

# APROXIMACIÓN AL ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO MEDIANTE LA TELEPORTACIÓN DE FOTONES

Gabriel Esteban Galvis Monroy

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN FÍSICA  
Modalidad: MONOGRAFIA

Director: Paco H. Talero L.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Proyecto curricular en licenciatura en física  
BOGOTÁ D.C.  
NOVIEMBRE de 2017

Hace ya más de cien años que la física cuántica comenzó a surgir como un nuevo paradigma alternativo y complementario a la mecánica newtoniana. A pesar de ser un conocimiento ya centenario, la mayoría de nosotros permanecemos ajenos a los nuevos supuestos que han emergido con ella.

Anónimo.



# AGRADECIMIENTOS

A mi familia y amigos por su constante apoyo, y al profesor Paco H. Talero por toda su paciencia para asesorarme.

# Índice de figuras

4.1. Esquema de la descripción de la teleportación. . . . .	31
4.2. Esquema general de la teleportación. . . . .	32
4.3. Generacion de la fluorescencia parametrica. . . . .	32
4.4. Paso de fotones por el cristal no lineal. . . . .	33

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>4</b>
2.1. El Experimento EPR . . . . .	4
2.1.1. Interpretación de Bohm . . . . .	6
2.2. El Teorema de Bell . . . . .	9
2.3. Experimento de Alain Aspect . . . . .	10
<b>3. Actualidad</b>	<b>13</b>
3.1. Entrelazamiento Cuántico . . . . .	13
3.1.1. Creación de pares entrelazados . . . . .	13
3.2. Teleportación . . . . .	14
3.2.1. Teleportación con fotones . . . . .	15
3.2.2. Criptografía y computación cuántica . . . . .	17
3.3. Enseñanza de la Mecánica Cuántica . . . . .	20
<b>4. Protocolo teórico</b>	<b>22</b>
4.1. Postulados de la Mecánica Cuántica Aplicados a Sistemas de dos Estados . . . . .	22
4.2. Producto Tensorial . . . . .	24
4.3. Estados de Bell . . . . .	25
4.4. Entrelazamiento cuántico . . . . .	26
4.5. Teleportación Cuántica . . . . .	27
4.5.1. Puertas cuánticas . . . . .	29
4.5.2. Esquema de la teleportación cuántica. . . . .	30
4.5.3. Fluorescencia Paramétrica . . . . .	31
<b>5. Conclusiones</b>	<b>34</b>

## Introducción

En 1900 el físico alemán Max Planck introdujo la idea de que la energía estaba “cuantizada”, con el fin de derivar una fórmula para la dependencia de la frecuencia observada con la energía emitida por un cuerpo negro,<sup>1</sup> en 1905, Einstein explicó el efecto fotoeléctrico (basándose en la hipótesis cuántica de Planck) con un postulado sobre que toda la radiación electromagnética puede ser dividida en un número finito de “cuantos de energía”, que son localizados como puntos en el espacio.<sup>2</sup> Hasta 1923 estas explicaciones constituían la base de lo era conocida como la teoría de la mecánica cuántica antigua, siendo estas estrictamente fenomenológicas; En 1924 el físico francés Louis-Victor de Broglie presenta su tesis doctoral sobre la teoría de ondas de materia,<sup>3</sup> por la que se indica que las partículas pueden exhibir características de onda y vice versa. Esta teoría fue para una partícula simple, y derivada de la teoría especial de la relatividad, un año después basándose en el planteamiento de de Broglie, nació la mecánica cuántica moderna. La teoría cuántica como se conoce hoy en día surge de dos esquemas básicos independientes; mecánica matricial y la mecánica ondulatoria, los cuales fueron iniciados por los físicos Werner Heisenberg, y Erwin Schrödinger respectivamente. En un principio estos dos esquemas parecían bastante diferentes, pero pronto se demostró que eran equivalentes y fueron englobados en un marco más comprensivo y general, principalmente por obra del físico Paul Dirac. [1]

El experimento EPR surge en 1935 [2], en el momento en el que se hace la pregunta si es posible que la mecánica cuántica de una explicación considerada completa de la realidad física, debido a que esta violaba principios básicos de la física como lo son el de la covarianza de Lorentz y entraba en contradicción con el principio de incertidumbre, en el artículo original propuesto por Einstein, Podolsky y Rosen, se plantea un experimento hipotético en el cual se propone que se tienen dos sistemas, los cuales interactúan durante algún tiempo, y luego, estos se separan una distancia arbitraria que puede ser suficientemente grande, se dice que se puede calcular el estado del sistema combinado en cualquier momento subsiguiente, sin embargo no se puede calcular el estado en el que cualquiera de los dos sistemas queda después de esta interacción, ahora, después de dos mediciones que se realizan sobre el primer sistema

<sup>1</sup>Ver Kirchhoff, 1862.

<sup>2</sup>Ver Einstein, 1905, On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light.

<sup>3</sup>Ver Broglie, 1924, Recherches sur la théorie des quanta.

se observa que el segundo sistema puede quedar en estados sobre funciones de onda diferentes; pero si en el momento de la medición los dos sistemas no interactúan ya no debería producirse ningún cambio real en ninguno de ellos como consecuencia de cualquier cosa que le pueda pasar al otro por lo tanto, midiendo cualquier cantidad del sistema, se logra predecir con certeza, y sin de ninguna manera perturbar el segundo sistema el valor de otra cantidad. Aprovechando esta propiedad de las partículas cuánticas, y luego de la demostración física en 1982 [10] de las correlaciones encontradas en dos partículas entrelazadas, en 1997 [18] se logra lo que se le ha dado a llamar el teletransporte cuántico de fotones, que no esta basado en otra cosa mas allá que el entrelazamiento entre partículas.

Debido al cambio de paradigma de una visión clásica a una cuántica de la materia, la física cuántica se torna compleja, y al ser abordada con pocos ejemplos tangibles, algunos conceptos de la misma se tornan complejos para el estudiante. la pregunta es: ¿cómo enseñar el concepto del entrelazamiento cuántico de una forma alternativa y accesible, con respecto a la que usualmente se encuentra en los textos?. Siendo teleportación un ejemplo evidente de las implicaciones de la mecánica cuántica en el mundo físico y tangible, se propone como excusa el mismo para mostrar de una forma alternativa la enseñanza del concepto que se a dado a llamar el entrelazamiento cuántico.

Este documento se encuentra dividido en dos grandes partes, encontrándose la primera, en el capítulo 2, donde se muestra el recorrido histórico y desarrollo conceptual en busca de una explicación coherente con las teorías relativista y cuántica de forma simultanea; en principio se abordan los antecedentes correspondientes del entrelazamiento cuántico, pasando por la interpretación que se le da al artículo de Einstein, Podolsky y Rosen [2], por parte de D. Bohm [3] [4] el cual sera el incentivo de J. Bell, al momento de proponer lo que se conoce ahora como las desigualdades de Bell [7], y además sentaría las bases del experimento físico realizado por A. Aspect [8] [10] [11].

En la segunda parte, contenida en los capítulos 3 y 4, se mostrara como en la actualidad se observan las aplicaciones del entrelazamiento cuántico a nivel tecnológico, como lo es en la computación y la criptografía cuántica [12] [13] [14] [22] [23] [31], se mostrara como en otras ocasiones ya se ha intentado enseñar la mecánica cuántica a partir de conceptos de la misma y sus aplicaciones [25] [26] [27], y por ultimo se realizara un despliegue teórico del fenómeno aplicando los postulados de la mecánica cuántica [28] a sistemas de dos estados.



## Antecedentes

### 2.1. El Experimento EPR

En una teoría completa hay un elemento que corresponde a cada elemento de la realidad. Una condición suficiente para la realidad de una cantidad física es la posibilidad de predecirla con certeza, sin perturbar el sistema. En la mecánica cuántica en el caso de dos magnitudes físicas descritas por operadores no conmutables<sup>1</sup>, el conocimiento de una excluye el conocimiento del otro, Entonces; (1). La descripción de la realidad dada por la función de onda en la mecánica cuántica no es completa o (2). Estas dos cantidades no pueden tener una realidad simultánea. La consideración de hacer predicciones de un sistema con base en las mediciones realizadas en otro, que previamente haya interactuado con el primero conduce al resultado en el cual, si (1) es falsa, entonces (2) también. Así se llega a concluir que la descripción de la realidad dada por una función de onda es incompleta [2].

Un valor definido de una coordenada, para una partícula en el estado dado por una determinada ecuación, no es predecible, pero sólo puede obtenerse mediante una medición directa. Sin embargo, tal medida perturba la partícula y altera su estado. Después de que se determine la coordenada, la partícula ya no estará en el estado dado por esta ecuación. La conclusión habitual de esto en la mecánica cuántica es que cuando se conoce el momento de una partícula, su coordenada no tiene realidad física.

En la mecánica cuántica si los operadores que corresponden a dos magnitudes físicas, digamos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , no conmutan, entonces el conocimiento preciso de una de ellas excluye tal conocimiento del otro. Además, cualquier intento de determinar experimentalmente estos últimos alterará el estado del sistema de tal manera que destruya el conocimiento de la primera. De esto se deduce que (1) la descripción mecánico-cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa o (2) cuando los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas que no conmutan las dos cuantificaciones no pueden tener realidad simultánea. Pues si ambos tuvieran una realidad simultánea (por lo tanto unos valores definidos) estos valores entrarían en la descripción completa.

La mecánica cuántica supone que la función de onda contiene una descripción completa de la

<sup>1</sup>Es decir, si  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$  los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  no tienen un conjunto de funciones propias en común.

realidad física del sistema en el estado al que corresponde, sin embargo esta suposición junto con la de la realidad conducen a una contradicción. Einstein Podolsky y Rosen proponen un experimento hipotético, en el cual suponen tener dos sistemas, I y II, los cuales interactúan desde el tiempo  $t = 0$  hasta  $t = T$ , después de lo cual también hay que suponer que ya no existe ninguna interacción entre las dos partes. Aparte de esto se debe suponer que los estados de los dos sistemas antes de  $t = 0$  se conocen. Entonces se puede calcular el estado del sistema combinado I + II en cualquier momento subsiguiente (haciendo uso de la ecuación de Schrodinger); sin embargo, no se puede calcular el estado en el que cualquiera de los dos sistemas, bien sea I o II, queda después de la interacción. Esto, de acuerdo con la mecánica cuántica, sólo puede hacerse con la ayuda de mediciones adicionales, mediante un proceso conocido como la reducción del paquete de ondas<sup>2</sup>; de este proceso, como consecuencia de dos mediciones diferentes realizadas sobre el primer sistema, (la primera sobre la cantidad  $\hat{A}$  y la segunda sobre la cantidad  $\hat{B}$ ), se obtiene que el segundo sistema puede quedar en estados con dos funciones de onda diferentes; si en el momento de la medición, los dos sistemas ya no interactúan, no puede producirse ningún cambio real en el segundo sistema como consecuencia de cualquier cosa que se pueda hacer al primero, lo cual es, por supuesto, simplemente una declaración de lo que significa la ausencia de una interacción entre los dos sistemas, Es decir, es posible asignar a la misma realidad dos funciones de onda diferentes.

Ahora, puede ocurrir que dos funciones de onda, por ejemplo,  $|\Psi\rangle_p$  y  $|\Psi\rangle_Q$  sean funciones propias de dos operadores no conmutables,  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  respectivamente, por lo tanto, midiendo cualquier cantidad, bien sea  $\hat{P}$  o  $\hat{Q}$ , se logra predecir con certeza, y sin de ninguna manera perturbar el segundo sistema, ya sea el valor de la cantidad  $\hat{P}$  o el valor de la cantidad  $\hat{Q}$ , según sea el caso; de acuerdo con el criterio de realidad, en el primer caso se debe considerar la cantidad  $\hat{p}$  como un elemento de la realidad, en el segundo caso la cantidad  $\hat{Q}$  es un elemento de la realidad. Pero, ya como se mencionó antes, ambas funciones de onda  $|\Psi\rangle_p$  y  $|\Psi\rangle_Q$ , pertenecen a la misma realidad. Así pues partiendo entonces del supuesto de que la función de onda da una descripción completa de la realidad física, se llega a la conclusión de que dos cantidades físicas, con operadores no conmutables, pueden tener una realidad simultánea. Así, la negación de (1) conduce a la negación de la única otra alternativa (2). Podría objetarse esta conclusión basándose en que el criterio de realidad propuesto no es suficientemente restrictivo. Pero se llegaría a la misma conclusión si se insistiera en que dos o más magnitudes físicas pueden ser consideradas como elementos simultáneos de la realidad sólo cuando pueden medirse o predecirse simultáneamente. En este punto de vista, ya que uno u otro, pero no ambos simultáneamente, de las cantidades  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  pueden predecirse, no son simultáneamente reales. Esto hace que la realidad de  $\hat{P}$  dependa del proceso de medición de  $\hat{Q}$ , o en su defecto, que la realidad de  $\hat{Q}$  dependa del proceso de medición de  $\hat{P}$ , lo que no perturba en modo alguno el segundo sistema. No se podría esperar que una definición razonable de la realidad lo permitiera.

