,00 y en el otro es 4,36.

Profesora: Dilan, ¿en dónde es mayor el cociente?

Dilan: En donde es menor el calzado.

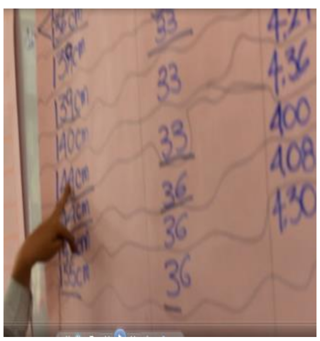


Figura 79. Hallazgo de la relación entre el cociente, estatura y número de calzado.

Luego de las intervenciones de los estudiantes, la docente- investigadora indaga sobre otros cocientes que no están contemplados en la tabla, partiendo de algunas de las estaturas registradas, pero cambiando el número de calzado, sin perder de vista las unidades para cada magnitud, para que se pudieran dar cuenta del cambio del cociente, cuando se varía estatura y número de calzado.

El propósito de esta tarea fue el de hacer uso de la división para potenciar el hallazgo de la razón, en este sentido Obando (2014) dice, “objetivar la razón como cantidad es un proceso que se constituye, que implica el paso a formas de percepción de la cantidad, de las relaciones por cociente entre cantidades al igual que de su representación, de tal forma que se puedan comparar razones, igualarlas y operar con ellas” (p.310).

En el hallazgo de los cocientes se potenció la comparación entre la estatura y el número de calzado, por cuanto, luego de la intervención de Diego, las participaciones de los estudiantes se centraron en encontrar en la cartelera de cocientes, otras magnitudes que se relacionaban, lo que potenció hacer uso de términos más cercanos al razonamiento proporcional como: *a mayor estatura y menor talla de calzado se encuentra un mayor cociente*.

En relación a la razón externa que hizo parte de la tarea, sirvió para implantar que el número de calzado no se mide en centímetros, sino que, como acuerdo, lo llamamos talla, puesto que dentro de la explicación de la visita del señor Juan, se ilustró la fabricación de zapatos a partir de hormas.

En la toma de decisiones para la implementación de la tarea 6, se pretendió continuar potenciando el razonamiento proporcional a partir de la comparación y la relación entre las magnitudes, de ahí que, para la tarea de cierre de la secuencia didáctica, se volvió a referenciar una situación con el tangram chino de las 7 fichas.

4.1.6. Tarea 6. Relación entre los catetos del triángulo pequeño y el triple del lado del cuadrado de 7 fichas

<table>
<tr>
<td>1.</td>
<td>
Recuerde que el tangram chino es un rompecabezas compuesto por siete fichas o piezas con formas geométricas: 5 triángulos rectángulos (dos pequeños, uno mediano y dos grandes) y 2 cuadriláteros (un cuadrado y un paralelogramo), como se muestra a continuación:


</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
¿Cuál es la relación entre el tamaño de uno de los triángulos pequeños y el tamaño del cuadrado formado con las 7 fichas?

Relación entre el tamaño del triángulo pequeño y el tamaño del cuadrado:

Justifique su respuesta:

a) Laura desea construir un nuevo cuadrado, con las 7 fichas del tangram, de manera tal que el lado del nuevo cuadrado sea el doble del cuadrado inicial, ¿qué relación existe entre el
</td>
</tr>
</table>

3.	tamaño de los triángulos pequeños del nuevo cuadrado con respecto al tamaño de los triángulos pequeños del cuadrado inicial? *La relación entre los tamaños de los triángulos pequeños sería:* Justifique su respuesta: b) ¿Qué relación existiría entre el tamaño del nuevo triángulo pequeño y el tamaño del nuevo cuadrado?: a) Si Laura quisiera construir un nuevo cuadrado con las 7 fichas del tangram, de manera tal que ahora su lado sea el triple del cuadrado inicial, ¿Qué relación existiría entre el tamaño de los triángulos pequeños del nuevo cuadrado con respecto a los del cuadrado inicial? *La relación entre el tamaño de los triángulos pequeños sería:* Justifique su respuesta: b) ¿Qué relación existiría entre el tamaño del nuevo triángulo pequeño y el tamaño del nuevo cuadrado?

Figura 80. Tarea 6. Relación entre los catetos del triángulo pequeño y el triple del lado del cuadrado de 7 fichas.

Para el desarrollo de la tarea se hace entrega de la guía sin material concreto, como es el tangram de las 7 fichas, puesto que a diferencia de la tarea 1, en donde se proporcionó dicho material, se pretendía como propósito inicial encontrar la relación entre los catetos o lados de la ficha del triángulo pequeño del tangram de 7 fichas y el lado del cuadrado inicial ampliado al doble o triple sus lados.

El propósito en la implementación de la tarea tomó otro rumbo, puesto que con lo trabajado en la tarea 1, la relación que se da a conocer en las producciones escritas de los estudiantes, fue la de hallar la razón entre los tamaños de la ficha del triángulo pequeño del tangram de 7 fichas y el cuadrado que resulta de la ampliación de los lados al doble o al triple en el cuadrado original (el formado por las 7 fichas), dejando de lado la relación entre los lados de la nueva ficha del triángulo pequeño y el lado del cuadrado inicial ampliado al doble o al triple.

En este sentido, la orientación de la docente- investigadora se centró en hallar la relación entre los tamaños, al ver que al momento de las *producciones libres* y en el trabajo por grupos los estudiantes no se centraron en la relación entre los lados sino en la relación de los tamaños, razón por la cual la actividad de cierre no cumpliría el objetivo de ser una tarea que motivara como las anteriores que se desarrollaron, de ahí que para al análisis de la información se dan a conocer las categorías y niveles de comprensión de acuerdo a la relación ya enunciada.

De acuerdo al análisis de las producciones escritas y de lo registrado en el audiovisual, estas se pueden ubicar en los siguientes tipos:

Categoría 1 y 2. Nivel de comprensión situacional: 42.10%

En la categoría 1, se dan soluciones mediante la comparación, a partir del dibujo o de la percepción, muy similar a lo ocurrido en la tarea 1 en donde visualmente consideran que la relación entre el tamaño del cuadrado original (nombre con el cual se hace referencia al cuadrado de las 7 fichas del tangram) y la ficha del triángulo pequeño, es ser más grande o más pequeño, además, establecen las características geométricas del triángulo y del cuadrado como se ilustra en la figura 81.

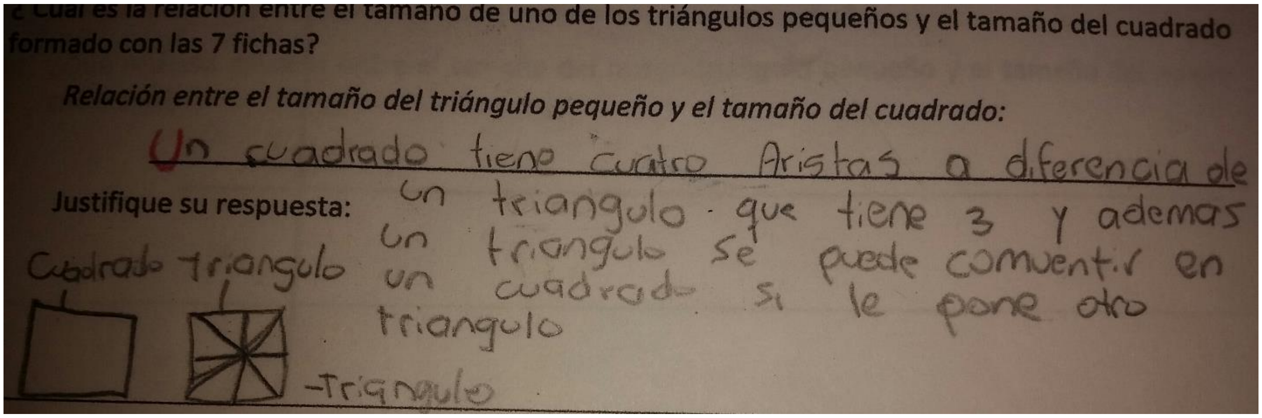


Figura 81. Solución sin relacionar los tamaños de la ficha triángulo pequeño y cuadrado original.

