Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Una aproximación a los polinomios casi-ortogonales

Miguel Antonio Monserrate Sepúlveda

Bogotá, Colombia
2020

Miguel Antonio Monserrate Sepúlveda

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Una aproximación a los polinomios casi-ortogonales

Director:
Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Codirector:
Luis Oriol Mora Valbuena

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de **Matemático**

Bogotá, Colombia
2020

Dedicado a mis padres.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mis padres por su paciencia, apoyo y comprensión a lo largo de mi vida y en particular este pregrado, por brindarme la mayor comodidad posible y lo necesario para poder estudiar y mantener mi concentración exclusivamente en el estudio, por motivarme y darme ánimos de seguir adelante y por mostrarme día a día que con esfuerzo todo es posible. Ustedes han sido y serán mi mayor inspiración y espero poder seguir dedicando a ustedes más logros en mi vida.

Agradezco en segundo lugar al profesor Luis Oriol Mora Valbuena, por la confianza que depositó en mi cuando le pregunté si podía dirigir mi trabajo de grado, por su dedicación y tiempo en la realización de este trabajo. Le estaré por siempre agradecido.

Agradezco en tercer lugar a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por brindarme los espacios y las herramientas para poder adquirir conocimiento y poder culminar el objetivo del pregrado, y a todos los profesores que me formaron en esta etapa de mi vida.

Agradezco en último lugar a mis compañeros de pregrado por brindarme su amistad, me quedará en la memoria los buenos recuerdos y sin ustedes mi transito por este pregrado hubiera sido solitario y aburrido.

Resumen

El propósito de este trabajo es analizar el artículo "*On quasi-orthogonal polynomials*" escrito por David Dickinson. Para esto, en primer lugar se establecen unas bases teóricas que sirven como herramientas para poder dar un buen desarrollo al trabajo. Seguido a esto se enuncia la teoría general de polinomios ortogonales y se muestra que dada una sucesión de polinomios ortogonales se cumple una relación de 3 términos, así como un caso particular en el que los polinomios ortogonales tienen coeficientes reales. Por último se presenta una definición general de polinomios casi-ortogonales, dos teoremas de condición necesaria y suficiente que dejan ver la fuerte relación que existe entre polinomios ortogonales y polinomios casi-ortogonales, un tercer teorema de condición necesaria y suficiente sobre polinomios casi-ortogonales, y como ejemplo que los polinomios de Sor Celine son casi-ortogonales.

Palabras clave: polinomios ortogonales, polinomios casi-ortogonales, funciones hipergeométricas generalizadas, símbolos de Pochhammer, relación de recurrencia, polinomios de Sor Celine.

Abstract

The purpose of this work is to analyze the article "*On quasi-orthogonal polynomials*" written by David Dickinson. For this, in the first place some theoretical bases are established that serve as tools to be able to give a good development to the work. Following this the general theory of orthogonal polynomials is stated and it is shown that given a sequence of orthogonal polynomials a relationship of 3 terms is fulfilled, as well as a particular case in which orthogonal polynomials have real coefficients. Finally, a general definition of quasi-orthogonal polynomials is presented, two necessary and sufficient condition theorems that show the strong relationship that exists between orthogonal polynomials and quasi-orthogonal polynomials, a third necessary and sufficient condition theorem about quasi-orthogonal polynomials, and as an example that Sister Celine's polynomials are quasi-orthogonal.

Keywords: orthogonal polynomials, quasi-orthogonal polynomials, generalized hypergeometric functions, Pochhammer symbols, recurrence relation, Sister Celine's polynomials.

Introducción

Según Theodore Chihara los polinomios ortogonales aparecieron por primera vez en la obra de Legendre "*Sur l'attraction des Sphéroïdes homogènes*" sobre movimiento planetario, y que, como resultado de la revolución computacional y el incremento en la actividad de investigación en teoría de aproximación y análisis numérico, el interés en estos ha revivido en los últimos años. De igual forma Gabor Szegö considera que los últimos años han sido de gran progreso en el campo de los polinomios ortogonales, los cuales están conectados con las funciones trigonométricas, hipergeométricas, Bessel y funciones elípticas, también están relacionados a la teoría de fracciones continuas, problemas de interpolación y cuadratura mecánica, y aparecen en ocasiones en la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales. Recientemente, algunos de estos polinomios han mostrado ser de importancia en mecánica cuántica y matemática estadística.

Dada la trascendencia de los polinomios ortogonales surge la motivación para tratar a estos en este trabajo de grado. Por consiguiente se escogió el artículo [6] realizado por David Dickinson "*on quasi-orthogonal polynomials*". Este artículo presenta dos teoremas de condición necesaria y suficiente que muestran la fuerte relación que existe entre polinomios ortogonales y polinomios casi-ortogonales.

Las dificultades que se presentaron al momento de leer el artículo fueron, en primera medida, que este emplea definiciones, teoremas, relaciones de recurrencia y teorías desconocidas y el autor soporta su artículo en base a estas, así como el entender en algunas ocasiones la notación que se emplea en el artículo. También se presentó la dificultad de dar argumentos sólidos a sus deducciones, que por la naturaleza del medio en donde el autor publica el artículo, deben ser de descripción limitada.

Es así que se decidió que el objetivo general de este trabajo es analizar el artículo [6] y por tanto los objetivos específicos que se plantean para llevar a cabo esto son:

- Definir bases teóricas que sirvan como herramientas para poder hacer un buen análisis del artículo.
- Enunciar la teoría general de polinomios ortogonales y funciones especiales, así como algunos resultados de estas.
- Mostrar en detalle las cuestiones que trata el artículo.

Para llevar a cabo estos objetivos específicos, en el año 2019 el profesor Luis Oriol Mora Valbuena realizó un seminario en el cual discutimos y tratamos temas de la teoría general de polinomios ortogonales. También se consultó diferentes fuentes bibliográficas incluyendo las fuentes que sustentan el artículo, con el fin de poder profundizar en la esencia del artículo y lograr así un desarrollo completo, ordenado y veraz del mismo. En el proceso de realización de este trabajo se presentaron preguntas y problemas con respecto de los temas y a las demostraciones que iban surgiendo, para lo cual se establecieron reuniones en promedio cada 10 días para su estudio, así como también para la revisión de este trabajo.

Los resultados de este trabajo se presentan en 3 capítulos. En el capítulo 1 se presentan unos preliminares con el propósito de desarrollar el primer objetivo específico, y el cual está dividido en 3 secciones; en la primera sección se encuentran preliminares en álgebra, en la segunda sección se encuentran preliminares en análisis y en la tercera sección se encuentran preliminares en teoría de integración. En el capítulo 2 se encuentra la teoría básica con el fin de dar desarrollo al segundo objetivo específico y el cual está dividido en 2 secciones; en la sección 1 se encuentra la teoría básica de polinomios ortogonales, se establecen definiciones, propiedades básicas de los polinomios ortogonales y algunos resultados propios de esta teoría, y en la sección 2 se encuentra la teoría de funciones hipergeométricas generalizadas, se establecen definiciones para una función hipergeométrica, radio de convergencia, la ecuación diferencial para la cual dicha función es solución, para después tratar las funciones hipergeométricas generalizadas, su definición, algunos resultados y unos ejemplos particulares de estas funciones. En el capítulo 3 se encuentra la teoría de polinomios casi-ortogonales con el fin de desarrollar el tercer objetivo específico y el cual está dividido en tres secciones; en la sección 1 se encuentra la definición de que es que una sucesión de polinomios sea casi-ortogonal, en la sección 2 se encuentran los resultados que presenta el artículo, y en la sección 3 se encuentra un ejemplo de una sucesión de polinomios casi-ortogonal.

Contenido

1 Preliminares

1.1. Álgebra

1.1.1. Espacio vectorial

En esta subsección se encuentran consignados algunos conceptos sobre espacios vectoriales tomados del libro [11, p.50-55], que aún siendo este un libro de análisis funcional los presenta de manera clara.

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial)**.** *Un espacio vectorial sobre un campo K (también llamado K-espacio vectorial) es un conjunto no vacío X de elementos (llamados vectores) junto con dos operaciones. Estas operaciones son llamadas suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares definidas de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rl|rl} + : X \times X & \longrightarrow X & \cdot : K \times X & \longrightarrow X \\ (x,y) & \longmapsto +(x,y) = x+y & (\alpha, x) & \longmapsto \cdot(\alpha, x) = \alpha \cdot x, \end{array}$$

tal que para todo $x, y, z \in X$ y para todo $\alpha, \beta \in K$:

(E1) $x + y = y + x$.

(E2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(E3) *Existe un único elemento llamado $0 \in X$, tal que para todo $x \in X$,*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(E4) *Para todo elemento $x \in X$, existe un único elemento llamado $-x \in X$ tal que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(E5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(E6) $1x = x$.

(E7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(E8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Definición 1.1.2 (Subespacio vectorial)**.** *Sea X un K-espacio vectorial y $Y \subseteq X$ tal que $Y \neq \emptyset$. Se dice que Y es un subespacio vectorial de X si para todo $y_1, y_2 \in Y$, y $\alpha, \beta \in K$ se tiene que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Un subespacio especial de X es el subespacio impropio no vacío $Y = X$. Cualquier otro subespacio de $X (\neq \{0\})$ es llamado propio.*

Definición 1.1.3 (Combinación lineal)**.** *Una combinación lineal de vectores* $x_1, ..., x_r$ *de un* K*-espacio vectorial* X *es una expresión de la forma:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r,$$

en donde $\alpha_1, ...\alpha_r \in K$*.*

Definición 1.1.4 (Generado)**.** *Sea* X *un* K*-espacio vectorial y* $M \subset X$ *donde* $M \neq \emptyset$*. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de* M *es llamado el generado de* M*, y se nota como* $\text{span}M$*.*

Definición 1.1.5 (Independencia linea/Dependencia lineal)**.** *Sea* X *un* K*-espacio vectorial y* $M \subset X$ *un conjunto de vectores* $x_1, ..., x_r$ *de* X*, donde* $r \geq 1$*, entonces para* $\alpha_1, ...\alpha_r \in K$ *la ecuación*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r = 0,$$

- *Define la independencia lineal del conjunto* M *si la única* r*-tupla de escalares que mantiene la ecuación es* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$*. Un subconjunto arbitrario* M *de* X *es linealmente independiente si todo subconjunto finito no vacío de* M *es linealmente independiente.*

- *Define la dependencia lineal del conjunto* M *si existe al menos una* r*-tupla de escalares* $\alpha_1, ...\alpha_r$ *en donde no todos son iguales a* 0 *y mantiene la ecuación.* M *es linealmente dependiente si no es linealmente independiente.*

Definición 1.1.6 (Dimensión finita/infinita de un espacio vectorial)**.** *Sea* X *un* K*-espacio vectorial. Se dice que* X *es un* K*-espacio vectorial de dimensión finita si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* X *contiene un conjunto linealmente independiente de* n *vectores, pero cualquier conjunto con* $n + 1$ *o más vectores de* X *es lineamlente dependiente. A* n *se le llama la dimensión de* X*, y se nota como* $n = \text{dim}X$*. Si* X *no es de dimensión finita, entonces se dice que* X *es de dimensión infinita.*

Definición 1.1.7 (Base de Hamel)**.** *Sea* X *un* K*-espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita, y* B *un subconjunto linealmente independiente de vectores de* X *tal que* $\text{span}B = X$*, entonces* B *recibe el nombre de base(o base de Hamel) para* X*. Y por tanto, si* B *es una base para* X*, entonces cualquier vector* $x \in X$ *diferente del vector* 0 *tiene una única representación como una combinación lineal de los elementos de* B *con escalares diferentes de cero como coeficientes.*

Definición 1.1.8 (Dimensión de un subespacio)**.** *Sea* X *un* K*-espacio vectorial de dimensión* n*. Entonces cualquier subespacio propio* Y *de* X *tiene dimensión menor o igual que* n*.*

1.1.2. Operador lineal

En esta subsección se encuentran consignados algunos conceptos sobre operadores lineales tomados del libro [11, p.82], [14, p.7] y un teorema muy importante sobre existencia y unicidad de operadores lineales tomado del libro [10, p.561].

Definición 1.1.9 (Operador lineal). *Un operador lineal T es una función tal que:*

a) *$Dom(T)$ es un K-espacio vectorial y el $Ran(T)$ está contenido en algún $K-$espacio vectorial.*

b) *Para todo $x, y \in Dom(T)$ y para todo $\alpha \in K$:*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y).$$

Nota 1.1.1. *En la literatura, la anterior definición se presenta también con el nombre de transformación lineal, función lineal.*

Definición 1.1.10 (Funcional lineal). *Un funcional linea f es un operador lineal tal que $Dom(f)$ es un $K-$espacio vectorial y $Ran(f)$ está contenido en K.*

Teorema 1.1.1 (Existencia y unicidad de las transformaciones lineales). *Sean V, W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para V y $A = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ una colección de n vectores en W. Entonces existe una única transformación lineal*

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow W \\ v_i &\longmapsto T(v_i) = w_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

1.1.3. K[x]

En esta subsección se encuentran algunos conceptos sobre grupos, anillos, y en particular de este último se presenta el anillo de polinomios con constantes en un campo de escalares K. Las definiciones fueron tomadas de [9, p.37-39,p.167,p.172,p.199-200]. También se presentan dos teoremas que serán necesarios para abordar el capítulo 2.

Definición 1.1.11 (Grupo). *Un grupo $(G, *)$ es un conjunto G junto con una operación binaria definida así*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto *(a, b) = a * b, \end{aligned}$$

tal que satisface los siguientes axiomas para todo $a, b, c \in G$:

(G1) $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(G2) *Existe un único elemento llamado* $e \in G$*, tal que para todo* $a \in G$*,*

$$a * e = e * a = a.$$

(G3) *Para todo elemento* $a \in X$*, existe un único elemento llamado* $a' \in G$ *tal que*

$$a * a' = a' * a = e.$$

Un grupo G *es abeliano si, ademas de los axiomas anteriores se cumple que*

(G4) $a * b = b * a$.

Definición 1.1.12 (Anillo)**.** *Un Anillo* $(R, +, \cdot)$ *es un conjunto* R *junto con dos operaciones binarias llamadas* $+$ *y* $\cdot$*, llamadas suma y multiplicación definidas en* R *tal que las siguientes propiedades se satisfacen:*

(R1) $(R, +)$ *es un grupo abeliano.*

(R2) *La multiplicación es asociativa.*

(R3) *Para todo* $a, b, c \in R$ *se mantienen:*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Definición 1.1.13. *Un anillo en el cual la multiplicación es conmutativa es llamado un anillo conmutativo. Un anillo con una identidad multiplicativa es un anillo con unidad; el elemento llamado identidad multiplicativa, notado como 1 es llamado "unidad".*

Definición 1.1.14 (Anillo de polinomios)**.** *Sea* R *un anillo. Un polinomio* $f(x)$ *con coeficientes en* R *es una suma formal infinita*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...,$$

donde $a_i \in R$ *y los* $a_i = 0$ *para todos los* i*, excepto para un número finito de valores de* i*. Los* a_i *son los coeficientes de* $f(x)$*. Si para algunos* $i \geq 0$ *es verdad que* $a_i \neq 0$*, el más grande de estos* i *es el grado del polinomio* $f(x)$*.*

Teorema 1.1.2. *Sea $f(x), g(x) \in R[x]$ tal que*

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n + ...,$$

si se define la suma de polinomios así

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n + ... \textit{ donde } c_n = a_n + b_n,$$

y el producto de polinomios así

$$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + ... + d_nx^n + ... \textit{ donde } d_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}.$$

Entonces el conjunto $R[x]$ de todos los polinomios con indeterminada x con coeficientes en R es un anillo bajo las operaciones presentadas anteriormente. Si R es conmutativo, también lo es $R[x]$, y si R tiene unidad $1 \neq 0$, entonces 1 es también una unidad para $R[X]$

Teorema 1.1.3 (Teorema fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio con coeficientes complejos y cuyo grado n sea mayor a 1 tiene exactamente n raíces.*

Teorema 1.1.4. *Si M es un K-espacio vectorial, entonces $M[x]$ es un espacio vectorial.*

Teorema 1.1.5. *Si una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sobre un conjunto infinito cumple que el grado de cada $P_n(x)$ es precisamente n, entonces esta sucesión de polinomios es una base de Hamel para $\mathbb{C}[x]$.*

Demostración. De la Definición 1.1.5 se debe ver que cualquier subconjunto de la sucesión es linealmente independiente, y de la Definición 1.1.7 que el generado de la sucesión de polinomios es $\mathbb{C}[x]$. Sea $W = \{P_{n_1}(x), P_{n_2}(x), \cdots, P_{n_h}(x)\}$ el conjunto que consta de h polinomios distintos y arbitrariamente tomados de la sucesión de polinomios, entonces la parte derecha de la ecuación

$$0 = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i P_{n_i}(x) \tag{1.1}$$

es un polinomio distinto del polinomio constante 0 si todos excepto un número finito de α_i son diferentes de cero, y tiene grado $m = \max_{i=1,2,\cdots,h}\{n_i : \alpha_i \neq 0\}$, y por el Teorema 1.1.3

tiene exactamente m raíces, luego este polinomio de grado m es distinto de cero excepto en dichos m valores, y por tanto, salvo estos valores, la ecuación (1.1) se cumple si, y solamente si, $\alpha_i = 0$, para $i = 1, 2, \cdots, h$ y se concluye entcones que W es linealmente independiente.

