



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO
JOSÉ DE CALDAS

PROYECTO DE GRADO MODALIDAD MONOGRAFÍA

**Diseño y Simulación de un
modulador y demodulador QAM
Jerárquico con base en los
Conjuntos de Cantor**

Autores:
Einer Fabián CAPERA
Rafael Andrés FONSECA

Director:
Julián CAMARGO
Co-Director:
Iván LADINO

8 de noviembre de 2015

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Planteamiento del Problema	5
1.2. Objetivos	7
1.2.1. Objetivo Principal	7
1.2.2. Objetivos Específicos	7
1.3. Justificación	8
2. Marco Teorico	9
2.1. Modulación de Amplitud en Cuadratura	9
2.1.1. QAM y Protección al Error Equivalente (EEP)	9
2.1.2. QAM Jerárquico	10
2.2. Conjunto de Cantor	13
2.2.1. Radio de distancia α y los factores de escala f_i	17
2.2.2. Diseño de las Constelaciones Jerárquicas	18
2.2.3. Algoritmos para la modulación y demodulación	19
3. Simulación de un generador de ruido AWGN y Rayleigh flat fading	25
3.1. Simulación de Canales con Ruido	25
3.1.1. Figura de Mérito E_b/N_0	25
3.1.2. Ruido Blanco Gaussiano Aditivo (AWGN)	26
3.1.3. Ruido Rayleigh	27
3.2. Simulación del Canal de Comunicación	31
4. Calculo de las probabilidades de error de un sistema 16-CQAM bajo los ruidos AWGN y Rayleigh	33
4.1. Probabilidad de Error bajo ruido AWGN	33
4.1.1. Probabilidad de Error de los Bits más Significativos	33
4.1.2. Probabilidad de Error en los Bits Menos Significativos	37
4.1.3. Probabilidad de Error Bajo Ruido Rayleigh	40
5. Evaluación del desempeño del sistema de modulación CQAM respecto a la modulación QAM tradicional	43
5.1. Algoritmos	43

ÍNDICE GENERAL

5.1.1. Modulación	43
5.1.2. Demodulación	49
5.2. Resultados	56
5.2.1. Simulación de la modulación y demodulación HQAM ad- icionando ruido GAUSSIANO	56
5.2.2. Simulación de la modulación y demodulación HQAM ad- icionando ruido RAYLEIGH	57
Bibliografía	58

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema

La industria de la información, como pocas en el mundo es uno de los mercados más atractivos y de mayor auge hoy en día donde lo importante es la comprensión y el intercambio de la información sin importar la forma en que esta se presente ya sea en volumen o tamaño de la misma. Además se ha convertido en la base fundamental para el desarrollo óptimo en las empresas, gobiernos y grupos sociales.

Una creciente demanda de las telecomunicaciones implica manejar grandes volúmenes de información y obliga a pensar en la implantación de tecnologías que se adapten a las necesidades de una estructura básica existente. Sin embargo, el ruido en los canales de comunicación inalámbricos es un problema que afecta seriamente la transmisión de datos. A medida que el volumen de información crece con el pasar del tiempo, los actuales esquemas de modulación manifiestan limitaciones a la hora de disminuir las pérdidas en el flujo de información.

El esquema de modulación QAM ofrece la posibilidad de transmitir dos señales en la misma frecuencia, de forma que favorece el aprovechamiento del ancho de banda disponible. Al aumentar la cantidad de estados, hay una gran posibilidad de error por parte del receptor debido a las interferencias en el canal de comunicación. Una solución sencilla y de bajo costo es proteger los bits más significativos (UEP) por medio de un esquema de modulación jerárquico (HQAM).

En las últimas investigaciones referentes a la modulación jerárquica QAM, se han tratado de desarrollar procedimientos para obtener constelaciones no

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

uniformes, entre estas se encuentra un reciente trabajo utilizando los conjuntos de Cantor[?]. La ventaja de usar estos conjuntos radica en que debido a su naturaleza fractal, se repite a varias escalas, consiguiendo todos los valores de las coordenadas del esquema de modulación necesarios para representar los estados sin que se llegue a presentar un solapamiento. Pero su desarrollo aplicado al mejoramiento de las modulaciones no ha sido suficientemente explorado dejando un camino abierto hacia su investigación lo cual se plantea en este proyecto.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Principal

- Simular y Evaluar un sistema jerárquico de Modulación por Amplitud en Cuadratura de 16 estados con base en conjuntos de cantor (CQAM).

1.2.2. Objetivos Específicos

- Simular un generador de ruido AWGN y Rayleigh flat fading.
- Calcular las probabilidades de error de un sistema 16-CQAM bajo los ruidos AWGN y Rayleigh.
- Evaluar el desempeño del sistema de modulación CQAM respecto a la modulación QAM tradicional en relación a la tasa de error de bits (BER) vs. la figura de mérito E_b/N_0 .

1.3. Justificación

En la actualidad, la transmisión de datos crece cada día, esto significa que el ancho de banda en un futuro no será suficiente para enviar el gran aumento de flujo de información; dado que los sistemas convencionales de modulación no garantizarán este crecimiento de datos, por lo cual se hace necesario mejorar estos esquemas para solventar sus falencias.