La relación que se establece en este tipo de solución, es del tipo: *dos triángulos forman un cuadrado*, situación que se había trabajado en la tarea 1, cuando se arma un cuadrado con dos fichas del triángulo grande, y que al comparar con el triángulo pequeño resultaban ser 8 fichas las necesarias para obtener el cuadrado formado con dos fichas grandes. Hasta aquí por medio del dibujo representa la relación de tamaños, pero *su nivel de comprensión situacional*, les permitió llegar hasta cuándo se había tenido experiencia con el contexto, pues para establecer la relación, entre el tamaño de la ficha pequeña y el cuadrado de las 7 fichas, debían tener primero la relación entre el tamaño de la ficha del triángulo grande y el del cuadrado de las 7 fichas para dar el paso de duplicar y así, encontrar la relación solicitada, aspecto que fue sustituido por el de describir las características geométricas, tanto del triángulo como del cuadrado, como fue el describir número de lados que compone a cada una de las figuras geométricas. En algunas soluciones para esta categoría, también se plantea:

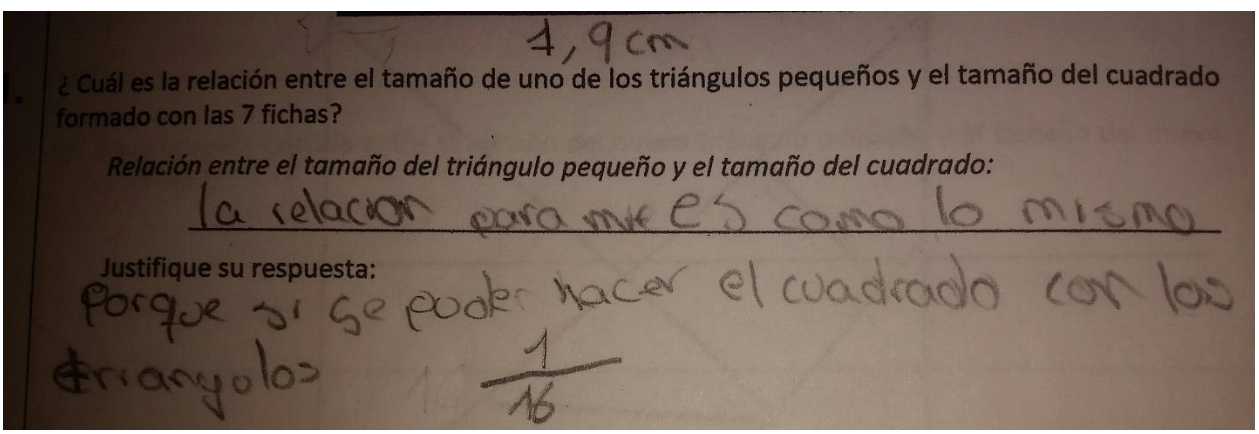


Figura 82. Solución de Categoría 2, en la que se relacionan los tamaños de la tarea 6.

En esta solución se escribe la fracción 1/16 sin explicar detalladamente cómo se obtuvo en la comparación de los tamaños de la ficha del triángulo pequeño con el tamaño del cuadrado original.

En el registro audiovisual la estudiante tiene el siguiente diálogo con la docente-investigadora:

Profesora: cuéntame María José, ¿cómo estás hallando la relación entre el tamaño de la ficha del triángulo pequeño y el tamaño del cuadrado original?

María José: yo corté en una hoja la ficha del triángulo pequeño.

Profesora: y, ¿qué hiciste con ese triángulo?

María José: lo pasé por el cuadrado original y está 16 veces, entonces sí tienen relación.

Profesora: ¿cómo escribes esa relación?

María José: es 1/16

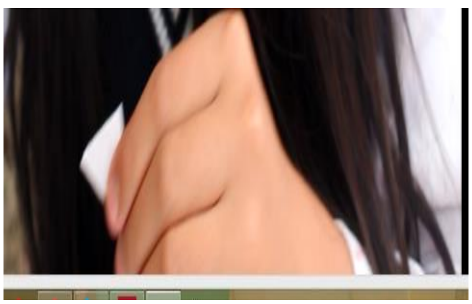


Figura 83. Relación entre los tamaños, a partir del recorte de la ficha.

La relación establecida por la estudiante está soportada desde la manipulación del material concreto, pues fue posible encontrar la fracción luego de tener la referencia del tamaño de la ficha del triángulo pequeño al ver las veces que está cabe en el cuadrado original y, de esta manera, encontrar la relación de tamaños como la fracción 1/16.

Para las preguntas 2 y 3 en las que se pide encontrar la relación entre los tamaños del triángulo pequeño del nuevo cuadrado que resulta de la ampliación al doble y triple del cuadrado de las 7 fichas, la solución se da desde la percepción visual cuando afirma, *que uno es más pequeño y el otro es más grande*. En este sentido, tanto la categoría 1 como la categoría 2, se ubican en un *nivel de comprensión situacional* por cuanto utilizan referentes específicos para representar la situación.

Como lo dice Obando (2014), “es claro que los estudiantes logran con facilidad una percepción numérica de la relación entre dos cantidades cuando una cantidad mayor es medida exactamente con una cantidad menor, lo que se expresa, bien a través de una razón (el doble de, el triple de, etc.) o bien a través de un número (2, 3, 4, etc.), generalmente acompañado de "veces" (p.246), sin embargo, la estudiante logra llevar las veces a una fracción como parte de un todo, para las otras razones del punto 2 y 3, se apoyó de la percepción visual.

Categoría 3. Nivel de comprensión referencial: 47.36 %

Para la categoría 3 se evidencia que el soporte de la comparación entre los tamaños se hace con el apoyo del dibujo, expresando la relación entre las magnitudes por medio del lenguaje natural al utilizar la expresión la *décima sexta parte,* como se ilustra en la figura 84.

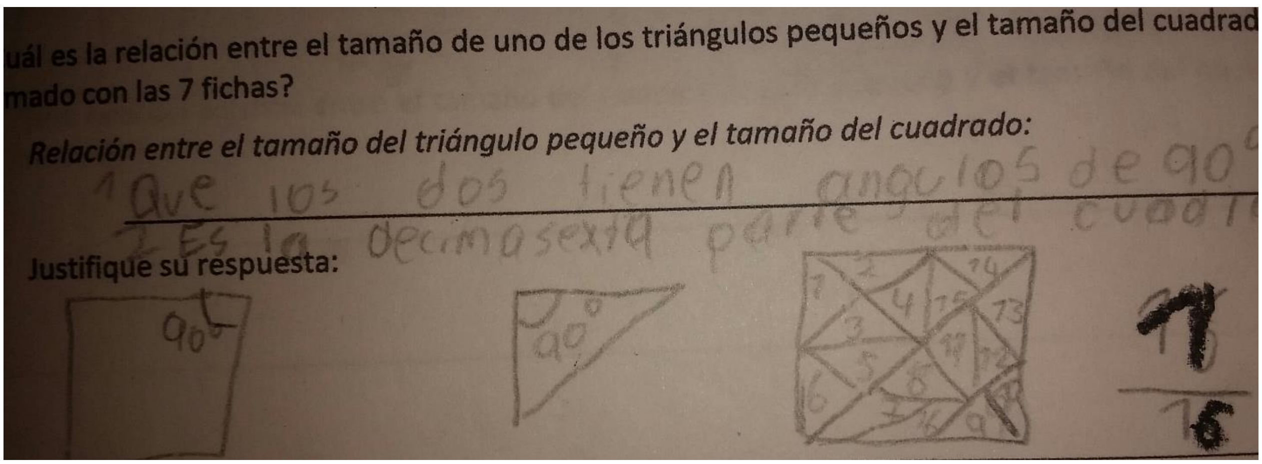


Figura 84. Solución de categoría 3, relación de tamaños tarea 6.

