Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Proyecto curricular de Matemáticas

Una aplicación del teorema de Noether en mecánica clásica de partículas

Monografía de trabajo de grado para optar por el título de matemático

Samuel Mauricio Cruz Díaz

Director: Mikhail Malakaltsev

Director interno: Martín Barajas Sichacá

Bogotá DC

Diciembre de 2022

CONTENIDO

Dedicatoria y agradecimientos

A mis padres quienes siempre han sido siempre mi mayor apoyo. Su fe ciega e incondicional me ha permitido llegar a este punto.

A Marcela por todas las lecciones aprendidas. Por ser la mejor hija y la mejor hermana.

A Braian y Mariana, las dos mayores alegrías de mi vida. Y los dos mejores compañeros de juego.

Quiero agradecer especialmente al profesor Mikhail Malakhaltsev por su generosidad para compartir conocimientos y su enorme **paciencia** para guiar este proceso.

También quiero agradecer a mi amigo Andrés Castillo por su constante apoyo moral todo este tiempo.

1 INTRODUCCIÓN

«I can't remember all this stuff! Forces, masses, Newton's equations, momentum, energy. You told me that I didn't need to memorize stuff to do physics. Can't you make it just one thing to remember?»

«Okay, calm down. I'll make it simple. All you have to remember is that the action is always stationary.»

Leonard Susskind [The theoretical minimum]

1.1 Principio de mínima acción

Durante los últimos tres siglos, el principio de mínima acción ha sido una de las piedras angulares en nuestra comprensión de las leyes de la naturaleza. A lo diferencia de lo que suele suceder con otras teorías en Física, el paso del tiempo no le ha hecho perder vigencia y, de momento, no se conoce ningún fenómeno natural que lo refute. Su formulación se remonta a Maupertius a mediados del siglo XVIII y fue precedido por el principio de tiempo mínimo de Fermat en el siglo XVII.

A lo largo de la historia diferentes figuras relevantes de la ciencia le han otorgado el caracter de *ley fundamental*: Maupertius vio en el principio de mínima acción "el gran esquema del universo", Planck por su parte consideró la principio de mínima acción como "un paso significativo hacia el objetivo de obtener conocimiento sobre el mundo real", e incluso Einstein llegó a la conclusión de que el principio tenía que ser un elemento esencial en su teoría general de la relatividad.

A pesar de su trascendencia, su formulación podría reducirse a una simple frase:

El camino tomado por el sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y las configuraciones q_1 y q_2 es aquel para el cual la acción es estacionaria a primer orden. [1]

El cálculo variacional es la *arena* matemática en la que se formula este principio (en cada una de sus versiones). Personajes de la talla de Gauss, Jacobi, Hilbert y Weierstrass

[1] Un recuento completo a nivel histórico puede encontrarse en [7] (Ver bibliografía).

han contribuido a la gestación de sus teoremas principales (en ocasiones con motivaciones alejadas de aplicaciones a la física). El surgimiento del Análisis Funcional y la geometría diferencial le han influenciado y le han llevado a su forma actual.

1.2 Los teoremas de Noether

En el año 1915 la joven matemática Emmy Noether (1882-1935) acababa de instalarse en la Universidad de Göttingen cuando Albert Einstein visitó el campus para dar una conferencia sobre su casi terminada Teoría general de la relatividad. Dos destacados matemáticos de la época, David Hilbert y Felix Klein, profundizaron con entusiasmo en la nueva teoría, pero tuvieron dificultades para reconciliarla con lo que se sabía sobre la conservación de la energía. Conociendo su experiencia en la teoría de la invariancia, solicitaron la ayuda de Noether. Para resolver el problema, Noether desarrolló dos teoremas novedosos, aplicables a toda la física, que relacionan las leyes de conservación con las simetrías continuas.

El primer y el segundo teorema de Noether se publicaron en 1918. El primer teorema relaciona las simetrías bajo las transformaciones **globales** del espacio-tiempo con la conservación de la energía y el momento lineal, y la simetría de las variables dependientes bajo las transformaciones *gauge* globales de con la conservación de la carga. En mecánica de medios continuos y teorías de campo, estas leyes de conservación se expresan como ecuaciones de continuidad. El segundo teorema por su parte, permite transformaciones con invariancia de *gauge* **local**, y la preservación de la simetría en los sistemas de materia-campo acoplados requieren el uso de derivadas covariantes. En particular la relatividad general cuenta con invariancia de *gauge* local. Estos teoremas sentaron las bases para que las generaciones posteriores de físicos aplicaran la invariancia de *gauge* local a las teorías de partículas elementales.

En el contexto de la mecánica clasica de partículas el primer Teorema de Noether nos permite encontrar, tras identificar las simetrías del sistema, las cantidades conservadas que constituyen las primeras integrales de movimiento. Estas *identidades* entre variables dinámicas se convierten en una información que nos acerca a determinar completamente la dinámica del sistema. La conservación de la energía, el momento lineal y el momento angular constituyen los casos más simples.