Uno de estos sistemas es la modulación QAM la cual presenta una protección al error equivalente (EEP), que es una deficiencia al transmitir información de baja y alta prioridad, una solución pertinente a este problema sería la modulación jerárquica con base en conjuntos de cantor que ha probado ser una herramienta útil contra este tipo de error pero su desarrollo se ha quedado corto a la hora de su implementación por tanto se justifica realizar el trabajo propuesto.

Este trabajo puede servir de base para investigaciones futuras que se enfoquen en explorar las ventajas de la modulación CQAM en constelaciones que tienen un mayor número de estados, las cuales son indispensables en las comunicaciones inalámbricas para todo tipo de aplicaciones debido a la gran cantidad de datos que pueden transmitir, el procedimiento propio de los conjuntos de Cantor en proveer valores y formar constelaciones con una protección al error desigual (UEP), proporcionará un renovado interés por las características de la modulación QAM Jerárquica.

La búsqueda constante para mejorar la eficiencia de las comunicaciones se limitan a las técnicas de codificación, que reduce la cantidad de datos reales que serán transmitidos, y las mejoras físicas de los receptores frente al ruido, que se traduce en altos costos imposibilitando una implementación real. Los resultados prácticos de esta investigación sobre las fortalezas de la modulación CQAM respecto a la modulación QAM normal puede representar una alternativa de bajo costo para enfrentar los desafíos de las comunicaciones actuales.

Capítulo 2

Marco Teorico

2.1. Modulación de Amplitud en Cuadratura

2.1.1. QAM y Protección al Error Equivalente (EEP)

El diseño de las redes de comunicaciones inalámbricas han de manejar eficientemente los recursos espectrales que constituyen una importante restricción para alcanzar una alta tasa de transmisión de datos. Otro inconveniente es la alta probabilidad de error que aumenta sus efectos cuando se aplica compresión de datos, debido a que incrementa la dependencia de los bits más significativos; sumado a esto, los canales de comunicaciones inalámbricas tienen una naturaleza hostil y aleatoria que introducen ruido y distorsión afectando los datos a transmitir [?].

La modulación de amplitud en cuadratura M-ario (M-QAM) es considerada como una técnica atractiva para superar estas restricciones por su gran eficiencia espectral y ha sido propuesta para comunicaciones inalámbricas por varios autores [?]. La modulación de amplitud en cuadratura básica tiene la propiedad de transmitir dos mensajes independientes utilizando el mismo ancho de banda del canal[?], la señal transmitida se expresa como

$$s(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.1)$$

Donde $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son los mensajes que se pueden transmitir completamente independientes y pueden ser señales analógicas. Para obtener una modulación M-ario (M-QAM) se introduce la siguiente modificación

2.1. MODULACIÓN DE AMPLITUD EN CUADRATURA

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i \sin(2\pi f_c t) \quad (2.2)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. a_i es el componente en fase y b_i el componente en cuadratura, E_0 es la energía de la señal perteneciente a un valor particular del índice i para el cual la amplitud de la señal modulada es la más baja y T es la duración del símbolo. Generalmente, los espacios entre los símbolos tienen la misma distancia d obteniéndose una constelación cuadrada que se puede expresar como

$$\begin{aligned} a_i - a_{i-1} &= d, \\ b_i - b_{i-1} &= d, \end{aligned} \quad \forall i > 0 \quad (2.3)$$

En la figura 1 se observa el diagrama de constelación de señales para un 16-QAM. Todos sus estados tienen la misma distancia entre ellos, por lo cual esta modulación tiene una protección del error equivalente (EEP) haciendo que todos los bits se transmitan con la misma prioridad. Esto hace que la probabilidad de error sea la misma para los bits más significativos y menos significativos.

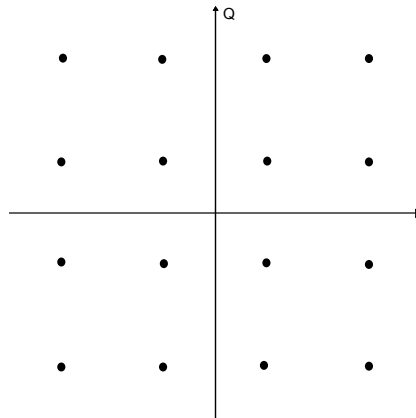


Figura 2.1: Constelación de una modulación 16-QAM. Todos sus estados se encuentran separados a la misma distancia.

2.1.2. QAM Jerárquico

La modulación QAM normal es más susceptible a la interferencia debido a que los estados están muy cerca entre ellos, donde un pequeño nivel de ruido puede desviar la señal hacia otro punto de decisión. Una alternativa al QAM tradicional es otorgar mayor prioridad a aquellos bits que son más significativos

y obtener una protección al error desigual (UEP), con lo cual se obtendría una modulación QAM Jerárquica. Este método ha sido aplicado en sistemas digitales como el de difusión de video digital terrestre (DVB-T)[?].