Ahora se verá que la sucesión de polinomios genera a $\mathbb{C}[x]$, es decir que dado $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ cualquiera de grado n, se puede escribir de la forma

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x), \tag{1.2}$$

para ver esto se hará inducción sobre n:

- Para $n = 0$, por un lado $Q(x)$ es un polinomio de grado 0, luego $Q(x) = \beta_0$, y por otro lado $P_0(x)$ es de grado 0, luego $P_0(x) = k_0$. Por tanto, haciendo $\alpha_0 = \frac{\beta_0}{k_0}$

$$Q(x) = \alpha_0 P_0(x).$$

- Supóngase ahora que para todo $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ con grado menor o igual a m se puede expresar como (1.2). Se verá ahora que cualquier polinomio $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $m+1$ se puede expresar como (1.2). Como $Q(x)$ y $P_{m+1}(x)$ son de grado $m+1$, entonces estos polinomios son de la forma:

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \beta_j x^j$$
$$P_{m+1}(x) = \sum_{j=0}^{m+1} k_j x^j,$$

y los coeficientes que acompañan al término de mayor grado de ambos polinomios, los cuales son β_{m+1}, k_{m+1} son distintos de cero, luego sea $\alpha_{m+1} = \frac{\beta_{m+1}}{k_{m+1}}$. Entonces la ecuación

$$Q(x) - \alpha_{m+1} P_{m+1}(x) \tag{1.3}$$

cuenta con dos opciones:

  - Si (1.3) es igual a 0, entonces $Q(x)$ es un múltiplo de $P_{m+1}(x)$ y por tanto se puede escribir como (1.2).
  - Si no es igual a cero, entonces (1.3) es un polinomio de grado menor o igual a m, y por hipótesis de inducción

$$Q(x) - \alpha_{m+1} P_{m+1}(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j P_j(x),$$

y por tanto

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j P_j(x).$$

Esto completa la prueba. $\square$

Nota 1.1.2. *Como cualquier valor constante, el valor 0 podría considerarse como un polinomio constante, pero por otra parte, el polinomio $p(x) = 0$ no tiene ningún término diferente de cero, y por tanto, hablando estrictamente, no tiene grado. Por esto en la literatura se define como un polinomio cuyo grado está indefinido* [9, p.199]*. Para la prueba anterior entonces, $P_0(x)$ será un polinomio de grado 0.*

Nota 1.1.3. *Bajo el teorema anterior la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ también es una base de Hamel para $\mathbb{C}[x]$ sobre un conjunto infinito.*

1.2. Análisis

1.2.1. Conceptos básicos

En esta subsección se encuentran consignados algunos conceptos fundamentales del análisis, ellos tomados de los libros [13, p.95,p.192], [3, p.73], [1, p.193].

Definición 1.2.1. *Sea $f(x)$ una función real en (a, b). Entonces f se dice que es monótona creciente en (a, b) si $a < x < y < b$ implica que $f(x) \leq f(y)$. Si la última desigualdad se cambia de sentido, se obtiene la definición de función monótona decreciente.*

Definición 1.2.2 (Función Gamma)**.** *Para $0 < x < \infty$,*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}.$$

Teorema 1.2.1. *Las función Gamma cumple las siguientes propiedades*

a) *Si $0 < x < \infty$,*

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

b) $\Gamma(n + 1) = n!$, *para* $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Definición 1.2.3 (Símbolo de Pochhhamer)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, el símbolo de Pochhammer está definido como*

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1); \qquad (z)_0 = 1.$$

Si z y $z+n$ no son enteros negativos, entonces

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}.$$

Definición 1.2.4. *Algunas propiedades de los símbolos de Pochhammer son:*

- $(1)_n = n!$,
- $(z)_{n+m} = (z)_n(z+n)_m$,
- $(-z)_n = (-1)^n(z-n+1)_n$,
- $\binom{z}{n} = (-1)^n \frac{(-z)_n}{n!}$.

Definición 1.2.5 (Función analítica)**.** *Una función f en variable compleja z es analítica en un punto z_0 si esta tiene derivadas en cada punto en alguna vecindad de z_0. Una función f es analítica en un conjunto abierto si tiene derivadas en cualquier parte del conjunto.*

Definición 1.2.6 (Punto singular)**.** *Si una función f falla en ser analítica en un punto z_0 pero es analítica en algún punto en toda vecindad de z_0, entonces z_0 es llamado un punto singular, o singularidad.*

Teorema 1.2.2 (Criterio de d'Alembert)**.** *dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos complejos diferentes de cero, sea*

$$r = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad R = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

a) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si $R < 1$.*

b) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $r > 1$.*

c) *El criterio no decide si $r \leq 1 \leq R$.*

1.2.2. Ecuaciones diferenciales

En esta subsección se encuentran consignados algunas definiciones básicas en ecuaciones diferenciales, tomados del libro [16, p.2-4,p.239].

Definición 1.2.7 (Ecuación diferencial). *Una ecuación que contenga derivadas de una o más funciones desconocidas (o variables dependientes), con respecto a una o más variables independientes es llamada una ecuación diferencial.*

Definición 1.2.8 (Clasificación de ecuaciones diferenciables).

- *Por tipo. Si una ecuación diferencial contiene solo derivadas ordinarias de una o más funciones desconocidas con respecto a una* ***sola*** *variable independiente, entonces dicha ecuación recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria(ODE). Una ecuación que involucre derivadas parciales de una o más funciones desconocidas de dos o más variables independientes recibe el nombre de ecuación diferencial parcial(PDE)*

- *Por orden. El orden de una ecuación diferencial (ya sea ODE o PDE) es determinado por el término con derivadas de mayor orden.*

- *Por linealidad. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si se puede escribir de la forma*

$$a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = g(x).$$

  Una ecuación diferencial ordinaria no lineal es simplemente una que no es lineal.

Definición 1.2.9 (Puntos singulares y regulares). *En la ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1(x)}{a_n(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}y = 0,$$

un punto $x = x_0$ se dice que es un punto regular si las funciones

$$\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)}, \dots, \frac{a_1(x)}{a_n(x)}, \frac{a_0(x)}{a_n(x)},$$

son analíticas en x_0. Un punto que no es regular se dice que es singular.

Definición 1.2.10 (Punto regular singular). *en la* (ODE) *de segundo orden*

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0,$$

un punto x_0 es regular singular si los limites

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)},$$

son ambos finitos.

1.3. Teoría de integración

1.3.1. Espacio y función medible

En esta subsección se encuentran algunos conceptos sobre lo que es una σ-álgebra, un espacio medible y una función medible. Las definiciones fueron tomadas de [2, p.6-8].

Definición 1.3.1 (σ-álgebra)**.** *Una familia $\mathbb{X}$ de subconjuntos de un conjunto X es una σ-álgebra si:*

- $\emptyset \in \mathbb{X}$, $X \in \mathbb{X}$.
- *Si $A \in \mathbb{X}$, entonces $A^c = X \setminus A \in \mathbb{X}$.*
- *Si (A_n) es una sucesión de conjuntos en $\mathbb{X}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ también está en $\mathbb{X}$.*

Definición 1.3.2 (Espacio medible)**.** *Una pareja ordenada $(X, \mathbb{X})$ que consiste de un conjunto X y una σ-álgebra $\mathbb{X}$ de subconjuntos de X se llama espacio medible. Cualquier conjunto en $\mathbb{X}$ es llamado un conjunto $\mathbb{X}$-medible.*

Definición 1.3.3 (Función medible)**.** *Una función f de X en $\mathbb{R}$ se dice $\mathbb{X}$-medible(o simplemente medible) si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathbb{X}$.

Lema 1.3.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para que una función f de X en $\mathbb{R}$ sea medible:*

(a) *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertenece a X.*

(b) *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ pertenece a X.*

(c) *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ pertenece a X.*

(d) *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ pertenece a X.*

Lema 1.3.2. *Sean f y g funciones medibles a valor real y c un número. Entonces las funciones cf, f^2, $f + g$, fg, $\mid f \mid$ también son medibles.*

Definición 1.3.4. *Si f es cualquier función de X en $\mathbb{R}$, sean f^+ y f^- las funciones no negativas definidas en X por*

$$f^+(x) = sup\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = sup\{-f(x), 0\}.$$

A estas funciones se les llama la parte positiva y parte negativa de f respectivamente.

1.3.2. Medida

En esta subsección se encuentra el concepto de medida el cual fue tomado [2, p.19-22].

Definición 1.3.5 (Medida)**.** *Una medida es una función a valor real extendido μ definida en una σ-álgebra $\mathbb{X}$ de subconjuntos de X tal que:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) *Para todo $E \in \mathbb{X}$, $\mu(E) \geq 0$.*

3) *Si (E_n) es una sucesión disjunta (es decir que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$) de conjuntos en $\mathbb{X}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición 1.3.6 (Espacio de medida)**.** *Un espacio de medida es la tripleta $(X, \mathbb{X}, \mu)$ que consiste de un conjunto X, una σ-álgebra $\mathbb{X}$, y una medida μ definida en $\mathbb{X}$.*

Nota 1.3.1. *Se dice que cierta proposición se mantiene μ-casi en todas partes si existe un subconjunto $N \in \mathbb{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que la proposición se mantiene en el complemento de N. También se dice que dos funciones f, g son iguales μ-casi en todas partes si existe un conjunto $N \in \mathbb{X}$ con $\mu(N) = 0$, tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin N$.*

1.3.3. Integral con respecto a una medida

En esta subsección se encuentran algunas definiciones y resultados en teoría de integración. Estas fueron tomadas del capítulo 4 de [2, p.27-39].

Definición 1.3.7. *Se denota a la colección de todas las funciones $\mathbb{X}$-medibles de X en $\overline{\mathbb{R}}$ como $M(X, \mathbb{X})$ y la colección de todas las funciones no negativas $\mathbb{X}$-medibles de X en $\overline{\mathbb{R}}$ como $M^+(X, \mathbb{X})$.*

Nota 1.3.2. *Una función f a valor real extendido es una función tal que su imagen está contenida en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

Definición 1.3.8 (Función simple)**.** *Una función a valor real es simple si tiene un número finito de valores. Estas funciones se pueden representar de la forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \tag{1.4}$$

donde $a_j \in \mathbb{R}$ y χ_{E_j} es la función característica del conjunto E_j en X.

Nota 1.3.3. *Dentro de todas estas representaciones para φ existe una única representación estándar caracterizada por el hecho de que los a_j son diferentes y los E_j son una partición disjunta de X, es decir que $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ con $E_i \cap E_j = 0$ si $i \neq j$.*

Definición 1.3.9. *Si φ es una función simple en $M^+(X, \mathbb{X})$ con la representación estándar (1.4), se define la integral de φ con respecto a μ como el número real extendido*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Nota 1.3.4. *En la definición anterior hay que hacer una convención, y es que $0(+\infty) = 0$ para que la integral de la función constante 0 sea igual a 0.*

Lema 1.3.3. *Si $\varphi, \psi \in M^+(X, \mathbb{X})$ y $c \geq 0$, entonces*

a)

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu,$$
$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

b) *Si λ es definida para E en $\mathbb{X}$ por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu,$$

entonces λ es una medida en $\mathbb{X}$.

Definición 1.3.10. *Si $f \in M^+(X, \mathbb{X})$, se define la integral de f con respecto a μ como el número real extendido*

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu,$$

donde el supremo es extendido sobre todas las funciones simples $\varphi \in M^+(X, \mathbb{X})$ que satisfacen $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. Si $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ y $E \in \mathbb{X}$, entonces $f\chi_E \in M^+(X, \mathbb{X})$ y se define la integral de f sobre E con respecto a μ como el número real extendido

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu.$$

Lema 1.3.4. *Si $f, g \in M^+(X, \mathbb{X})$ y $f \leq g$, entonces*

a)

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

b) *Si* $f \in M^+(X, \mathbb{X})$*, si* $E, F \in \mathbb{X}$*, y si* $E \subseteq F$*, entonces*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Teorema 1.3.1 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Si* (f_n) *es una sucesión monótona creciente de funciones en* $M^+(X, \mathbb{X})$ *que converge a* f*, entonces*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Corolario 1.3.1.

a) *Si* $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ *y* $c \geq 0$*, entonces* $cf \in M^+(X, \mathbb{X})$ *y*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

b) *Si* $f, g \in M^+(X, \mathbb{X})$*, entonces* $f + g \in M^+(X, \mathbb{X})$ *y*

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

1.3.4. $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$

Las siguientes definiciones fueron tomadas del capítulo 5 de [2, p.41-43].

Definición 1.3.11. *La colección* $L = L(X, \mathbb{X}, \mu)$ *de funciones integrables consiste de todas las funciones a valor real* $\mathbb{X}$*-medibles* f *definidas en* X*, tal que, tanto la parte positiva* f^+ *y parte negativa* f^- *de* f *tienen integrales finitas con respecto a* μ*. En dicho caso se define la integral de* f *con respecto a* μ *como*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Teorema 1.3.2. *Un múltiplo constante* αf *y la suma* $f + g$ *de funciones en* L *pertenecen a* L *y*

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \qquad \int (f + g) f d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

1.3.5. $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$

Las siguientes definiciones fueron tomadas del capítulo 5 de [2, p.55-56].

Definición 1.3.12. *Si* $1 \leq p < +\infty$*, el espacio* $L_p = L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ *consiste de todas las* μ*-clases de equivalencia de funciones a valor real* $\mathbb{X}$*-medibles tal que la integral de* $|f|^p$ *es finita con respecto a* μ *sobre* X*. Dos funciones son* μ*-equivalentes si son iguales* μ*-casi en todas partes.*

1.3.6. $L^p_\alpha(a,b)$

La definiciones fueron tomadas del capítulo 5 de [15, p.1].

Definición 1.3.13. *Sea $p \geq 1$ y $\alpha(x)$ una función no decreciente en $[a,b]$ que no es constante. La clase de funciones $f(x)$ para las cuales la integral*

$$\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x)$$

exista, es llamada $L^p_\alpha(a,b)$. Esta integral es llamada la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Nota 1.3.5. *En* [4, p.49-50] *y el* capítulo 9 *de* [2, p.105] *se muestra que una función monótona creciente α define una α-medida en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ así: sea $I \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ con extremos a, b entonces*

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha([a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^-),\\
\mu_\alpha((a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^+),\\
\mu_\alpha([a,b)) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^-),
\end{aligned}$$

y si $a < b$

$$\mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b^-) - \alpha(a^+).$$

2 Teoría Básica

2.1. Polinomios ortogonales

Para el desarrollo de esta sección se han tomado definiciones y teoremas de [14, p.7-12], así como también algunas pruebas que se han requerido para la mejor comprensión de esta sección. Todo el contenido de este capítulo se trabaja sobre el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$, notado como $\mathbb{C}[x]$.