Se observa que acompaña la comparación a partir de elementos geométricos del triángulo y del cuadrado como es el de tener en común ángulos de 90 grados. Para encontrar la relación entre los tamaños, en un comienzo se tuvo la confusión con respecto a los tamaños del nuevo triangulo pequeño que resulta de haber ampliado el cuadrado original el lado al doble o al triple, razón por la cual la docente- investigadora orientó que se hiciera la relación entre el tamaño de la ficha pequeña del cuadrado original y el tamaño de los nuevos cuadrados en donde se amplió el lado del cuadrado de las 7 fichas al doble o al triple.

En el registro audiovisual en el siguiente diálogo se da a conocer la manera cómo encontraron la relación de los tamaños:

Profesora: dime Andrés, ¿qué encontraron (haciendo relación al primer punto)?

Andrés: lo que encontramos es que el triángulo es la decimosexta parte del cuadrado. Con 16 triángulos se puede armar el cuadrado.

Profesora: ¿cómo encontraron que eran 16?

Andrés: trazamos las líneas para ver los triángulos pequeños del cuadrado.

Figura 85. Relación de los tamaños por representación con dibujo.

En esta categoría se apoyan en el dibujo para encontrar la comparación de los tamaños, tomando como referencia la división de cada una de las fichas en triángulos pequeños y así, relacionarlos como el tamaño de la ficha del triángulo pequeño es la *décima sexta* parte del cuadrado original, cuya representación la hacen por medio del lenguaje natural y como numero fraccionario.

Para los puntos 2 y 3 de la tarea se dialoga con los estudiantes sobre cómo se halla el doble del cuadrado inicial y la relación con la ficha del triángulo pequeño del tangram chino.

Profesora: ahora cuando el cuadrado inicial se vuelve el doble, ¿qué pasa con el tamaño aumenta o disminuye?

Julián: aumenta al doble.

Profesora: ¿Qué pasa ahora con el triángulo pequeño y el cuadrado ampliado al doble?

Andrés: Que ahora se multiplica 16 X 2 y da 32.

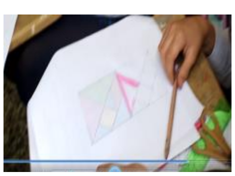


Figura 86. Relación entre los tamaños multiplicando por 2.

En esta categoría se duplica la relación de 16 veces que cabe el tamaño del triángulo pequeño con el *cuadrado al doble*, lo que en la representación figural da muestras de ampliar al doble el largo y dejar constante el ancho. En la figura 87 y 88 se ilustra la producción escrita que da cuenta de la solución de un *nivel de comprensión referencial*.

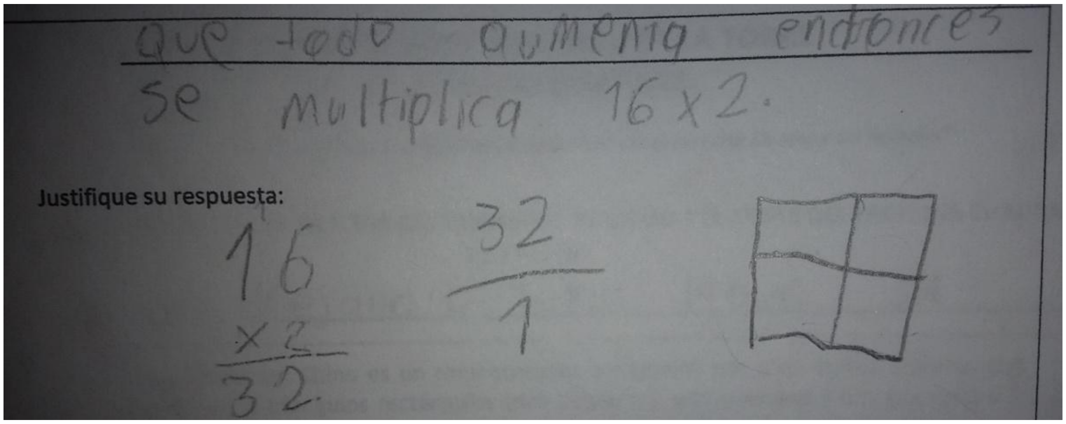


Figura 87. Solución, en la que el doble del cuadrado lo relaciona sólo con el largo tarea 6.

Como se puede observar, para ampliar el cuadrado inicial al doble representa por medio del dibujo el aumento al doble tanto del largo como del ancho, lo que significa que el cuadrado inicial cabe cuatro veces en el cuadrado ampliado al doble, al momento de realizar la comprobación a través de la multiplicación solo toma en cuenta el largo, razón por la cual multiplica 2 veces por 16.

De manera similar hace la relación de tamaños para la ampliación del cuadrado inicial al triple del lado.

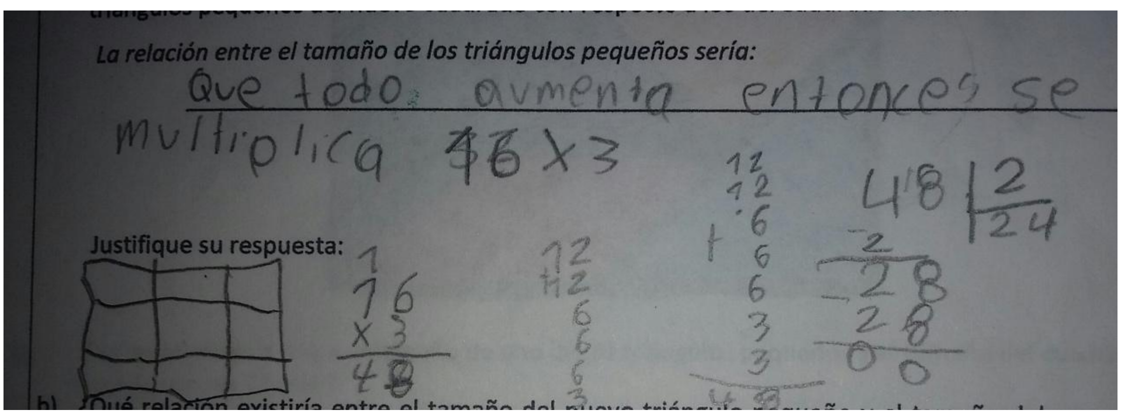


Figura 88. Solución de relación de tamaño cuando se triplica el lado del cuadrado inicial.

En esta representación figural, se establece la relación entre las veces que está el tamaño del cuadrado inicial con el tamaño del cuadrado ampliado al triple, para luego a través de la multiplicación hallar el número de veces que el tamaño de la ficha del triángulo inicial cabe en el cuadrado ampliado al triple el lado, por eso multiplica a 16 veces por 3.

La reflexión que hace la docente- investigadora es la de preguntar al grupo si al haber aumentado al triple el largo, se sigue manteniendo un cuadrado, a lo que Diego dice no porque ahora es un rectángulo. Más adelante en la socialización se retoma que para mantener un cuadrado, si se amplía el ancho, también se debe ampliar el largo o de lo contrario ya deja de ser un cuadrado.