Para obtener un QAM Jerárquico simplemente hay que implementar una modificación al QAM normal. En el caso del 16-QAM, la jerarquía se logra con una mayor separación entre los cuadrantes de la constelación, permitiendo que la identificación de los estados que pertenezcan a diferentes cuadrantes sea menos susceptible al error, pero al mismo tiempo incrementa la probabilidad de error en los estados pertenecientes al mismo cuadrante. En la figura 4 se puede observar una constelación 16-QAM con jerarquía.

Desde un punto de vista analítico, el QAM Jerárquico implica que la ecuación (3) no se cumple ya que la distancia entre los símbolos no es constante en los componentes en fase a_i , como también en los componentes en cuadratura b_i . Aun así, los componentes en fase y cuadratura han de ser iguales, $a_i = b_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$.

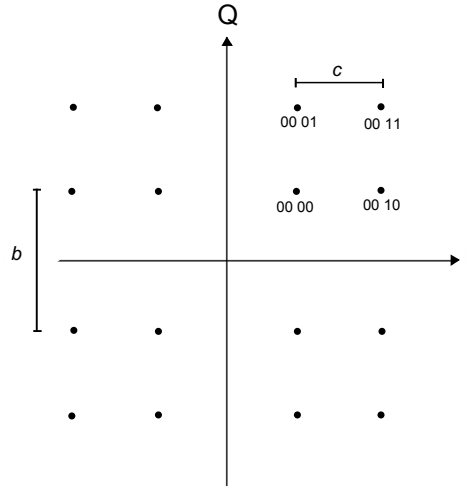


Figura 2.2: Constelación del 16-QAM Jerárquico. Notese como los estados de diferentes cuadrantes estan más separados.

En [?], los autores proponen una forma sencilla de medir el nivel de protección de los bits más significativos mediante una relación α entre b , que es la distancia más corta entre dos estados de cuadrantes diferentes, y c , que es la distancia de dos estados del mismo cuadrante. Cuando se tiene un radio α igual a la unidad, la distancia entre los estados es la misma sin importar si son del mismo cuadrante o no, con lo cual se convertiría en un QAM normal. Cuanto mayor sea el radio α , se logra una disminución en la tasa de error de bits (BER) de los bits más significativos y un aumento en la tasa de error de bits en los bits menos significativos.

2.1. MODULACIÓN DE AMPLITUD EN CUADRATURA

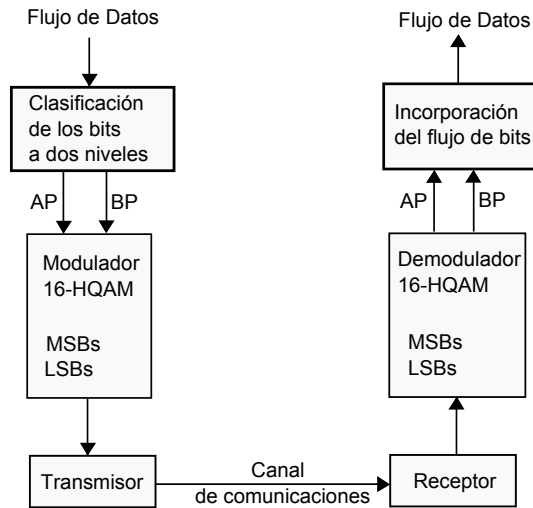


Figura 2.3: Sistema de modulación y demodulación 16-HQAM.

En la figura 5 se aprecia el sistema completo de un modulador y demodulador QAM Jerárquico de 16 estados. En la parte del modulador, este empieza recibiendo el flujo de información y se encarga de clasificar y dividir las unidades de información (bytes) en bits de alta y baja prioridad; si se tratara de un flujo de datos que consiste en unidades de información de 4 bits, el sistema divide los primeros dos bits y los envía como bits de alta prioridad (AP), mientras los otros 2 bits restantes serán enviados como bits de baja prioridad (BP). El modulador HQAM agrupa el primero de los bits de alta prioridad con el primer bit de baja prioridad y le asigna un valor del componente, ya sea en fase o cuadratura, previamente calculado según la relación α requerida. Este mismo procedimiento ocurre con el segundo bit de alta prioridad con el segundo de baja prioridad. Una vez se tengan los valores de los componentes en cuadratura y en fase, se puede transmitir el símbolo en un transmisor QAM normal.

El demodulador por su parte determina los símbolos que le han sido transmitidos comparándolos con los valores que tiene para realizar la decisión. Posteriormente, de los símbolos recibidos se procede a identificar los bits más significativos e incorporarlos con los bits de baja prioridad.

2.2. Conjunto de Cantor

George Cantor (1845-1918), fue un matemático mejor conocido por su trabajo en la teoría de conjuntos. En 1883 publicó un artículo acerca de los conjuntos que llevan su nombre. Los conjuntos de Cantor juegan un importante rol en muchas ramas de las matemáticas, en especial en la teoría de conjuntos, sistemas dinámicos caóticos y teoría de fractales [?].