2.1.1. Definición

Definición 2.1.1 (Funcional de momentos)**.** *Un funcional de momentos $\mathscr{L}$ es un funcional lineal de $\mathbb{C}[x]$ en $\mathbb{C}$.*

Definición 2.1.2. *Un sistema de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios tal que, para cada n, $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$.*

Definición 2.1.3. *Se dice que un sistema de polinomios mónicos (es decir, el coeficiente de máximo grado de $P_n(x)$ es 1) es un sistema ortogonal con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$ si para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

1. *El grado de cada $P_n(x)$ es precisamente n.*
2. *$\mathscr{L}\left(P_n(x)P_m(x)\right) = \lambda_n \delta_{nm}$, donde*

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

3. *$\lambda_0 = 1, \lambda_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.*

Definición 2.1.4. *Si un funcional de momentos $\mathscr{L}$ admite un sistema ortogonal de polinomios mónicos, se dice que $\mathscr{L}$ es regular.*

2.1.2. Relación de tres términos

Teorema 2.1.1. *Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de polinomios mónicos con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$, entonces existen números complejos B_n, C_n, con $n \geq 0$ tales* *que:*

$$C_n \neq 0, \qquad n \geq 1 \tag{2.1}$$

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), \qquad n \geq 0 \tag{2.2}$$

$$P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1, \tag{2.3}$$

además, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *queda unívocamente determinado por* (2.2) *y* (2.3). *Recíprocamente, si* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es un sistema de polinomios mónicos determinados por la relación de recurrencia* (2.2) *y las condiciones iniciales* (2.3), *y si se verifica* (2.1), *entonces existe un funcional* $\mathscr{L}$ *para el cual* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es un sistema ortogonal de polinomios mónicos.*

Más aún:

$$\lambda_n = \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) = \prod_{i=1}^{n} C_i, \tag{2.4}$$

$$\mathscr{L}(1) = 1; \mathscr{L}\left(P_n(x)\right) = 0,\ n \geq 1, \tag{2.5}$$

y $\mathscr{L}$ *queda unívocamente determinado por* (2.5).

Demostración. $\Rightarrow$) Por el Teorema 1.1.5, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de Hamel para $\mathbb{C}[x]$. Entonces

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n}P_i(x),\ n \geq 0, \tag{2.6}$$

donde los $C_{i,n}$ son números complejos y $C_{n+1,n} = 1$ ya que $P_{n+1}(x)$ y $xP_n(x)$ son mónicos. Para ver que (2.2) es cierto se hará inducción sobre n así:

- Para $n = 0$,
  $xP_0(x) = P_1(x) + B_0P_0(x) + C_0P_{-1}(x)$
  $xP_0(x) = C_{0,0}P_0(x) + C_{1,0}P_1(x)$
  de aquí que $B_0 = C_{0,0},\ 1 = C_{1,0}$.

- Para $n = 1$,
  $xP_1(x) = P_2(x) + B_1P_1(x) + C_1P_0(x)$
  $xP_1(x) = C_{0,1}P_0(x) + C_{1,1}P_1(x) + C_{2,1}P_2(x)$
  de aquí que $C_1 = C_{0,1},\ B_1 = C_{1,1},\ 1 = C_{2,1}$.

- Para $n = 2$,
  $xP_2(x) = P_3(x) + B_2P_2(x) + C_2P_1(x)$
  $xP_2(x) = C_{0,2}P_0(x) + C_{1,2}P_1(x) + C_{2,2}P_2(x) + C_{3,2}P_3(x)$
  de aquí que $0 = C_{0,2},\ C_2 = C_{1,2},\ B_2 = C_{2,2},\ 1 = C_{3,2}$.

- Supóngase ahora que $n \geq 2$. Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.6) por $P_k(x)$, donde $0 \leq k \leq n-2$

$$xP_k(x)P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n} P_k(x) P_i(x). \tag{2.7}$$

También de la ecuación (2.6)

$$xP_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1} C_{i,k} P_i(x), \tag{2.8}$$

multiplicando ambos lados de (2.8) por $P_n(x)$

$$xP_k(x)P_n(x) = \sum_{i=0}^{k+1} C_{i,k} P_i(x) P_n(x). \tag{2.9}$$

Aplicando el funcional de momentos $\mathscr{L}$ a la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(xP_k(x)P_n(x)\right) &= \mathscr{L}\left(\sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n} P_k(x) P_i(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n} \mathscr{L}\left(P_k(x)P_i(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n} \lambda_k \delta_{ki}, \end{aligned}$$

y para $0 \leq k \leq n-2$ fijo en la ecuación anterior

$$\mathscr{L}\left(xP_k(x)P_n(x)\right) = C_{k,n}\lambda_k. \tag{2.10}$$

Ahora, aplicando el funcional de momentos $\mathscr{L}$ a la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(xP_k(x)P_n(x)\right) &= \mathscr{L}\left(\sum_{i=0}^{k+1} C_{i,k} P_i(x) P_n(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} C_{i,k} \mathscr{L}\left(P_i(x)P_n(x)\right), \end{aligned}$$

como $k \leq n-2$ e $i \leq k+1$, entonces $i-1 \leq n-2$, esto es, $i \leq n-1 < n$, y por tanto

$$\mathscr{L}\left(xP_k(x)P_n(x)\right) = \sum_{i=0}^{k+1} C_{i,k} \lambda_i \delta_{in} = 0. \tag{2.11}$$

Luego de (2.10) y (2.11) se concluye que $C_{k,n} = 0$ para $0 \leq k \leq n-2$, entonces

$$\begin{aligned}
xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \\
xP_n(x) &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{i,n} P_i(x) = C_{n+1,n} P_{n+1}(x) + C_{n,n} P_n(x) + C_{n-1,n} P_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Lo que implica que $C_n = C_{n-1,n}$, $B_n = C_{n,n}$,$1 = C_{n+1,n}$.

Así la sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ queda determinada por (2.2) y (2.3). Ahora, si $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
xP_{n-1}(x)P_n(x) &= (C_{n,n-1}P_n(x) + C_{n-1,n-1}P_{n-1}(x) + C_{n-2,n-1}P_{n-2}(x))P_n(x) \\
&= P_n(x)^2 + B_{n-1}P_{n-1}(x)P_n(x) + C_{n-1}P_{n-2}(x)P_n(x),
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(xP_{n-1}(x)P_n(x)\right) &= \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) + B_{n-1}\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)P_n(x)\right) + C_{n-1}\mathscr{L}\left(P_{n-2}(x)P_n(x)\right) \\
&= \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) + B_{n-1}\lambda_{n-1}\delta_{(n-1)n} + C_{n-1}\lambda_{n-2}\delta_{(n-2)n} \\
&= \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

De (2.2), multiplicando ambos lados por $P_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned}
xP_n(x)P_{n-1}(x) &= (P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x))P_{n-1}(x) \\
&= P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + B_nP_n(x)P_{n-1}(x) + C_nP_{n-1}(x)^2
\end{aligned}$$

y aplicando el funcional de momentos $\mathscr{L}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(xP_n(x)P_{n-1}(x)\right) &= \mathscr{L}\left(P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)\right) + B_n\mathscr{L}\left(P_n(x)P_{n-1}(x)\right) + C_n\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right) \\
&= \lambda_{n+1}\delta_{(n+1)(n-1)} + B_n\lambda_n\delta_{n(n-1)} + C_n\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right) \\
&= C_n\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Así, de (2.12) y (2.13)

$$\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) = C_n\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right). \qquad (2.14)$$

Como para $n \geq 1$, $\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right)$ y $\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right)$ son no nulos, se ha probado la ecuación (2.1).

$\Leftarrow$) Supóngase ahora que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de polinomios mónicos que satisface (2.1),(2.2) y (2.3). Se debe ver que existe un funcional $\mathscr{L}$ que satisface la Definición 2.1.3. Se verá primero que el grado de cada $P_n(x)$ es precisamente n:

- Por (2.3), $P_0(x) = 1$ luego $P_0(x)$ es de grado 0.

- Para $n = 0$, de (2.2)

$$xP_0(x) = P_1(x) + B_0P_0(x) + C_0P_{-1}(x),$$

por (2.3) se tiene que $x = P_1(x) + B_0$, así $P_1(x) = x - B_0$ y $P_1(x)$ es de grado 1.

- para $n = 1$, de (2.2)

$$xP_1(x) = P_2(x) + B_1P_1(x) + C_1P_0(x),$$

luego

$$x(x - B_0)(x) = P_2(x) + B_1(x - B_0) + C_1,$$

así $P_2(x) = x^2 + (-B_0 - B_1)x + (B_1B_0 - C_1)$, luego $P_2(x)$ es de grado 2.

- Supóngase ahora que para algún $m \in \mathbb{N}$ $P_k(x)$ es de grado k, para todo $0 \leq k \leq m$. Se verá ahora que $P_{m+1}(x)$ es de grado $m + 1$. De (2.2)

$$xP_m(x) = P_{m+1}(x) + B_mP_m(x) + C_mP_{m-1}(x),$$

luego

$$P_{m+1}(x) = xP_m(x) - B_mP_m(x) - C_mP_{m-1}(x),$$

por hipótesis de inducción que P_m es de grado m, luego lo es $B_mP_m(x)$, se sabe también que $P_{m-1}(x)$ es de grado $m-1$, luego lo es $C_mP_{m-1}(x)$, luego la suma de los dos últimos términos es un polinomio de grado m. Ahora, como $P_m(x)$ es un polinomio de grado m, el primer término $xP_m(x)$ es un polinomio de grado $m+1$ y la suma de todos estos terminos resulta ser entonces un polinomio de grado $m + 1$.

Ahora, sea $\mathscr{L}$ un operador lineal definido así:

$$\begin{cases} \mathscr{L}(1) = 1 \\ \mathscr{L}(P_n(x)) = 0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Por lo que se ha mostrado anteriormente y el Teorema 1.1.5, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de Hamel para $\mathbb{C}[x]$ y por tanto, usando esto y el Teorema 1.1.1, se puede extender $\mathscr{L}$ a todo $\mathbb{C}[x]$.

Se verá ahora que la propiedad número dos de la Definición 2.1.3 se cumple, para esto primero se mostrará el siguiente resultado. Para $m \geq 0$ fijo,

$$\mathscr{L}(x^mP_n(x)) = 0 \textit{ para todo } n > m. \tag{2.15}$$

La prueba se hará por inducción sobre m así:

- Para $m=0$, $\mathscr{L}(P_n(x))=0$ ya que $n>0$
- Ahora supóngase que la proposición es valida para algún m y que $n>m+1$, entonces $n>m$, $n-1>m$ y $n+1>m$. Como

$$\begin{aligned}x^{m+1}P_n(x)&=x^m(xP_n(x))\\&=x^m(P_{n+1}(x)+B_nP_n(x)+C_nP_{n-1}(x))\\&=x^mP_{n+1}(x)+x^mB_nP_n(x)+x^mC_nP_{n-1}(x),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x^{m+1}P_n(x))&=\mathscr{L}(x^mP_{n+1}(x)+x^mB_nP_n(x)+x^mC_nP_{n-1}(x))\\&=\mathscr{L}(x^mP_{n+1}(x))+B_n\mathscr{L}(x^mP_n(x))+C_n\mathscr{L}(x^mP_{n-1}(x))\\&=0.\end{aligned}$$

Y la propiedad queda demostrada. Ahora, si $n<m$, entonces por la Nota 1.1.3 $P_n(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$, y junto con (2.15) es posible decir que

$$\mathscr{L}(P_n(x)P_m(x))=0,\qquad n\neq m. \tag{2.16}$$

Si $n=m$, se puede hacer exactamente el mismo procedimiento que dio resultado a la ecuación (2.19), y que junto con (2.1) muestran que

$$\mathscr{L}(P_n(x)^2)\neq 0. \tag{2.17}$$

Para ver que (2.4) se cumple, de (2.14)

$$\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right)=C_n\mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right) \tag{2.18}$$

y utilizando de nuevo el resultado de (2.14) en la parte derecha de (2.18) $(n-1)$-veces, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right)&=\prod_{i=1}^n C_i\mathscr{L}\left(P_0(x)^2\right)\\&=\prod_{i=1}^n C_i\lambda_0\delta_{00}\\&=\prod_{i=1}^n C_i.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por otro lado

$$\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right)=\lambda_n\delta_{nn}=\lambda_n, \tag{2.20}$$

luego de (2.19) y (2.20) se tiene (2.4). Para mostrar (2.5), por (2.3)

$$\mathscr{L}(1) = \mathscr{L}\left(P_0(x)^2\right) = \lambda_0\delta_{00} = \lambda_0 = 1$$

y para $n \geq 1$

$$\mathscr{L}(P_n(x)) = \mathscr{L}(1P_n(x)) = \mathscr{L}(P_0(x)P_n(x)) = \lambda_0\delta_{0n} = 0.$$

□

Nota 2.1.1. *El reciproco del teorema anterior se conoce como el Teorema de Favard.*

El siguiente teorema fue tomado del libro [12, p.151] y es una generalización del Teorema 2.1.1, y esta generalización reside en el hecho de que ya no se pide que la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sea mónica.

Teorema 2.1.2. *Si $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales reales con respecto a $\omega(x) > 0$ en (a, b), existen sucesiones de números A_n, B_n, C_n, tal que para $n \geq 1$,*

$$x\varphi_n(x) = A_n\varphi_{n+1}(x) + B_n\varphi_n(x) + C_n\varphi_{n-1}(x),$$

en donde $A_n \neq 0$ y $C_n \neq 0$.

2.1.3. Caso particular de $\mathscr{L}$

Definición 2.1.5 (n-ésimo Momento de $\mathscr{L}$)**.** *Se define como el n-ésimo momento de $\mathscr{L}$, notado como c_n a*

$$c_n = \mathscr{L}(x^n).$$

Teorema 2.1.3. *Si $\mathscr{L}$ es un funcional de momentos con $\mathscr{L}(1) = 1$ y si c_n es, para $n \geq 0$, el n-ésimo momento de $\mathscr{L}$, una condición necesaria y suficiente para que $\mathscr{L}$ sea regular es que*

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad n \geq 0. \tag{2.21}$$

Demostración. $\Leftarrow$) Supóngase que (2.21) se satisface. Sean $P_0(x) = 1$ y

$$P_n(x) = \frac{1}{\Gamma_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \qquad n \geq 1. \tag{2.22}$$

Si $m \leq n$,

$$\mathscr{L}(x^m P_n(x))\frac{1}{\Gamma_{n-1}} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ \mathscr{L}(x^m) & \mathscr{L}(x^{m+1}) & \dots & \mathscr{L}(x^{m+n}) \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

Como la fila $(\mathscr{L}(x^m), \mathscr{L}(x^{m+1}), \dots, \mathscr{L}(x^{m+n})) = (c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+n})$ es una de los determinantes en (2.23) si $m < n$, es claro que (2.15), de lo cual (2.16), se satisface. Por otra parte, si $m = n$ entonces, usando nuevamente (2.23), se obtiene que

$$\mathscr{L}(x^m P_n(x)) = \mathscr{L}(P_n(x)^2) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n-1}} \neq 0, \tag{2.24}$$

$\Rightarrow$) Supóngase entonces que $\mathscr{L}$ es regular y sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios mónicos ortogonales con respecto a $\mathscr{L}$. Se demostrará que si Γ_n está dado por (2.21) entonces $\Gamma_n \neq 0$ para $n \geq 0$. La prueba se hará por inducción.

- Para $n = 0$, $\Gamma_0 = c_0 = \mathscr{L}(1) = 1$.
- Supóngase entonces que la afirmación es válida para $n = k$, o sea, que $\Gamma_k \neq 0$. Sea

$$P(x) = \frac{1}{\Gamma_k}\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k & c_{k+1} \\ c_1 & \dots & c_{k+1} & c_{k+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_k & \dots & c_{2k} & c_{2k+1} \\ 1 & \dots & x^k & x^{k+1} \end{vmatrix}, \tag{2.25}$$

así que $P(x)$ es un polinomio mónico de grado $k+1$, y por lo tanto

$$P(x) = P_{k+1}(x) + a_k P_k(x) + \ldots + a_0 P_0(x),\ a_i \in \mathbb{C}. \tag{2.26}$$

Ahora, si $m < k+1$, se tiene como antes que

$$\mathscr{L}(x^m P(x)) = 0.$$

Por lo tanto, para $m < k+1$,

$$\mathscr{L}(P_m(x)P(x)) = 0,$$

así que multiplicando sucesivamente ambos lados de (2.26) por $P_m(x),\ m = 0, 1, 2, \dots, k$, y aplicando $\mathscr{L}$, se obtiene que $a_m = 0,\ m = 0, 1, 2, \dots, k$, o sea, a que $P(x) = P_{k+1}(x)$.