2 Principio variacional y ecuaciones de Euler-Lagrange

Consideremos un funcional $J : C^2[a, b] \to R$ dado por:

$$J(x^\mu) = \int_0^1 L\left(t, x^\mu, \dot{x}^\mu\right) dt \tag{1}$$

Ejemplo 1: Consideremos el funcional de distancia en el plano euclidiano que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$:

$$J=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2}$$

En este caso puede comprobarse que $J(y=x)\approx 1.414$ y $J(y=x^2)\approx 1.479$.

Teorema 1. *(Lema fundamental del cálculo de variaciones): Sea $A(t)$ una función continua de valor real definida en $a\leq t\leq b$ y supongamos que*

$$\int_a^b A(t)\eta(t)dt=0 \tag{3}$$

para todo $\eta\in C^2[a,b]$, entonces $A(t)\equiv 0$ en todo $t\in[a,b]$.

Demostración (Por contradicción): Supongamos (sin pérdida de generalidad) que existe un punto $t_0\in(a,b)$ para el cual $A(t_0)>0$. Por la continuidad de A, existe un intervalo (t_1,t_2) contenido en (a,b) alrededor de t_0 para el cual $A(t)$ es estrictamente positiva. Sea

$$\eta(t)=\begin{cases}(t-t_1)^3(t_2-t)^3 & \text{for } t\in(t_1,t_2)\,,\\ 0 & \text{for} \quad t\notin(t_1,t_2)\,.\end{cases} \tag{4}$$

Entonces $\eta\in C^2[a,b]$ y además

$$\int_a^b A(t)\eta(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} A(t)\eta(t)dt>0, \tag{5}$$

lo cual contradice a la ecuación (3).

■

Teorema 2. *(Ecuación de Euler-Lagrange): Dado un funcional J cuyo lagrangiano L depende de una variable independiente t, N variables dependientes $x^\mu(t)$ y sus primeras derivadas $\dot{x}^\mu(t)$, con $\mu=1,2,\ldots,N$:*

$$J=\int_a^b L\left(t,x^\mu,\dot{x}^\mu\right)dt \tag{6}$$

Entonces los $\{x^\mu(t)\}$ que hacen a J un extremal son las soluciones de las N ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu},\quad \mu=1,2,\ldots,N \tag{7}$$

Demostración: Sea $x^\mu(t)$ un camino extremal de J. Insertamos este camino extremal en una familia de caminos parametrizada por $\varepsilon \in \mathbb{R}$: [2]

$$x^\mu_{(\varepsilon)} = x^\mu + \varepsilon \eta^\mu \tag{8}$$

en donde $\eta^\mu(a) = \eta^\mu(b) = 0$ (ver figura 1). El funcional J evaluado en esta familia es ahora una función de ε :

$$J(\varepsilon) = \int_a^b L\left(t, x^\mu_{(\varepsilon)}, \dot{x}^\mu_{(\varepsilon)}\right) dt \tag{9}$$

Por tanto, todo camino extremal debe cumplir $\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_0 = 0$, en donde

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\varepsilon) - J(0)}{\varepsilon}. \tag{10}$$

Usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que los μ índices repetidos, obtenemos

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu{}_{(\varepsilon)}} \frac{\partial x^\mu(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu(\varepsilon)} \frac{\partial \dot{x}^\mu(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] dt. \tag{11}$$

Y dado que $\frac{d}{d\varepsilon}(x^\mu) = \eta^\mu$; $\frac{d}{d\varepsilon}(\dot{x}^\mu) = \dot{\eta}^\mu$ Tenemos por tanto que

$$\left[\frac{dJ}{d\varepsilon}\right]_0 = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \eta^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{\eta}^\mu \right] dt. \tag{12}$$

Integrando por partes el segundo término de la derecha de (12) y reordenando, encontramos que

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \eta^\mu \right]_a^b = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{\eta}^\mu + \eta^\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right] dt, \tag{13}$$

por lo que obtenemos al reemplazar en (12):

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right] \eta^\mu dt + \left[\eta^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right]_a^b = 0 \Rightarrow \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right] \eta^\mu dt = 0. \tag{14}$$

El término que fue ya integrado se anula pues tenemos las condiciones de frontera $\eta(b) = 0 = \eta(a)$. Como $\eta(t)$ es arbitrario, aplicamos en (14) el Teorema 1, obteniendo así la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}. \tag{15}$$

■

[2] En algunos libros antiguos (por ejemplo 'Classical Mechanics' de Goldstein) se usa la notación para coordenadas $\delta x^\mu \equiv x^\mu_{(\varepsilon)} - x^\mu = \varepsilon \eta^\mu$. Y para la variación correspondiente del funcional la notación $\delta J = 0$ ó $\delta \int L dt = 0$