El conjunto básico (ternario) de cantor se define en el intervalo $[0, 1]$ y se puede construir de dos formas, una geométrica y una definición numérica. La construcción geométrica toma el intervalo $[0, 1]$ y lo divide en tres partes iguales, de esta forma

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad (2.4)$$

A continuación, se extrae el intervalo abierto del medio quedando $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. A este último conjunto se le denomina C_1 . El siguiente paso consiste en tomar los intervalos de C_1 donde cada uno es dividido en tres partes

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ se convierte en } \left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \quad (2.5)$$

$$\left[\frac{2}{3}, 1\right] \text{ se convierte en } \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right] \quad (2.6)$$

Al retirar los intervalos abiertos o los intervalos intermedios se obtiene C_2

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right] \quad (2.7)$$

Siguiendo con el mismo procedimiento, se puede obtener C_3 , es decir, fraccionando cada intervalo cerrado de C_2 en tres y removiendo sus respectivos intermedios. En general todo C_{i+1} se construye a partir de C_i quedando

$$C_{i+1} = \frac{C_i}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_i}{3}\right) \quad (2.8)$$

El conjunto de Cantor se define como la intersección de todos los conjuntos C_i

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i \quad (2.9)$$

En la figura 2.4, se muestra las primeras etapas de la construcción del conjunto de Cantor.

2.2. CONJUNTO DE CANTOR



Figura 2.4: Primeras Etapas del Conjunto de Cantor.

Al usar la construcción geométrica, se tiene el inconveniente de que hay que conocer C_i si se quiere obtener C_{i+1} . Por esta razón, la construcción del conjunto de Cantor por medio de una definición numérica se hace necesaria. Este análisis se basa en una propiedad del conjunto de Cantor de no tener ningún 1 si se trabaja el intervalo $[0, 1]$ en base 3 [?], con lo cual se tiene la siguiente formula.

$$C_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} \left[\frac{a_j}{3^i}, \frac{a_j + 1}{3^i} \right] \quad (2.10)$$

Donde a_j es una construcción numérica fundamentada en el sistema de base 3 y el sistema binario. Sea $j \in \mathbb{N}$. Si $j = 0$ entonces $a_0 = 0$. Si $j \neq 0$, se describe a j en su notación binaria

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_m \cdot 2^m \quad (2.11)$$

Donde $b_i \in \{0, 1\}$, de lo anterior a_j queda como

$$a_j = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2b_m \cdot 3^m \quad (2.12)$$

En otras palabras, para hallar a_j es necesario convertir a j de decimal a binario de la forma $b_0b_1b_2 \dots b_m$, donde posteriormente cada digito se multiplica por 2 y luego se convierte a base 3 como se menciona en la ecuación 2.10.

Conjuntos de Cantor aplicados a la Modulación Jerárquica QAM

El conjunto de Cantor se puede generalizar, logrando aumentar las divisiones de cada intervalo, dejando de ser solo un conjunto ternario [?]. Sin embargo, la aplicación del QAM jerárquico requiere que se siga trabajando con el conjunto ternario de cantor, debido a que se representan en un nivel alto y uno bajo, pero es indispensable que la longitud del intervalo intermedio se pueda variar. En [?] se introduce la siguiente modificación

$$C_0 = [-1, 1] \quad (2.13)$$

$$C_i = \frac{1}{f_i} (C_{i-1} - (f_i - 1)) \cup \frac{1}{f_i} (C_{i-1} + (f_i - 1)) \quad (2.14)$$

Otra modificación es el cambio del intervalo inicial de $[0, 1]$ a $[-1, 1]$, un cambio más cómodo para asignar valores altos y bajos en una constelación QAM. En la ecuación 2.14 todo $i \geq 1$, en el cual se puede usar la notación

$$a \cdot S + b = \{as + b | s \in S\} \quad (2.15)$$

Para un conjunto S y $a, b \in \mathbb{R}$. La ecuación expresada en 2.14 se asemeja mucho a la ecuación 2.8, con la diferencia de que f_i es un parámetro que permite la variación del intervalo intermedio en cada iteración. Si $f_i = 3$ en la ecuación 2.14, se obtendría un conjunto ternario de Cantor clásico en un intervalo de $[-1, 1]$. En la figura 2.5 se muestran las primeras iteraciones del conjunto de Cantor con diferentes valores de f_i .

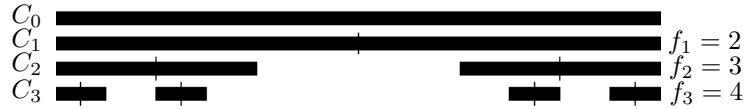


Figura 2.5: Primeras Etapas del Conjunto de Cantor con varios parametros f_n .

Una importante definición son los centros P_i de cada subconjunto C_i , estos se describen como

$$P_0 = 0 \quad (2.16)$$

$$P_i = \left(P_{i-1} - \frac{f_i - 1}{\prod_{j=1}^i f_j} \right) \cup \left(P_{i-1} + \frac{f_i - 1}{\prod_{j=1}^i f_j} \right) \quad (2.17)$$

Cada subconjunto C_i está compuesto por dos intervalos que bien podrían representar los valores alto y bajo del sistema binario. Junto a esto, los centros pueden formar un árbol binario para describir los símbolos que harán parte de la constelación del QAM. La ecuación 2.17 se modifica para tener una representación binaria de los centros de los intervalos, quedando como

$$(b_1 b_2 \dots b_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{1-b_i} \frac{f_i - 1}{\prod_{j=1}^i f_j} \quad (2.18)$$

En la figura 2.6 se observa un conjunto de cantor en sus primeras etapas junto a los centros en el último subconjunto C_3 y su representación binaria.