Finalmente, de

$$\mathscr{L}(x^{k+1}P_{k+1}(x)) = \mathscr{L}(P_{k+1}(x)^2)$$

se obtiene que

$$\frac{\Gamma_{k+1}}{\Gamma_k} = \mathscr{L}(P_{k+1}(x)^2),$$

de donde resulta que $\Gamma_{k+1} \neq 0$. Esto demuestra el teorema. □

Nota 2.1.2. *Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de polinomios mónicos determinados por la relación de recurrencia (2.2), para la cual (2.1) se verifica, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ determina unívocamente, mediante (2.5), un funcional de momentos $\mathscr{L}$, para el cual es su sistema mónico ortogonal. Se dice entonces que $\mathscr{L}$ es el funcional de ortogonalidad de $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.*

Teorema 2.1.4. *Sean $\mathscr{L}$ un funcional regular y $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, dado por (2.2) y (2.3), su sistema mónico ortogonal. Si $\mathscr{L}$ puede representarse en la forma*

$$\mathscr{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)d\mu(t), \tag{2.27}$$

donde μ es una medida positiva con soporte en el eje real, entonces B_n y C_n son números reales y

$$C_n > 0, \ n \geq 1, \tag{2.28}$$

así que los polinomios $P_n(x)$ son reales.

Demostración. Si $\mathscr{L}$ admite una representación (2.27), es claro que $c_n = \mathscr{L}(x^n)$ es, para todo $n \geq 0$, un número real. Teniendo en cuenta entonces la relación (2.22) se concluye que los $P_n(x)$ son reales, y, de (2.4) se tiene que

$$\lambda_n = \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) = \prod_{i=1}^{n} C_i.$$

Además, por (2.27), $\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right)$ es la integral de una función no negativa con una medida positiva, por tanto que cero. Entonces se procede así:

- Para $n = 1$, C_1 es mayor que cero.
- Para $n = 2$, C_1C_2 es mayor que cero, pero C_1 es mayor que cero, por tanto C_2 es mayor que cero.

- Supóngase que para $n = k$, $\prod_{i=1}^{k} C_i$ es mayor que cero. Como

$$\mathscr{L}\left(P_{k+1}(x)^2\right) = \prod_{i=1}^{k+1} C_i$$

es mayor que cero, entonces C_{k+1} es mayor que cero.

Es así que $C_{n+1} > 0,\ n \geq 0$. Para ver que B_n es real, por la relación (2.2)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(x^2 P_n(x)^2\right) &= \mathscr{L}\left((P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x))(P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x))\right) \\
&= \mathscr{L}\left(P_{n+1}(x)^2\right) + B_n^2 \mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) + C_n^2 \mathscr{L}\left(P_{n-1}(x)^2\right) \\
&= (C_{n+1} + B_n^2 + C_n)\mathscr{L}\left(P_n(x)^2\right) \\
&= (C_{n+1} + B_n^2 + C_n)\prod_{i=1}^{n} C_i. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

La parte izquierda de la ecuación (2.29) es un número real y mayor que cero por como se define $\mathscr{L}$, luego $C_{n+1} + B_n^2 + C_n > 0$ es un número real, y por tanto $B_n^2 > 0$ es real, es decir que $B_n < 0$ o $B_n > 0$ y por tanto también es real para todo $n \geq 0$. □

Nota 2.1.3. *Si como en el Teorema 2.1.2,*

$$x\varphi_n(x) = A_n\varphi_{n+1}(x) + B_n\varphi_n(x) + C_n\varphi_{n-1}(x),$$

en donde $A_n \neq 0$, entonces

$$x\left[\varphi_n(x)\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right] = \left[\varphi_{n+1}(x)\prod_{i=1}^{n} A_i\right] + B_n\left[\varphi_n(x)\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right] + C_n A_{n-1}\left[\varphi_{n-1}(x)\prod_{i=1}^{n-2} A_i\right]$$

es una relación de tres términos del tipo (2.2), y por lo hecho en el Teorema 2.1.4, entonces

$$C_n A_{n-1} > 0.$$

2.2. Funciónes hipergeométricas

2.2.1. Definición y resultados

En esta subsección se encuentran consignadas definiciones y resultados en funciones hipergeométricas. Estas se han tomado de [12, p.45-47,p.53-54,p.73].

Definición 2.2.1 ($F(a, b; c; z)$)**.** *En el estudio de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con 3 puntos singulares regulares, aparece la función*

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \qquad (2.30)$$

para $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c > 0$.

Si a, b, c son diferentes de cero o números negativos, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}z^{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!}\frac{(c)_n n!}{(a)_n(b)_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)z}{(c+n)(n+1)}\right| = |z|\,.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

tiene entonces el círculo $|z| < 1$ como su círculo de convergencia. Si $a = 0$ o $b = 0$ o ambos son cero, entonces se obtiene la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(c)_n n!},$$

usando el Teorema 1.2.2 la serie es absolutamente convergente. Ahora, si $a < 0$ o $b < 0$ o ambos son menores que cero la serie tiene un número finito de términos diferentes de cero, por tanto converge. En la frontera $|z| = 1$ de la región de convergencia se puede decir lo siguiente

Teorema 2.2.1. *Si $Re(c-a-b) > 0$, entonces (2.30) es absolutamente convergente para $|z| = 1$.*

Definición 2.2.2. *Una variación leve en en la notación $F(a, b; c; z)$ es*

$$F\left[\begin{matrix} a, & b; & \\ & & z \\ & c; & \end{matrix}\right],$$

en la cuál es más cómodo saber cuales son los roles de a, b, c.

La serie al lado derecho de (2.30) o en

$$F\left[\begin{matrix} a, & b; & \\ & & z \\ & c; & \end{matrix}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

es llamada serie hipergeométrica, El caso especial $a = c$, $b = 1$ arroja la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, de aquí el nombre de hipergeométrica.

2.2.2. Ecuación diferencial hipergeométrica

Se usará el operador $\theta = z\left(\frac{d}{dz}\right)$ para encontrar la ecuación diferencial que satisface

$$\omega = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}. \tag{2.31}$$

De (2.31)

$$\begin{aligned}
\theta(\theta(\omega)) &= z\left(\frac{d}{dz}\left(z\left(\frac{d\omega}{dz}\right)\right)\right) \\
&= z\left(\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!}\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(c(\omega)) &= z\left(\frac{dc\omega}{dz}\right) \\
&= z\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cn(a)_n (b)_n z^{n-1}}{(c)_n (n-1)!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\theta(\omega) &= -z\left(\frac{d\omega}{dz}\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!}.
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\theta(\theta + c - 1)\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+c-1)(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n (n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_{n-1} (n-1)!}.
\end{aligned}$$

Haciendo $n = n - 1$

$$\begin{aligned}
\theta(\theta + c - 1)\omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1} z^{n+1}}{(c)_n n!} \\
&= z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+n)(b+n)(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!} \\
&= z(\theta + a)(\theta + b)\omega,
\end{aligned}$$

entonces

$$(\theta(\theta + c - 1) - z(\theta + a)(\theta + b))\omega = 0, \quad \theta = z\left(\frac{d}{dz}\right). \tag{2.32}$$

La ecuación (2.32) se puede entonces volver de la forma

$$\begin{aligned}
0 &= \theta(\theta + c - 1) - z(\theta + a)(\theta + b))\omega \\
&= \theta(\theta(\omega)) + c\theta(\omega) - \theta(\omega) - z(\theta^2 + b\theta + a\theta + ab)\omega \\
&= z(z\omega^{''} + \omega^{'}) + z(c-1)\omega^{'} - z^3\omega^{''} - z^2 b\omega^{'} - z^2 a\omega^{'} - zab\omega \\
&= z\omega^{''} + (c-1)\omega^{'} - z^2\omega^{''} - zb\omega^{'} - za\omega^{'} - ab\omega \\
&= z(1-z)\omega^{''} + (c - (b + a + 1)z)\omega^{'} - ab\omega
\end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden para la cual ω (2.31) es solución.

2.2.3. Funciones hipergeométricas generalizadas

Definición 2.2.3 (${}_pF_q$)**.** *Se define una función hipergeométrica generalizada como*

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p; \\ \\ \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q;\end{matrix} \quad z\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_n}{\prod_{i=1}^{q}(\beta_i)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{2.33}$$

en donde ningún parámetro β_i tiene permitido ser cero o un entero negativo. Si algún parámetro α_i en (2.33) *es cero o un entero negativo, la serie termina.*

Teorema 2.2.2. *Si se aplica el* Teorema 1.2.2 *a* (2.33)*, entonces*

(a) *Si $p \leq q$, la serie converge para todo z finito;*

(b) *Si $p = q + 1$, la serie converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| > 1$;*

(c) *Si $p > q + 1$, la serie diverge para $z \neq 0$.*

Si la serie termina, no hay duda de que converge y (b), (c) *no aplican. Además si* $p = q + 1$, *la serie* (2.33) *es absolutamente convergente en el círculo* $|z| = 1$ *si*

$$Re\left(\sum_{i=1}^{q}\beta_i - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right) > 0.$$

2.2.4. Algunas funciones hipergeométricas generalizadas

Los siguientes ejemplos se han tomado de [7, p.1] y en la cual se muestra que algunos polinomios que han surgido en la teoría de polinomios ortogonales se pueden obtener de polinomios hipergeométricos al variar sus parámetros.

Definición 2.2.4. *Se definen los siguientes polinomios hipergeométricos*

$$\begin{aligned} f_n(a_i; b_i; x) &\equiv f_n(a_1, a_2, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_q; x) \\ &\equiv {}_{p+2}F_{q+2}\begin{bmatrix} -n, n+1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p; & \\ & z \\ \frac{1}{2}, \quad 1 \quad, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q; & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Algunos casos especiales de $f_n(a_i; b_i; x)$ son:

a) $f_n(\frac{1}{2}; -; x) = P_n(1 - 2x)$,

b) $f_n(1; -; x) = \left[\frac{n!}{(\frac{1}{2})_n}\right] P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(1 - 2x)$.

A a) se le conocen como los polinomios de Legendre y a b) se le conocen como los polinomios de Jacobi.

3 Polinomios Casi-Ortogonales

Antes de desarrollar este capítulo se deben hacer unas observaciones. En 2 Teoría Básica todos los resultados se obtienen de forma general, y en particular se mantienen si $\mathscr{L}$ puede representarse en la forma

$$\mathscr{L}(P(x)) = \int_a^b P(t)d\mu(t),$$

donde μ es una medida positiva con soporte en (a, b).

En 1 Preliminares, así como en 2 Teoría Básica, los resultados y las definiciones están soportadas o se definen en algunos casos sobre $\mathbb{C}$, pero que sin pérdida de generalidad mantienen su valor de verdad sobre $\mathbb{R}$. Es por esto y por el Teorema 2.1.4 que en este capítulo los escalares o coeficientes que acompañan a los polinomios que se definen o se utilizan pertenecen a $\mathbb{R}$, a menos que explícitamente se diga lo contrario.

Por último, en la literatura de polinomios ortogonales o polinomios casi-ortogonales, al momento de definir estos lo hacen sobre una función monótona creciente, que es una medida por la Nota 1.3.5.

3.1. Definición

3.1.1. Indice (k, r)

Esta definición se toma del artículo [5, p.765-766] el cuál es uno de los artículos que soporta [6]. En esta definición se presenta una generalización de la definición de casi-ortogonalidad.

Definición 3.1.1. *Sea $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios, en donde cada $Q_n(x)$ es precisamente de grado n, sean $k, r \in \mathbb{Z}$ cualesquiera fijos tales que $k \geq 0$ y $r \geq 1$, y tal que se satisface que*

$$\int_a^b Q_m(x)Q_n(x)d\alpha(x) = 0 \text{ para } m \neq n \pm jr, \qquad j = 0, 1, \cdots, k.$$

Entonces $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ recibe el nombre de polinomios casi-ortogonales de indice (k, r).

Esta definición es la que presenta en el artículo de D. Dickinson [6, p.1].

Definición 3.1.2. *Sea $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios, donde cada $Q_n(x)$ es precisamente de grado n. El sistema $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se dice casi-ortogonal si existe un intervalo (a, b) y una función no decreciente asociada $\alpha(x)$ tal que*

$$\int_a^b x^m Q_n(x)d\alpha(x) \begin{matrix} = \\ \neq \\ \neq \end{matrix} \begin{cases} 0 & para \quad 0 \leq m \leq n-2 \\ 0 & para \quad 0 \leq m = n-1 \\ 0 & para \quad \quad 0 = m = n. \end{cases}$$

Nota 3.1.1. *La* Definición 3.1.2 *es equivalente a la* Definición 3.1.1 *con indice* $(1,1)$.

3.2. Resultados

Si $\mathscr{L}$ es el funcional de ortogonalidad de $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (ver Nota 2.1.2) y bajo la observación al inicio de este capítulo, entonces

$$\mathscr{L}(P_m(x)P_n(x)) = \int_a^b P_m(t)P_n(t)d\mu(t) = 0, \qquad m \neq n. \tag{3.1}$$

Este resultado se muestra en la prueba de la condición suficiente del Teorema 2.1.1 ecuaciones (2.15) y (2.16).

Ahora, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con n fijo cualquiera y $m \leq n$, entonces por la Nota 1.1.3,

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x_i, \qquad a_i \text{ } constantes$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(Q_m(x)Q_n(x)) &= \int_a^b Q_m(t)Q_n(t)d\alpha(t) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{m} a_i t_i\right) Q_n(t)d\alpha(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \int_a^b t^i Q_n(t)d\alpha(t)\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por la Definición 3.1.2, la ecuación (3.2) es diferente de cero cuando $m = n-1$ y $m = n$. Ahora, si $m \geq n$, entonces $\mathscr{L}(Q_m(x)Q_n(x)) = \mathscr{L}(Q_n(x)Q_m(x))$ y usando el mismo argumento para $Q_n(x)$, $n = m$ y $n = m+1$ también hacen la ecuación (3.2) diferente de cero. Es decir que

$$\mathscr{L}(Q_m(x)Q_n(x)) = \int_a^b Q_m(t)Q_n(t)d\alpha(t) = 0, \qquad m \neq n-1, n, n+1. \tag{3.3}$$

Las ecuaciones (3.1) y (3.3) permiten entonces establecer una diferencia entre polinomios ortogonales y polinomios casi-ortogonales.

3.2.1. Relación de dos términos

Teorema 3.2.1. *Sea $\alpha(x)$ una función no decreciente con infinitos puntos de incremento en (a,b) tal que los momentos $\int_a^b x^n d\alpha$ para $n = 1,2,3,\cdots$ existan. Entonces un conjunto de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, en donde $Q_n(x)$ es de grado precisamente n, es casi-ortogonal de indice (k,r) si, y solo si, estos polinomios son de la forma*

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{n,j} P_{n-jr}(x), \qquad a_{n,j}\ constantes, a_{n,0} \neq 0.$$

Donde $P_n(x)$ denota el n-ésimo polinomio ortogonal asociado con la distribución $d\alpha(x)$ en un intervalo (a,b) y $P_{-m}(x) = 0$ con $m = 1,2,\cdots,kr$.

Demostración. $\Leftarrow$) Si $k, r \in \mathbb{Z}$ cualesquiera fijos tales que $k \geq 0$ y $r \geq 1$, $j = 1,2,\cdots,k$, tal que

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{n,j} P_{n-jr}(x), \qquad a_{n,j}\ constantes, a_{n,0} \neq 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} Q_m(x)Q_n(x) &= \left(\sum_{h=0}^{k} a_{m,h} P_{m-hr}(x)\right)\left(\sum_{j=0}^{k} a_{n,j} P_{n-jr}(x)\right) \\ &= \sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{m,h} a_{n,j} P_{m-hr}(x) P_{n-jr}(x)\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

integrando (3.4) con respecto a $d\alpha(x)$ en el intervalo (a,b)

$$\begin{aligned} \int_a^b Q_m(x)Q_n(x)d\alpha(x) &= \int_a^b \left(\sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{m,h} a_{n,j} P_{m-hr}(x) P_{n-jr}(x)\right)\right) d\alpha(x) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{k} a_{m,h} a_{n,j} P_{m-hr}(x) P_{n-jr}(x)\right) d\alpha(x) \\ &= \sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k}\left(\int_a^b a_{m,h} a_{n,j} P_{m-hr}(x) P_{n-jr}(x) d\alpha(x)\right)\right) \\ &= \sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k}\left(a_{m,h} a_{n,j} \int_a^b P_{m-hr}(x) P_{n-jr}(x) d\alpha(x)\right)\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por lo que se mostró en (3.1), entonces el término del lado derecho de la ecuación (3.5) es igual a cero si $m \neq n \pm jr$, luego por la Definición 3.1.1 se puede concluir que la sucesión de $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es casi ortogonal de indice (k,r).