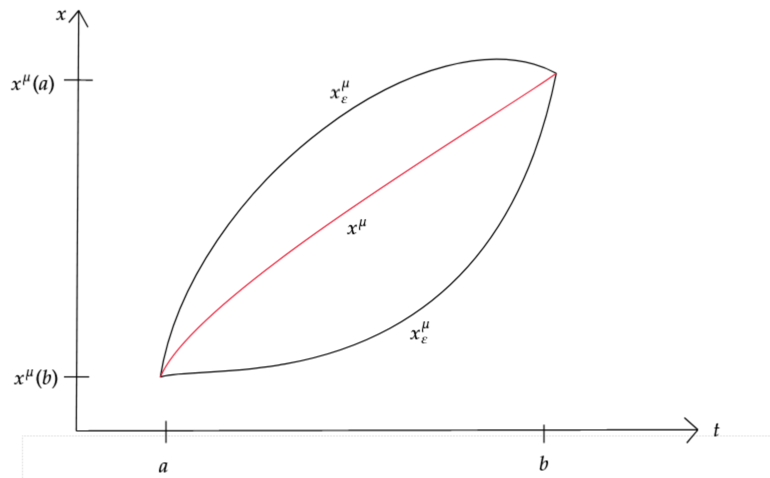

Figura 1: Ecuación Euler-Lagrange.

La ecuación de Euler-Lagrange es a una ecuación diferencial de segundo orden en t, como puede demostrarse haciendo $(d/dt)\partial L/\partial \dot{x}^\mu$ mediante la regla de la cadena, dado que L depende de t, las coordenadas, y sus derivadas temporales. Al sumar sobre índices repeatidos, la ecuación de Euler-Lagrange toma la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^\mu}(\frac{dt}{dt}) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^\mu \partial \dot{x}^\nu}\dot{x}^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}\ddot{x}^\nu. \tag{16}$$

Ejemplo (Leyes de Newton): Consideremos un lagrangiano unidimensional de la forma $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x,t)$, los miembros izquierdo y derecho de la ecuación de Euler-Lagrange asociada son respectivamente:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x,t)\right)}{\partial x} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \tag{18}$$

Dado que por definición $F = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$, obtenemos $F = m\ddot{x}$ que es justamente la segunda ley de Newton.

Definición 1. *Si las funciones $x^\mu(t)$ determinan una trayectoria y $\dot{x}^\mu(t)$ corresponde a su velocidad, entonces el momento canónico conjugado a x^μ se define como*

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}. \tag{19}$$

Esto permite reescribir la ecuación de Euler-Lagrange como

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \dot{p}_\mu. \tag{20}$$

Corolario. *(del Teorema 2): El momento canónicamente conjugado $p_\mu = const$ si y sólo si $\partial L/\partial x^\mu = 0$.*

Podemos obtener una ecuación equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange si consideramos la derivada temporal dL/dt, usamos las ecuaciones (17) y (18) y empleamos la regla de la cadena:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\ddot{x}^\mu = \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{p}_\mu \dot{x}^\mu + p_\mu \ddot{x}^\mu \tag{21}$$

El segundo y tercer término corresponden a la derivada temporal de $(\mathbf{p}_\mu \dot{\mathbf{x}}^\mu)$, lo que en forma compacta, podemos escribir como

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[L - p_\mu \dot{x}^\mu\right]. \tag{22}$$

Definición 2. *$H(t, x^\mu, p_\mu) \equiv p_\mu \dot{x}^\mu - L$. Esta expresión es conocida como el hamiltoniano del sistema.*

Esto nos permite reescribir (20) como

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\dot{H} \tag{23}$$

Aquí podemos observar que el hamiltoniano $H =$ const si y sólo si el sistema es invariante bajo la translación temporal $t \to t + \Delta t$, en tal caso tendrmos $\partial L/\partial t = 0$ y H se conserva.

Ejemplo 2: La figura muestra una masa M conectada a otra masa m. La masa M se mueve sin fricción a lo largo de un círculo de radio r sobre la superficie horizontal de una mesa. Las dos masas están conectadas por una cuerda con masa despreciable y longitud l que pasa a través de un agujero en el centro de la mesa. La posición de masa M está parametrizada por las coordenadas polares r y θ.

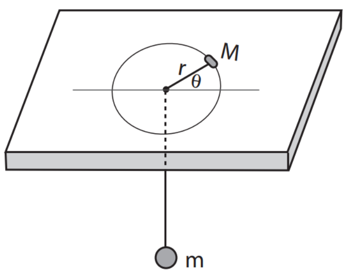

Figura 2: Masas conectadas por una cuerda

La energías cinética y potencial del sistema son $K_1 = \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$, $K_2 = \frac{m\dot{r}^2}{2}$ y $U_2 = -mg(l-r)$, por lo tanto el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mg(l-r) \tag{24}$$

Ahora aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange en cada una de las coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{26}$$

Resultando en las ecuaciones de movimiento:

$$(M+m)\ddot{r} = Mr\dot{\theta}^2 + mg \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{28}$$

La cantidad en la ecuación (26) es una cantidad conservada dado que el lagrangiano no depende de θ.