---

<sup>2</sup>Una superposición lineal de ondas, que toman la forma de un pulso que se desplaza de forma compacta en el espacio antes de dispersarse.

### 2.1.1. Interpretación de Bohm

David Bohm [3] [4] da una explicación sencilla al origen de las correlaciones mecánico-cuánticas de objetos lejanos en el hipotético experimento de Einstein, Podolsky y Rosen, sugerido por estos autores como una crítica de la interpretación habitual de la mecánica cuántica.

La razón por la cual ninguna contradicción con la teoría relatividad surge, es porque a pesar de la transmisión instantánea del momento entre las partículas, ninguna señal puede ser llevada de esta manera. Pues tal transmisión del momento podría constituir una señal sólo si hubiesen algunos medios prácticos de determinar con precisión qué habría hecho la segunda partícula si la primera partícula no hubiese sido observada; esta información no puede obtenerse mientras la forma actual de la teoría cuántica sea válida. Para obtener dicha información, se requieren condiciones bajo las cuales se descompone la forma usual de la teoría cuántica, de modo que las posiciones y los momentos de las partículas se pueden determinar de forma simultánea y precisa. Si tales condiciones existen, entonces hay dos maneras en que las contradicciones pueden ser evitadas. Primero, las leyes físicas más generales apropiadas para los nuevos dominios pueden ser tales que no permitan la transmisión de aspectos controlables de las fuerzas entre partículas, más rápidamente que la luz. En segundo lugar, es posible que la aplicación de los criterios habituales de la covarianza de Lorentz no sea apropiada cuando la interpretación usual de la teoría cuántica se rompe. Incluso en relación con la teoría gravitacional, la relatividad general indica que la limitación de las velocidades a la velocidad de la luz no necesariamente se mantiene universalmente. Si se mantiene el principio de la relatividad general, que consiste en procurar que las propiedades del espacio dependan de las propiedades de la materia que se mueve en este espacio, entonces es perfectamente concebible la métrica, la velocidad límite, el campo  $\Psi$ , así como en el tensor gravitacional  $\bar{g}$ . En el límite clásico, la dependencia del campo podría ser descuidada, y obtendríamos la forma usual de covarianza. En cualquier caso, difícilmente puede decirse que se tenga una base experimental sólida para requerir la misma forma de covarianza a distancias muy cortas que necesitamos a distancias ordinarias.

Bohm y Aharonov, [5] plantean un experimento con el cual podría verificarse la paradoja EPR, Hay que señalar que las dificultades que se plantean en relación con la paradoja de la EPR son graves sólo en el caso de que las partículas estén tan separadas que: a) el aparato de observación sólo pueda obtener una partícula a la vez y b) no interactuar significativamente; Así entonces, este experimento demuestra que no se puede evitar la paradoja asumiendo un desglose de la teoría cuántica cuando las partículas están muy separadas y no interactúan. Para el caso de la medición del spin de los dos átomos que originalmente formaron una molécula de spin total cero, el resultado análogo sería que hay una correlación precisa del valor de cualquier componente del spin del átomo A que elegimos para medir con el mismo componente del espín del átomo B, incluso en cada medición individual.

Mientras que la paradoja de EPR se expresa más claramente en términos de las correlaciones de giros de un par de átomos, en la actualidad es factible probarlo experimentalmente sólo en el estudio de las propiedades de polarización de fotones correlacionados. Tales fotones se producen en la radiación de aniquilación de un par positrón-electrón. En este proceso, dos fotones se emiten simultáneamente, con momento opuesto; cada fotón siempre se emite en

un estado de polarización ortogonal al de la otra, independientemente de cuál pueda ser la elección de los ejes con respecto a los cuales se expresa el estado de polarización. Ahora si los dos fotones se mueven en direcciones opuestas, el campo de radiación tiene entonces cuatro posibles funciones de onda; dos funciones de onda representan estados del sistema combinado en el que cada fotón es excitado en una dirección ortogonal a la del otro,  $|\Psi\rangle_1$  y  $|\Psi\rangle_2$ , mientras que las otras dos, representan estados del sistema combinado en el que cada fotón es excitado en la misma dirección que del otro,  $|\Psi\rangle_3$  y  $|\Psi\rangle_4$ . La función de onda correcta para el experimento en cuestión debe ser tal que los dos fotones se exciten ortogonalmente ( $|\Psi\rangle_1$  y  $|\Psi\rangle_2$ ), tal función se obtiene tomando una combinación lineal adecuada de las funciones de partida, existen dos posibles combinaciones lineales en las cuales se representan estados ortogonales de excitación para ambos fotones, siendo una la suma de las funciones de onda y la otra la resta; en ambos casos, entonces, se tiene esencialmente el mismo tipo de correlaciones desconcertantes en las propiedades de las partículas distantes, en las que la propiedad que es definida de cualquier fotón está determinada por una medición en un fotón lejano. Por lo tanto, la paradoja de EPR también puede ser probada por las propiedades de polarización de los pares de fotones. Como en el caso del espín, las relaciones de fase definidas con las que funciones  $|\Psi\rangle_1$  y  $|\Psi\rangle_2$  que se combinan, no sólo conducen a correlaciones del tipo descrito, sino también a la conservación detallada del momento angular total, para cada caso individual. La manera ideal de probar esto sería medir las polarizaciones de cada miembro de un conjunto estadístico de pares de fotones producidos por la aniquilación de electrones de positrones; y ver si las polarizaciones son siempre perpendiculares en cada sistema de ejes (ver [8], [10] y [11]), tal como lo predice la teoría, pero el experimento que se realizó consistía en medir la tasa relativa R de coincidencias en la dispersión de los dos fotones a través de algún ángulo  $\theta$  para los dos casos siguientes:

1. Cuando los planos formados por las líneas de movimiento de la dispersión y la dirección original son perpendiculares.
2. Cuando los planos son paralelos.

En caso (1), el fotón 1 es dispersado por un electrón en un bloque de materia sólida, con un ángulo  $\theta$ , que se mide sobre el plano horizontal. El fotón 2 es igualmente dispersado, con el mismo ángulo  $\theta$ , pero en un plano perpendicular al del plano horizontal del fotón 1. En la medición,  $\theta$  es fijo, y se cuentan las coincidencias de los fotones.

En el caso (2), el experimento es el mismo, excepto que ambos fotones están dispersos en el plano horizontal. Luego se considera el cálculo de la razón R con base a dos hipótesis diferentes:

- La teoría cuántica usual es correcta en todos los casos, de modo que la función de onda está dada por la combinación antisimétrica.
- La teoría cuántica usual es correcta sólo cuando la función de onda de los fotones se superponen (o cuando los fotones interactúan entre sí).

Cuando los fotones se han separado suficientemente, se supone que la función de onda ya no es una superposición, teniendo relaciones de fase definidas de sus componentes, que implican,

el tipo de correlaciones de EPR y un momento angular total definido, sino que suponemos que cada fotón entra en un estado definido de polarización, que está claramente relacionado con el del otro, y para obtener la simetría en los resultados estadísticos finales, se supone, donde sea necesario, que allí es una distribución estadística uniforme sobre cualquier dirección que se puede favorecer en cada caso individual. Para sacar a la luz las consecuencias de tal hipótesis para el experimento considerado, se tendrán en cuenta dos casos extremos:

1. Cada fotón se polariza circularmente alrededor de su dirección de movimiento, pero los dos fotones están polarizados de manera opuesta.
2. Cada fotón entra en un estado de polarización lineal en alguna dirección, mientras que el otro entra en un estado de polarización perpendicular respecto a su par.

En muchos casos, se obtiene la misma probabilidad para una dirección arbitraria de polarización de cualquiera de los fotones.

Para llevar a cabo los cálculos necesarios para comparar estas teorías sugeridas con el experimento, se debe utilizar la sección transversal de dispersión de un solo fotón de un electrón; primero para el caso en el que su dirección de polarización inicial es paralela al plano, (que contiene su dirección inicial de movimiento y su dirección después de la dispersión) y en segundo lugar, para el caso en el que su dirección de polarización inicial es perpendicular. Según la fórmula Klein-Nishina<sup>3</sup>, estas probabilidades son descritas por dos funciones de onda  $|\Psi\rangle_i$ , las cuales permiten aplicar estos resultados al problema, involucrando dos fotones que van en direcciones opuestas. Para el caso general, la función de onda antes de la dispersión debe, en tal problema, ser una combinación lineal de las cuatro posibilidades (circular: levogira o dextrogira y lineal: vertical u horizontal).

En general, se podría esperar que la probabilidad de tal dispersión contenga términos cruzados. Para el caso especial del experimento que se está considerando (es decir, los planos 1 y 2 son paralelos o perpendiculares), se puede mostrar, sin embargo, que si se elige el eje  $x$  en el plano asociado con cualquiera de los dos los fotones (y el eje  $y$  perpendicular a este plano), entonces todos estos términos cruzados caerán de la expresión para la probabilidad de dispersión. Con esta elección de ejes, entonces, podemos calcular la probabilidad de dispersión de dos fotones para un estado arbitrario del sistema calculando por separado para los cuatro casos,  $|\Psi\rangle_i$ , y multiplicando el resultado de cada cálculo por la probabilidad de este caso. Para cada caso,  $|\Psi\rangle_i$ , sin embargo, esta probabilidad se reduce a sólo el producto de las probabilidades de dispersión de los fotones individuales. Los resultados obtenidos (ver [6]) muestran que este experimento es explicado adecuadamente por la teoría cuántica actual que implica correlaciones lejanas, del tipo que conduce a la paradoja de EPR, pero no por cualquier razonable hipótesis que implican un desglose de la teoría cuántica que podría evitar la paradoja del EPR.

---

<sup>3</sup>La fórmula de Klein-Nishina da la sección transversal diferencial de los fotones dispersados de un solo electrón libre en el orden más bajo de la electrodinámica cuántica. A frecuencias bajas, (por ejemplo, luz visible) produce la dispersión de Thomson; a frecuencias más altas, (por ejemplo, rayos X y rayos gamma) produce la dispersión de Compton.

## 2.2. El Teorema de Bell

La paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen se adelantó como argumento de que la mecánica cuántica no podía ser una teoría completa, sino que debería complementarse con otras variables. Estas variables adicionales pretendían restaurar a la teoría causalidad y localidad. Bell demuestra que esta idea resulta incompatible con las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica. Es el requisito de la localidad, o más precisamente que el resultado de una medición en un sistema no se vea afectado por las operaciones sobre un sistema distante con el que ha interactuado en el pasado, lo que crea la dificultad esencial. Además, se ha construido explícitamente una interpretación variable oculta de la teoría cuántica elemental. Esa interpretación particular tiene efectivamente una estructura no local. Esto es característico, al parecer, de cualquier teoría que reproduzca exactamente las predicciones de la mecánica cuántica [7].

Bell propone un sistema en un estado entrelazado de tal forma que la suma total de espín sea cero. La mecánica cuántica predice con certeza que si la medida de uno de dos componentes del operador que representa el espín de alguna de dos partículas resulta ser  $-1$  la medida del spin de la otra partícula tendrá que ser  $+1$ , y esta correlación se mantendrá en cualquier dirección del espacio.

Si  $A(\mathbf{a})$  es el resultado del espín de la partícula 1 en dirección  $\mathbf{a}$  y  $B(\mathbf{b})$  es el resultado de la medida del espín de la partícula 2 en dirección  $\mathbf{b}$ , el valor esperado del producto entre  $A(\mathbf{a})$  y  $B(\mathbf{a})$  está dado por el valor negativo del coseno del ángulo existente entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  ( $-\cos\theta_{\mathbf{ab}}$ ), existirá un caso en el cual este valor será  $-1$ , en dado caso esto representaría una correlación estrictamente negativa, desde la cual se puede predecir con total certeza la medida del espín de una partícula, a partir del resultado de la medida del espín de la primera.

Una descripción completa del estado de la partícula 2 requiere entonces de una función  $B(\mathbf{b}, \lambda)$ , la cual especifique el valor del operador espín sobre  $\mathbf{b}$ , en función del estado oculto caracterizado por  $\lambda$ . Del mismo modo para la partícula 1.