Gracias a la ecuación 2.18 es posible obtener valores para formar una constelación QAM. Como se observa en la figura 5, al ser f_n más grande, mayor será la separación entre estados cuyo bit significativo es diferente. En cambio, si f_n fuera igual a 2 en todos los subconjuntos, los centros P_n tendrían la misma separación entre ellos y por lo tanto todos los estados, dando lugar a un QAM

2.2. CONJUNTO DE CANTOR

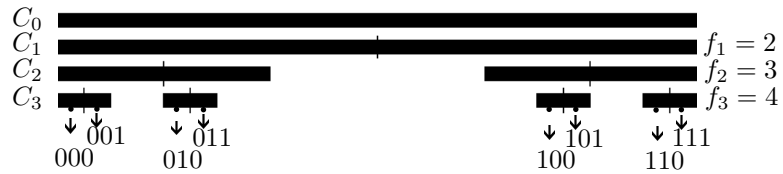


Figura 2.6: Representación binaria del subconjunto C_3 . Los semicírculos que se encuentran en la mitad de cada intervalo simboliza los centros P_n .

normal.

Al implementar la constelación de un QAM con base en los conjuntos de cantor, este procedimiento ha de ser llevado a la segunda dimensión, esto es, $C_n \times C_n$ donde n hace referencia a la etapa del conjunto de Cantor. Si se usa el subconjunto C_3 , quedaría $C_3 \times C_3$ que da como resultado un 64-QAM.

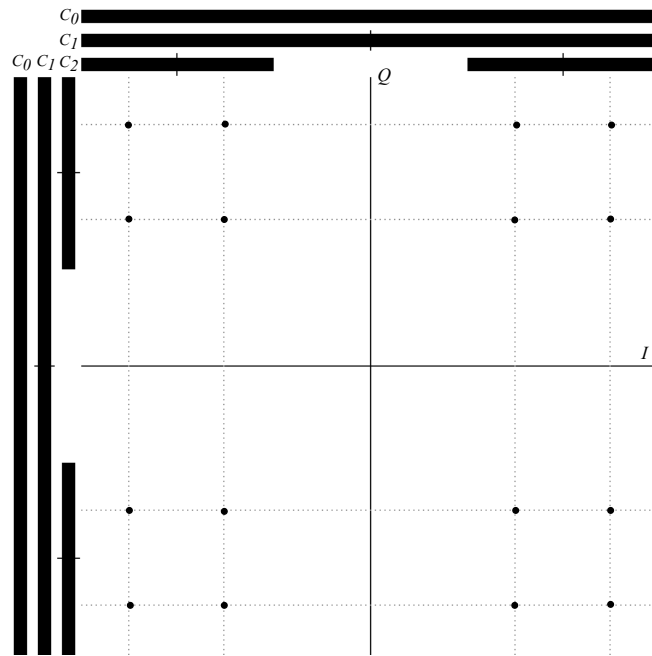


Figura 2.7: Constelación CQAM formada a partir de modulaciones CPAM.

En la figura 2.7 se observa como dos conjuntos de Cantor C_2 con los mismo factores de escala, forman una constelación 16-CQAM.

2.2.1. Radio de distancia α y los factores de escala f_i

En una constelación 16-QAM, el radio α relaciona la distancia de los estados más proximos de diferentes cuadrantes (distancia b), entre la distancia de los estados que se encuentran en un mismo cuadrante (distancia c). A un mayor valor de α , los estados pertenecientes a un determinado cuadrante se aíslan de los demas y por lo tanto, es mas facil reconocer los bits más significativos.

Los factores de escala f_i del conjunto de Cantor Generalizado, ofrecen una infinidad de posibilidades de obtener los estados de constelaciones jerarquicas que posean diferentes distancias b y c . En la figura 2.8, se puede observar las distancias b y c de una constelación CPAM de cuatro estados o C_2 . Se analizará una constelación C_2 debido a que es la representación de una constelación 16-CQAM en una sola dimensión.

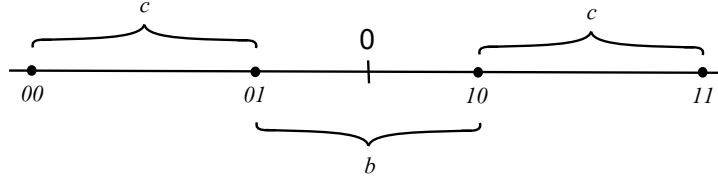


Figura 2.8: Constelación CPAM con las distancias b y c .