3 Invariancia de funcionales

Consideremos transformaciones descritas por un parametro continuo ε que puede variar a partir de cero y la transformación identidad corresponde justamente al caso $\varepsilon = 0$. En la medida que ε varía, la diferencias entre las coordenadas (tanto dependientes como independientes) del sistema original y el sistema nuevo se hacen cada vez más grandes:

$$t \to t' = T\left(t, q^\mu, \varepsilon\right) q^\mu \to q^{\mu\prime} = Q^\mu\left(t, q^v, \varepsilon\right) \tag{29}$$

Ejemplo 3: Sean las transformaciones

$$x' = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, y' = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, z' = z \tag{30}$$

Consideremos ahora el funcional de longitud en el plano xy

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

El cual bajo la transformación anterior se convierte en

$$s' = \int_{a'}^{b'} \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} dx'.$$

Ejemplo 4: (transformaciones de Lorentz con $v \equiv \varepsilon$; $c = 1$; $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.)

$$t' = \gamma(t - vx)x' = \gamma(x - vt)y' = yz' = z \tag{31}$$

En el caso de la mecánica lagrangiana, el funcional de acción J se transforma en el funcional J', el cual contiene el mismo lagrangiano, pero ahora evaluado en las variables transformadas:

$$J' = \int_{a'}^{b'} L\left[t', q^{\mu\prime}(t'), \frac{dq^{\mu\prime}(t')}{dt'}\right] dt' \tag{32}$$

Puede demostrarse que cualquier transformación descrita por (27) y (28) puede ser construida como una sucesión de transformaciones infinitesimales. Dichas transformaciones se expresan explícitamente expandiendo en serie de Taylor a $T(t, q^\mu, \varepsilon)$, $Q^\mu(t, q^\nu, \varepsilon)$ alrededor de $\varepsilon = 0$:

$$t' = t + \varepsilon(dT/d\varepsilon)_0 + O\left(\varepsilon^2\right) \ldots q^{\mu\prime} = q^\mu + \varepsilon\left(dQ^\mu/d\varepsilon\right)_0 + O\left(\varepsilon^2\right) \ldots \tag{33}$$

Los coeficientes de ε a primer orden se denominan los "generadores" de la transformación. Los denotamos como τ y ζ^μ :

$$\begin{aligned} \tau &\equiv (dT/d\varepsilon)_0 = \tau(t, q^\mu) \\ \zeta^\mu &\equiv \left(dQ^\mu/d\varepsilon\right)_0 = \zeta^\mu(t, q^\nu) \end{aligned} \tag{34}$$

Quedando entonces:

$$t' = t + \varepsilon\tau + \ldots \tag{35}$$

$$q^{\mu\prime} = q^\mu + \varepsilon\zeta^\mu + \ldots \tag{36}$$

En el caso de la rotación en el plano considerada anteriormente tenemos:

$$x' = x + y\varepsilon + \ldots y' = y - x\varepsilon + \ldots \tag{37}$$

por tanto $\tau = y$ y $\zeta = -x$.

En el caso de transformaciones de Lorentz, encontramos a primer orden en v:

$$t' = t - vx + \ldots x' = x - vt + \ldots \tag{38}$$

en este caso los generadores son $\tau = -x$ y $\zeta = -t$.

Definición 3. *El funcional*

$$J = \int_a^b L\left(t, q^\mu, \dot{q}^\mu\right) dt \tag{39}$$

con $q^\mu = q^\mu(t)$ y $\dot{q}^\mu \equiv dq^\mu/dt$, se dice invariante bajo la transformación infinitesimal

$$t' = t + \varepsilon\tau + \dots q^{\mu\prime} = q^\mu + \varepsilon\zeta^\mu + \dots \tag{40}$$

si y sólo si

$$J' - J \sim \varepsilon^s, \qquad con\ s > 1. \tag{41}$$

Dado que $t' = T$ y Q^μ son funciones de t, podemos escribir J' como una integral en t :

$$J' = \int_{t'(a)}^{t'(b)} L\left[t', q^{\mu\prime}\left(t'\right), \frac{dq^{\mu\prime}\left(t'\right)}{dt'}\right]\left[\frac{dt'}{dt}\right] dt = \int_a^b \left[L\,\frac{dt'}{dt}\right] dt \tag{42}$$

Notemos que los límites de integración en la última integral son a y b. Por tanto, $J' - J$ puede escribirse como:

$$\int_{a'}^{b'} L' dt' - \int_a^b L dt = \int_a^b \left[L' \frac{dt'}{dt} - L\right] dt. \tag{43}$$

Esta expresión nos permite afirmar que la condición dada por (49) es equivalente a la condición

$$L' \frac{dt'}{dt} - L \sim \varepsilon^s; \qquad s > 1. \tag{44}$$

Ejemplo 5: Dado el lagrangiano asociado con el funcional de distancia $L = \left[1 + (dy/dx)^2\right]^{1/2}$, al efectuar una rotación alrededor del origen y evaluar $L'\left(dx'/dx\right) - L$ obtenemos

$$L' \frac{dx'}{dx} - L = \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}\,\frac{dx'}{dx} - \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{45}$$

Como vimos anteriormente, a primer orden en ε se tiene, $x' = x + \varepsilon y$ y $y' = y - \varepsilon x$. por tanto

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \varepsilon \frac{dy}{dx} \tag{46}$$

y además

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dx'} = \frac{\frac{dy'}{dx}}{\frac{dx'}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx} - \varepsilon}{1 + \varepsilon \frac{dy}{dx}}. \tag{47}$$

Tras realizar expansiones binomiales, encontramos que el término lineal en ε es cero, es decir :

$$L'\frac{dx'}{dx} - L = -\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\varepsilon^2 + \dots \tag{48}$$