De este modo se introducen una serie de variables ocultas tales que para un  $\lambda$  dado, los valores de los observables del espín se especifican como valores de una función definida, sobre un dominio de valores posibles para tales variables ocultas. La hipótesis esencial consiste en que el resultado de una medición en una de las dos partículas no depende en ninguna manera del tipo de medida realizada en la otra partícula<sup>4</sup>; entonces una vez separadas las partículas la medida de  $A$  solo depende de  $\mathbf{a}$  y  $\lambda$ , de manera análoga para la para la medida de  $\mathbf{a}$ , a pesar de esto, sigue existiendo una correlación entre los resultados de las mediciones sobre cada una de las partículas, debido a su dependencia común de un  $\lambda$  dado, el cual especifica el estado inicial del sistema en la fuente.

Ahora conociendo el principio de localidad y la idea de las variables ocultas se obtiene el valor esperado de  $A(\mathbf{a}) \cdot B(\mathbf{b})$ , es decir el valor medio para el producto de los dos resultados, después de un gran número de ensayos. Ahora la prueba del teorema consiste en mostrar que se satisface la condición de localidad y el resultado del valor esperado de  $A(\mathbf{a}) \cdot B(\mathbf{b})$  en el caso para el cual su resultado es  $-1$ , para así establecer un acuerdo con la mecánica

---

<sup>4</sup>El principio de Localidad establece que dos objetos suficientemente alejados uno de otro no pueden influirse mutuamente de manera instantánea, de manera que dado un corto intervalo de tiempo cada objeto sólo puede ser influido por su entorno inmediato o entorno local.

cuántica; entonces el valor esperado de  $A(\mathbf{a}) \cdot B(\mathbf{b})$ , satisface cierta desigualdad, que es una predicción que difiere a la ofrece la mecánica cuántica; el trabajo de Bell consistió en agregar un tercer parámetro que se denominara  $\mathbf{c}$ , y conjugar los diferentes resultados de las mediciones realizadas según unas determinadas orientaciones de medición. Al agregar el vector unitario  $\mathbf{c}$ , y mediante unos pasos en los cuales se reacomoda la condición de equivalencia establecida para el caso en el que el valor esperado del producto entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es  $-1$ , se obtiene la primera desigualdad de Bell.

Una forma para comprobar el desacuerdo entre las predicciones de la teoría cuántica, y las obtenidas con la primera desigualdad de Bell, para la teoría de Variables ocultas locales, se tiene si se toman  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , y  $\mathbf{c}$ , coplanares, formando  $\mathbf{c}$  un ángulo de  $120^\circ$  con  $\mathbf{a}$ , y  $\mathbf{b}$  un ángulo de  $60^\circ$  con  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{c}$ , donde se muestra que las predicciones de la teoría cuántica y la desigualdad de Bell son incompatibles, por lo menos, para algunos pares de orientaciones.

Se concluye entonces que en una teoría en la que se añaden parámetros a la mecánica cuántica para determinar los resultados de las mediciones individuales, sin cambiar las predicciones estadísticas, debe existir un mecanismo por el cual el ajuste de un dispositivo de medición pueda influir en la lectura de otro instrumento, por remoto que sea. Por otra parte, la señal implicada debe propagarse instantáneamente. Por supuesto, la situación es diferente si las predicciones mecánicas cuánticas tienen una validez limitada. Es posible que sólo se apliquen a experimentos en los que los ajustes de los instrumentos se hagan con suficiente antelación para permitirles alcanzar alguna relación mutua por intercambio de señales con una velocidad menor o igual que la de la luz. Como el propuesto por Bohm y Aharanov. [7]

### 2.3. Experimento de Alain Aspect

Entre 1981 y 1982 Alain Aspect junto con su grupo de estudiantes en Orsay logro realizar la medición de la correlación de polarización lineal de los fotones emitidos en una cascada de radiación atómica de calcio. Una fuente de alta eficiencia proporcionó una mejor estadística Precisión y capacidad para realizar nuevas pruebas. Los resultados, en excelente acuerdo con las predicciones de la mecánica cuántica, violan fuertemente las desigualdades de Bell generalizadas, y descartan toda la clase de teorías locales realistas. [8]

John Bell mostró que cualquier tipo de subestructura oculta variable, si es local, produce predicciones que difieren significativamente de las de la mecánica cuántica en algunas situaciones especiales. El teorema de Bell fue ampliado (ver [9]) para cubrir sistemas reales, proporcionando una prueba experimental para todas las variables ocultas en teorías locales. Se ha demostrado que las desigualdades se aplican a una mayor clase de teorías: "teorías locales objetivas", o "teorías locales realistas" que se pueden probar en experimentos reales. Tales experimentos han sido propuestos por David Bohm; "Gedankenexperiment<sup>5</sup>" inspirado en el famoso artículo de Einstein, Podolsky, y Rosen, una fuente que emite pares de fotones correlacionados que se separan, se realizan mediciones de su polarización con el uso de polarizadores remotos (o imanes Stern-Gerlach) en varias orientaciones. Para conjuntos particulares de las orientaciones del polarizador, las dos correlaciones de partículas predichas por

---

<sup>5</sup>Hans Christian Orsted fue el primero en utilizar el término latino-germano Gedankenexperiment o experimento de pensamiento.

la mecánica cuántica no obedecen el teorema de Bell. El experimento se realizó a diferentes distancias entre la fuente y los polarizadores. Para grandes separaciones, los resultados son capaces de descartar varias hipótesis, de acuerdo con un estado puro no factorizante para dos partículas (como un estado singlete) evoluciona hacia una mezcla de estados factorizantes cuando las dos partículas se separan. En consecuencia, un proceso de localización de este tipo ocurre a distancias del orden de la longitud de coherencia de los paquetes de onda asociados con los fotones emitidos. Tal hipótesis ya ha sido probada previamente usando pares de rayos X, con resultados contradictorios, pero nunca en experimentos que emplean fotones visibles. Los resultados obtenidos por Alain Aspect y su grupo de estudiantes claramente concuerdan con las predicciones de la mecánica cuántica; las orientaciones que conducen a las violaciones máximas de las desigualdades de Bell son las realizadas con los ángulos de  $22.5^\circ$  y  $67.5^\circ$  y muestran un perfecto acuerdo con mecánica cuántica. Por último, moviendo cada polarizador hasta 6,5m de la fuente no se observó cambios en los resultados. Como conclusión, los resultados, están de acuerdo con las predicciones de mecánica cuántica, y tienen una alta precisión estadística una fuerte evidencia contra toda la clase de teorías locales realistas; además sin importar la distancia de separación entre la fuente y los polarizadores no se observaron efectos en las mediciones de las correlaciones.

En 1982 Alain Aspect mide nuevamente la correlación de polarización lineal de pares de fotones emitidos en una cascada radiactiva de calcio. El nuevo esquema experimental, utiliza polarizadores de dos canales (es decir, análogos ópticos de filtros Stern-Gerlach) es una transposición directa del experimento mental Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm. Los resultados muestran un excelente acuerdo con las predicciones de la mecánica cuántica y conducen a la mayor violación de las desigualdades generalizadas de Bell jamás alcanzadas. [10]

Varios experimentos con mayor precisión se habían realizado, y claramente favorecían a la mecánica cuántica, pero desafortunadamente, ninguno permitió una prueba directa usando las desigualdades, ya que ninguno siguió el esquema del experimento original EPR lo suficientemente cerca. Algunos experimentos se realizaron con pares de fotones (o de protones). Pero no había disponibles analizadores eficientes a tales energías, y los resultados que se habían obtenido con los polarizadores ideales se deducían indirectamente de los experimentos de dispersión de Compton, la validez de este procedimiento en el contexto del teorema de Bell fue criticada.

También hubo experimentos con pares de fotones de baja energía emitidos en cascadas radiactivas atómicas. Los verdaderos polarizadores están disponibles en el rango visible. Sin embargo, todos los experimentos previos involucraban analizadores de un solo canal. Surgen varias dificultades como resultado de la muy baja eficiencia del sistema de detección (los fotomultiplicadores tienen eficiencias cuánticas bajas y la aceptación angular es pequeña). Las mediciones de polarización son intrínsecamente incompletas: cuando se ha emitido un par, si no se obtiene ningún conteo en uno de los fotomultiplicadores, no hay manera de saber si el detector (de baja eficiencia) lo ha omitido o si ha sido bloqueado por el polarizador (solo este último caso sería una verdadera medida de polarización). Por lo tanto, algunas mediciones no se pueden realizar directamente. Sin embargo, es posible derivar de los datos experimentales cantidades numéricas que pueden (según la mecánica cuántica) posiblemente violar las desigualdades de Bell. Para este propósito, se tiene que recurrir a experimentos auxiliares, donde se miden las tasas de coincidencia con uno o ambos polarizadores eliminados.



Algunos razonamientos, con algunas suposiciones adicionales permiten obtener desigualdades realmente operativas. Entonces es suficiente repetir las mismas medidas para otras tres opciones de orientaciones, y las desigualdades pueden usarse directamente como una prueba de teorías locales realistas versus cuántica mecánica.

El mayor conflicto entre las predicciones de la mecánica cuántica y las desigualdades se espera para el conjunto de orientaciones del polarizador con un ángulo  $22.5^\circ$  y  $67.5^\circ$ . Se realizaron cinco mediciones en cada una de estas orientaciones; la incertidumbre hallada es la desviación estándar que representa la ley de Poisson en el recuento de fotones. La impresionante violación de las desigualdades es del 83 % de la violación máxima predicha por la mecánica cuántica con polarizadores ideales (la violación más grande de las desigualdades de Bell anteriormente era del 55 % de la predicha en el caso ideal). En conclusión el experimento produce la violación más fuerte de las desigualdades de Bell que jamás se había logrado, y un excelente acuerdo con la mecánica cuántica, Dado que es una transposición directa del esquema ideal de Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm, el procedimiento experimental es muy simple y no necesita de mediciones auxiliares como en experimentos anteriores con polarizadores de un solo canal.

En septiembre de 1982 Alain Aspect propone un nuevo experimento a realizar con el cual mostraría una vez más la violación de las desigualdades de Bell, pero ahora teniendo en cuenta un nuevo factor a cambiar; todos estos experimentos se habían realizado con configuraciones estáticas, en las que los polarizadores se mantienen fijos durante toda la duración de una ejecución. Entonces, se podría cuestionar la suposición de localidad de Bell, que establece que los resultados de la medición por polarizador 2 no dependen de la orientación a del polarizador 1 (y viceversa), ni la forma en que se emiten los pares depende de la orientación de cada polarizador. [11]

“Las configuraciones de los instrumentos se hacen con suficiente antelación para permitirles alcanzar una relación mutua por intercambio de señales con velocidad menor o igual a la de la luz”. Si existieran tales interacciones, La condición de localidad de Bell ya no sería válida para experimentos estáticos, tampoco las desigualdades de Bell, Bell insistió así en la importancia de los “experimentos del tipo propuesto por Bohm y Aharonov, en los que los ajustes se cambian durante el vuelo de las partículas”. En un experimento de sincronización de este tipo, la condición de localidad se convertiría en una consecuencia de la causalidad de Einstein, previniendo influencias más rápidas que la luz.

Cada polarizador se reemplaza con una configuración involucrando un dispositivo de conmutación seguido por dos polarizadores en dos orientaciones diferentes, Un conmutador óptico de este tipo puede redirigir rápidamente la luz incidente de un polarizador a otro. Si los dos interruptores funcionan al azar y no están correlacionados, es posible escribir las desigualdades generalizadas de Bell en una forma similar a las desigualdades Clauser-Horne Shimony-Holt Un experimento más ideal con conmutación aleatoria y completa sería necesario para un argumento completamente concluyente contra toda la clase de teorías de parámetros suplementarios que obedecen a la causalidad de Einstein. Sin embargo se observó nuevamente una violación de las desigualdades de Bell, lo que indica que la precisión del experimento fue lo suficientemente buena como para señalar una discrepancia hipotética con las predicciones de la mecánica cuántica.

## Actualidad

### 3.1. Entrelazamiento Cuántico

Los estados entrelazados surgen naturalmente como resultado de las interacciones entre las partículas, como cuando se crea un par de partículas simultáneamente bajo el requisito de que algún atributo, como que el giro o la polarización, se conserve. De acuerdo con la teoría cuántica, aunque el estado exacto de cada parte no se determina hasta que se realiza una medición, sus estados deben estar, sin embargo, correlacionados. Así siempre que se realiza una medición en un miembro del par entrelazado, los estados de ambas partículas se vuelven definitivos, generalmente opuestos (en algún sentido) y el entrelazamiento para.