Para calcular las distancias en la figura, se utilizará la formula 2.18 de la cual se obtienen los valores de los estados. De esta forma, la distancia c se expresa como

$$c = (b_1, b_2^+) - (b_1, b_2^-) \quad (2.19)$$

b_1 es el bit más significativo y b_2 el bit menos significativo, el superíndice + indica un valor alto (1) y - el valor bajo (0). Usando la formula 2.18 se hallan los valores de los estados (b_1, b_2^+) y (b_1, b_2^-)

$$(b_1, b_2^+) \mapsto (-1)^{(1-b_1)} \frac{f_1 - 1}{f_1} + (-1)^{(1-1)} \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.20)$$

$$(b_1, b_2^-) \mapsto (-1)^{(1-b_1)} \frac{f_1 - 1}{f_1} + (-1)^{(1-0)} \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.21)$$

Así, restando la ecuación 2.20 de 2.21 se halla c

$$c = 2 \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.22)$$

Por otra parte, la distancia b es

$$b = (b_1^+, b_2^-) - (b_1^-, b_2^+) \quad (2.23)$$

2.2. CONJUNTO DE CANTOR

En otras palabras, b es la distancia entre el valor del estado que representa 10 al valor del estado que representa 01. Calculando (b_1^+, b_2^-) y (b_1^-, b_2^+) con la formula 2.18

$$(b_1^+, b_2^-) \mapsto (-1)^{(1-1)} \frac{f_1 - 1}{f_1} + (-1)^{(1-0)} \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.24)$$

$$(b_1^-, b_2^+) \mapsto (-1)^{(1-0)} \frac{f_1 - 1}{f_1} + (-1)^{(1-1)} \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.25)$$

La distancia b queda como

$$b = 2 \left[\frac{f_1 - 1}{f_1} - \frac{f_2 - 1}{f_1 \cdot f_2} \right] \quad (2.26)$$

Finalmente, el radio α se define como $\alpha = b/c$, expresando la relación con los factores de escala α queda como

$$\alpha = \frac{b}{c} = f_2 \left(\frac{f_1 - 1}{f_2 - 1} \right) - 1 \quad (2.27)$$

La formula 2.27 es realmente util al ser de gran importancia en el diseño de constelaciones jerarquicas especificando un α requerido y obtener directamente los parametros f_i de la modulación por conjunto de Cantor.

En un caso especial de la formula 2.27 donde $\alpha = 1$ y $f = f_1 = f_2$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= f \left(\frac{f-1}{f-1} \right) - 1 \\ f &= 2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Con lo cual, asignando un valor de 2 a todos los factores de escala se consigue una constelación 16-QAM normal. La notación $CQAM(f_1, f_2)$ representa una constelación construida a partir de los factores de escala f_1 y f_2 . En la figura 2.9, se muestran dos ejemplos de constelaciones similares con diferentes factores de escala.

2.2.2. Diseño de las Constelaciones Jerárquicas

Con base a la ecuación 2.27 es posible construir las cinco constelaciones jerárquicas que serán utilizadas en las simulaciones y en la implementación. En la tabla se eligen los α con los cuales se hallan los factores de escala f_1 , asumiendo $f_2 = 2$.

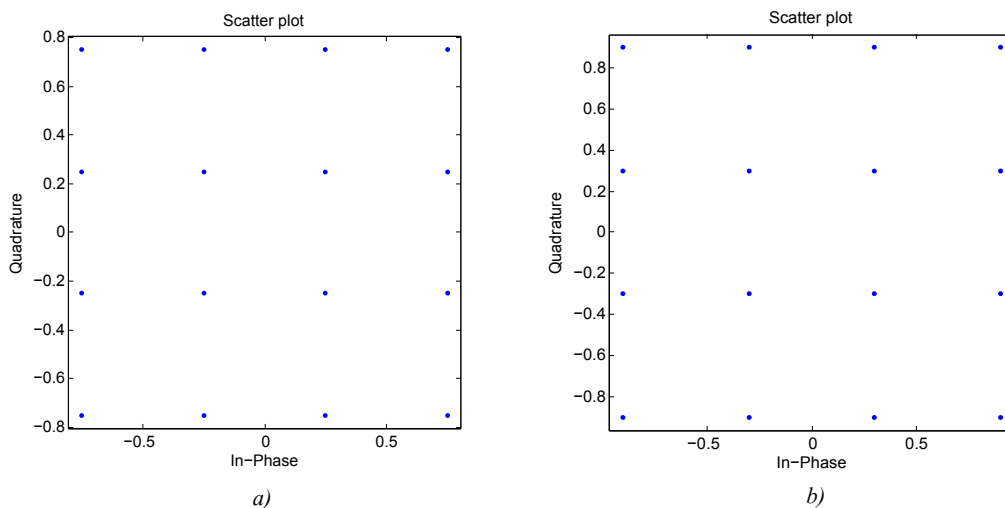


Figura 2.9: Constelaciones CQAM. a) Constelación $CQAM(2, 2)$. b) Constelación $CQAM(5/2, 4)$. Las dos constelaciones tienen el mismo $\alpha = 1$.

α	f_1	$CPAM(f_1, f_2)$
1	2	$CPAM(2,2)$
1.5	2.25	$CPAM(2.25,2)$
2	2.5	$CPAM(2.5,2)$
2.5	2.75	$CPAM(2.75,2)$
3	3	$CPAM(3,2)$
4	3.5	$CPAM(3.5,2)$

2.2.3. Algoritmos para la modulación y demodulación

A partir de la ecuación 2.18 se pueden desarrollar algoritmos que serán útiles para obtener los valores de los estados de la constelación CQAM, así mismo como la demodulación y restauración de la información. Estos algoritmos se implementarán tanto en la simulación como en el dispositivo programable. El primer algoritmo que se presenta es el de la modulación CPAM, el cual es la base fundamental de la modulación CQAM.