Teorema 3. *(Identidad de Rund-Trautman): Si J es invariante a primer orden bajo la transformación infinitesimal*

$$t' = t + \varepsilon\tau + \dots q^{\mu\prime} = q^\mu + \varepsilon\zeta^\mu + \dots \tag{49}$$

entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\zeta^\mu + p_\mu\dot{\zeta}^\mu + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = 0. \tag{50}$$

Demostración: Por hipótesis, el funcional J es invariante a primer orden, y por tanto se satisface (44): $L'\left(dt'/dt\right) - L \sim \varepsilon^s$, en donde $s > 1$. Esta expresión puede ser reescrita en la forma.

$$L'\left(dt'/dt\right) - L = f_1(t, q^\mu)\varepsilon^2 + f_2(t, q^\mu)\varepsilon^3 + ... \tag{51}$$

Derivando esta expresión respecto a ε, y haciendo $\varepsilon = 0$, tenemos

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\left(L'\left(\frac{dt'}{dt}\right) - L\right)\right]_{\varepsilon=0} = \frac{d(f_1(t,q^\mu)\varepsilon^2 + f_2(t,q^\mu)\varepsilon^3 + ...)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \tag{52}$$

entonces

$$\left[\frac{dL'}{d\epsilon}\cdot\frac{dt'}{dt}\right]_{\epsilon=0} + \left[L'\cdot\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{dt'}{dt}\right)\right]_{\epsilon=0} - \frac{dL}{d\epsilon}|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{dL'}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} + L\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{dt'}{dt}\right)_{\epsilon=0} = 0 \tag{53}$$

En donde hemos usado los hechos $t'(\varepsilon = 0) = t$ y $L'(\varepsilon = 0) = L$. Por lo que se tiene

$$L\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{dt'}{dt}\right]_{\varepsilon=0} + \left[\frac{dL'}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0. \tag{54}$$

En el primer término de la izquierda $t' = t + \varepsilon\tau \Rightarrow dt'/dt = 1 + \varepsilon\dot{\tau}$ y por tanto

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dt'}{dt}\right) = \dot{\tau}. \tag{55}$$

Adicionalmente, podemos expandir $dL'/d\varepsilon$ usando regla de la cadena (recordemos que $q^{\mu\prime}$ es una función de t'):

$$\frac{dL'}{d\varepsilon} = \frac{\partial L'}{\partial t'}\frac{dt'}{d\varepsilon} + \frac{\partial L'}{\partial q^{\mu\prime}}\frac{dq^{\mu\prime}}{d\varepsilon} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^{\mu\prime}}\frac{d\dot{q}^{\mu\prime}}{d\varepsilon} = \frac{\partial L'}{\partial t'}\tau + \frac{\partial L'}{\partial q^{\mu\prime}}\zeta^{\mu} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^{\mu\prime}}\frac{d\dot{q}^{\mu\prime}}{d\varepsilon}. \tag{56}$$

Por tanto tras evaluar los dos primeros términos de la derecha de (56) en $\varepsilon = 0$, la ecuación (54) se convierte en:

$$L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\zeta^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\left[\frac{d\dot{q}^{\mu\prime}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0. \tag{57}$$

Ahora, escribiendo $\dot{q}^{\mu\prime}$ de forma explícita mediante serie de Taylor a primer orden:

$$\dot{q}^{\mu\prime} \equiv \frac{dq^{\mu\prime}}{dt'} = \frac{dq^{\mu} + \varepsilon d\zeta^{\mu}}{dt + \varepsilon d\tau} = \frac{\dot{q}^{\mu} + \varepsilon\dot{\zeta}^{\mu}}{1 + \varepsilon\dot{\tau}} \tag{58}$$

de tal forma que el segundo factor en el último término a la izquierda en (57) se convierte en

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{d\dot{q}^{\mu\prime}}{dt'}\right]_0 = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\dot{q}^{\mu} + \varepsilon\dot{\zeta}^{\mu}}{1 + \varepsilon\dot{\tau}}\right]_0 = \dot{\zeta}^{\mu} - \dot{q}^{\mu}\dot{\tau}. \tag{59}$$

quedando finalmente

$$L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\zeta^{\mu} + \frac{\partial L}{d\dot{q}^{\mu}}\left(\dot{\zeta}^{\mu} - \dot{q}^{\mu}\dot{\tau}\right) = 0. \tag{60}$$

Factorizando los $\dot{\tau}$ y recordando las definiciones de momento canónico y de hamiltoniano, obtenemos la identidad de Rund Trautman.