Los estados entrelazados pueden ser creados cuando los sistemas cuánticos interactúan uno con el otro, este efecto, a menudo produce un par de partículas que tienen valores altamente correlacionados para algún atributo. Por ejemplo, se puede tener un estado entrelazado de un par de partículas de espín  $-\frac{1}{2}$ , de modo que si alguna es medida y se encuentra que su espín es  $+\frac{1}{2}$ , la otra debe tener un espín de  $-\frac{1}{2}$ , de igual forma se puede tener un par de fotones en un estado entrelazado que si al momento de medir uno de los pares, se encuentra que este tiene una polarización de  $0^\circ$ , el otro par se debe encontrar en una polarización de  $90^\circ$ . [12]

Independientemente del mecanismo exacto para generar partículas entrelazadas, si se escribe el estado de la partícula 1 como  $|\Psi\rangle_1$ , y el estado de la partícula 2 como  $|\Psi\rangle_2$ , a menudo se encuentra que el estado común del par entrelazado es un nuevo estado que se ha de llamar  $|\Psi\rangle_1$ . Luego de que se encuentran en su estado entrelazado descrito por la función de onda  $|\Psi\rangle_{12}$ , se hace imposible escribir nuevamente esta función como un producto directo de dos estados propios del mismo sistema. [13]

#### 3.1.1. Creación de pares entrelazados

Usualmente para producir pares de fotones entrelazados en polarización se utiliza la fluorescencia paramétrica o conversión paramétrica hacia abajo espontánea, también llamada

rectificación paramétrica. Se bombea un cristal no lineal, transparente y birrefringente<sup>1</sup>, con un láser a una frecuencia  $\lambda_b$  y se obtienen dos conos de luz con fotones de frecuencias  $\lambda_s$  y  $\lambda_i$ , con  $\lambda_b = \lambda_s + \lambda_i$ . Cuando los fotones son degenerados,  $\lambda_s = \lambda_i$ , deberían ser indistinguibles, pero la birrefringencia del cristal obliga a que su polarización sea ortogonal (uno estará polarizado en la dirección horizontal y otro en la vertical). En los dos puntos de intersección de los dos conos de dispersión a la salida del cristal, los fotones se encontrarán en un estado cuántico entrelazado en polarización. [14] [15]

## 3.2. Teleportación

La teleportación usualmente es entendida como la transferencia de un objeto entre dos locaciones mediante un proceso de disociación, transmisión de información, y reconstitución; el efecto en si consiste en la destrucción del objeto original y la creación de una réplica exacta en un destino previsto. La clave de la teleportación es que es que el objeto real no atraviesa la distancia intermedia, en su lugar el objeto es escaneado para extraer la suficiente información y recrear el original, la información es transmitida, y una réplica exacta es re-ensamblada en él. La teleportación es por lo tanto distinta de la transmisión de fax, que deja intacto el original y solo crea una réplica aproximada e hipotéticamente perfecta clonación, que daría lugar a dos versiones idénticas del original.

La teleportación es usada como un artificio popular en las historias de ciencia ficción. Hasta hace poco no se había prestado una seria atención a los principios físicos sobre los cuales se podía basar la verdadera teleportación, la presunción era que es imposible medir todos los atributos de un estado cuántico exactamente, de manera simultáneamente, en consecuencia, parecía que la teleportación estaba condenada al fracaso porque nunca lograría producir información completa sobre el objeto original. [16]

La situación cambió en 1993 cuando equipo de físicos e informáticos combinaron sus talentos para venir con la primera explicación científicamente plausible de cómo teleportar un estado cuántico desconocido [17]. En el artículo, se mostró que era posible explotar otro aspecto más de la teoría cuántica, la noción de estados entrelazados e influencias no locales, para evitar las limitaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg y por lo tanto crear una réplica exacta de un cuanto arbitrario, pero solo si el estado original fue destruido en el proceso.

En el contexto de la teleportación cuántica, el par de partículas entrelazadas sirven como dos extremos de un canal de comunicación cuántica: una persona debe retener una de las dos partículas entrelazadas, para así, luego transformar esta, en la partícula que desea recibir. Por lo tanto, para teleportar un estado cuántico, el emisor y el receptor deben poseer cada uno un miembro de un par de partículas entrelazadas.

Bennett y sus colegas logran mostrar que la información que se necesita para recrear el estado cuántico de un sistema simple de dos estados, que puede separarse en un componente clásico y uno cuántico, siendo la parte clásica transmitida a través de un canal clásico de comunicación y la parte cuántica transmitida (no a través) de un canal de comunicación

---

<sup>1</sup>La birrefringencia o doble refracción es una propiedad óptica de ciertos cuerpos, consiste en desdoblarse un rayo de luz incidente en dos rayos linealmente polarizados de manera perpendicular entre sí como si el material tuviera dos índices de refracción distintos.

cuántica, y recombinada en el destino para convertirse en el estado original. La idea básica es que el emisor haga una medición del estado entrelazado de la partícula cuyo estado se teleporta para enviar el resultado de la medición (mediante un mensaje clásico) a el receptor, el cual usará la información de este mensaje clásico para determinar los pasos a seguir (o no) para transformar su partícula en el estado, en el cual es una réplica exacta del estado que el emisor desea teleportar.

Este esquema teleporta el estado cuántico de un objeto no el mismo objeto en sí, como consecuencia, no se puede usar este esquema para teletransportar un electrón en su totalidad de un lugar a otro, pero si es posible teleportar la orientación del espín de un electrón que se encuentra en un lugar en particular a otro electrón en una diferente localización respecto a la del primero. El efecto en si es similar, ya que una partícula en un estado específico, es destruida en su localización origen y reaparece en otra partícula en otro lugar, sin que la partícula original atraviese la distancia intermedia. [16]

### 3.2.1. Teleportación con fotones

La transmisión y la reconstrucción sobre distancias arbitrarias del estado de un sistema cuántico se demuestra experimentalmente en fotones por primera vez en 1997 [18]. Durante la teleportación, un fotón inicial que lleva la polarización la cual será transferida y que a su vez es un par de dos fotones entrelazados se somete a una medida de tal forma que el segundo fotón del par entrelazado adquiere la polarización del fotón inicial. Este último fotón puede estar arbitrariamente alejado del inicial.

Un objeto que se teletransporta puede caracterizarse por completo gracias a sus propiedades, que en la física clásica se pueden determinar por medio de la medida. Para hacer una copia de ese objeto en una ubicación distante no se necesitan las partes y piezas originales, todo lo que se necesita es enviar la información escaneada para que pueda usarse para reconstruir el objeto. Bennett sugirió que es posible transferir el estado cuántico de una partícula a otra partícula (Ver [17]), mediante el proceso de teleportación cuántica, siempre que no se obtenga información sobre el estado en el curso de esta transformación; este requisito se puede cumplir mediante el entrelazamiento, el cual describe las correlaciones entre los sistemas cuánticos mucho más fuertes que cualquier correlación clásica.

Anton Zeillinger junto con sus colegas realiza la primera verificación experimental de teleportación cuántica. Al producir pares de fotones entrelazados mediante el proceso de conversión paramétrica hacia abajo espontánea y el uso de interferometría de dos fotones para analizar el entrelazamiento, así se podría transferir una propiedad cuántica (en este caso, el estado de polarización) de un fotón a otro.

Para hacer más claro el problema de transferir información cuántica, se hace la suposición de que Alice tiene alguna partícula en cierto estado cuántico  $|\Psi\rangle$ , y quiere que Bob, en una ubicación distante, tenga una partícula en ese estado, existe la posibilidad de enviar a Bob la partícula directamente. Pero suponga que el canal de comunicación entre Alice y Bob no es lo suficientemente bueno para preservar la necesaria coherencia cuántica<sup>2</sup> o suponer que esto tomaría demasiado tiempo, lo que podría ser fácilmente el caso si  $|\Psi\rangle$  es el estado de un objeto más complicado o masivo. Hay que recordar que ninguna medición que Alice pueda

---

<sup>2</sup>Haciendo referencia a un estado cuántico que mantiene su fase durante un cierto periodo de tiempo.

realizar en  $|\Psi\rangle$  será suficiente para que Bob reconstruya el estado porque el estado de un sistema cuántico no puede determinarse completamente mediante mediciones. Los sistemas cuánticos son tan evasivos porque pueden estar en una superposición de varios estados al mismo tiempo. Una medición en el sistema cuántico lo forzará a solo uno de estos estados, esto se conoce como el postulado de proyección<sup>3</sup>. Ahora, se puede mostrar esta característica tomando un único fotón, que puede estar polarizado horizontal o verticalmente, indicado por los estados  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$ . Incluso puede polarizarse en la superposición general de estos dos estados. Para ubicar este ejemplo en una configuración más general, Es posible reemplazar los estados  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$  por  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  que se refieren a los estados de cualquier sistema cuántico de dos estados. Las superposiciones de  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  se llaman qubits, para indicar las nuevas posibilidades introducidas por la física cuántica en la informática. Si un fotón en estado  $|\Psi\rangle$  pasa a través de un divisor de haces polarizante, un dispositivo que refleja y transmite fotones polarizados horizontal y verticalmente, se encontrará en el haz reflejado y transmitido con probabilidad  $\alpha^2$  y  $\beta^2$ . Entonces, el estado general  $|\Psi\rangle$  ha sido proyectado en  $|H\rangle$  o  $|V\rangle$  por la acción de la medición. El postulado de proyección, imposibilita que Alicia realice una medición de  $|\Psi\rangle$  mediante la cual ella obtendría toda la información necesaria para reconstruir el estado. [18]

Aunque el postulado de la proyección en la mecánica cuántica parece resignar los intentos de Alice de proporcionar a Bob el estado inicial, Bennett da cuenta que precisamente este postulado de proyección permite el teleporte de de Alice a Bob. Durante la teleportación, Alice destruye el estado cuántico a la mano, mientras Bob recibe el estado cuántico, sin que Alice ni Bob obtengan información sobre el estado  $|\Psi\rangle$ . Un papel clave en el esquema de teleportación lo realizan un par de partículas auxiliares entrelazadas que serán inicialmente compartidas por Alice y Bob. Suponga que la partícula 1 que Alice quiere teleportar está en el estado inicial  $|\Psi\rangle_1$  y el par enredado de partículas 2 y 3 compartido por Alice y Bob está en el estado  $|\Psi\rangle_{23}$ , este par entrelazado es un sistema cuántico único en una superposición igual de los estados  $|H\rangle_2 |H\rangle_3$  y  $|H\rangle_2 |H\rangle_3$ . Es preciso aclarar que el estado entrelazado no contiene información sobre las partículas individuales; solo indica que las dos partículas estarán en estados opuestos. La propiedad importante de un par entrelazado es inmediatamente como se realice una medición en una de las partículas y esta sea, por decir, en  $|H\rangle$ , el estado del otro se determina como  $|V\rangle$  y viceversa. Einstein, entre muchos otros, simplemente no podía aceptar “esta acción espeluznante a distancia” (ver [2]). Pero esta propiedad de los estados entrelazados ya ha sido demostrada (ver [8], [10] y [11]). El esquema de teleportación funciona de la siguiente manera; Alice tiene la partícula 1 en el estado inicial  $|\Psi\rangle_1$  y la partícula 2. La partícula 2 está entrelazada con la partícula 3, la cual está en propiedad de Bob. La clave está en realizar una medición específica sobre las partículas 1 y 2, la cual tendrá un estado  $|\Psi\rangle_{12}$ , Este es solo uno de los cuatro posibles estados entrelazados máximos en los cuales se puede descomponer cualquier estado de dos partículas. La proyección de un estado arbitrario de dos partículas sobre la base de los cuatro estados se llama medición de estado de Bell<sup>4</sup>. El estado  $|\Psi\rangle_{12}$  se distingue de los otros tres estados máximamente

<sup>3</sup>Este determina a qué estado se reduce el estado del sistema cuando se obtiene un resultado particular de la medición, en la cual colapsa la función de onda. (J. Neumann, 1932, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics).

<sup>4</sup>Se amplía el concepto de estado de Bell en el capítulo 4.1.

entrelazados por el hecho de que cambia el signo intercambiando la partícula 1 y la partícula 2. Esta característica antisimétrica única de  $|\Psi\rangle_{12}$  desempeñará un papel importante en la identificación experimental, es decir, en las mediciones de este estado.