$\Rightarrow$) Sea $k > 0$ (ya que para $k = 0$, se tienen polinomios ortogonales). Entonces como los polinomios ortogonales $P_n(x)$, asociados a $\alpha(x)$ en el intervalo (a, b) son precisamente de grado n, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son una base de Hamel, así que se puede escribir

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{n,j} P_j(x), \qquad (b_{n,n} \neq 0, n = 0, 1, \cdots).$$

De acuerdo a

$$\int_a^b Q_m(x) Q_n(x) d\alpha(x) = 0 \; para \; m \neq n \pm jr, \qquad j = 0, 1, \cdots, k,$$

para $n > kr$, $Q_n(x)$ es ortogonal a cada polinomio de grado $m < n - kr$. Por tanto, en particular, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b Q_n(x) P_m(x) d\alpha(x) &= \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} b_{n,j} P_j(x) \right) P_m(x) d\alpha(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(b_{n,j} \int_a^b P_j(x) P_m(x) d\alpha(x) \right) \\ &= b_{n,m} \int_a^b P_m(x) P_m(x) d\alpha(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

por el argumento anterior se tiene entonces que $b_{n,m} = 0$ para $m = 0, 1, \cdots, n - kr - 1$ y por tanto, se puede escribir

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{kr} b_{n,n-j} P_{n-j}(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

donde, por conveniencia, se define $b_{n,n-j} = 0 \; si \; n - j < 0$. Solo queda mostrar que, para $r > 1$, $b_{n,n-j} = 0 \; si \; j \neq 0, r, \cdots, kr$. Para este fin, sea $n > 0$ fijo y asuma que lo siguiente es verdadero; para cada $m < n$

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^{k} b_{m,m-ir} P_{m-ir}(x) \qquad (m = 0, 1, \cdots, n - 1). \tag{3.7}$$

La anterior expresión claramente se mantiene para $m = 0$. Supóngase que falla para $m = n$. Entonces existe cierto $b_{n,n-ir+j} \neq 0, 0 < j < r, n - ir + j \geq 0$. Sea $n - sr + t$ el menor entero tal que $b_{n,n-sr+t} \neq 0$. Entonces es necesario que $n - sr + t \geq 0$ y por (3.7)

$$\begin{aligned}
\int_a^b Q_n(x) Q_{n-sr+t}(x) d\alpha(x) &= \\
&= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{k} b_{n,n-ir} P_{n-ir}(x) \right) \left(\sum_{i=0}^{k} b_{n-sr+t,n-sr+t-ir} P_{n-sr+t-ir}(x) \right) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b \left(b_{n,n-sr+t} P_{n-sr+t}(x) b_{n-sr+t,n-sr+t} P_{n-sr+t}(x) \right) d\alpha(x) \\
&= b_{n,n-sr+t} b_{n-sr+t,n-sr+t} \int_a^b P_{n-sr+t}(x) P_{n-sr+t}(x) d\alpha(x). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

En la parte derecha de la ecuación (3.8), $b_{n,n-sr+t} b_{n-sr+t,n-sr+t} \neq 0$, ya que $b_{n,n-sr+t} \neq 0$ y $b_{n-sr+t,n-sr+t}$ es el término lider de $Q_{n-sr+t}(x)$, también la integral del lado derecho es diferente de cero por (2.17). Por otra parte, la integral del lado izquierdo de la ecuación (3.8) es cero ya que $n \neq n - sr + t \pm jr$, luego esto es una contradicción. Así (3.7) es cierto. $\square$

Corolario 3.2.1. *Si las hipótesis del Teorema 3.2.1 se mantienen y haciendo $k = 1$ y $r = 1$, entonces un conjunto de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, en donde $Q_n(x)$ es de grado precisamente n, es casi-ortogonal de indice $(1, 1)$ si, y solo si, estos polinomios son de la forma*

$$Q_n(x) = a_{n,0} P_n(x) + a_{n,1} P_{n-1}(x), \qquad a_{n,0}, a_{n,1} \text{ constantes}, a_{n,0} \neq 0. \qquad (3.9)$$

Donde $P_n(x)$ denota el n-ésimo polinomio ortogonal asociado con la distribución $d\alpha(x)$ en un intervalo (a, b) y $P_{-1}(x) = 0$.

Nota 3.2.1. *Este corolario se presenta en el artículo [6, p.1] en la ecuación (2) , y en el mencionan que $a_{n,1} \neq 0$, pero al reconstruir la demostración en [5, p.2] no mencionan esto. También en Adelante, todos los resultados se presentan para polinomios casi-ortogonales de indice $(1, 1)$.*

3.2.2. Vínculo entre ortogonalidad y casi-ortogonalidad

Teorema 3.2.2. *Para que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sea un conjunto de polinomios casi-ortogonales con respecto a un intervalo (a, b) y una distribución $d\alpha(x)$, es necesario y suficiente que exista un conjunto de constantes diferentes de cero $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ y un conjunto de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a (a, b) y $d\alpha(x)$ tal que*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_i Q_i(x). \qquad n \geq 0.$$

Demostración. $\Rightarrow$) La casi-ortogonalidad de $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ implica la existencia de un intervalo relevante y una distribución de la casi-ortogonalidad, y por tanto, la existencia de un conjunto correspondiente de polinomios ortogonales $\left\{\overline{P}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Como los polinomios de cada conjunto son de grado precisamente n, se puede escribir

$$\overline{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i} Q_i(x), \qquad n \geq 0, \tag{3.10}$$

donde $B_{n,0} \neq 0$ para todo n. Para ver esto, supóngase que existe un m tal que $B_{m,0} = 0$ entonces multiplicando la ecuación

$$\overline{P}_m(x) = \sum_{i=1}^{m} B_{m,i} Q_i(x)$$

sucesivamente por $d\alpha(x), xd\alpha(x), ..., x^{m-1}d\alpha(x)$ e integrando sobre (a, b), se tiene respectivamente que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{P}_m(x) d\alpha(x) &= \int_a^b \sum_{i=1}^{m} B_{m,i} Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b B_{m,0} Q_0(x) d\alpha(x) + \int_a^b B_{m,1} Q_1(x) d\alpha(x) \\
&= B_{m,1} \int_a^b Q_1(x) d\alpha(x).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La integral del lado izquierdo de (3.11) es cero, y la integral del lado derecho de (3.11) es diferente de cero. Por tanto $B_{m,1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\overline{P}_m(x) d\alpha(x) &= \int_a^b \sum_{i=1}^{m} B_{m,i} x Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b B_{m,1} x Q_1(x) d\alpha(x) + \int_a^b B_{m,2} x Q_2(x) d\alpha(x) \\
&= B_{m,2} \int_a^b x Q_2(x) d\alpha(x).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

La integral del lado izquierdo de (3.12) es cero, y la integral del lado derecho de (3.12) es diferente de cero. Por tanto $B_{m,2} = 0$.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{m-1}\overline{P}_m(x) d\alpha(x) &= \int_a^b \sum_{i=1}^{m} B_{m,i} x^{m-1} Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b B_{m,m-1} x^{m-1} Q_{m-1}(x) d\alpha(x) + \int_a^b B_{m,m} x^{m-1} Q_m(x) d\alpha(x) \\
&= B_{m,m} \int_a^b x^{m-1} Q_m(x) d\alpha(x).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La integral del lado izquierdo de (3.13) es cero, y la integral del lado derecho de (3.13) es diferente de cero. Por tanto $B_{m,m} = 0$. Luego se sigue que $\overline{P}_m(x)$ es la función constante 0, lo cual es absurdo ya que no sería de grado m.

Lo que sigue es normalizar los polinomios ortogonales de la forma

$$\overline{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i} Q_i(x), \qquad n \geq 0,$$

haciendo

$$P_n(x) = \frac{\overline{P}_n(x)}{B_{n,0}}.$$

La identidad (3.10) toma entonces la siguiente forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_{n,i} Q_i(x) \qquad n \geq 0,$$

con

$$T_{n,0} = T_{0,0} \neq 0, \qquad \textit{para } n \geq 0.$$

Esto implica que

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = T_{n,n} Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) Q_i(x) \qquad n \geq 1, \tag{3.14}$$

con $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$. Multiplicando sucesivamente a (3.14) por $d\alpha(x), x d\alpha(x), ..., x^{n-2} d\alpha(x)$ e integrando sobre (a, b), entonces:
Para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (P_n(x) - P_{n-1}(x)) d\alpha(x) &= \int_a^b \left(T_{n,n} Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) Q_i(x) \right) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b T_{n,n} Q_n(x) d\alpha(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= (T_{n,1} - T_{n-1,1}) \int_a^b Q_1(x) d\alpha(x).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La integral del lado izquierdo de (3.15) es cero, y la integral del lado derecho de (3.15) es diferente de cero. Por tanto $T_{n,1} - T_{n-1,1} = 0$. Para $n \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x(P_n(x) - P_{n-1}(x))d\alpha(x) = \\
&\int_a^b \left(T_{n,n} x Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) x Q_i(x) \right) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b T_{n,n} x Q_n(x) d\alpha(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) x Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= (T_{n,1} - T_{n-1,1}) \int_a^b x Q_1(x) d\alpha(x) + (T_{n,2} - T_{n-1,2}) \int_a^b x Q_2(x) d\alpha(x) \\
&= (T_{n,2} - T_{n-1,2}) \int_a^b x Q_2(x) d\alpha(x). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

La integral del lado izquierdo de (3.16) es cero, y la integral del lado derecho de (3.16) es diferente de cero. Por tanto $T_{n,2} - T_{n-1,2} = 0$.

$$
\vdots \qquad \qquad \vdots
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^{n-2}(P_n(x) - P_{n-1}(x))d\alpha(x) = \\
&\int_a^b \left(T_{n,n} x^{n-2} Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) x^{n-2} Q_i(x) \right) d\alpha(x) \\
&= \int_a^b T_{n,n} x^{n-2} Q_n(x) d\alpha(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^{n-1} (T_{n,i} - T_{n-1,i}) x^{n-2} Q_i(x) d\alpha(x) \\
&= (T_{n,n-1} - T_{n-1,n-1}) \int_a^b x^{n-2} Q_{n-1}(x) d\alpha(x) \\
&= (T_{n,n-1} - T_{n-1,n-1}) \int_a^b x^{n-2} Q_{n-1}(x) d\alpha(x). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

La integral del lado izquierdo de (3.17) es cero, y la integral del lado derecho de (3.17) es diferente de cero. Por tanto $T_{n,n-1} - T_{n-1,n-1} = 0$. Se obtiene como conclusión entonces que

$$
\begin{aligned}
T_{n,1} - T_{n-1,1} &= 0 \\
T_{n,2} - T_{n-1,2} &= 0 \\
T_{n,3} - T_{n-1,3} &= 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
T_{n,n-1} - T_{n-1,n-1} &= 0.
\end{aligned}
$$

Como n puede ser tomado arbitrariamente grande, se puede definir entonces $T_i = T_{n,i}$ para todo n e i para los cuales $T_{n,i}$ esta definido. Por lo tanto

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_i Q_i(x), \qquad n \geq 0.$$

Si para alguno de los elementos de $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$, por ejemplo T_m fuera cero, entonces el absurdo de que $P_m(x)$ es de grado menor que m se seguiría.
$\Leftarrow$) Se prueba la suficiencia nada más notando que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_i Q_i(x), \qquad n \geq 0,$$

implica que

$$\begin{aligned} P_n(x) - P_{n-1}(x) &= T_n Q_n(x),\ n \geq 1 \\ P_0(x) &= T_0 Q_0(x), \end{aligned}$$

y por el Corolario 3.2.1 se tiene el resultado. □

3.2.3. Condición de casi-ortogonalidad

Teorema 3.2.3. *Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, donde cada $Q_n(x)$ es un polinomio de grado precisamente n, sea casi-ortogonal es que satisfaga*

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) + D_n \sum_{i=0}^{n-2} T_i Q_i(x) \tag{3.18}$$

para todo n y donde $T_i \neq 0$,

$$\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}} - \frac{C_n T_n}{T_{n-1}} + D_n T_n = 0 \tag{3.19}$$

para todo n, y

$$\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n}\left(\frac{C_{n+1}T_{n+1}}{T_n} + D_{n+1}T_{n+1}\right) > 0 \tag{3.20}$$

para todo $n \geq 1$, y donde cualesquiera términos que involucren $A_n, B_n, C_{n+1}, D_{n+2}$ o $Q_n(x)$ con n negativo son tomados como cero.

Demostración. $\Rightarrow$) La existencia del conjunto de polinomios casi-ortogonal $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ implica, por el Teorema 3.2.2, la existencia de un conjunto de constantes diferentes de cero

$\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ y un conjunto de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a (a,b) y $d\alpha(x)$ tal que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_i Q_i(x). \tag{3.21}$$

Como el n-ésimo polinomio de cada conjunto es precisamente de grado n, existen coeficientes tal que

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) + Z_{n-2}Q_{n-2}(x) + \cdots + Z_1 Q_1(x) + Z_0 Q_0(x).$$

Usando el Corolario 3.2.1 para $Q_{n-2}(x), \cdots, Q_1(x), Q_0(x)$, entonces

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} A_{n,i} P_i(x) \qquad n \geq 2. \tag{3.22}$$

Si se multiplica (3.22) sucesivamente por $d\alpha(x), xd\alpha(x), \cdots, x^{n-3}d\alpha(x)$ e integra sobre (a,b), entonces:
Para $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \int_a^b xQ_n(x)d\alpha(x) &= \int_a^b (A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} A_{n,i} P_i(x))d\alpha(x) \\ &= A_{n,0} \int_a^b P_0(x)d\alpha(x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.23) es igual a cero, y la integral del lado derecho de la ecuación (3.23) es diferente de cero. Por tanto $A_{n,0} = 0$.
Para $n \geq 4$

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 Q_n(x)d\alpha(x) &= \int_a^b x(A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} A_{n,i} P_i(x))d\alpha(x) \\ &= A_{n,1} \int_a^b xP_1(x)d\alpha(x). \end{aligned} \tag{3.24}$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.24) es igual a cero, y la integral del lado derecho de la ecuación (3.24) es diferente de cero. Por tanto $A_{n,1} = 0$.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_a^b x^{n-2}Q_n(x)d\alpha(x) = \int_a^b x^{n-3}(A_nQ_{n+1}(x) + B_nQ_n(x) + C_nQ_{n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} A_{n,i}P_i(x))d\alpha(x)$$
$$= A_{n,n-3}\int_a^b x^{n-3}P_{n-3}(x)d\alpha(x). \tag{3.25}$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.25) es igual a cero, y la integral del lado derecho de la ecuación (3.25) es diferente de cero. Por tanto $A_{n,n-3} = 0$.