En este sentido cuando aparecen junto a la comparación elementos asociados a la cantidad, esta categoría corresponde a un *nivel de comprensión referencial*. Además, autores como Obando (2014) afirma que “la atribución de cantidad, permite matematizar los procesos de percepción, representación, transformación de la cantidad, así como sus procesos de variación, cuando se estudian diferentes estados de un determinado evento o fenómeno, o una colección de estados posibles de un evento o fenómeno determinado” (p.153).

Por consiguiente, el fenómeno del cual se dio el atributo de cantidad fue el de encontrar el doble y el triple del lado del cuadrado inicial formado por las 7 fichas.

***Categoría 4. Nivel de comprensión general: 10.54* %**

En la categoría 4 se ubican las producciones que empiezan a fijar la solución con respecto a la relación de tamaño acudiendo al dibujo para encontrar un resultado como lo establecido en el primer punto, en donde toman como patrón la ficha del triángulo pequeño, para dividir el cuadrado original, aspecto que se ilustra en la figura 89.

Figura 89. División del cuadrado original en fichas del triángulo pequeño.

En esta producción escrita , hacen la comparación de tamaños a partir de ver cuántas veces está el triángulo pequeño en el cuadrado inicial, la diferencia con las otras representaciones figurales, está en que aquí se buscó tener la mayor precisión en la representación, hecho que fue determinante para la solución de las preguntas 2 y 3, puesto que para poder encontrar el doble del lado del cuadrado inicial, midieron el lado; veamos lo socializado a sus compañeros en el siguiente diálogo registrado en el audiovisual:

Dilan: (Explicando a todos sus compañeros), yo cogí y medí el lado del cuadrado inicial y me dio 8 centímetros cada lado y luego lo multipliqué por 2 y me dio 16 centímetros (realiza el dibujo de cuatro cuadrados consecutivos, de lado 16 triángulos pequeños).

Profesora: ¿Cómo sacabas las fichas del triángulo pequeño al ampliar al doble el cuadrado inicial?

Dilan: lo sumé todo (refiriéndose a sumar 16 triángulos pequeños) y me dio 64.

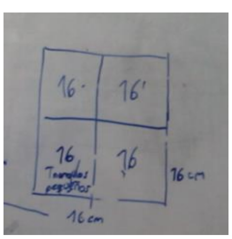


Figura 90. Ampliación del doble del cuadrado tanto a lo largo como a lo ancho.

En este tipo de solución se hizo la ampliación del doble del lado del cuadrado de las 7 fichas, teniendo en cuenta que, si un lado aumenta los otros lados también, para luego por medio de la suma encontrar la relación entre los tamaños.

Otra producción escrita que refleja el tener en cuenta la ampliación de todos los lados del cuadrado, haciendo uso de la multiplicación se ilustra en la figura 91.

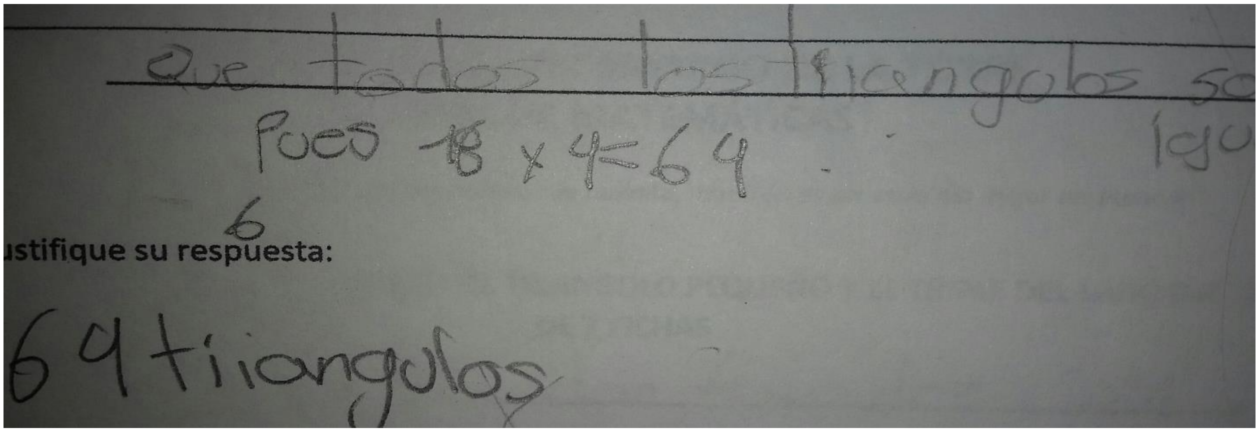


Figura 91. Hallazgo de la relación entre tamaños por medio de la multiplicación, tarea 6.

En la categoría 4 se hace el tránsito entre el aspecto cualitativo cuando se relacionan, por medio de la representación figural, los tamaños del triángulo pequeño y el cuadrado inicial, para luego abordar el aspecto cuantitativo cuando por medio de la suma o de la multiplicación se halla la relación entre el tamaño del triángulo pequeño y el cuadrado inicial ampliado al doble.

Por consiguiente, esta categoría es del tipo de *nivel de comprensión general*, dado que propone las primeras relaciones entre magnitudes generalizadas, que dan cuenta de la comparación entre los tamaños, en cada una de las situaciones planteadas. Puesto que para hallar la relación entre el triángulo pequeño y el cuadrado ampliado el lado al triple, Como lo hace Dilan, cuando dibuja los nueve triángulos iniciales y suma 16 triángulos pequeños nueve veces para obtener 144, mientras que Shenoa continuó multiplicando 16 por 9.

Con respecto a las soluciones aditivas de Dilan, Freudenthal (2001) afirma, “el proceso de duplicar es el de combinar dos iguales. Éste es como transformar una torre en una de altura doble, a saber, poniendo una torre “igual” encima de ella” (p.34). De ahí que cuando Dilan coloca un cuadrado de las 7 fichas al lado del otro, sin perder de vista la relación de sus lados se están utilizando parámetros que, cuando las cosas se combinan, se comportan aditivamente y se denominan *extensivos*.

Por consiguiente y según lo planteado por el mismo autor, “dos parámetros que son extensivos bajo la misma operación de combinación están en una relación que conserva la razón”. En este orden de ideas la tarea 6 para este nivel de comprensión potenció el razonamiento proporcional.

En el momento de la socialización se pudo evidenciar cómo, a partir de la argumentación de algunos estudiantes se introduce la representación de la fracción, cuándo se relacionan los tamaños, hecho que se evidencio al hallar el número de veces que está el tamaño de la ficha pequeña en el cuadrado inicial, llegando a común acuerdo, que cabe 16 veces, pero cuando se pidió por parte de la docente- investigadora que se escribiera con una fracción qué parte del cuadrado de 7 fichas es el triángulo pequeño, fue necesario recurrir a situaciones de la tarea 1, retomando las veces que un triángulo pequeño estaba en el triángulo grande del tangram chino, situación que permitió la representación de 1/16.

En este sentido, la tarea de cierre de la secuencia didáctica, puso en evidencia lo que Obando (2014) afirma en cuanto a “la razón entera que compara la cantidad mayor con respecto a la menor, y que expresa que la cantidad mayor es un número exacto de veces la cantidad menor (relación de multiplicidad), no solo fue de más fácil percepción por los estudiantes, sino que en un primer momento del proceso dominó y ocultó la razón n-ésima (que expresa ahora la relación de la cantidad menor a la mayor” (p.296).

De acuerdo a lo anteriormente expuesto por el autor, en su tesis doctoral, la cual estuvo dirigida al trabajo con estudiantes de grado tercero y cuarto de Educación Básica, la aproximación en el hallazgo de la razón para grado quinto se dio de manera similar, según lo planteado en la socialización de la tarea 6.