La identidad de Rund-Trautman puede presentarse de dos formas, gracias a la regla del producto para derivadas. Estas son:

$$\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\zeta^{\mu} + p_{\mu}\dot{\zeta}^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = 0 \tag{61}$$

y en forma alternativa como

$$-\left(\zeta^{\mu} - \dot{q}^{\mu}\tau\right)\left[\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right] = \frac{d}{dt}\left[p_{\mu}\zeta^{\mu} - H\tau\right] \tag{62}$$

Ejemplo 6 Consideremos el Lagrangiano para una partícula puntual que se mueve en una dimensión espacial x en un potencial dependiente del tiempo:

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(t, x). \tag{63}$$

Con las transformaciones (lineales y desacopladas) $t' = t + \varepsilon t$ y $x' = x + 1/2\varepsilon x$, en donde $\tau = t$ y $\zeta = 1/2x$. El lado izquierdo de la ecuación de (61) se convierte en

$$-\frac{\partial}{\partial x}(U)\frac{x}{2}+\frac{m\dot{x}}{2}\dot{x}-\frac{\partial}{\partial\, t}(U)\,t-\left((m\dot{x})\,\dot{x}-\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}-U\right)\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(Ut)-\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}(U) \quad (64)$$

en general esta expresión no se anula para un $U(t,x)$ arbitrario y por lo tanto este sistema físico no cumple con las ecuaciones de Rund-Trautman.

Podemos extender aún más nuestra definición de invariancia si permitimos ahora que J' y J difieran en un término lineal en ε^1. Se dice que un funcional es invariante en divergencia si y solo si, para alguna función $F(t)$

$$L'\frac{dt'}{dt}-L=\varepsilon\frac{dF}{dt}+O\left(\varepsilon^s\right), \quad s>1. \tag{65}$$

Ahora, cuando volvemos a deducir la identidad de Rund-Trautman para esta definición extendida de invariancia, el término no homogéneo sobrevive tras derivar la ecuación (51):

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\zeta^\mu+p_\mu\dot{\zeta}^\mu+\frac{\partial L}{\partial t}\tau-H\dot{\tau}=\frac{dF}{dt}. \tag{66}$$

así mismo obtenemos una obtenemos una ecuación análoga a (62) para el caso extendido:

$$-\left(\zeta^\mu-\dot{q}^\mu\tau\right)\left[\frac{\partial L}{\partial q^\mu}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\mu}\right]=\frac{d}{dt}\left[p_\mu\zeta^\mu-H\tau-F\right] \tag{67}$$

4 Teorema de Noether

Si J es tanto invariante como extremal en una cierta trayectoria, entonces al insertar la ecuación de Euler-Lagrange $\left[\frac{\partial L}{\partial q^\mu}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\mu}\right]=0$ en la identidad de Rund-Trautman (62), se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left[p_\mu\zeta^\mu-H\tau-F\right]=0. \tag{68}$$

Por tanto

$$p_\mu\zeta^\mu-H\tau-F=\text{ const.} \tag{69}$$

Esto demuestra el siguiente resultado:

Teorema 4. *(Noether): Si el funcional*

$$J=\int_a^b L\left(t,q^\mu,\dot{q}^\mu\right)dt$$

es un extremal, y si bajo la transformación infinitesimal

$$t' = t + \varepsilon\tau + \ldots, q^{\mu'} = q^{\mu} + \varepsilon\zeta^{\mu} + \ldots \tag{70}$$

el funcional es invariante de acuerdo a la siguiente definición (no homogenea) de invariancia:

$$L'\frac{dt'}{dt} - L = \varepsilon\frac{dF}{dt} + O\left(\varepsilon^{s}\right), \qquad con\ s > 1, \tag{71}$$

Se tiene entonces la siguiente ley de conservación:

$$p_{\mu}\zeta^{\mu} - H\tau - F = \ const. \tag{72}$$

Ejemplo 7: Consideremos una partícula que se mueve a través del espacio para la cual describimos su movimiento usando coordenadas cilíndricas. Su Lagrangiano será en este caso

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right] - U.$$

Consideremos una translación únicamente **temporal**, para la cual $t' = t + \varepsilon$.

Por tanto, $\tau = 1$ y $\zeta^{\mu} = 0$. La identidad de Rund-Trautman se cumple, y para una trayectoria extremal del sistema, el teorema de Noether dice que la cantidad conservada es el hamiltoniano $H = p_r^2/2m + p_z^2/2m + p_\theta^2/2mr^2 + U$, que es igual a la energía total E.

Ejemplo 8: Considere el oscilador amortiguado con Lagrangiano

$$L = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right]e^{bt/m}. \tag{73}$$

Después de verificar que el sistema es invariante bajo la transformación infinitesimal $t' = t + \varepsilon\tau$ y $x' = x + \varepsilon\zeta$, donde $\tau = 1$ y $\zeta = -bx/2m$, la ley de conservación que nos garantiza el teorema de Noether puede escribirse como

$$\left[\frac{1}{2}bx\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]e^{bt/m} = \text{ const.} \tag{74}$$

Lo importante aquí es que ni la energía ni el momento se conservan por separado, pero existe una ley de conservación que incluye a ambos. Esta ley de conservación no surgiría de ninguna forma de la ecuación de Euler-Lagrange por sí sola pero hemos podido obtenerla gracias al Teorema de Noether.