Entonces de (3.22)

$$xQ_n(x) = A_nQ_{n+1}(x) + B_nQ_n(x) + C_nQ_{n-1}(x) + D_nP_{n-2}(x), \qquad n \geq 2,$$

y por el Teorema 3.2.2

$$xQ_n(x) = A_nQ_{n+1}(x) + B_nQ_n(x) + C_nQ_{n-1}(x) + D_n\sum_{i=0}^{n-2} T_iQ_i(x), \qquad n \geq 2.$$

De (3.21) se puede escribir, donde $P_n(x) = 0$ para $n < 0$,

$$T_nQ_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), \qquad \textit{para todo } n,$$

y por tanto, la ecuación (3.18) se puede escribir como

$$x(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \frac{A_nT_n}{T_{n+1}}(P_{n+1}(x) - P_n(x)) + B_n(P_n(x) - P_{n-1}(x))$$
$$+ \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)) + D_nT_nP_{n-2}(x) \tag{3.26}$$

para todo n. Las posibles apariciones de $T_i's$ con negativos i es puramente formal. Cualquiera de dichos T_i puede ser un valor diferente de cero, y por las convenciones en coeficientes que se establecieron en este teorema, los términos que acompañan dichos T_i son cero. Se puede escribir (3.26) como

$$x(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \frac{A_nT_n}{T_{n+1}}P_{n+1}(x) + \left(B_n - \frac{A_nT_n}{T_{n+1}}\right)P_n(x)$$
$$+ \left(\frac{C_nT_n}{T_{n-1}} - B_n\right)P_{n-1}(x) + \left(D_nT_n - \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right)P_{n-2}(x) \tag{3.27}$$

o que

$$\begin{aligned}
xP_n(x) - xP_{n-1}(x) = \\
&\frac{A_nT_n}{T_{n+1}}P_{n+1} + \left(\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} - \frac{A_nT_n}{T_{n+1}} + B_n\right)P_n(x) \\
&- \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n}P_n(x) - \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1}\right)P_{n-1}(x) \\
&+ \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1} - B_n + \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right)P_{n-1}(x) \\
&- \left(\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}}\right)P_{n-2}(x) \\
&+ \left(\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}} - \frac{C_nT_n}{T_{n-1}} + D_nT_n\right)P_{n-2}(x)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

para todo n. Entonces

$$\begin{aligned}
xP_n(x) = {} & \frac{A_nT_n}{T_{n+1}}P_{n+1}(x) + \left(\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} - \frac{A_nT_n}{T_{n+1}} + B_n\right)P_n(x) \\
&+ \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1} - B_n + \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right)P_{n-1}(x) \\
&+ \left(\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}} - \frac{C_nT_n}{T_{n-1}} + D_nT_n\right)P_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

para $n \geq 0$, pero por el Teorema 2.1.1, ecuación (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
xP_n(x) = {} & \frac{A_nT_n}{T_{n+1}}P_{n+1}(x) + \left(\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} - \frac{A_nT_n}{T_{n+1}} + B_n\right)P_n(x) \\
&+ \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1} - B_n + \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right)P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}} - \frac{C_nT_n}{T_{n-1}} + D_nT_n = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.29}$$

que también es valido para $n < 1$ por las convenciones que se hicieron en el teorema. Por la Nota 2.1.3

$$\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n}\left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1} - B_n + \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right) > 0. \tag{3.30}$$

De (3.29)

$$\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}} = \frac{C_nT_n}{T_{n-1}} - D_nT_n \tag{3.31}$$

y utilizando (3.31) con $n = n+1$, en (3.30)

$$\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n}\left(\frac{C_{n+1}T_{n+1}}{T_n} - D_{n+1}T_{n+1}\right) > 0. \tag{3.32}$$

$\Leftarrow$) Suponga que se tiene un conjunto $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisface (3.18) con las condiciones (3.19) y (3.20). Se define entonces el conjunto de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ por la relación

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} T_iQ_i(x) \quad \Rightarrow \quad T_nQ_n = P_n(x) - P_{n-1}(x),$$

donde $P_n(x) = 0$ para $n < 0$. De (3.28) si

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{A_nT_n}{T_{n+1}},\\
\alpha_{n-1} &= \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n},\\
\beta_n &= \left(\frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} - \frac{A_nT_n}{T_{n+1}} + B_n\right),\\
\beta_{n-1} &= \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1}\right),\\
\gamma_n &= \left(\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} - \frac{A_{n-1}T_{n-1}}{T_n} + B_{n-1} - B_n + \frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\right),\\
\gamma_{n-1} &= \left(\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} - \frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} + B_{n-2} - B_{n-1} + \frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}}\right),
\end{aligned}$$

entonces en (3.27) junto con (3.19), para todo n,

$$x(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \alpha_nP_{n+1}(x) + (\beta_n - \alpha_{n-1})\,P_n(x) + (\gamma_n - \beta_{n-1})\,P_{n-1}(x) - \gamma_{n-1}P_{n-2}(x). \tag{3.33}$$

Si se toma (3.33) y se hace para $n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0, -1$ hasta que se obtenga una expresión con todos sus términos igual a cero, se tiene que

$$\begin{aligned}
x(P_n(x) - P_{n-1}(x)) &= \alpha_nP_{n+1}(x) + (\beta_n - \alpha_{n-1})\,P_n(x) + (\gamma_n - \beta_{n-1})\,P_{n-1}(x) - \gamma_{n-1}P_{n-2}(x)\\
x(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)) &= \alpha_{n-1}P_n(x) + (\beta_{n-1} - \alpha_{n-2})\,P_{n-1}(x) + (\gamma_{n-1} - \beta_{n-2})\,P_{n-2}(x) - \gamma_{n-2}P_{n-3}(x)\\
&\cdots\\
x(P_1(x) - P_0(x)) &= \alpha_1P_2(x) + (\beta_1 - \alpha_0)\,P_1(x) + (\gamma_1 - \beta_0)\,P_0(x) - \gamma_0P_{-1}(x)\\
x(P_0(x) - P_{-1}(x)) &= \alpha_0P_1(x) + (\beta_0 - \alpha_{-1})\,P_0(x) + (\gamma_0 - \beta_{-1})\,P_{-1}(x) - \gamma_{-1}P_{-2}(x)\\
x(P_{-1}(x) - P_{-2}(x)) &= \alpha_{-1}P_0(x) + (\beta_{-1} - \alpha_{-2})\,P_{-1}(x) + (\gamma_{-1} - \beta_{-2})\,P_{-2}(x) - \gamma_{-2}P_{-3}(x)
\end{aligned}$$

y luego se suman todas estas expresiones, se obtiene que para todo n

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \tag{3.34}$$

entonces por (3.34) y (3.20), en el Teorema 2.1.2, el conjunto de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal, y por el teorema Teorema 3.2.2 se puede concluir entonces que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es casi-ortogonal. $\square$

Nota 3.2.2. *En el Teorema 3.2.3 no se pudo mostrar la ecuación (3.20) que se establece en las hipótesis del teorema por un signo, entonces en la prueba, en la ecuación (3.32) queda escrita con signo contrario.*

Si se tiene un conjunto de polinomios casi-ortogonales $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisface (3.18) y para el cual los coeficientes D_n nunca son cero, se puede multiplicar a (3.18) por $D_n^{-1} = \alpha_n$, entonces

$$\alpha_n x Q_n(x) = \alpha_n A_n Q_{n+1}(x) + \alpha_n B_n Q_n(x) + \alpha_n C_n Q_{n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} T_i Q_i(x), \tag{3.35}$$

y en (3.35) cambiando el índice de n a $n-1$

$$\alpha_{n-1} x Q_{n-1}(x) = \alpha_{n-1} A_{n-1} Q_n(x) + \alpha_{n-1} B_{n-1} Q_{n-1}(x) + \alpha_{n-1} C_{n-1} Q_{n-2}(x) + \sum_{i=0}^{n-3} T_i Q_i(x), \tag{3.36}$$

ahora se hace la diferencia de (3.35) con (3.36), entonces se obtiene la fórmula

$$x(\alpha_n Q_n(x) - \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x)) = \beta_n Q_{n+1}(x) + \gamma_n Q_n(x) + \delta_n Q_{n-1}(x) + \epsilon_n Q_{n-2}(x). \tag{3.37}$$

Muchos polinomios que han aparecido en la literatura tienen una relación de recurrencia de esta forma. Por tanto surge la pregunta de si algunos de esos polinomios son casi-ortogonales.

Asuma ahora que se tiene un conjunto de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, cada $Q_n(x)$ de grado precisamente n para $n \geq 0$ y $Q_n(x) = 0$ para $n < 0$ y que satisface (3.37) para todo n. Más aún, asuma que $\alpha_n \neq 0$ para todo n. Como $Q_n(x)$ para n no negativo es de grado precisamente n, existen coeficientes $A_{n,k}$ tal que

$$x\alpha_n Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} A_{n,k} Q_k(x), \qquad n \geq 0. \tag{3.38}$$

Para $n = n - 1$

$$x\alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-1,k} Q_k(x), \qquad n \geq 0,$$

entonces

$$x(\alpha_n Q_n(x) - \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} A_{n,k}Q_k(x) - \sum_{k=0}^{n} A_{n-1,k}Q_k(x). \tag{3.39}$$

Comparando (3.39) y (3.37), entonces

$$\left.\begin{array}{ll} A_{n,n+1} & = \beta_n \\ A_{n,n} - A_{n-1,n} & = \gamma_n \\ A_{n,n-1} - A_{n-1,n-1} & = \delta_n \\ A_{n,n-2} - A_{n-1,n-2} & = \epsilon_n \\ A_{n,w} - A_{n-1,w} & = 0 \end{array}\right\} \textit{para todo } n \textit{ y } w = 0, 1, \cdots, n-3. \tag{3.40}$$

Para hallar los coeficientes de (3.38) usando (3.40) entonces

$$A_{n,n+1} = \beta_n,$$

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= \gamma_n + A_{n-1,n} \\ &= \gamma_n + \beta_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n,n-1} &= \delta_n + A_{n-1,n-1} \\ &= \delta_n + \gamma_{n-1} + \beta_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n,n-2} &= \epsilon_n + A_{n-1,n-2} \\ &= \epsilon_n + \delta_{n-1} + \gamma_{n-2} + \beta_{n-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n,n-3} &= A_{n-1,n-3} \\ &= \epsilon_{n-1} + \delta_{n-2} + \gamma_{n-3} + \beta_{n-4}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} A_{n,0} &= A_{n-1,0} \\ &= \epsilon_2 + \delta_1 + \gamma_0 + \beta_{-1}, \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} x\alpha_n Q_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} A_{n,k}Q_k(x) \\ &= \beta_n Q_{n+1}(x) + (\beta_{n-1} + \gamma_n)Q_n(x) + (\delta_n + \gamma_{n-1} + \beta_{n-2})Q_{n-1}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2}(\epsilon_{k+2} + \delta_{k+1} + \gamma_k + \beta_{k-1})Q_k(x). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Donde la suma en (3.41) toma valor cero si el límite inferior de la sumatoria excede el límite superior. Para llevar (3.41) a la forma (3.18) se hizo el supuesto de que $D_n^{-1} = \alpha_n$ ya que se usó la ecuación (3.37). Por tanto la ecuación

$$\begin{aligned} xQ_n(x) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} Q_{n+1}(x) + \frac{(\beta_{n-1} + \gamma_n)}{\alpha_n} Q_n(x) + \frac{(\delta_n + \gamma_{n-1} + \beta_{n-2})}{\alpha_n} Q_{n-1}(x) \\ + \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{n-2} (\epsilon_{k+2} + \delta_{k+1} + \gamma_k + \beta_{k-1}) Q_k(x) \quad (3.42) \end{aligned}$$

cumple (3.18), y las condiciones (3.19) y (3.20) se pueden escribir sin mayor dificultad porque estas condiciones están en términos de los escalares de (3.18), que pueden ser escritos de forma específica al comparar (3.18) con (3.42).

3.3. Polinomios de Sor Celine

El objetivo de esta sección es entonces exhibir como ejemplo que los polinomios de Sor Celine son polinomios casi-ortogonales. Las definiciones y teoremas se han tomado de [8]

Definición 3.3.1. *Se define un caso especial de un conjunto de polinomios hipergeométricos generalizados así*

$$f_n(a; -; x) = {}_3F_2(-n, n+1, a; \frac{1}{2}, 1; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r (n+1)_r (a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r (1)_r r!}.$$

El término a es independiente de n y es diferente a 1 o $\frac{1}{2}$.

3.3.1. Relación de recurrencia de $f_n(a; -; x)$

En la lista siguiente, la cantidad que sigue después de los dos puntos es el factor por el cual

$$\frac{(-n)_r (n+1)_r (a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r (1)_r r!}$$

se debe multiplicar para dar la respectiva expresión bajo el signo de la sumatoria para cada uno de los f_k y xf_k con $k = n, n-1, \cdots, n-3$ y donde f_k es una abreviación de $f_k(a; -; x)$

- Para f_n, $f_n : 1$
- Para f_{n-1}, de

$$\frac{(-(n-1))_r (n)_r (a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r (1)_r r!},$$

$$\begin{aligned}(-(n-1))_r &= (-(n-1))(-(n-1)+1)\cdots(-(n-1)+r-2)(-(n-1)+r-1)\\ &= \frac{(-n)_r(-(n-1)+r-1)}{-n},\end{aligned}$$

y $(n)_r = (n)(n+1)\cdots(n+r-2)(n+r-1) = \dfrac{(n+1)_r n}{(n+r)}$,

así $f_{n-1} : \dfrac{n-r}{n+r}$.

- Para xf_{n-1}, de

$$\frac{(-(n-1))_r(n)_r(a)_r x^{r+1}}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!},$$

haciendo $w = r+1 \Longrightarrow r = w-1$

$$\frac{(-(n-1))_{w-1}(n)_{w-1}(a)_{w-1}x^w}{(\frac{1}{2})_{w-1}(1)_{w-1}(w-1)!},$$

entonces

$$\begin{aligned}(-(n-1))_{w-1} &= (-(n-1))(-(n-1)+1)\cdots(-(n-1)+(w-1)-2)(-(n-1)+(w-1)-1)\\ &= \frac{(-n)_w}{(-n)},\end{aligned}$$

$$(n)_{w-1} = (n)(n+1)\cdots(n+(w-1)-1) = \frac{n(n+1)_w}{(n+w)(n+w-1)},$$

$$(a)_{w-1} = a(a+1)\cdots(a+(w-1)-1) = \frac{(a)_w}{(a+w-1)},$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})_{w-1}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}+(w-1)-1)} = \frac{\frac{1}{2}+w-1}{(\frac{1}{2})_w},$$

$$\frac{1}{(1)_{w-1}} = \frac{w}{(1)_w},$$

$$\frac{1}{(w-1)!} = \frac{w}{w!}.$$

Así, haciendo de nuevo el cambio $r = w$, $xf_{n-1} : \dfrac{-r^2(r-\frac{1}{2})}{(n+r)(n+r-1)(a+r-1)}$.

- Para f_{n-2}, de

$$\frac{(-(n-2))_r(n-1)_r(a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!},$$

$$\begin{aligned}(-(n-2))_r &= (-(n-2))(-(n-2)+1)\cdots(-(n-2)+r-2)(-(n-2)+r-1)\\ &= \frac{(-n)_r(-n+r)(-n+r+1)}{(-n)(-n+1)},\end{aligned}$$

y $(n-1)_r = (n-1)((n-1)+1)\cdots((n-1)+r-2)((n-1)+r-1) = \dfrac{(n+1)_r(n)(n-1)}{(n+r-1)(n+r)}$.

Así $f_{n-2} : \dfrac{(n-r)(n-r-1)}{(n+r-1)(n+r)}$

- Para xf_{n-2}

$$\frac{(-(n-2))_r(n-1)_r(a)_r x^{r+1}}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!},$$

haciendo $w = r + 1 \Longrightarrow r = w - 1$

$$\frac{(-(n-2))_{w-1}(n-1)_{w-1}(a)_{w-1}x^{w}}{(\frac{1}{2})_{w-1}(1)_{w-1}(w-1)!},$$

entonces

$$\begin{aligned}
(-(n-2))_{w-1} &= (-(n-2))(-(n-2)+1)\cdots(-(n-2)+(w-1)-2)(-(n-2)+(w-1)-1)\\
&= \frac{(-n)_w(-n+w)}{(-n)(-n+1)},
\end{aligned}$$

$$(n-1)_{w-1} = (n-1)((n-1)+1)\cdots((n-1)+(w-1)-1) = \frac{(n+1)_w n(n-1)}{(n+w-2)(n+w-1)(n+w)},$$

$$(a)_{w-1} = a(a+1)\cdots(a+(w-1)-1) = \frac{(a)_w}{(a+w-1)},$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})_{w-1}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}+(w-1)-1)} = \frac{\frac{1}{2}+w-1}{(\frac{1}{2})_w},$$

$$\frac{1}{(1)_{w-1}} = \frac{w}{(1)_w},$$

$$\frac{1}{(w-1)!} = \frac{w}{w!}.$$

Así que

$$\frac{(-(n-2))_r(n-1)_r(a)_r x^{r+1}}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!} = \frac{(-n+w)n(n-1)(\frac{1}{2}+w-1)w^2(-(n))_w(n+1)_w(a)_w x^w}{(-n)(-n+1)(n+w-2)(n+w-1)(n+w)(a+w-1)(\frac{1}{2})_w(1)_w w!}$$

haciendo el cambio $r = w$, xf_{n-2} : $\dfrac{-r^2(n-r)(r-\frac{1}{2})}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1)}$

- Para f_{n-3}, de

$$\frac{(-(n-3))_r(n-2)_r(a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!},$$

$$\begin{aligned}
(-(n-3))_r &= (-(n-3))(-(n-3)+1)\cdots(-(n-3)+r-2)(-(n-3)+r-1)\\
&= \frac{(-n)_r(-n+r)(-n+r+1)(-n+r+2)}{(-n)(-n+1)(-n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{y } (n-2)_r &= (n-2)((n-2)+1)\cdots((n-2)+r-2)((n-2)+r-1)\\
&= \frac{(n+1)_r(n-2)(n-1)n}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)}.
\end{aligned}$$

Así f_{n-3} : $\dfrac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)}$.