5. Conclusiones y reflexiones finales

El trabajo desarrollado con los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, a partir de la implementación de seis tareas planteadas en contextos reales con el propósito de potenciar la constitución del objeto mental comparativamente, que posibilite la aproximación a la comprensión de los objetos matemáticos razón y proporción, permitió evidenciar la importancia de diseñar tareas en donde a partir de fenómenos se oriente la búsqueda en la comparación y relación entre las magnitudes involucradas.

Dentro de la secuencia de las tareas se evidenció, que plantear en la tarea 1 y 2 situaciones con el apoyo del material concreto como fue el tangram chino y las copias del documento ampliado y reducido, permitió a los estudiantes abordar la razón desde su aspecto cualitativo, posibilitando la puesta en escena de aspectos intuitivos y perceptuales como fueron *es más grande, es más pequeño* o *se puede leer mejor la información*, elementos que se encuentran en un primer nivel para la constitución del objeto mental *comparativamente,* de acuerdo a Freudenthal (2001), lo cual estuvo acompañado de diferentes formas de representación, como fueron de forma verbal desde la visualización figural, con el apoyo de esquemas o dibujos, el uso del lenguaje natural o a partir del lenguaje matemático. En este sentido el propósito de las dos primeras tareas se cumplió por cuanto se potenció desde su aspecto cualitativo la relación entre las magnitudes involucradas.

Para la tarea 3 se potenció el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo, puesto que al plantear fenómenos que permitieron organizar el objeto mental comparativamente, como fue el manejo de las magnitud estatura, por medio de la estimación entre la estatura de la mujer más pequeña del mundo y el hombre más alto del mundo, se abordó el reconocimiento de *razones internas,* por cuanto para cada una de las soluciones ya se fue más puntual en relacionar las unidades que acompañaron la medida de las estaturas, como fue para esta tarea en centímetros.

En las tareas 4 y 5 se potenció el manejo cuantitativo y la aproximación a las *razones externas* cuando intervienen magnitudes de diferente tipo como fue en la receta de cocina encontrar la cantidad de ingredientes para 24 porciones y 6 porciones, posibilitando la relación entre medida para cada ingrediente y número de porciones y, para la tarea 5, la relación entre estatura en centímetros y número de calzado que, según acuerdo, denominamos talla.

La tarea 6 potenció la comparación, entre los tamaños de las fichas sin el manejo del material concreto e imaginando la situación de la ampliación de los lados del cuadrado de las 7 fichas del tangram chino, situación que dificultó un poco el hallazgo de esta relación, por cuanto al establecer primero que para mantener la figura, al duplicar el lado de un cuadrado se debe ampliar al doble cada uno de los lados, hecho que al momento de la socialización fue aclarado por la intervención de dos estudiantes que mediante la representación, por medio del dibujo, permitió reconocer a todo el grupo que la característica para que un cuadrado siga manteniendo su forma, al momento de ampliarlo es que debe mantener igual longitud en cada uno de sus lados.

En cuanto a los *niveles de comprensión* (*situacional, referencial, general y formal)* dados por el enfoque de la EMR, y los cuales se establecen como no jerárquicos, pero que permiten establecer el proceso de matematización horizontal y vertical, a partir de la constitución de *modelos de* y *modelos para,* aspecto que hizo que la situación se hiciera susceptible a un tratamiento matemático, desde diferentes puntos de vista.

A partir del análisis realizado a la producción escrita de los estudiantes, durante la implementación del conjunto de tareas, se pudo reconocer una evolución progresiva en los modelos de solución propuestos, que dan cuenta de la constitución del objeto mental comparativamente, por ejemplo, el caso de Shenoa, quien en sus producciones escritas pone en evidencia dicha evolución con respecto a la formulación de modelos de solución, propuestos desde la primera, hasta la sexta tarea.

Los modelos de solución propuestos por la estudiante para las dos primeras tareas permiten evidenciar un reconocimiento inicial del objeto mental *comparativamente* a partir de la visualización de las características geométricas de las fichas del triángulo grande y el triángulo mediano, lo que luego realiza en la tarea 2 desde el uso de la multiplicación para establecer la comparación entre el tamaño de la copia reducida al 25% en relación a la copia al 200 %

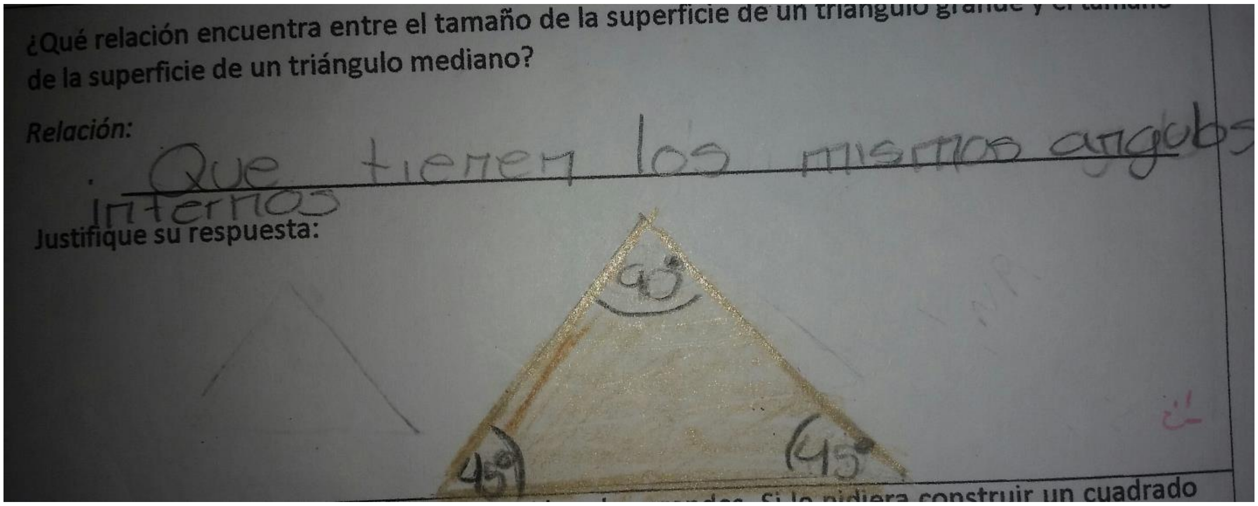


Figura 92. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 1.

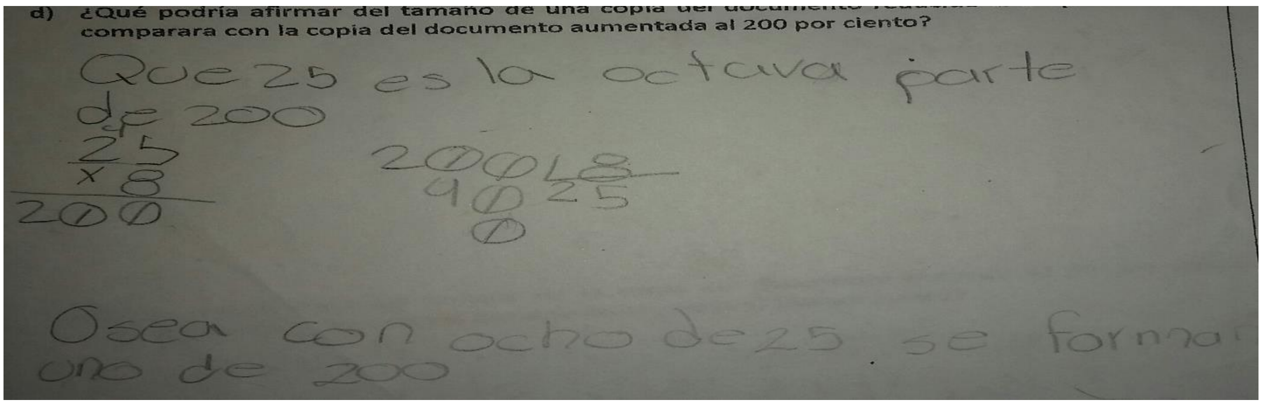


Figura 93. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 2.