5 Búsqueda de generadores infinitesimales y ecuaciones de Killing

Ahora queremos abordar el siguiente problema: dado un Lagrangiano, buscamos transformaciones que lo dejen invariante. Para lograr este objetivo procedemos a escribir el momento canónico conjugado a q^μ como

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \tag{75}$$

Adicionalmente escribimos de forma explícita las derivadas de los generadores infinitesimales que aparecen en la identidad de Rund-Trautman haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu \tag{76}$$

$$\frac{d\zeta^\mu}{dt} = \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial t} + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial q^\nu}\dot{q}^\nu \tag{77}$$

Al insertar (75),(76) y (77) en las ecuaciones de Rund-Trautman, obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales que resultan tras igualar a cero los coeficientes de las potencias de los términos q^μ. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Killing.

Ejemplo 9: Consideremos el caso de una partícula que se mueve en una sola dirección espacial y que tiene lagrangiano $L = 1/2m\dot{x}^2 - U(t,x)$. El momento canónico es $p = m\dot{x}$, y su hamiltoniano puede escribirse como $H = p^2/2m + U = 1/2m\dot{x}^2 + U(t,x)$. La identidad de Rund-Trautman en este caso es

$$-\frac{\partial U}{\partial t}\tau - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U\right)\left[\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial x}\dot{x}\right] + m\dot{x}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\dot{x}\right] - \frac{\partial U}{\partial x}\zeta = 0. \tag{78}$$

Al reescribir esta expresión en términos de las potencias de $\dot{x}$ obtenemos:

$$\left[-\frac{1}{2}m\frac{\partial \tau}{\partial x}\right]\dot{x}^3 + \left[-\frac{1}{2}m\frac{\partial \tau}{\partial t} + m\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]\dot{x}^2 + \left[-U\frac{\partial \tau}{\partial x} + m\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]\dot{x} + \left[-\tau\frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \tau}{\partial t} - \zeta\frac{\partial U}{\partial x}\right]\dot{x}^0 = 0 \tag{79}$$

El lado de la izquierda debe ser igual a cero sin importar que forma funcional tome $\dot{x}$. Esto implica que los coeficientes que acompañan a las potencias de $\dot{x}$ deben anularse por separado.

Obtenemos así las ecuaciones de Killing:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}^3: & \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\ \dot{x}^2: & -\frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \\ \dot{x}^1: & -U\frac{\partial \tau}{\partial x} + m\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \\ \dot{x}^0: & \frac{\partial (U\tau)}{\partial t} + \zeta\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{array} \tag{80}$$

Los generadores de las transformaciones que dejan invariante al lagrangiano, son obtenidos a partir de las soluciones de este sistema.

6 Ejemplo de aplicación Teorema de Noether

Consideremos un Lagrangiano genérico en coordenadas generalizadas para una partícula newtoniana,

$$L = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - U\left(t, q^\nu\right), \tag{81}$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico.

Queremos encontrar los generadores infinitesimales que dejan invariante a este lagrangiano y posteriormente obtener las cantidades conservadas para el caso en que el potencial U proviene de una fuerza central.

Con este fin, recordemos la identidad de Rund-Trautman en el caso más restrictivo:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\xi^\mu + p_\mu \dot{\xi}^\mu + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + H\dot{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^\lambda}\xi^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}\left(\dot{\xi}^\lambda - \dot{q}^\lambda \dot{\tau}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + L\dot{\tau} = 0 \tag{82}$$

Si insertamos las expresiones

$$\frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = \frac{1}{2} m \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \frac{d}{dq^\lambda}\left(g_{\mu\nu}\right) \tag{83}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} = \frac{1}{2}\left(2 m g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu\right) \tag{84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t} \tag{85}$$

$$\dot{\zeta}^\lambda = \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial q^\nu} \cdot \dot{q}^\nu \tag{86}$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^{\nu}} \dot{q}^{\nu} \tag{87}$$

en la ecuación (82) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[\tfrac{\dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu}}{2} m \tfrac{d}{dq^{\lambda}} (g_{\mu\nu}) \zeta^{\lambda} \right] - \tfrac{\partial U}{\partial q^{\mu}} \zeta^{\mu} \right\} + \\
&\left\{ m g_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \tfrac{\partial \zeta^{\nu}}{\partial t} + m g_{\mu x} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \tfrac{\partial \zeta^{\lambda}}{\partial q^{\nu}} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial t} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} - \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\lambda} \tfrac{1}{2} m g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial q^{\lambda}} \right\} + \\
&\left\{ \tfrac{\partial u}{\partial t} \cdot \tau \right\} + \left\{ \tfrac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial t} - u \tfrac{\partial \tau}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\lambda} m g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial q^{\lambda}} + \dot{q}^{\mu} u \tfrac{\partial \tau}{\partial q^{\mu}} \right\}
\end{aligned} \tag{88}$$

Agrupando a partir los términos de orden q^0, q^1, q^2, q^3 se tiene

$$\begin{aligned}
&-\dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\lambda} \left(\tfrac{1}{2} m g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial q^{\lambda}} \right) + \dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu} \left(m g_{\mu\lambda} \tfrac{\partial \zeta^{\lambda}}{\partial q^{\nu}} + \tfrac{1}{2} m \left(\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \right) \zeta^{\lambda} - \tfrac{1}{2} m g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \tau}{\partial t} \right) \\
&+\dot{q}^{\mu} \left(U \tfrac{\partial \tau}{\partial q^{\mu}} + m g_{\mu\nu} \tfrac{\partial \zeta^{\nu}}{\partial t} \right) - q^0 \left(\left(\partial_{\mu} U \right) \zeta^{\mu} + \tfrac{\partial U}{\partial t} \tau + U \tfrac{\partial \tau}{\partial t} \right) = 0
\end{aligned} \tag{89}$$