La física cuántica predice que una vez que las partículas 1 y 2 se miden en  $|\Psi\rangle_{12}$ , la partícula 3 se proyecta instantáneamente en el estado inicial de la partícula 1. Debido a que se han observado las partículas 1 y 2 en el estado  $|\Psi\rangle_{12}$ , se sabe ahora, que sea cual sea el estado de la partícula 1, la partícula 2 debe estar en el estado opuesto, es decir, en el estado ortogonal al estado de la partícula 1. Pero inicialmente ya se habían preparado las partículas 2 y 3 en el estado  $|\Psi\rangle_{23}$ , lo que significa que la partícula 2 también es ortogonal a la partícula 3. Esto solo es posible si la partícula 3 está en el mismo estado que la partícula 1 inicialmente. El estado final de la partícula 3 es por lo tanto  $|\Psi\rangle_3$ , se observó que durante la medición de estado de Bell, la partícula 1 pierde su identidad porque se entrelaza con la partícula 2. Por lo tanto, el estado  $|\Psi\rangle_1$  se destruye en el lado de Alice durante la teleportación. La transferencia de información cuántica de la partícula 1 a la partícula 3 puede ocurrir sobre distancias arbitrarias, de ahí el nombre de teleportación. Experimentalmente, el entrelazamiento cuántico se ha demostrado sobre distancias del orden de 10km. En el esquema de teleportación no es necesario que Alice sepa dónde está Bob. Además, el estado inicial de la partícula 1 puede ser completamente desconocido no solo para Alice sino para cualquier persona. Es importante notar que la medición del estado de Bell no revela ninguna información sobre las propiedades de ninguna de las partículas. Esta es la razón por la cual la teleportación cuántica usando superposiciones de dos partículas coherentes funciona, mientras que cualquier medición en una superposición de partículas fallaría. El hecho de que no se obtenga ninguna información en ninguna de las partículas es también la razón por la cual la teleportación cuántica escapa del teorema de no clonación<sup>5</sup>. Después de la teleportación exitosa, la partícula 1 ya no está disponible en su estado original y, por lo tanto, la partícula 3 no es un clon sino que es realmente el resultado de la teleportación. Una medición completa del estado de Bell no solo puede dar el resultado de que las dos partículas 1 y 2 están en estado antisimétrico, pero con probabilidades iguales del 25 % podríamos encontrarlas en cualquiera de los otros tres estados entrelazados. Cuando esto sucede, la partícula 3 se deja en uno de los tres estados diferentes. Bob puede llevarlos al estado original de la partícula 1 mediante una transformación elegida de manera correspondiente, independiente del estado de la partícula 1, después de recibir a través de un canal de comunicación clásico la información sobre cuál de los resultados del estado de Bell fue obtenido por Alice. Sin embargo, se observa que incluso si se identifica solo uno de los cuatro estados de Bell, la teleportación se logra con éxito, aunque solo en un cuarto de los casos no es necesaria una transformación por parte de Bob. [18]

### 3.2.2. Criptografía y computación cuántica

Una de las aplicaciones de la teleportación cuántica, es en el campo de la computación cuántica. Un computador digital ordinario utiliza bits, que toman valores, 0 o 1, definidos, mientras que uno cuántico emplea bits cuánticos, o qubits. Los qubits pueden estar en superposiciones cuánticas de 0 y 1, lo mismo que un fotón puede estar en superposiciones de la polarización horizontal y la vertical. Al enviar un solo fotón el teletransportador cuántico

---

<sup>5</sup>No se pueden realizar copias de un estado desconocido de un sistema. (Ver [19])

básico transmite un qubit de información cuántica. Un computador cuántico puede funcionar como una superposición de muchos datos de entrada a la vez. Puede, ejecutar un algoritmo simultáneamente sobre un millón de datos de entrada utilizando solo tantos qubits como bits necesitaría un computador ordinario para ejecutar el algoritmo una sola vez sobre un solo dato de entrada. Los algoritmos que se ejecutan con computadores cuánticos pueden resolver ciertos problemas más rápido que cualquier algoritmo conocido ejecutado en un ordenador clásico. Entre esos problemas están el de encontrar un determinado elemento de una base de datos y el de obtener la factorización de números grandes, de sumo interés en el desciframiento de códigos secretos. Por ahora solo se han construido los elementos más fundamentales de los computadores cuánticos; puertas lógicas<sup>6</sup> uno o dos qubits. La construcción, de un computador cuántico aún está en trabajo. Hay que resolver el problema de la transferencia fiable de los datos cuánticos entre los diferentes procesadores o puertas lógicas, sea dentro de un solo computador o a través de redes cuánticas. La solución podría ser la teleportación cuántica. Se ha demostrado, que se puede construir un computador cuántico apropiado con tres componentes básicos: partículas entrelazadas, teletransportadores cuánticos y puertas que manejen un solo qubit por vez (ver [20]). Este resultado ofrece un método sistemático de construir puertas de dos qubits, Para construir una puerta de dos qubits con un teletransportador se debe teleportar dos qubits desde lo que entra en la puerta hasta lo que sale, por medio de pares entrelazados modificados de una manera muy determinada. Los pares entrelazados se modifican de forma tal, que la salida de la puerta reciba los qubits adecuadamente procesados. La ejecución de la lógica cuántica en dos qubits desconocidos se reduce, a preparar unos estados entrelazados predefinidos concretos y teleportarlos. [21]

La criptografía cuántica tiene su origen en una idea novedosa, Stephen Wiesner, estudiante graduado de la Universidad de Columbia en 1969. [22] Bennett y Brassard, inspirados en el esquema de Wiesner, propusieron un protocolo de distribución de claves cuánticas, este protocolo conocido es como BB84 [23], El objetivo principal del protocolo era lograr la comunicación segura entre un emisor y el correspondiente receptor. El objetivo principal de la comunicación segura convencional es el de cifrar los datos antes de la transmisión para que solo sus usuarios puedan descifrarlos. El cifrado y descifrado se realiza con una clave. Si el cifrado y descifrado de datos se realiza utilizando la misma clave, solo el emisor y el receptor de los datos deben tener acceso a la clave. El uso compartido de una clave privada es el concepto principal de criptografía de clave simétrica.

En temas de comunicación criptográfica, el remitente se identifica como Alice, el receptor como Bob y el intruso como Eve. La clave debe tener el mismo número de bits que los datos a transmitir y también debe consistir en bits completamente aleatorios que se mantienen en secreto de todos excepto el remitente y el receptor. Las teclas se usan una sola vez como se indica arriba; Tanto el remitente como el receptor deben destruir sus claves después de su uso. Alice encripta los datos que envía a Bob con bits de clave generados aleatoriamente. Bob recupera los datos encriptados con los mismos bits de clave.

Una desventaja importante de la criptografía de clave simétrica es que el emisor y el receptor

---

<sup>6</sup>Un dispositivo electrónico con una función cuyo dominio está conformado por los valores binarios 0 y 1. Suman, multiplican, niegan o afirman, incluyen o excluyen según sus propiedades lógicas. (G. Boole 1854, An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities).

deben, de alguna manera, intercambiar la clave secreta que usan. Un tercero puede interceptar la comunicación entre el remitente y el receptor y acceder a la clave, lo que comprende la seguridad de la transmisión de datos. La distribución de claves de una manera segura y eficiente sigue siendo la principal debilidad de la criptografía de clave simétrica.

La mecánica cuántica supera este inconveniente al proporcionar una forma segura de compartir una clave aleatoria entre dos partes separadas; por lo tanto la criptografía cuántica no es una técnica para encriptar y descifrar datos, sino que solo permite la distribución segura de claves privadas. Una ventaja adicional de las claves cuánticas es que el emisor y el receptor pueden verificar fácilmente si la clave ha sido alterada.

La idea de Wiesner consistía en usar las propiedades de la mecánica cuántica para crear billetes de banco, "dinero cuántico", que no se pueden falsificar. Cada nota contendría ciertas "trampas de luz", cada una de las cuales podría llenarse con un fotón polarizado al azar. Los fotones pueden polarizarse en uno de dos modos, rectilíneo (+) o diagonal (x) usando un filtro apropiado; el filtro permitiría la transmisión de un fotón a través de él solo si la polarización del fotón está alineada con el filtro. En el modo rectilíneo, solo los fotones con polarización horizontal o vertical pasan a través del filtro de polarización. En el modo diagonal, por otro lado, solo los fotones con polarización que están en un ángulo de  $45^\circ$  o  $135^\circ$  con respecto al eje horizontal podrían pasar a través del filtro de polarización. En el modo rectilíneo, orientaciones  $|$  y  $-$  representan 1 y 0, respectivamente, y en el modo diagonal, las orientaciones  $\backslash$  y  $/$  se supone que son 1 y 0, respectivamente.

Por ejemplo, suponga una nota bancaria con el número de serie 1234 y la secuencia de polarización  $\backslash - / \backslash | \backslash | -$  (no visible). Un falsificador puede copiar fácilmente el número de serie, pero la seguridad de las trampas de luz está garantizada por el principio de incertidumbre de Heisenberg que establece que en el caso de dos magnitudes físicas descritas por operadores no conmutables, el conocimiento de una excluye el conocimiento del otro [2], por lo cual están relacionadas de manera que es imposible medirlas simultáneamente. Las polarizaciones rectilíneas y diagonales constituyen un par de propiedades no conmutables. Por lo tanto, un filtro con la orientación  $|$  y  $-$  puede detectar correctamente un fotón polarizado de forma rectilínea; De manera similar, un filtro con orientación  $\backslash$  y  $/$  puede detectar un fotón polarizado de forma diagonal. Si el falsificador usa un fotón polarizado en forma diagonal (rectilínea) para detectar un fotón polarizado rectilíneo (diagonal), el resultado será aleatorio con probabilidades iguales, y el fotón perderá toda la información de su estado previo. Ahora para la secuencia de fotones en el billete de banco del ejemplo anterior, si el falsificador usa un filtro diagonal, identificará correctamente la orientación del primer fotón en la secuencia. Sin embargo, para el segundo fotón en la secuencia, el filtro diagonal perturbará su orientación como consecuencia directa del principio de incertidumbre. Existe un 50% de posibilidades de que el fotón gire hasta una orientación  $\backslash$  a  $/$ , o se bloqueará. En cualquiera de los escenarios anteriores, la medición de la orientación del fotón dará resultados erróneos, garantizando así la prevención de la falsificación de notas cuánticas.

El protocolo conocido como BB84 permite que un emisor (Alice) envíe fotones a un receptor (Bob). Alice y Bob se comunican a través de un canal cuántico unidireccional y un canal público bidireccional. Alice tiene una fuente de fotones únicos y dos filtros polarizadores, uno rectilíneo y uno diagonal. Los fotones individuales no pueden copiarse, debido al principio de no clonación (ver [19]). Alice puede transmitir fotones individuales aleatoriamente en modo



rectilíneo (+) o diagonal (X). En cada modo se usa una orientación del fotón para representar el valor lógico 0 y el otro para representar 1.

Alice genera una secuencia aleatoria de 0s y 1s. A continuación, selecciona aleatoriamente un modo de polarización, rectilíneo o diagonal, y reemplaza cada bit en la secuencia binaria con un fotón polarizado usando el modo seleccionado. Ella envía los fotones resultantes para cada bit a Bob a través del canal cuántico mientras mantiene un registro del modo de polarización y el valor lógico del fotón transmitido, Es decir, Alice transmite fotones a Bob en cuatro orientaciones diferentes  $|$ ,  $-$ ,  $\backslash$  y  $/$ .

Bob detecta el estado de cada fotón que recibe al elegir aleatoriamente uno de los modos polarizadores de los fotones. Si realiza la configuración correcta al elegir el modo de polarización utilizado por Alice para enviar un fotón particular, detectara la orientación correcta del fotón y, por lo tanto, el valor lógico correcto que representa el fotón. [24]

### 3.3. Enseñanza de la Mecánica Cuántica

Con respecto a las labores que se han llevado a cabo actualmente, referentes a la enseñanza de la mecánica cuántica, para que esta sea mas accesible a sus estudiantes, se encuentran autores como Gustavo López, el cual plantea, en su tesis de maestría: “la escuela es el lugar ideal para ir generando un cambio de paradigma en la forma en que se realiza una interpretación e intervención en el mundo”. [25] Afirmación que se encuentra fundamentada en las investigaciones de Jhonny Alexander Castrillón Pérez y que compila en: Mecánica Cuántica Fundamental, Una Propuesta Didáctica, [26] y David Z. Albert en: Quantum Mechanics and Experience, [27] con el fin de llevar a los estudiantes a reflexionar sobre el mundo y sus dinámicas desde una perspectiva no determinista o clásica, sino cuántica.