Se puede ver que cada término comparte términos con la expresión $(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1)$, y por tanto ni el numerador ni el denominador exceden grado 4 en la variable r. En de interés encontrar entonces las constantes A, B, C, D, E que cumplen la ecuación

$$f_n + (A + Bx)f_{n-1} + (C + Dx)f_{n-2} + Ef_{n-3} = 0, \tag{3.43}$$

en donde A, B, C, D, E son funciones racionales en n e independientes de x. Para encontrar los coeficientes en (3.43), se reemplaza las ocurrencias de cada función con sus respectivos factores, así

$$\left(1 + A\left(\frac{n-r}{n+r}\right) + B\left(\frac{-r^2(r-\frac{1}{2})}{(n+r)(n+r-1)(a+r-1)}\right) + C\left(\frac{(n-r)(n-r-1)}{(n+r-1)(n+r)}\right)\right.$$
$$+D\left(\frac{-r^2(n-r)(r-\frac{1}{2})}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1)}\right)$$
$$\left.+E\left(\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)}\right)\right)\frac{(-n)_r(n+1)_r(a)_r x^r}{(\frac{1}{2})_r(1)_r r!} = 0,$$

entonces

$$1 + A\left(\frac{n-r}{n+r}\right) + B\left(\frac{-r^2(r-\frac{1}{2})}{(n+r)(n+r-1)(a+r-1)}\right) + C\left(\frac{(n-r)(n-r-1)}{(n+r-1)(n+r)}\right)$$
$$+ D\left(\frac{-r^2(n-r)(r-\frac{1}{2})}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1)}\right)$$
$$+ E\left(\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{(n+r-2)(n+r-1)(n+r)}\right) = 0,$$

haciendo los denominadores homogéneos, sumando los términos y multiplicando por el término del denominado de la suma total, entonces

$$\begin{aligned}(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1) + A(n-r)(n+r-2)(n+r-1)(a+r-1)\\ - Br^2(r-\frac{1}{2})(n+r-2) + C(n-r)(n-r-1)(n+r-2)(a+r-1)\\ - Dr^2(n-r)(r-\frac{1}{2}) + E(n-r)(n-r-1)(n-r-2)(a+r-1) = 0.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Haciendo los productos, entonces

- $(n+r-2)(n+r-1)(n+r)(a+r-1) = an^3+3an^2r-3an^2+3anr^2-6anr+2an+ar^3-3ar^2+2ar+n^3r-n^3+3n^2r^2-6n^2r+3n^2+3nr^3-9nr^2+8nr-2n+r^4-4r^3+5r^2-2r$,

- $A(n-r)(n+r-2)(n+r-1)(a+r-1) = A(an^3+an^2r-3an^2-anr^2+2an-ar^3+3ar^2-2ar+n^3r-n^3+n^2r^2-4n^2r+3n^2-nr^3+nr^2+2nr-2n-r^4+4r^3-5r^2+2r)$,

- $-Br^2(r-\frac{1}{2})(n+r-2) = -Bnr^3+\frac{1}{2}Bnr^2-Br^4+\frac{5Br^3}{2}-Br^2$,

- $C(n-r)(n-r-1)(n+r-2)(a+r-1) = C(an^3-an^2r-3an^2-anr^2+4anr+2an+ar^3-ar^2-2ar+n^3r-n^3-n^2r^2-2n^2r+3n^2-nr^3+5nr^2-2nr-2n+r^4-2r^3-r^2+2r)$,

- $Dr^2(-n+r)(-\frac{1}{2}+r) = -Dnr^3+\frac{1}{2}Dnr^2+Dr^4-\frac{Dr^3}{2}$,

- $E(n-r)(n-r-1)(n-r-2)(a+r-1) = E(an^3-3an^2r-3an^2+3anr^2+6anr+2an-ar^3-3ar^2-2ar+n^3r-n^3-3n^2r^2+3n^2+3nr^3+3nr^2-4nr-2n-r^4-2r^3+r^2+2r)$.

Ahora, (3.44) está igualado aun un polinomio de grado 4 con coeficientes iguales a cero, por tanto, de los productos que se han obtenido, se factorizan los términos r^4, r^3, r^2, r^1 y términos sin r y se obtiene el siguiente sistema de 5 ecuaciones con 5 variables a determinar (A, B, C, D, E):

r^4) $r^4(1 - A - B + C + D - E) = 0$

r^3) $r^3(a + 3n - 4 - aA - nA + 4A - Bn + \frac{5B}{2} + aC - nC - 2C - Dn - \frac{D}{2} - aE + 3nE - 2E) = 0$

r^2) $r^2(3an - 3a + 3n^2 - 9n + 5 - anA + 3aA + n^2A + nA - 5A + \frac{nB}{2} - B - anC - aC - n^2C + 5nC - C + \frac{nD}{2} + 3anE - 3aE - 3n^2E + 3nE + E) = 0$

r) $r(3an^2 - 6an + 2a + n^3 - 6n^2 + 8n - 2 + an^2A - 2aA + n^3A - 4n^2A + 2nA + 2A - an^2C + 4anC - 2aC + n^3C - 2n^2C - 2nC + 2C - 3an^2E + 6anE - 2aE + n^3E - 4nE + 2E) = 0$

Cons. $(an^3 - 3an^2 + 2an - n^3 + 3n^2 - 2n + an^3A - 3an^2A + 2anA - n^3A + 3n^2A - 2nA + an^3C + 2anC - 3an^2C - n^3C + 3n^2C - 2nC + an^3E + 2anE - 3an^2E - n^3E + 3n^2E - 2nE) = 0,$

esto es

1. $-A - B + C + D - E = -1$
2. $(-a - n + 4)A - (n - \frac{5}{2})B + (a - n - 2)C - (n + \frac{1}{2})D - (a - 3n + 2)E = -a - 3n + 4$
3. $(-an + 3a + n^2 + n - 5)A + (\frac{n}{2} - 1)B + (-an - a - n^2 + 5n - 1)C + \frac{n}{2}D + (3an - 3a - 3n^2 + 3n + 1)E = -3an + 3a - 3n^2 + 9n - 5$
4. $(an^2 - 2a + n^3 - 4n^2 + 2n + 2)A + (-an^2 + 4an - 2a + n^3 - 2n^2 - 2n + 2)C + (-3an^2 + 6an - 2a + n^3 - 4n + 2)E = -3an^2 + 6an - 2a - n^3 + 6n^2 - 8n + 2$
5. $(an^3 - 3an^2 + 2an - n^3 + 3n^2 - 2n)A + (an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)C + (an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)E = -an^3 + 3an^2 - 2an + n^3 - 3n^2 + 2n.$

De la ecuación 5.

$$\begin{aligned} E &= -1 - \frac{(an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)}{(an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)}A - \frac{(an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)}{(an^3 + 2an - 3an^2 - n^3 + 3n^2 - 2n)}C \\ &= -1 - A - C, \end{aligned} \tag{3.45}$$

reemplazando (3.45) en las otras ecuaciones se tiene que

1. $-A - B + C + D - (-1 - A - C) = -1$
2. $(-a - n + 4)A - (n - \frac{5}{2})B + (a - n - 2)C - (n + \frac{1}{2})D - (a - 3n + 2)(-1 - A - C) = -a - 3n + 4$

3. $(3a - an + n^2 + n - 5)A + (\frac{n}{2} - 1)B - (an + a + n^2 - 5n + 1)C + \frac{n}{2}D + (-3a + 3an - 3n^2 + 3n + 1)(-1 - A - C) = -3an + 3a - 3n^2 + 9n - 5$

4. $(an^2 - 2a + n^3 - 4n^2 + 2n + 2)A + (-an^2 - 2a + 4an + n^3 - 2n^2 - 2n + 2)C + (-3an^2 - 2a + 6an + n^3 - 4n + 2)(-1 - A - C) = -3an^2 + 6an - 2a - n^3 + 6n^2 - 8n + 2,$

esto es

1. $-B + 2C + D = -2$

2. $(-a - n + 4)A - (n - \frac{5}{2})B + (a - n - 2)C - (n + \frac{1}{2})D + (a - 3n + 2) + (a - 3n + 2)A + (a - 3n + 2)C = -a - 3n + 4$

3. $(3a - an + n^2 + n - 5)A + (\frac{n}{2} - 1)B - (an + a + n^2 - 5n + 1)C + \frac{n}{2}D - (-3a + 3an - 3n^2 + 3n + 1) - (-3a + 3an - 3n^2 + 3n + 1)A - (-3a + 3an - 3n^2 + 3n + 1)C = -3an + 3a - 3n^2 + 9n - 5$

4. $(an^2 - 2a + n^3 - 4n^2 + 2n + 2)A + (-an^2 - 2a + 4an + n^3 - 2n^2 - 2n + 2)C - (-3an^2 - 2a + 6an + n^3 - 4n + 2) - (-3an^2 - 2a + 6an + n^3 - 4n + 2)A - (-3an^2 - 2a + 6an + n^3 - 4n + 2)C = -3an^2 + 6an - 2a - n^3 + 6n^2 - 8n + 2,$

factorizando y operando lo que se puede operar se obtiene el sistema

1. $-B + 2C + D = -2$

2. $(6 - 4n)A - (n - \frac{5}{2})B + (2a - 4n)C - (n + \frac{1}{2})D = -2a + 2$

3. $(6a - 6 - 4an + 4n^2 - 2n)A + (\frac{n}{2} - 1)B + (2a - 4an + 2n^2 + 2n - 2)C + \frac{n}{2}D = -6n^2 + 12n - 4$

4. $(4an^2 - 4n^2 - 6an + 6n)A + (2an^2 - 2an + 2n - 2n^2)C = -6an^2 + 12an - 4a + 6n^2 - 12n + 4.$

De la ecuación 1.

$$D = -2 + B - 2C. \tag{3.46}$$

Reemplazando (3.46) en las otras ecuaciones se tiene que

2. $(6 - 4n)A - (n - \frac{5}{2})B + (2a - 4n)C - (n + \frac{1}{2})(-2 + B - 2C) = -2a + 2$

3. $(6a - 6 - 4an + 4n^2 - 2n)A + (\frac{n}{2} - 1)B + (2a - 4an + 2n^2 + 2n - 2)C + \frac{n}{2}(-2 + B - 2C) = -6n^2 + 12n - 4$

4. $(4an^2 - 4n^2 - 6an + 6n)A + (2an^2 - 2an + 2n - 2n^2)C = -6an^2 + 12an - 4a + 6n^2 - 12n + 4,$

multiplicando la ecuación 4. por $\frac{1}{2}$, factorizando y operando lo que se puede operar se obtiene el sistema

2. $(6-4n)A+(-2n+2)B+(2a-2n+1)C=-2a+1-2n$

3. $(6a-6-4an+4n^2-2n)A+(n-1)B+(2a-4an+2n^2+n-2)C=-6n^2+13n-4$

4. $(2an^2-2n^2-3an+3n)A+(an^2-an+n-n^2)C=-3an^2+6an-2a+3n^2-6n+2,$

multiplicando la ecuación 2. por $\frac{1}{2}$

2. $(3-2n)A+(-n+1)B+(a-n+\frac{1}{2})C=-a+\frac{1}{2}-n$

3. $(6a-6-4an+4n^2-2n)A+(n-1)B+(2a-4an+2n^2+n-2)C=-6n^2+13n-4$

4. $(2an^2-2n^2-3an+3n)A+(an^2-an+n-n^2)C=-3an^2+6an-2a+3n^2-6n+2.$

De la ecuación 2. despejando $(n-1)B$

$$(n-1)B=a-\frac{1}{2}+n+(a-n+\frac{1}{2})C+(3-2n)A, \tag{3.47}$$

reemplazando (3.47) en la ecuación 3.

3. $(6a-6-4an+4n^2-2n)A+a-\frac{1}{2}+n+(a-n+\frac{1}{2})C+(3-2n)A+(2a-4an+2n^2+n-2)C=-6n^2+13n-4$

4. $(2an^2-2n^2-3an+3n)A+(an^2-an+n-n^2)C=-3an^2+6an-2a+3n^2-6n+2,$

factorizando y operando lo que se pueda operar se obtiene el sistema

3. $(6a-3-4an+4n^2-4n)A+(-\frac{3}{2}+3a-4an+2n^2)C=-6n^2+12n-a-\frac{7}{2}$

4. $(2an^2-2n^2-3an+3n)A+(an^2-an+n-n^2)C=-3an^2+6an-2a+3n^2-6n+2.$

De la ecuación 4. despejando C se tiene que

$$\begin{aligned} C &= \frac{-3an^2+6an-2a+3n^2-6n+2-(2an^2-2n^2-3an+3n)A}{(an^2-an+n-n^2)} \\ &= \frac{-3n^2+6n-2}{n^2-n}+\frac{3-2n}{n-1}A, \end{aligned} \tag{3.48}$$

y reemplazando (3.48) en 3.

$$(6a-3-4an+4n^2-4n)A+(-\frac{3}{2}+3a-4an+2n^2)(\frac{-3n^2+6n-2}{n^2-n}+\frac{3-2n}{n-1}A)=-6n^2+12n-a-\frac{7}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} &(6a-3-4an+4n^2-4n)A+(-\frac{3}{2}+3a-4an+2n^2)(\frac{3-2n}{n-1})A \\ &\qquad =-6n^2+12n-a-\frac{7}{2}-(-\frac{3}{2}+3a-4an+2n^2)(\frac{-3n^2+6n-2}{n^2-n}), \end{aligned}$$

esto es

$$(6a-3-4an+4n^2-4n+\frac{16an^2-36an+18a-8n^3+12n^2+6n-9}{2n-2})A$$
$$=-6n^2+12n-a-\frac{7}{2}-\frac{24an^3-66an^2+52an-12a-12n^4+24n^3+n^2-18n+6}{2n^2-2n}),$$

finalmente haciendo los cálculos que faltan

$$\frac{(2a-1)(4n^2-8n+3)}{2(n-1)}A=-\frac{(2a-1)(2n-3)(2n-1)(3n-2)}{2(n-1)n},$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(2n-3)(2n-1)(3n-2)}{(4n^2-8n+3)n} \\ &= -\frac{3n-2}{n}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Reemplazando (3.49) en (3.48)

$$\begin{aligned} C &= \frac{-3n^2+6n-2}{n^2-n}+\frac{3-2n}{n-1}\left(-\frac{3n-2}{n}\right) \\ &= \frac{3n-4}{n}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Reemplazando (3.49), (3.50) en (3.47)

$$\begin{aligned} (n-1)B &= a-\frac{1}{2}+n+(a-n+\frac{1}{2})\left(\frac{3n-4}{n}\right)+(3-2n)\left(-\frac{3n-2}{n}\right) \\ &= \frac{4(an-a+n^2-2n+1)}{n} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} B &= \frac{4(an-a+n^2-2n+1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{4(a+n-1)}{n}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Reemplazando (3.50), (3.51) en (3.46)

$$\begin{aligned} D &= -2+B-2C. \\ &= -2+\left(\frac{4(a+n-1)}{n}\right)-2\left(\frac{3n-4}{n}\right) \\ &= \frac{4(a-n+1)}{n}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Reemplazando (3.49), (3.50) en (3.45)

$$\begin{aligned} E &= -1-A-C \\ &= -1-\left(-\frac{3n-2}{n}\right)-\left(\frac{3n-4}{n}\right) \\ &= \frac{2-n}{n}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Una vez obtenidos (3.49), (3.50), (3.51), (3.52) y (3.53), se reemplazan en (3.43) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 &= f_n + (A + Bx)f_{n-1} + (C + Dx)f_{n-2} + Ef_{n-3} \\ &= f_n + [A + Bx]f_{n-1} + [C + Dx]f_{n-2} + Ef_{n-3} \\ &= f_n + \left[\left(-\frac{3n-2}{n}\right) + \left(\frac{4(a+n-1)}{n}\right)x\right] f_{n-1} + \\ &\qquad \left[\left(\frac{3n-4}{n}\right) + \left(\frac{4(a-n+1)}{n}\right)x\right] f_{n-2} + \left(\frac{2-n}{n}\right) f_{n-3}, \end{aligned}$$

y esto se puede llevar a la forma

$$nf_n - [(3n-2) - 4(n-1+a)x]f_{n-1} + [(3n-4) - 4(n-1-a)x]f_{n-2} - (n-2)f_{n-3} = 0. \tag{3.54}$$