En la figura 2.10, la modulación CPAM acepta como datos de entrada a `scalf`, que son los factores de escala y a `data`, que es la información a ser modulada, con una longitud de dos bits. El resultado de la modulación está expresado en `p`, teniendo en cuenta que se trata de una constelación CPAM con un intervalo de $[-1, 1]$. El parámetro `i` determina cuántos ciclos y sumatorias se procesan; en el caso de una modulación 4-CPAM, `i` es de 2.

2.2. CONJUNTO DE CANTOR

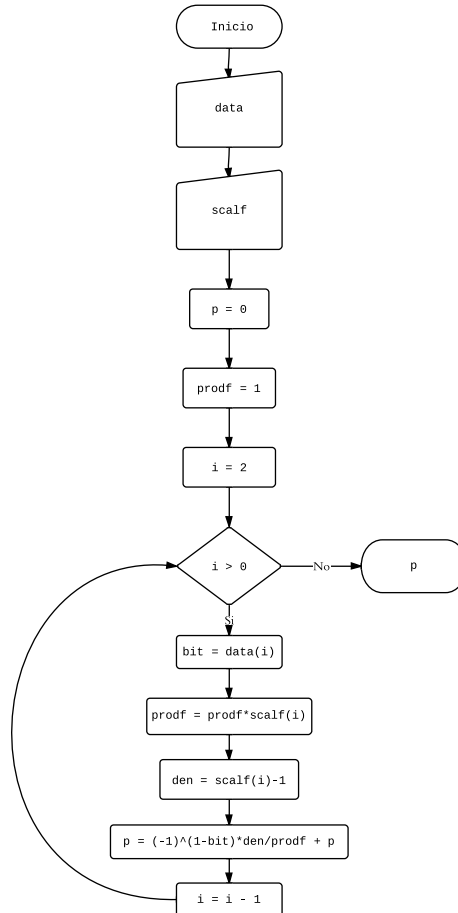


Figura 2.10: Algoritmo de la modulación CPAM.

En la figura 2.11, la demodulación CPAM tiene como parámetros de entrada a **scalf**, que al igual que al algoritmo de modulación representa a los factores de escala y **datamod**, que es el valor del símbolo modulado. La salida **data** es un número binario con dos dígitos de longitud. Como el algoritmo mostrado es una demodulación 4-CPAM, el parámetro **i** es de 2.

El algoritmo que describe la modulación CQAM se muestra en la figura 2.12, que consiste básicamente en dos modulaciones CPAM representando los ejes I y Q. Además, para aprovechar las ventajas de la modulación QAM Jerárquica, se debe reordenar los bits a transmitir. Esta es la razón por la cual en el algoritmo se utiliza un ciclo que separa los bits más significativos y los coloca junto a los menos significativos. De esta forma de un dato compuesto por 4 bits **info**

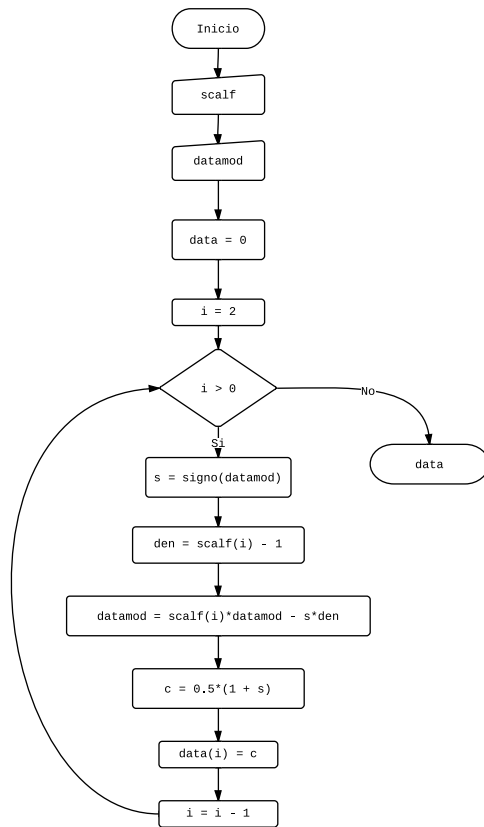


Figura 2.11: Algoritmo de la demodulación CPAM.

$= (b_3, b_2, b_1, b_0)$ se hacen 2 modulaciones CPAM las cuales transmiten $\mathbf{data}_q = (b_3, b_1)$ y $\mathbf{data}_i = (b_2, b_0)$, los bits más significativos son la pareja (b_1, b_0) y los menos significativos (b_3, b_2) .

En el algoritmo de modulación CQAM, \mathbf{scalf} son los factores de escala que serán utilizados por las modulaciones CPAM, representados por la función $\mathbf{cpammod}$. La función $\mathbf{cpammod}$ se invoca dos veces y produce las salidas \mathbf{pi} y \mathbf{pq} que también son las salidas del algoritmo CQAM.