Para la tarea 3 Shenoa propone un modelo de solución en el que se relaciona la estatura de la mujer más pequeña con la del hombre más alto del mundo, mediante el uso de la multiplicación, la división y la suma, sin perder de vista las unidades de las magnitudes involucradas como son los centímetros.

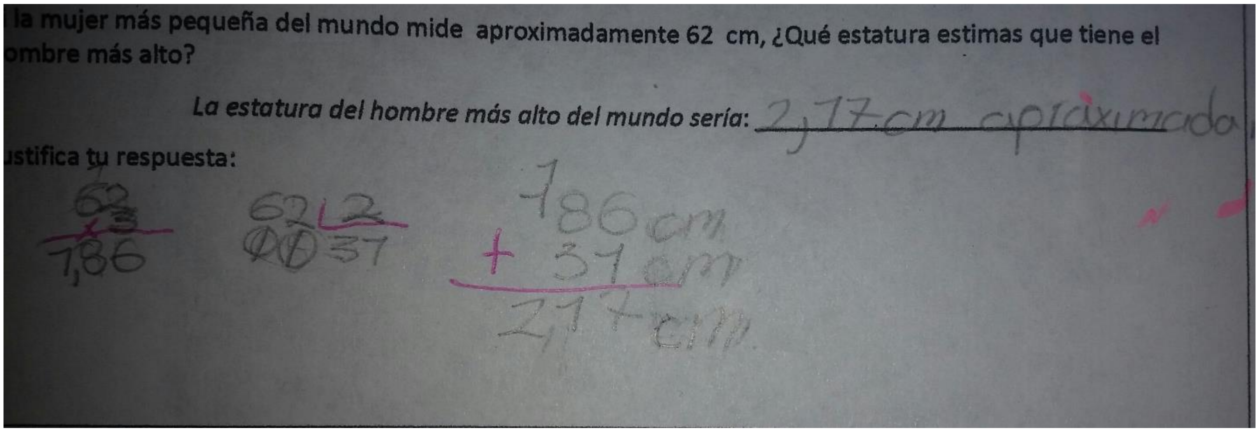


Figura 94. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 3.

Para las tareas 4 y 5 la estudiante continúa proponiendo modelos de solución haciendo uso de la multiplicación y la división, encontrando la relación entre la receta para las cuatro porciones y la de 24 y 6 porciones. En la tarea 5 propone modelos de solución que permiten identificar la comparación entre las magnitudes sin ser explícita en ello, sólo completa la tabla con el hallazgo de los cocientes, pero sin argumentar cómo se relaciona la estatura y el número de calzado.

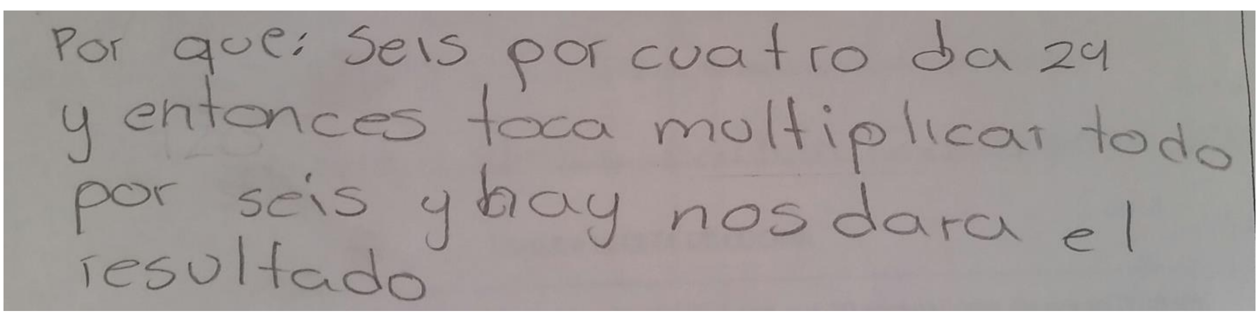
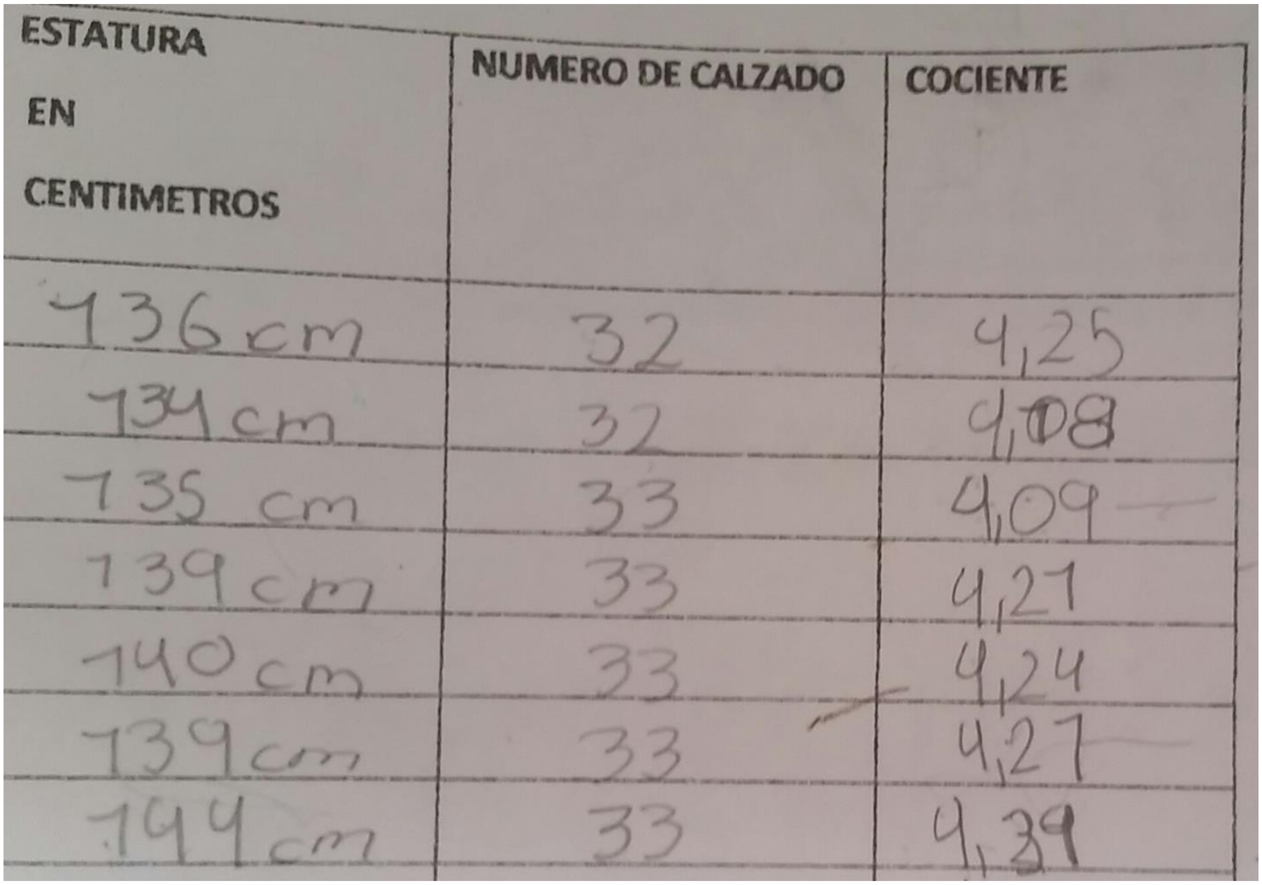