3.3.2. Casi-ortogonalidad de $f_n(a; -; x)$

En esta subsección se mostrará que los $f_n(a; -; x)$ definidos en 3.3 Polinomios de Sor Celine son casi-ortogonales por medio del Teorema 3.2.3. La ecuación (3.54) se cumple para $n \geq 3$, y para $n < 3$, así como en el Teorema 3.2.3, cualquier función con indice negativo se toma como cero. De (3.54), para todo $n \geq 0$

$$4(n-1+a)xf_{n-1} - 4(n-1-a)xf_{n-2} = -nf_n + (3n-2)f_{n-1} - (3n-4)f_{n-2} + (n-2)f_{n-3}, \tag{3.55}$$

haciendo $n = n + 1$ en (3.55) se tiene que

$$4(n+a)xf_n - 4(n-a)xf_{n-1} = -(n+1)f_{n+1} + (3n+1)f_n - (3n-1)f_{n-1} + (n-1)f_{n-2}, \tag{3.56}$$

multiplicando (3.56) por $\dfrac{1}{4(n+a)}$ se tiene

$$xf_n - \frac{n-a}{n+a}xf_{n-1} = -\frac{n+1}{4(n+a)}f_{n+1} + \frac{3n+1}{4(n+a)}f_n - \frac{3n-1}{4(n+a)}f_{n-1} + \frac{n-1}{4(n+a)}f_{n-2}. \tag{3.57}$$

Ahora, por definición

$$\begin{aligned} (1+a)_n &= (1+a)(2+a)\cdots(a+n-1)(a+n) \\ (1-a)_n &= (1-a)(2-a)\cdots(-a+n-1)(-a+n) \\ (1+a)_{n-1} &= (1+a)(2+a)\cdots(a+n-1) \\ (1-a)_{n-1} &= (1-a)(2-a)\cdots(-a+n-1), \end{aligned}$$

entonces las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{(1+a)_n}{(n+a)} &= \frac{(1+a)(2+a)\cdots(a+n-1)(a+n)}{(n+a)}\\ &= (1+a)(2+a)\cdots(a+n-1)\\ &= (1+a)_{n-1}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\frac{(n-a)}{(1-a)_n} &= \frac{(n-a)}{(1-a)(2-a)\cdots(-a+n-1)(-a+n)}\\ &= \frac{1}{(1-a)(2-a)\cdots(-a+n-1)}\\ &= \frac{1}{(1-a)_{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Multiplicando entonces (3.57) por

$$\frac{(1+a)_n}{(1-a)_n},$$

y teniendo en cuenta (3.58) y (3.59)

$$\begin{aligned} x\frac{(1+a)_n}{(1-a)_n}f_n - \frac{(1+a)_{n-1}}{(1-a)_{n-1}}xf_{n-1} = -\frac{(n+1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}f_{n+1} + \frac{(3n+1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}f_n\\ - \frac{(3n-1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}f_{n-1} + \frac{(n-1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}f_{n-2}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por (3.37) y usando la ecuación (3.60) significa que

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{(1+a)_n}{(1-a)_n}\\ \beta_n &= -\frac{(n+1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}\\ \gamma_n &= \frac{(3n+1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}\\ \delta_n &= -\frac{(3n-1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}\\ \epsilon_n &= \frac{(n-1)(1+a)_{n-1}}{4(1-a)_n}, \end{aligned}$$

entonces $\{f_n(a;-;x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface (3.42), esto es

$$\begin{aligned} xf_n(x) = \frac{\beta_n}{\alpha_n}f_{n+1}(x) + \frac{(\beta_{n-1}+\gamma_n)}{\alpha_n}f_n(x) + \frac{(\delta_n+\gamma_{n-1}+\beta_{n-2})}{\alpha_n}f_{n-1}(x)\\ + \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=0}^{n-2}(\epsilon_{k+2}+\delta_{k+1}+\gamma_k+\beta_{k-1})f_k(x), \end{aligned} \tag{3.61}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n}{\alpha_n} &= -\frac{(n+1)(1+a)_{n-1}(1-a)_n}{4(1-a)_n(1+a)_n}\\ &= -\frac{(n+1)}{4(a+n)},\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\beta_{n-1}+\gamma_n)}{\alpha_n} &= -\frac{n(1+a)_{n-2}(1-a)_n}{4(1-a)_{n-1}(1+a)_n}+\frac{(3n+1)(1+a)_{n-1}(1-a)_n}{4(1-a)_n(1+a)_n}\\ &= -\frac{n(-a+n)}{4(a+n-1)(a+n)}+\frac{(3n+1)}{4(a+n)},\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\delta_n+\gamma_{n-1}+\beta_{n-2})}{\alpha_n} &= -\frac{(3n-1)(1+a)_{n-1}(1-a)_n}{4(1-a)_n(1+a)_n(1-a)_n}+\frac{(3n-2)(1+a)_{n-2}(1-a)_n}{4(1-a)_{n-1}(1+a)_n}\\ &\qquad -\frac{(n-1)(1+a)_{n-3}(1-a)_n}{4(1-a)_{n-2}(1+a)_n}\\ &= -\frac{(3n-1)}{4(a+n)}+\frac{(3n-2)(-a+n)}{4(a+n-1)(a+n)}-\frac{(n-1)(-a+n-1)(-a+n))}{4(a+n-2)(a+n-1)(a+n)},\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=0}^{n-2}(\epsilon_{k+2}+\delta_{k+1}+\gamma_k+\beta_{k-1})\\ &= \frac{(1-a)_n}{(1+a)_n}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{(k+1)(1+a)_{k+1}}{4(1-a)_{k+2}}-\frac{(3k+2)(1+a)_k}{4(1-a)_{k+1}}+\frac{(3k+1)(1+a)_{k-1}}{4(1-a)_k}-\frac{k(1+a)_{k-2}}{4(1-a)_{k-1}}\right)\\ &= \frac{(1-a)_n}{(1+a)_n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(1+a)_{k-2}}{4(1-a)_{k-1}}\left(\frac{(a+k-1)(a+k)(a+k+1)(k+1)}{(-a+k)(-a+k+1)(-a+k+2)}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{(a+k-1)(a+k)(3k+2)}{(-a+k)(-a+k+1)}+\frac{(a+k-1)(3k+1)}{(-a+k)}-k\right)\\ &= \frac{(1-a)_n}{(1+a)_n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(1+a)_{k-2}}{4(1-a)_{k-1}}\left(\frac{4(a-1)^3(2k+1)+2(a-1)^2(2k+1)}{(a-k-2)(a-k-1)(k-a)}\right)\\ &= \frac{(1-a)_n}{(1+a)_n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(1+a)_{k-2}}{4(1-a)_{k-1}}\left(\frac{2(a-1)^2(2a-1)(2k+1)}{(k-a)(-a+k+1)(-a+k+2)}\right)\\ &= \frac{(a-1)^2(2a-1)}{2}\frac{(1-a)_n}{(1+a)_n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(1+a)_{k-2}}{(1-a)_{k-1}}\left(\frac{(2k+1)}{(k-a)(-a+k+1)(-a+k+2)}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}&(1-a)_{k-1}(k-a)(-a+k+1)(-a+k+2)\\ &\qquad = (1-a)(2-a)(3-a)\cdots(-a+k-1)(k-a)(-a+k+1)(-a+k+2)\\ &\qquad = (1-a)(2-a)(3-a)_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(1-a)_n}{(1-a)(2-a)} &= \frac{(1-a)(2-a)(3-a)\cdots(-a+n)}{(1-a)(2-a)}\\ &= (3-a)_{n-2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-1)a(1+a)_{k-2} &= (a-1)a(1+a)(2+a)\cdots(a+k-2)\\ &= (a-1)_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a-1)a(1+a)_n} &= \frac{1}{(a-1)a(1+a)(2+a)\cdots(a+n)}\\ &= \frac{1}{(a-1)_{n+2}},\end{aligned}$$

entonces

$$= \frac{(a-1)^2(2a-1)(3-a)_{n-2}}{2(a-1)_{n+2}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2k+1)(a-1)_k}{(3-a)_k}. \tag{3.65}$$

Por tanto, reemplazando (3.62),(3.63),(3.64) y (3.65) en (3.61)

$$\begin{aligned}xf_n = -\frac{(n+1)}{4(a+n)}f_{n+1} &+ \left[\frac{(3n+1)}{4(a+n)} - \frac{n(-a+n)}{4(a+n-1)(a+n)}\right]f_n\\ &+ \left[-\frac{(3n-1)}{4(a+n)} + \frac{(3n-2)(-a+n)}{4(a+n-1)(a+n)} - \frac{(n-1)(-a+n-1)(-a+n))}{4(a+n-2)(a+n-1)(a+n)}\right]f_{n-1}\\ &+ \frac{(a-1)^2(2a-1)(3-a)_{n-2}}{2(a-1)_{n+2}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2k+1)(a-1)_k}{(3-a)_k}f_k. \end{aligned}\tag{3.66}$$

Si en (3.66) $a = 1$ o $a = \frac{1}{2}$, entonces esta recurrencia se vuelve una recurrencia de 3 términos, es decir que bajo estos valores la sucesión de polinomios $\{f_n(a;-;x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal los cuales son descritos en la Subsección 2.2.4. Se buscan entonces los polinomios que cumplan (3.66), esto es, se buscan los valores del parámetro a tal que se cumplan las condiciones (3.19) y (3.20) del Teorema 3.2.3. Para ver la condición (3.19)

$$\begin{aligned}\frac{A_{n-3}T_{n-3}}{T_{n-2}} &= -\frac{n-2}{4(n-3+a)}\frac{(2n-5)(a-1)_{n-3}}{(3-a)_{n-3}}\frac{(3-a)_{n-2}}{(2n-3)(a-1)_{n-2}}\\ &= \frac{-(n-2)(2n-5)}{4(n+a-3)(a+n-4)(-a+n-1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{A_{n-2}T_{n-2}}{T_{n-1}} &= -\left(\frac{-(n-1)}{4(n-2+a)}\frac{(2n-3)(a-1)_{n-2}}{(3-a)_{n-2}}\frac{(3-a)_{n-1}}{(2n-1)(a-1)_{n-1}}\right)\\ &= \frac{(n-1)(2n-3)(-a+n+1)}{4(n-2+a)(2n-1)(a+n-3)},\end{aligned}$$

$$B_{n-2} = \frac{(3n-5)}{4(a+n-2)} - \frac{(n-2)(-a+n-2)}{4(a+n-3)(a+n-2)},$$

$$-B_{n-1} = -\frac{(3n-2)}{4(a+n-1)} - \frac{(n-1)(-a+n-1)}{4(a+n-2)(a+n-1)},$$

$$\begin{aligned}&\frac{C_{n-1}T_{n-1}}{T_{n-2}}\\ &= \left(-\frac{(3n-4)}{4(a+n-1)} + \frac{(3n-5)(-a+n-1)}{4(a+n-2)(a+n-1)} - \frac{(n-2)(-a+n-2)(-a+n-1))}{4(a+n-3)(a+n-2)(a+n-1)}\right)\frac{(2n-1)(a-1)_{n-1}(3-a)_{n-2}}{(3-a)_{n-1}(2n-3)(a-1)_{n-2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{C_nT_n}{T_{n-1}}\\ &= \quad \left(\frac{(3n-1)}{4(a+n)} - \frac{(3n-2)(-a+n)}{4(a+n-1)(a+n)} + \frac{(n-1)(-a+n-1)(-a+n))}{4(a+n-2)(a+n-1)(a+n)}\right)\frac{(2n+1)(a-1)_n(3-a)_{n-1}}{(3-a)_n(2n-1)(a-1)_{n-1}},\end{aligned}$$

$$D_nT_n = \frac{(a-1)^2(2a-1)(3-a)_{n-2}}{2(a-1)_{n+2}}\frac{(2n+1)(a-1)_n}{(3-a)_n}.$$

Haciendo estas cuentas y reemplazando en (3.19) se obtiene que

$$\frac{(n-1)(a-2)^2(2a-3)}{(n+a-4)(n+a-3)(n-a+1)(n-a+2)} = 0.$$

Esta ecuación se cumple cuando $a = 2$ o $a = \frac{3}{2}$, también se puede comprobar que la condición (3.20) del Teorema 3.2.3 se cumple y no se mostrarán aquí ya que los cálculos son extensos. Por tanto las sucesiones de polinomios $\{f_n(2; -; x)\}$ y $\{f_n(\frac{3}{2}; -; x)\}$ son casi-ortogonales.

Conclusiones

- Se logran definir unas bases teóricas para lograr abordar el capítulo 2 y 3 de este trabajo y así poder hacer un buen análisis del artículo. Algunos temas como ecuaciones diferenciales en variable compleja y funciones hipergeométricas generalizadas no se trataron a profundidad ya que su estudio se extiende más allá de lo que este trabajo pretende, pero no hay duda que son temas muy interesantes y con consecuencias en la teoría descrita y sus generalizaciones.

- Se logran establecer algunos resultados de la teoría básica de polinomios ortogonales, entre estos un primer teorema sobre polinomios ortogonales de condición necesaria y suficiente que describe una relación de recurrencia de 3 términos en la sucesión. También se logra estudiar en detalle 3 teoremas sobre polinomios casi-ortogonales y se logra ver la fuerte relación que existe entre polinomios ortogonales y polinomios casi-ortogonales.

- No se logra mostrar en detalle la totalidad del contenido del artículo ya que algunas cuestiones involucraban cálculos muy detallados y extensos, también se omitieron algunos ejemplos, y se tomo uno para estudiarlo en detalle, este trata sobre los polinomios de Sor Celine, los cuales, para $a = 2$ o $a = \frac{3}{2}$ son casi-ortogonales. Todo el estudio del artículo, así como en el presente en este trabajo se mantiene para polinomios casi-ortogonales de indice $(1, 1)$, pero es de conocimiento que existen generalizaciones para polinomios casi-ortogonales de indice (k, r) y que su estudio se deja como interés para estudios superiores al pregrado.

Bibliografía

[1] T. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, 1974.

[2] R. G. Bartle. *Elements of integration.* Wiley-Interscience, 1 edition, 1995.

[3] J. Brown and R. Churchill. *Complex Variables and Applications.* Brown and Churchill series. McGraw-Hill Education, 2009.

[4] M. Carter and B. van Brunt. *The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.

[5] T. S. Chihara. On quasi-orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(4):765–767, 1957.

[6] D. Dickinson. On quasi-orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(2):185–194, 1961.

[7] M. C. Fasenmyer. Some generalized hypergeometric polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53(8):806–812, 08 1947.

[8] S. M. C. Fasenmyer. A note on pure recurrence relations. *The American Mathematical Monthly*, 56(1P1):14–17, 1949.

[9] J. B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra.* Addison-Wesley, 7th ed edition, 2003.

[10] A. M. Kozak. *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal.* McGraw-Hill, 2007.

[11] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley, 1978.

[12] D. Rainville. *Special Functions.* Macmillan, 1960.

[13] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.

[14] F. Soriano and J. Castaęda. *Sobre la ortogonalidad distribucional de los polinomios ultraesfericos cribados y generales de Pollaczek.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matematicas y Estadistica., 1993.

[15] G. Szego. *Orthogonal polynomials.* Colloquium Publications Colloquium Publications Amer Mathematical Soc. American Mathematical Society, 4th edition, 1939.

[16] D. Zill. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.* Cengage Learning, 2012.