Y finalmente obtenemos las ecuaciones de Killing asociadas con este lagrangiano:

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial \tau / \partial t) + g_{\mu\rho} \left(\partial \zeta^{\rho} / \partial q^{\nu} \right) + \frac{1}{2} \zeta^{\rho} \left(\partial g_{\mu\nu} / \partial x^{\rho} \right) = 0 \tag{89}$$

$$U \left(\partial \tau / \partial q^{\mu} \right) + m g_{\mu\nu} \left(\partial \zeta^{\nu} / \partial t \right) = 0 \tag{90}$$

$$\partial (U\tau) / \partial t + \left(\partial U / \partial q^{\mu} \right) \zeta^{\mu} = 0. \tag{91}$$

$$\partial \tau / \partial q^{\lambda} = 0 \tag{92}$$

Ahora consideramos el caso particular de un lagrangiano que se mueve en un potencial central y para el que usaremos las coordenadas polares (r, θ, ϕ). La ecuación (92) nos indica que τ no depende explícitamente de ninguno de los q^{λ} por lo que en general tendremos que $\tau = \tau(t)$, esto reduce la ecuación (90) a la expresión $\partial \zeta^{\mu} / \partial t = 0$ por lo que en general $\zeta = \zeta(q^{\mu})$.

Ahora bien, si consideramos los elementos diagonales del tensor métrico $g_{r,r}, g_{\theta,\theta}, g_{\phi,\phi}$ y los reemplazamos por separado en (89), obtenemos la siguiente relación

$$\frac{1}{2} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \zeta^{r}}{\partial r} = \frac{\zeta^{r}}{r} + \frac{\partial \zeta^{\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta^{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\zeta^{r}}{r} + \zeta^{\theta} \cot \theta = C \tag{93}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \tau = 2Ct + t_0 \frac{\partial \zeta^r}{\partial r} = C \Rightarrow \zeta^r = Cr + r_0 \frac{\partial \zeta^\theta}{\partial \theta} + \frac{\zeta^r}{r} = C \Rightarrow \frac{\partial \zeta^\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \zeta^\theta = \theta_0 \quad (94)$$

En la última ecuación hemos considerado el cado $r_0 = 0$ lo que hace que $\frac{\zeta^r}{r} = C$. Dado que el potencial del sistema que estamos considerando es un potencial central $U(r)$, esto implica que el ángulo θ permanece fijo y por conveniencia elegimos el valor $\theta = \pi/2$ y entonces

$$\frac{\partial \zeta^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\zeta^r}{r} + \zeta^\theta \cot\theta = \frac{\partial \zeta^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{r}{r} + \theta_0(\cot \pi/2) = \frac{\partial \zeta^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{Cr}{r} + 0 = 0 \Rightarrow \zeta^\varphi = \varphi_0. \quad (95)$$

de nuevo usamos $r_0 = 0$ Por lo tanto, nuestro conjunto de generadores es:

$$\tau = 2Ct + t_o \quad (96)$$

$$\zeta^r = Cr \quad (97)$$

$$\zeta^\theta = \theta_o \quad (98)$$

$$\zeta^\varphi = \varphi_o. \quad (99)$$

Conclusiones

- Los teoremas de Noether aparecen en diferentes contextos matemáticos o científicos como el Análisis Funcional, la geometría diferencial (fibrados, jets), Teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y la Física téorica.

- Existe una versión del teorema para la formulación hamiltoniana de la mecánica mediante el uso de corchetes de Poisson. En esta formulación es se simplifica la demostración del recíproco del teorema.

- Es particularmente llamativo que el teorema ayude a detectar cantidades conservadas incluso en sistemas altamente disipativos como un péndulo con amortiguamiento.

- Para la teoría clásica de campos todos los resultados aquí vistos tienen versiones análogas y la palabra «conservación» adquiere un significado mucho más amplio.

- La solución encontrada para ejercicio propuesto se adapta para diferentes potenciales siempre y cuando sean estos centrales.

Bibliografía

[1] Valery Rubakov (2002) *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Boston, 1a ed.

[2] Vladimir Arnold (1988) *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 2da ed.

[3] John David Logan (1977) *Invariant Variational Principles*, Academic Press INC, New York, 2da ed.

[4] Dwight Neuenschwander (2011) *Emmy Noether's wonderful theorem*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1a ed.

[5] Jakob Schwichtenberg (2019) *No-Nonsense Classical Mechanics: A Student-Friendly Introduction*, No-Nonsense books, Karlsruhe, 1a ed.

[6] Leonard Susskind (2013) *The theoretical minimum: Classical Mechanics*, Basic books, New York, 1a ed.

[7] Yvette (2010) *The Noether Theorems*, Springer Verlag, New York, 2a ed.