Jhonny Castrillón junto con sus colegas Olival Freire y Boris Rodriguez, mencionan la mecánica cuántica fundamental, la cual es una exposición comentada de los experimentos y conceptos fundamentales de la mecánica cuántica, que es la teoría física del dominio cuántico de fenómenos como el principio de superposición y el entrelazamiento cuántico, los cuales se proponen como el fundamento teórico de la descripción cuántica, dirigida a estudiantes de secundaria, así como a profesores en formación.

La mecánica cuántica fundamental es una propuesta que interpreta las entidades cuánticas como sistemas físicos reales plenamente descritos por vectores de estado. Ofrece una perspectiva para la mecánica cuántica, basada en conceptos fundamentales como la superposición o el entrelazamiento cuántico, que provee los términos para plantear sus problemas como por ejemplo, el de la medición, así como para comprender sus realizaciones básicas, como las experimentales y algunas aplicaciones de interés moderno, como el de la computación cuántica. Todo esto enunciando el significado físico de los objetos matemáticos principales de la mecánica cuántica, a saber, como lo son los espacios vectoriales complejos y los operadores lineales. Abandona el estilo histórico dominante, que inaugura la mecánica cuántica con la radiación de cuerpo negro de Planck, en provecho de una historia crítica, que toma como lecciones históricas los trabajos de físicos inconformes con la interpretación estándar de la mecánica cuántica, y que puede ordenarse desde el famoso artículo EPR, pasando por los comentarios que le hizo Bohm y que encuentra en el teorema de Bell, y en los experimentos

que le siguieron, una nueva agenda para los fundamentos de la mecánica cuántica.

Por último, relaciona los dominios cuántico y clásico de fenómenos, como coexistentes aunque irreductibles. [26]

En referencia a David Z. Albert en *Quantum Mechanics and Experience* se hace una investigación acerca del desafío que ha representado, el hecho de que la física penetrase por primera vez en el átomo, y lograra cambiar las concepciones que se tenían acerca de la naturaleza, así como un nuevo intento de escribir sobre la ciencia en un estilo que es a la vez elemental y profundo. Es una introducción lúcida y autónoma a los fundamentos de la mecánica cuántica, accesible para cualquier persona que tenga una educación matemática en la escuela secundaria, y al mismo tiempo una discusión rigurosa de los avances recientes más importantes en nuestra comprensión de ese tema. [27]

## Protocolo teórico

### 4.1. Postulados de la Mecánica Cuántica Aplicados a Sistemas de dos Estados

El objetivo de hablar de los postulados de la mecánica cuántica [28], es aclarar como se utilizan los mismos en sistemas de dos estados, ya que resulta de gran interés para la teleportación de fotones, lograr que estos últimos estén en una superposición de dos estados de polarización, (horizontal y vertical). Así, con dos posibles resultados de polarización, lo que tenemos es un sistema cuántico de dos estados, al cual se le pueden aplicar los postulados de la mecánica cuántica con el fin de obtener una buena aproximación al momento de realizar una medida.

**Primer Postulado:**

En un tiempo fijo  $t_0$ , el estado de un sistema físico está definido específicamente por un ket  $|\Psi(t_0)\rangle$  que pertenece al espacio de estado de Hilbert ( $\xi$ ).

Es importante aclarar que aunque  $\xi$  es un espacio vectorial, este primer postulado implica el principio de superposición: una combinación lineal de vectores de estado, es un vector estado. Si consideramos el ejemplo de un fotón en dos posibles estados superpuestos de polarización ortogonales, siendo la polarización horizontal representada por  $|0\rangle$  y la vertical por  $|1\rangle$  se tendría representado el sistema mediante la función de onda  $|\Psi\rangle$  de la siguiente forma:

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \tag{4.1}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes de normalización que cumplen con:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{4.2}$$

**Segundo Postulado:**

Cada magnitud física medible  $A$  es descrita por un operador  $\hat{A}$  que actúa en  $\xi$ ; este operador es un observable. En el caso de la polarización del fotón, horizontal ( $|0\rangle$ ) o vertical ( $|1\rangle$ ), la magnitud física medible es esta misma, la cual se encuentra asociada al operador momento angular del espín  $\hat{S}$ .

**Tercer Postulado:**

El único posible resultado de la medida de una cantidad física  $A$ , es uno de los valores propios que corresponden al observable  $\hat{A}$ .

**Cuarto Postulado:**

Cuando la cantidad física  $A$  es medida sobre un sistema en el estado normalizado  $|\Psi\rangle$ , la probabilidad  $P(a_n)$  de obtener un valor propio no degenerado del observable correspondiente  $\hat{A}$  es:

$$P(a_n) = |\langle U_n | \Psi \rangle|^2 \quad (4.3)$$

Donde  $|U_n\rangle$  es el vector propio normalizado de  $\hat{A}$ , asociado con el valor propio de  $a_n$ .

De esta forma se obtiene para  $P(|0\rangle)$ :

$$P(|0\rangle) = |\langle 0 | \Psi \rangle|^2 = |\langle 0 | (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)|^2 = |\alpha \langle 0|0\rangle + \beta \langle 0|1\rangle|^2 = |\alpha|^2 \quad (4.4)$$

de forma análoga para  $P(|1\rangle)$ :

$$P(|1\rangle) = |\langle 1 | \Psi \rangle|^2 = |\langle 1 | (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)|^2 = |\alpha \langle 1|0\rangle + \beta \langle 1|1\rangle|^2 = |\beta|^2 \quad (4.5)$$

Donde se satisface la ecuación 4.2

**Quinto Postulado:**

Si la medida de la cantidad física  $A$  sobre el sistema en el estado  $|\Psi\rangle$  muestra como resultado  $a_n$  el estado del sistema inmediatamente después de la medición es la proyección normalizada,  $\frac{\hat{P}_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle}}$ , de  $|\Psi\rangle$  en un espacio propio asociado con  $a_n$ . Aplicando el quinto postulado, a el caso en específico de dos estados de polarización para el fotón se tiene:

$$|\Psi\rangle = \frac{\hat{P}_n (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)}{\sqrt{\langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle}} \quad (4.6)$$

Recordando que el operador proyección esta definido mediante:

$$\hat{P}_n = |a_n\rangle \langle a_n| \quad (4.7)$$

Se tiene para  $\hat{P}_0$  y con  $\langle 0 | \psi \rangle = \alpha$ :

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \langle 0 | (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)}{\sqrt{\langle \Psi | |0\rangle \langle 0 | \Psi \rangle}} = \frac{\alpha \langle 0|0\rangle |0\rangle + \beta \langle 0|1\rangle |0\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | 0 \rangle \alpha}} \quad (4.8)$$

Quedando:

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha \langle 0|0\rangle |0\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | 0 \rangle \alpha}} \quad (4.9)$$

Recordando que  $\langle \Psi | 0 \rangle = \alpha^*$  y  $\alpha^* \cdot \alpha = |\alpha|^2$ , entonces:

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha \langle 0|0\rangle |0\rangle}{|\alpha|} = \langle 0|0\rangle |0\rangle = |0\rangle \quad (4.10)$$

De forma análoga se obtiene para  $\widehat{P}_1$ :

$$|\Psi\rangle = \frac{\beta \langle 1|1\rangle |1\rangle}{|\beta|} = \langle 1|1\rangle |1\rangle = |1\rangle \quad (4.11)$$

### Sexto Postulado:

La evolución en el tiempo de un vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$  esta dado por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \widehat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (4.12)$$

Donde  $H(t)$  es llamado el operador Hamiltoniano de el sistema.

Aplicando el sexto postulado, a el caso de los dos estados de polarización para el fotón, utilizando el estado  $|0\rangle$  se tiene:

$$i\hbar \frac{d\langle 0|\Psi\rangle}{dt} = \langle 0|\widehat{H}|\Psi\rangle \quad (4.13)$$

Recordando que  $\langle 0|\psi\rangle = \alpha$  se tiene:

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \widehat{H}\alpha \quad (4.14)$$

Ahora, separando variables e integrando:

$$\int i\hbar \frac{d\alpha}{\alpha} = \int \widehat{H} dt \quad (4.15)$$

$$i\hbar \ln \alpha + c = \widehat{H}t \quad (4.16)$$

Llamando a  $c = -\ln \alpha_0$  y aplicando propiedades de logaritmos se tiene:

$$i\hbar \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) = \widehat{H}t \quad (4.17)$$

Aplicando propiedades de los logaritmos y reordenado:

$$\alpha = \alpha_0 e^{\frac{i\widehat{H}t}{\hbar}} \quad (4.18)$$

De forma análoga para el estado  $|1\rangle$  se obtiene:

$$\beta = \beta_0 e^{\frac{i\widehat{H}t}{\hbar}} \quad (4.19)$$

## 4.2. Producto Tensorial

El producto tensorial representado por  $\otimes$  es una multiplicación generalizada que cumple con la propiedad distributiva, se puede aplicar tanto a matrices como a vectores, espacios vectoriales y tensores [29]. En este caso en específico el interés es aplicarlo a espacios vectoriales de  $\xi$ .

Por definición, el espacio vectorial  $\xi$  es llamado el tensor del producto entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$ :

$$\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \quad (4.20)$$

Si está asociado con cada par de vectores.  $|\phi(1)\rangle$  perteneciente a  $\xi_1$  y  $|\psi(2)\rangle$  que pertenece a  $\xi_2$  un vector de  $\xi$  denotado por:

$$|\phi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle \quad (4.21)$$

El cual es llamado producto tensorial entre  $|\phi(1)\rangle$  y  $|\psi(2)\rangle$  y esta correspondencia satisface las siguientes propiedades:

1. Es lineal con respecto a la multiplicación por números complejos.

$$\lambda[|\phi(1)\rangle] \otimes |\psi(2)\rangle = \lambda[|\phi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle]$$

2. Es distributivo respecto a la suma de vectores.

$$|\phi(1)\rangle \otimes [|\psi_1(2)\rangle + |\psi_2(2)\rangle] = |\phi(1)\rangle \otimes |\psi_1(2)\rangle + |\phi(1)\rangle \otimes |\psi_2(2)\rangle$$

3. Cuando se elige una base en  $\xi_1$  como  $|\phi(1)\rangle$  y en  $\xi_2$  como  $|\psi(2)\rangle$ , el conjunto de vectores  $|\phi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle$  constituye una base en  $\xi$ , si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son finitos la dimensión de  $\xi$  es consecuentemente  $\xi_1 \xi_2$ .

### 4.3. Estados de Bell

Los estados de Bell son cuatro estados cuánticos máximamente entrelazados específicos, de dos qubits, estos qubits exhiben una correlación perfecta, estos estados de máximo entrelazamiento son aquellos en los que se viola altamente la desigualdad de Bell generalizada, conocida como la desigualdad CHSH, [9] la cual da límites clásicos a la correlación existente entre los qubits, correlación que no se podría explicar sin la mecánica cuántica.

Resulta ser que la correlación no puede exceder el valor 2 si se asume que la física respeta las restricciones de la teoría local de las variables ocultas, pero ciertos sistemas permitidos en la mecánica cuántica pueden alcanzar valores tan altos como  $2\sqrt{2}$ . Cuatro estados específicos de dos qubit con el valor máximo de  $2\sqrt{2}$  se designan como “Estados Bell”. Se les conoce como los cuatro estados de Bell de dos qubit máximamente entrelazados, y forman una base conveniente del espacio de Hilbert de dos qubit:

$$|B\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (4.22)$$

$$|B\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle) \quad (4.23)$$

$$|B\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (4.24)$$

$$|B\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle) \quad (4.25)$$

Donde  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$ , representan la dirección de polarización del fotón.