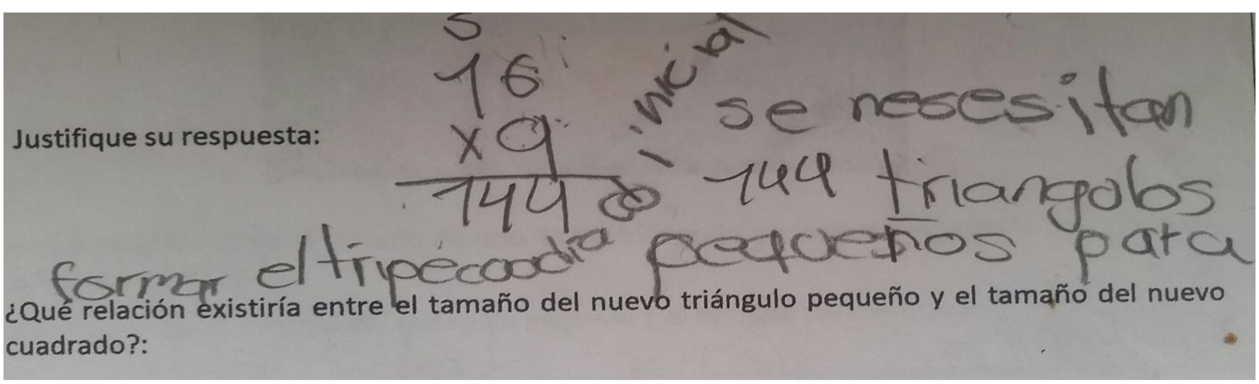
Figura 95. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 4.



ESTATURA EN CENTIMETROS	NUMERO DE CALZADO	COCIENTE
136 cm	32	4,25
134 cm	32	4,08
135 cm	33	4,09
139 cm	33	4,21
140 cm	33	4,24
139 cm	33	4,27
144 cm	33	4,39

Figura 96. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 5.

Finalmente, para la tarea 6, Shenoa consigue explicitar, mediante el uso de la multiplicación, la relación entre el tamaño de la ficha del triángulo pequeño del tangram y el cuadrado inicial ampliado al triple sus lados, mediante la representación con lenguaje natural.



Justifique su respuesta: 16 x 9 = 144 inicial se nesesitan 144 triangolos pequeños para formar el tripecoadra

¿Qué relación existiría entre el tamaño del nuevo triángulo pequeño y el tamaño del nuevo cuadrado?:

Figura 97. Modelo de solución propuesto por Shenoa para la tarea 6.

En relación con los avances alcanzados por el grupo de estudiantes, no todos lo lograron, como es el caso de Danna, quien desde un principio estableció la comparación desde elementos perceptuales buscando solución con el manejo del material concreto apoyada por la visualización, como lo planteado para las tareas 1 y 6, en las que insiste en comparar desde lo que perceptualmente concibe de acuerdo a su intuición o sentido común.

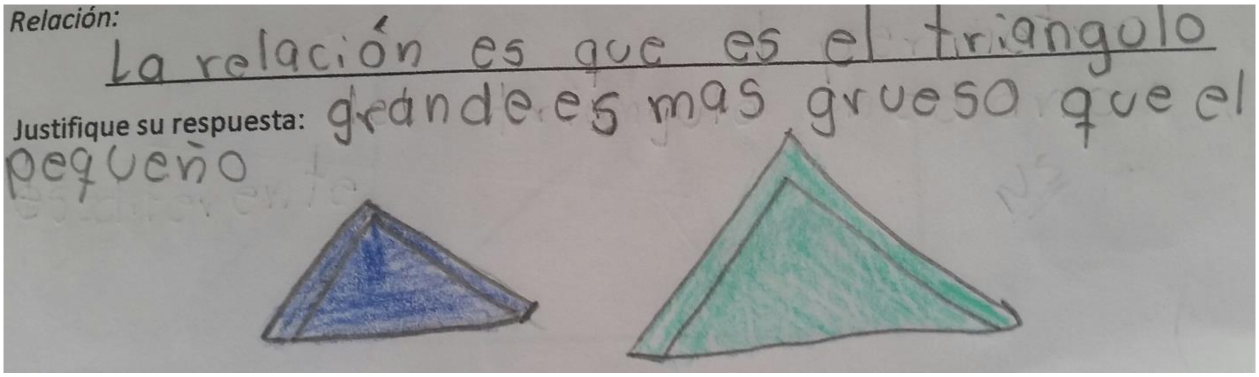


Figura 98. Modelo de solución intuitiva de Danna para la tarea 1.

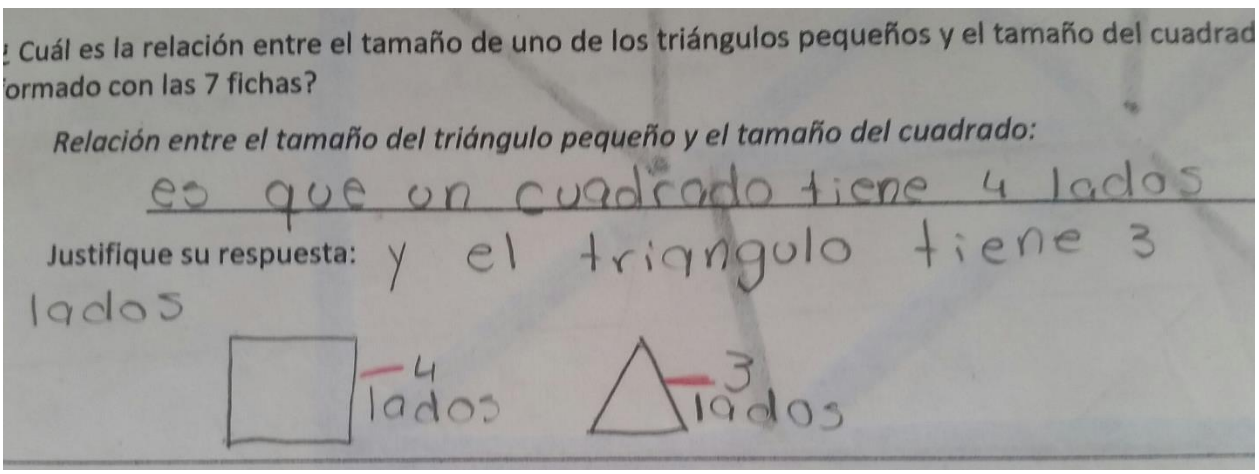


Figura 99. Modelo de solución perceptual de Danna para la tarea 6.

Sin embargo, Danna ante situaciones que implican hacer una relación entre las magnitudes, más allá de lo perceptual pone en juego el uso de la multiplicación como lo realizado cuándo establece los ingredientes necesarios para la preparación del postre para 6 porciones a partir de la receta para 4 porciones, como lo hizo en la tarea 4.