## 4.4. Entrelazamiento cuántico

En primer lugar se ha de definir una base dentro del espacio vectorial de Hilbert, con el fin de que se puedan efectuar las propiedades de dicho espacio vectorial; esta base será conformada por los elementos  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , y el vector  $|\Psi\rangle$  representará una partícula la cual podrá estar en los dos estados posibles  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (4.26)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos y representan la probabilidad de encontrar la partícula bien sea en el estado  $|0\rangle$  o en el estado  $|1\rangle$ , por lo cual se debe cumplir:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.27)$$

Suponga que se tienen dos partículas a descritas por:

$$|\Psi\rangle_A = a |0\rangle + b |1\rangle \quad (4.28)$$

$$|\Psi\rangle_B = a |0\rangle + b |1\rangle \quad (4.29)$$

Lo que podríamos representar también de la forma:

$$|\Psi\rangle_{AB} = (a |0\rangle + b |1\rangle) \otimes (c |0\rangle + d |1\rangle) \quad (4.30)$$

Donde el operador  $\otimes$  representa el producto tensorial entre 4.28 y 4.29 obteniendo:

$$|\Psi\rangle_{AB} = ac(|0\rangle \otimes |0\rangle) + ad(|0\rangle \otimes |1\rangle) + bc(|1\rangle \otimes |0\rangle) + bd(|1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (4.31)$$

O lo que es lo mismo:

$$|\Psi\rangle_{AB} = ac |00\rangle + ad |01\rangle + bc |10\rangle + bd |11\rangle \quad (4.32)$$

Donde la probabilidad de que al observar las dos partículas simultáneamente se encuentren en el estado 0 es  $|ac|^2$ , de encontrarlas en 1 es  $|bd|^2$ , de encontrarla primera en 0 y la segunda en 1 es de  $|ad|^2$ , y de encontrar la primera en 1 y la segunda en 0 es de  $|bc|^2$ . La suma de todas las probabilidades debe ser 1:

$$1 = |ac|^2 + |ad|^2 + |bc|^2 + |bd|^2 \quad (4.33)$$

Así pues tendríamos cuatro posibles combinaciones entre los estados de las partículas al observarlas de manera simultánea, cada una con un 25% de probabilidad de ser obtenida. Ahora suponga que se entrelazan dos partículas en el laboratorio, (ya por los métodos descritos en la sección 3.1.1), el estado de estas partículas estaría descrito por:

$$|\Psi\rangle = a |00\rangle + b |11\rangle \quad (4.34)$$

Entrelazado, quiere decir que el estado no puede expresarse como el producto de dos estados de una partícula:

$$a|00\rangle + b|11\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \quad (4.35)$$

Entonces, según 4.28 si se logra expresar un estado dado, digamos  $|\Psi\rangle$ , como el producto tensorial de otros dos estados, el estado  $|\Psi\rangle$  no sería un estado entrelazado cuánticamente. Pero, si por el contrario no se logra realizar lo dicho anteriormente, el estado efectivamente es un estado entrelazado; esto implica que aunque no se sepa, en qué estado se encuentra ninguna partícula del par entrelazado, si después de una medida sobre una de las dos partículas se obtiene 0, entonces la otra partícula también estará en 0, y si se obtiene 1, esto implica que la otra este también en 1. Podemos afirmar entonces que el par de partículas están entrelazadas.

## 4.5. Teleportación Cuántica

En principio reescribiendo las ecuaciones 4.22, 4.23, 4.24 y 4.25, de la misma forma que 4.32 y olvidándonos por un momento del factor de normalización, para facilidad en los cálculos, obtenemos:

$$|B\rangle_0 = |00\rangle + |11\rangle \quad (4.36)$$

$$|B\rangle_1 = |10\rangle + |01\rangle \quad (4.37)$$

$$|B\rangle_2 = |00\rangle - |11\rangle \quad (4.38)$$

$$|B\rangle_3 = |10\rangle - |01\rangle \quad (4.39)$$

Ahora haciendo un cambio de variable:

$$|00\rangle = |B\rangle_0 + |B\rangle_2 \quad (4.40)$$

$$|01\rangle = |B\rangle_1 - |B\rangle_3 \quad (4.41)$$

$$|10\rangle = |B\rangle_1 + |B\rangle_3 \quad (4.42)$$

$$|11\rangle = |B\rangle_0 - |B\rangle_2 \quad (4.43)$$

Ahora se tiene un sistema en base de los estados de Bell, si se tratase entonces, 0 y 1 de dos qubits, se puede hacer la pregunta de en qué estado (de Bell) se encuentran estos qubits. De igual forma si se tiene un estado de 3 qubits entrelazados(ver [30]):

$$|\Psi\rangle = |001\rangle - |010\rangle \quad (4.44)$$

o bien:



$$|\Psi\rangle = |00\rangle \otimes |1\rangle + |01\rangle \otimes |0\rangle = (|B\rangle_0 + |B\rangle_2) \otimes |1\rangle + (|B\rangle_1 - |B\rangle_3) \otimes |0\rangle \quad (4.45)$$

si operamos:

$$|\Psi\rangle = |B\rangle_0 \otimes |1\rangle + |B\rangle_2 \otimes |1\rangle + |B\rangle_1 \otimes |0\rangle + |B\rangle_3 \otimes |0\rangle \quad (4.46)$$

Se observa en 4.44, que existe una probabilidad igual, de que haciendo una medida sobre los dos primeros qubits, se encuentre cualquiera de los estados de Bell, pero entonces es claro también que si al medir los dos primeros qubits obtenemos, por ejemplo, el estado  $|B\rangle_0$  entonces el tercer qubit, deberá estar necesariamente en el estado  $|1\rangle$ , y de igual manera, si se realiza la medición sobre el tercer qubit, y este fuese 1, no hay más opción si no que los dos primeros qubits estén en el estado  $|B\rangle_0$  o  $|B\rangle_2$ . De igual forma se puede llegar a la deducción del estado de los dos primeros qubits, o del tercero con el mismo razonamiento, para cualquier medida obtenida.

Ahora bien, supongamos que tenemos 3 qubits, A, B y C, el qubit A en un estado desconocido dado por:

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (4.47)$$

(Recuerde que a y b son parámetros de normalización), y los qubits C y B, en el estado  $|B_0\rangle$ :

$$|B\rangle_0 = |00\rangle + |11\rangle \quad (4.48)$$

Ahora si se realiza  $|\Psi\rangle \otimes |B\rangle_0$  se obtiene:

$$|\Psi\rangle = a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle \quad (4.49)$$

Reescribiendo 4.49

$$|\Psi\rangle = (|B\rangle_0 + |B\rangle_2) \otimes |0\rangle + (|B\rangle_1 - |B\rangle_3) \otimes |1\rangle + (|B\rangle_1 + |B\rangle_3) \otimes |0\rangle + (|B\rangle_0 - |B\rangle_2) \otimes |1\rangle \quad (4.50)$$

o bien:

$$|\Psi\rangle = |B\rangle_0 \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) + |B\rangle_1 \otimes (b|0\rangle + a|1\rangle) + |B\rangle_2 \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle) + |B\rangle_3 \otimes (b|0\rangle - a|1\rangle) \quad (4.51)$$

Ahora si se realizara la medición de los qubits A y C de manera simultánea, existen cuatro posibilidades:  $|B\rangle_0$ ,  $|B\rangle_1$ ,  $|B\rangle_2$ ,  $|B\rangle_3$ , cada una con un 25 % de probabilidad de ser obtenida. Si se llegase a realizar la medición y esta arrojara como resultado el estado  $|B\rangle_0$ , el qubit B deberá tener el estado  $a|0\rangle + b|1\rangle$  que es justamente el estado denotado en 4.47, el cual pertenecía al qubit A, es decir el estado se teletransporta de A, a B, de manera instantánea. Y el proceso de teleportación cuántica habrá sido un éxito, esto sucederá en un 25 % de las mediciones hechas sobre los qubits A y C, e independientemente de la distancia en que se encuentren alejados los qubits A y B, la teleportación será un éxito.

### 4.5.1. Puertas cuánticas

Una puerta cuántica (o puerta lógica cuántica) es un circuito cuántico básico que opera en una pequeña cantidad de qubits. Las puertas lógicas clásicas son dispositivos electrónicos como, transistores o condensadores con una función cuyo dominio está conformado por los valores binarios 0 y 1. Suman, multiplican, niegan o afirman, incluyen o excluyen según sus propiedades lógicas. En el caso cuántico, las puertas lógicas deben representarse mediante operadores unitarios  $\mathbf{U}$  que se consiguen en la práctica con interacciones reversibles entre los elementos cuánticos. En el caso cuántico no sólo se actúa sobre dos posibles estados del bit, sino sobre los infinitos estados del qubit.

Las puertas cuánticas usualmente se representan como matrices. Una puerta que actúa en  $k$  qubits está representada por una matriz unitaria de  $2^k \times 2^k$ . El número de qubits en la entrada y salida de la puerta debe ser igual. [31] La acción de la puerta en un estado cuántico específico se encuentra multiplicando el vector que representa el estado por la matriz que representa la puerta.

- Puerta Pauli X; es el equivalente cuántico de la puerta NOT, Iguala una rotación de la esfera Bloch<sup>1</sup> alrededor del eje X por 180°. Convierte de  $|0\rangle$  a  $|1\rangle$  y de  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

- Puerta Pauli Y; actúa en un solo qubit. Iguala una rotación alrededor del eje Y de la esfera de Bloch en 90°. Convierte de  $|0\rangle$  a  $i|1\rangle$  y de  $|1\rangle$  a  $-i|0\rangle$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

- Puerta Pauli Z; actúa en un solo qubit. Se equipara a una rotación alrededor del eje Z de la esfera Bloch por 180°. Deja el estado  $|0\rangle$  sin cambios y transforma de  $|1\rangle$  a  $|-1\rangle$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Ahora bien mediante el uso de estas compuertas cuánticas se podrá realizar un cambio en el 75 % de los casos en los cuales no se obtiene un resultado favorable de transmisión del

---

<sup>1</sup>la esfera de Bloch es una representación geométrica del espacio de estado puro de un sistema mecánico cuántico de dos niveles (qubit).

estado de A, a B en la teleportación cuántica,<sup>2</sup> es decir, debido a que existen cuatro posibles estados de Bell y solo en el que al medir los qubits A y C de forma simultánea arroja como resultado el estado  $|B\rangle_0$ , (que es, el que con certeza me dice que el estado A se transmitió a B de forma correcta).

Por lo cual al hacerse la medición simultánea en A y C, y obtener por ejemplo un estado  $|B\rangle_1$ , lo que se debe hacer seguido a esto es informar, (por un medio convencional) al lugar donde se encuentra el qubit B, e indicar la compuerta cuántica requerida, para que sea aplicada y así, finalmente se transmita el estado A, a B. Se establece entonces:

- Si se obtiene un  $|B\rangle_1$

$$b|0\rangle + a|1\rangle \xrightarrow{U_x} b|1\rangle + a|0\rangle \quad (4.55)$$

- Si se obtiene un  $|B\rangle_2$

$$a|0\rangle - b|1\rangle \xrightarrow{U_x} a|0\rangle + b|1\rangle \quad (4.56)$$

- Si se obtiene un  $|B\rangle_3$

$$b|0\rangle - a|1\rangle \xrightarrow{U_x} b|0\rangle + a|1\rangle \xrightarrow{U_x} b|1\rangle + a|0\rangle \quad (4.57)$$

#### 4.5.2. Esquema de la teleportación cuántica.

En la teleportación cuántica se requiere que Alice, siendo la emisora, y Bob, que es el receptor 4.1, compartan un par de partículas entrelazadas, A y B. Alice, además, tiene una partícula en estado cuántico desconocido X, ella mide el estado de Bell de las partículas A y X, y obtiene uno de los 4 posibles estados, el cual comunicara a Bob, por medios convencionales. Según cual sea el resultado de su medición, Bob aplicara una puerta cuántica o no a su partícula B, bien sea de una forma o de la otra, el obtendrá una copia perfecta de la partícula X.

Alice tiene un sistema cuántico, la partícula 1, en un estado inicial que quiere teleportar a Bob. Alice y Bob también comparten un par auxiliar entrelazado de partículas 2 y 3 emitidas por una fuente de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR). Alice realiza una medición conjunta de estado de Bell (BSM) en la partícula inicial y uno de los auxiliares, proyectándolas también en un estado enredado. Después de haber enviado el resultado de su medición como información

---

<sup>2</sup>Ver Cap. 4.3

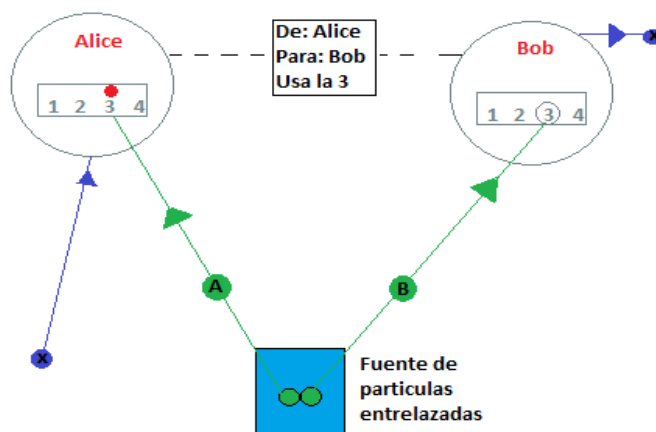


Fig 4.1: Esquema de la descripción de la teleportación.

clásica a Bob, puede aplicar una puerta cuántica ( $U$ ) en la otra partícula auxiliar, lo que resulta en estar en el estado de la partícula original. Un haz de fotones incide y pasa a través de un cristal no lineal el cual crea el par complementario de fotones 2 y 3. Después de la retroreflexión durante su segundo paso a través del cristal, el haz de fotones crea otro par entrelazado, uno de los cuales se preparará en el estado inicial del fotón 1 para teleportar, y el otro sirve como un disparador que indica que está en marcha un fotón para ser teleportado. Alice luego busca coincidencias después de un divisor de haz donde se superponen el fotón inicial y uno de los auxiliares. Bob, después de recibir la información clásica de que Alice obtuvo un recuento de coincidencias en los detectores  $f1$  y  $f2$  que identifican el estado de Bell  $|\Psi\rangle_{12}$ , sabe que su fotón 3 está en el estado inicial del fotón 1, que luego puede verificar usando el análisis de polarización con el divisor de haz polarizador PBS y los detectores  $d1$  y  $d2$ . El detector  $p$  proporciona la información de que el fotón 1 está en marcha 4.2. [18]

### 4.5.3. Fluorescencia Paramétrica

La fluorescencia paramétrica, es el nombre que se le da al método de creación de pares entrelazados, en la figura 4.24 a) se observa la doble refracción producida por el cristal no lineal, (usualmente calcita). Y en la figura 4.24 b) se observan las direcciones de la polarización de los fotones entrelazados, los cuales se encuentran a ambos lados del bombeo, y corresponden a las intersecciones del cono de fotones idler, polarizado horizontalmente, con el de fotones signal, polarizados verticalmente.