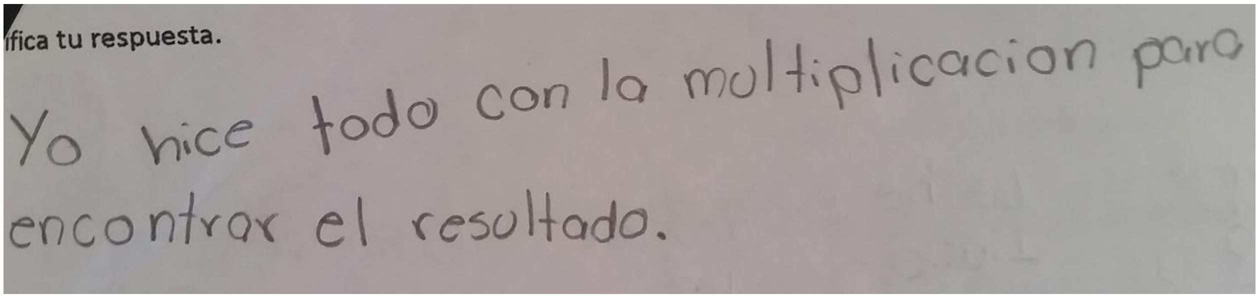


Figura 100. Modelo de solución de Danna con el uso de la multiplicación para la tarea 4.

Los resultados obtenidos al concluir la implementación de la propuesta diseñada permiten evidenciar la manera en que se posibilita la constitución del objeto mental *comparativamente,* a lo largo del desarrollo del conjunto de tareas. De igual manera da cuenta de la evolución progresiva de los modelos de solución propuestos por los estudiantes, aspecto que se evidenció, tanto en la producción escrita, como en las puestas en común que permitieron verificar y validar cada una de las propuestas formuladas.

Es importante resaltar que, aunque en un comienzo para el trabajo en grupo se observó cierta resistencia a socializar entre los integrantes, en las producciones libres poco a poco fueron fluyendo las participaciones, dando a conocer las soluciones de cada uno y así, construir una puesta en común del grupo, posteriormente la socialización con el curso en pleno posibilitó la *reinvención guiada* propia del enfoque de la EMR, que junto con la implementación del conjunto de tareas permitió evidenciar cómo, paulatinamente, los estudiantes fueron perfeccionando dichos modelos, adquiriendo una mayor apropiación de sus planteamientos personales, que les permitieron ir avanzando en un contexto formal de las matemáticas, hasta llegar a *organizar* la matemática inmersa en la situación planteada.

Finalmente para potenciar el razonamiento proporcional en grado quinto de educación básica primaria, se requiere la implementación de un conjunto de tareas contextualizadas que posibiliten la constitución del objeto mental *comparativamente*, con el apoyo de diferentes formas de representación que permitan identificarlos y generalizarlos, lo cual demanda en el proceso de enseñanza- aprendizaje, tiempo y dedicación en el diseño de tareas.

En la implementación de las tareas del trabajo de investigación, cuyo propósito fue el posibilitar la constitución del objeto mental *comparativamente,* con el fin de potenciar en los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria niveles de comprensión de los objetos matemáticos razón y proporción a partir de tomar fenómenos del mundo real y de las matemáticas los cuales permitieron en algunos estudiantes abordar de manera comprensiva la razón como relación entre magnitudes y la proporción como relación entre razones.

De esta manera se pone a consideración de la comunidad académica, un conjunto de tareas en donde no se aborde como *Inversión antididáctica,* la enseñanza – aprendizaje de la razón y la proporción cuando *"se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma"*, Freudenthal (1983) y de esta manera   evitar procesos algoritmizados en los que se aplica la regla de tres sin el análisis de la relación entre las magnitudes involucradas en la situación.

5.1. Reflexiones finales

La metodología desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, permitió que, en los momentos de las *producciones libres,* el trabajo en grupos de tres y la posterior socialización, se diera una etapa de reflexión tanto a nivel individual como grupal, en las que, algunos estudiantes que no habían observado ciertos aspectos en la situación, llegaron a cambiar su argumentación al escuchar a sus compañeros. De ahí que el rol de la docente-investigadora fue el de orientar por medio de preguntas que posibilitaran la mediación y así, establecer acuerdos, más que reconocer que se habían **equivocado**, esto posibilitó la libertad de expresión, en virtud a que no se dio espacio para la censura.

Llevar al aula situaciones contextualizadas desde el enfoque de la EMR, nos permitió relacionarnos con otros contextos fuera de la matemática, aspectos de interés para la clase como fue lo experimentado en la tarea 3, sobre lo que ocurre ante una discapacidad al ser la mujer más pequeña del mundo, esto sensibilizó a los estudiantes sobre las capacidades y vida familiar de la mujer a pesar de su estatura.

Otra experiencia enriquecedora fue la experimentada para el desarrollo de la tarea 5 en la que se contó con la visita del señor Juan, abuelo de un estudiante del grado en donde se implementó la propuesta y que, por tener experiencia como fabricante de calzado, nos contó cómo se realiza el proceso para hacer el calzado colegial, permitiendo que los estudiantes vivieran la experiencia. Además, nos sensibilizó sobre la importancia de esta actividad económica, que se ha visto afectada por los costos bajos con los que compiten los fabricantes del calzado del barrio el Restrepo frente al calzado chino que ingresa a Bogotá.

Al inicio del año escolar 2019 la docente- investigadora socializó con todos los docentes de la Institución en donde se implementó la propuesta, los principios de la metodología desarrollada desde la EMR y la fenomenología didáctica, en donde se resaltó la importancia de no presentar los contenidos como un producto terminado sino mediante un proceso de enseñanza- aprendizaje, a partir de situaciones contextualizadas de la realidad o de la matemática misma , en donde se posibilite aprender la matemáticas como una actividad humana, en donde la interacción nos permita ver el aprendizaje como una actividad social y humana.

Referencias bibliográficas

Bonilla, M. Romero. J. (2006). La resolución de problemas: sus posibilidades para el desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Revista científica*, no 7, p. 99-120.

Bressan, A. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas.*

Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y mutiplicativo en estudiantes de educacion primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales*, *15*(1), 11–22. Retrieved from file:///C:/Users/maye/Downloads/Dialnet-RelacionesEntreElPensamientoAditivoYMutiplicativoE-3579720.pdf

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2011). *Effect of number structure and nature of quantities on secondary school student*

Freudenthal, H. (2001). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. In CINVESTAV (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos* (pp. 1–49). México.

Freudenthal, H., Trad, & Puig, L. (2001). Fenomenología didáctica de les estructures matemàtiques. Cap.6 Razón y proporcion. *Fenomenologia Didactica de Las Estructuras Matematicas*, (1983), 1–40.

J.Teruel, K. G. y. (2004). Hans Freudenthal, un matematico en Didactica y teoria curricular, *32*(Streefland 1993), 1–14.

Lamon, S. J. (1994). Razón y proporción: Fundamentada en unitización y normación. In J. Guershon, Harel; Confrey (Ed.), *The Development Multiplicative Reasoning in Learning of Mathematics* (pp. 89–120). New York: State University of New York Press.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, *24* (1), 133-157.

Obando, G. (2014). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3*. Universidad del Valle.

Puig, L., Didáctica, D. De, Matemática, D., & Va-, U. De. (2014). Análisis Fenomenológico, (October).

Rapetti, M. V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Suma*, *44*, 65-70.

Rojas P. J., Romero J, Bonilla M, Mora L, Rodrigues J, C. E. (2011). *La multiplicacion como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje* (Primera). Bogota: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Rubi Real, B. G. y O. F. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Epsilon- Revista de Educacion Matematica*, *30*(3), 21–36.

Schwartz, J. L. (1988). Cantidades Intensivas Y Las Operaciones Aritméticas. In J. H. & M. Behr (Ed.), *Number concepts and operation in the middle grades* (pp. 41–52). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Valverde, G., & Castro, E. (n.d.). *La Relacion de Proporcionalidad Contextualizada desde la Realidad Socio - Cultural.*