El cristal no lineal o Birrefringente, es el creador del par entrelazado; la mayoría de los fotones pasan a través de él, pero en algunas ocasiones sucede algo particular: un fotón incidente se divide en dos fotones como se observa en la figura 4.25, además estos fotones estarán polarizados ortogonalmente, uno respecto al otro.

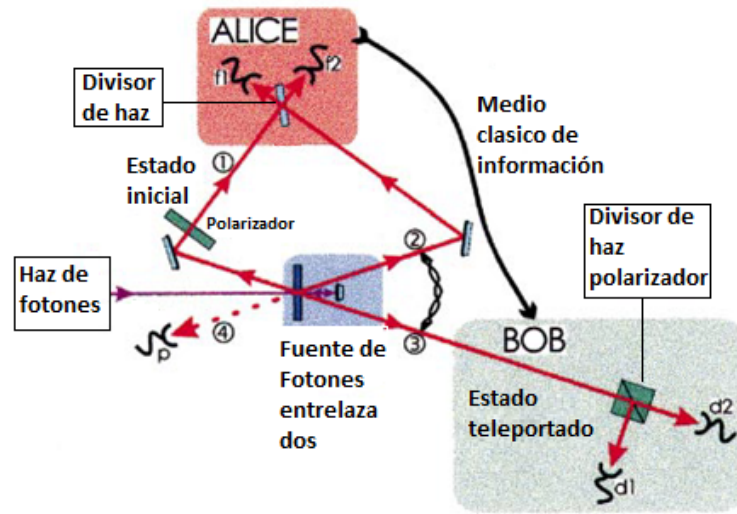


Fig 4.2: Esquema general de la teleportación.

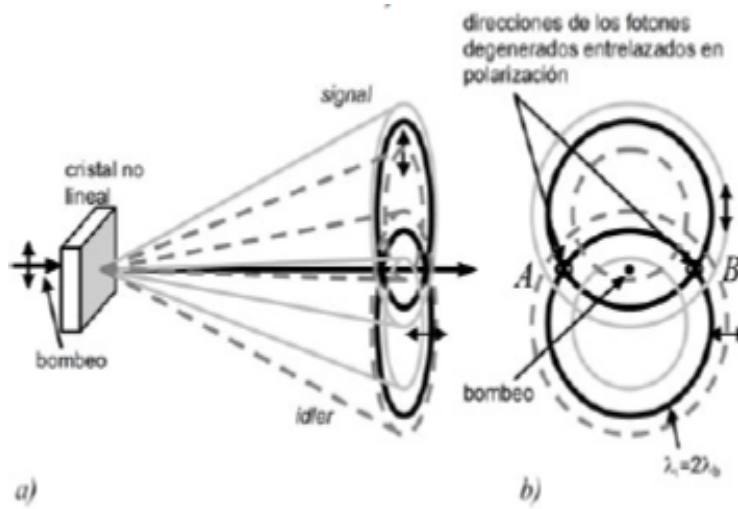


Fig 4.3: Generación de la fluorescencia paramétrica.

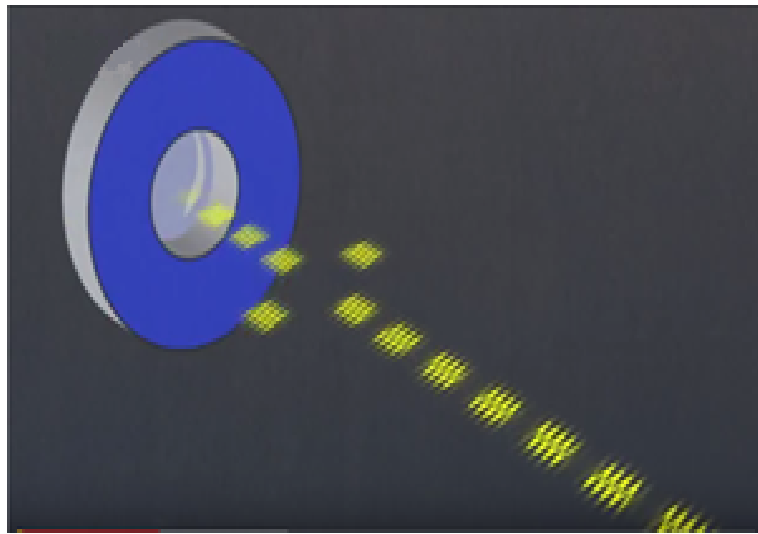


Fig 4.4: Paso de fotones por el cristal no lineal.

## Conclusiones

Después de ya más de 80 años de haberse publicado el artículo: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Bajo la autoría de A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, en el cual la intención, menos que provocar un interés desbordado por avalar las propiedades del entrelazamiento cuántico, a lo que Einstein denominó “spooky action at a distance”, (acción fantasmal a distancia), lo que se quería era mostrar como la física cuántica caía en contradicciones con el principio de incertidumbre y refutaba teorías como el principio de localidad y el de la covarianza de Lorentz, hasta ese momento inviolables, lo que menos se imaginaban sus autores era lo que desencadenaría su artículo, con respecto al estudio por parte de algunos físicos y genios de la informática, de las aplicaciones que esta “acción fantasmal” tendría en un futuro, desde lo que se denominó dinero cuántico, por S. Wiesner. En su manuscrito inédito Conjugate coding cerca de 1970, pasando por la criptografía cuántica, y llegando hoy en día a computadores cuánticos y teleportación, algo que pareció durante mucho tiempo solo posible en la ciencia ficción. Hoy en día, aunque se sigue trabajando en ello, muestra un futuro prometedor respecto a los avances y más aplicaciones que se le encuentra al entrelazamiento cuántico, uno de los fenómenos más curiosos, del que nos habla la física cuántica.

Aun, sin tantos ejemplos tangibles dentro de la física cuántica, es evidente que el entrelazamiento cuántico, se escapa a ser parte de este grupo, debido a sus aplicaciones ya mencionadas y que podrían cautivar inclusive a cualquier tipo de público, y atraer a más personas a los dominios del estudio de la física, siendo estas aplicaciones, precisamente, la opción alternativa para enseñar, temas claves de la mecánica cuántica, como lo es el entrelazamiento cuántico.

Así, en definitiva, la Teleportación de Fotones, se muestra como un tema interesante y de gran poder cautivador, para los estudiantes de física, y/o carreras afines, para los cuales en muchas ocasiones se les dificulta comprender, palabras como el espín o la función de onda de un fotón, o inclusive principios básicos de la mecánica cuántica como el de superposición o incertidumbre, dificultades que si se logran vencer, permitirán un gran interés en la enseñanza y aprendizaje de la física cuántica.

# Bibliografía

- [1] Penrose, R. (1991) *La nueva mente del emperador*, Mondadori, España.(208)
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10):777-780.
- [3] D. Bohm. (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables I. *Physical Review*, 85(2):166-179.
- [4] D. Bohm. (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables II. *Physical Review*, 85(2):180-193.
- [5] D. Bohm, Y. Aharonov. (1957). Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review*, 108(4):1070-1076.
- [6] D. Bohm, Y. Aharonov. (1957). Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review*, 108(4): page 1075.
- [7] J. Bell. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics* 1, 195-200.
- [8] A. Aspect, P Grangier, and G. Roger. (1981). Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, *Physical Review*, 47(7):460-463.
- [9] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt. (1969). proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review*, 23(15):880
- [10] A. Aspect, P Grangier, and G. Roger. (1982). Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities, *Physical Review*, 49(2):92-94
- [11] A. Aspect, J Dalibard, and G. Roger. (1982). Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers, *Physical Review*, 49(25):1805-1087.
- [12] Williams, C. Clearwater, S. (2008) *Explorations in Quantum Computing*. Segunda edición. Springer Verlag. Estados Unidos. Page 184



- 
- [13] Williams, C. Clearwater, S. (2008) Explorations in Quantum Computing. Segunda edición. Springer Verlag. Estados Unidos. Pages 188-9
- [14] D. Dehlinger and M. W. Mitchell. (2002). Entangled photon apparatus for the undergraduate laboratory. *Am. J. Phys.* *70(9):898-902*
- [15] M.G. Mingolla, C.T. Schmiegelow, M.A. Larotonda. (2009). fuente de pares de fotones entrelazados en polarización polarization-entangled photon pair source, *ANALES AFA*, *21:45-50*
- [16] Williams, C. Clearwater, S. (2008) Explorations in Quantum Computing. Segunda edición. Springer Verlag. Estados Unidos. Pages 183-5
- [17] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. (1993). Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Physical Review*, *70(13):1895-1899*
- [18] D. Bouwmeester, Jian-Wei Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger. (1997) Experimental quantum teleportation, *Nature* *390:575-579*
- [19] W. K. Wootters and W. H. Zurek. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature* *299:802-803*.
- [20] D. Gottesman, Isaac L. Chuang. (1999). Quantum Teleportation is a Universal Computational Primitive, *Nature* *402:390-393*.
- [21] A. Zeilinger. (2003) Teletransporte Cuántico. Revista Temas IyC, Fenómenos cuánticos No. 31:46-54
- [22] S. Wiesner. (1983) Conjugate coding, manuscript written circa 1970 unpublished until it appeared in *Sigact News*, *15(1): 78-88*.
- [23] C. H. Bennett and G. Brassard. (1984). Quantum Cryptography: public key distribution and coin tossing, International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, pages 175-179.
- [24] Parag K. Lala. (2014). An Efficient Key Distribution Protocol Based on BB84, *American Journal of Computing Research Repository*, *2(2):33-37*
- [25] G. López, Enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela media a partir del concepto de superposición. Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.
- [26] J. Castrillón, O. Freire, B. Rodriguez, (2014) Mecánica cuántica fundamental: Una Propuesta Didáctica, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *36(1):1505*
- [27] D. Albert, (1994). Quantum Mechanics and Experience. Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.

- 
- [28] C. Cohen-Tannoudji, (1991) Quantum Mechanics. Primera edición. Wiley. Estados Unidos. Pages 212-225
- [29] Cohen-Tannoudji, C. (1991) Quantum Mechanics. Primera edición. Wiley. Estados Unidos. Page 154
- [30] D. M. Greengerber, M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger. (1990) Bell's theorem without inequality, *Am. J. Phys.* 58:1131-1143.
- [31] D. Deutsh, Quantum computational networks. (1989). *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 425:73-90López, G. (2014).

### Lecturas Adicionales

- Feynman, R. (2000) Física (vol III): Mecánica Cuántica. S. A. Alhambra Mexicana. México.
- Berman, G. Doolen, G. Mainieri, R. (1998) Introduction to Quantum Computers. World Scientific. Singapur.
- Cohen-Tannoudji, C. (1991) Quantum Mechanics. Primera edición. Wiley. Estados Unidos. (108-163).
- Campos, D. (1989) Teoría de sistemas cuánticos. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Bogotá. (9-118).
- Neumann, J. (1932) Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Primera edición. Princeton University Press. Estados Unidos.
- N. Gisin, H. Bechmann-Pasquinucci. (1998). Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for n qubits, *Physics Letters A* 246:1-6.
- U. A. Aceves Rodriguez. (2016). Desigualdades de Bell: un experimento sencillo para licenciatura, *Revista Mexicana de Física E* 62:73-77.