El algoritmo de la demodulación CQAM se muestra en la figura 2.13, el cual hace el proceso inverso de la modulación. Los parametros de entrada del algoritmo son \mathbf{scalf} , que son los factores de escala, \mathbf{pq} y \mathbf{pi} que son los valores de los simbolos obtenidos en la modulación. Después de tener los parametros de entrada, se procede a invocar la función de demodulación CPAM, representado por $\mathbf{cpandemod}$, cuya salida son los bits que se obtienen en los simbolos. Estos bits se procesan en un ciclo para ordenarlos del menos significativo al más

2.2. CONJUNTO DE CANTOR

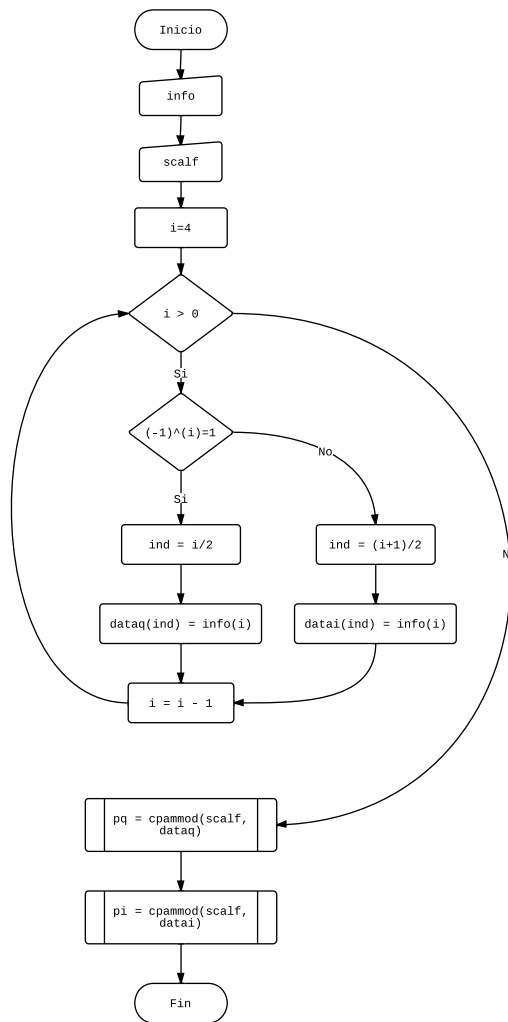


Figura 2.12: Algoritmo de la modulación CQAM.

significativo y están expresados en la salida `info`.

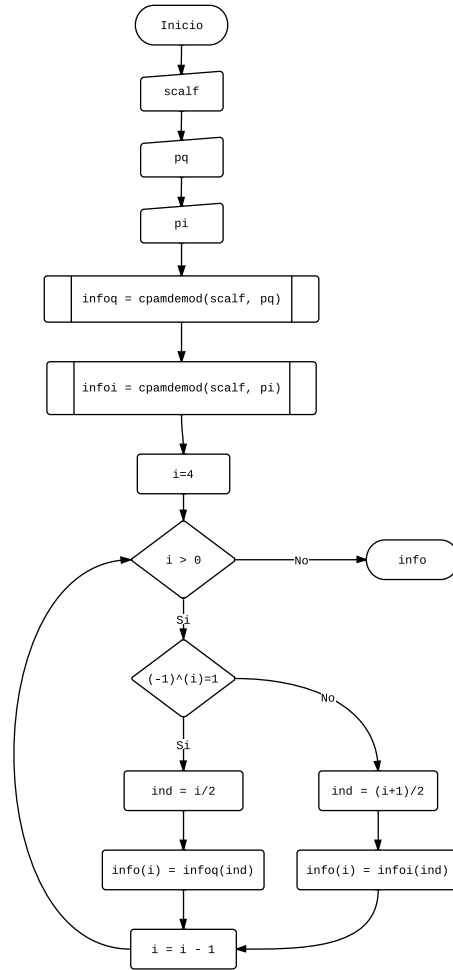


Figura 2.13: Algoritmo de la demodulación CQAM.

2.2. CONJUNTO DE CANTOR

Capítulo 3

Simulación de un generador de ruido AWGN y Rayleigh flat fading

3.1. Simulación de Canales con Ruido

Los sistemas de comunicaciones inalámbricas tienen como objetivo transmitir datos con la mínima pérdida de información cuando el canal presenta interferencias, ocasionados por innumerables efectos físicos que producen ruido. Determinar el nivel de eficiencia de la transmisión requiere que se prueben bajo diferentes tipos de ruidos y medir su tasa de error de bits (BER).

De los distintos ruidos que se han investigado, dos son de gran importancia en el campo de las comunicaciones inalámbricas, el ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN) y el ruido Rayleigh.

3.1.1. Figura de Mérito E_b/N_0

En comunicaciones analógicas es común usar la relación señal a ruido (SNR o S/N) que compara el nivel de la señal transmitida respecto al ruido que se encuentra en el canal de comunicación. En el caso de las comunicaciones digitales, se transmiten símbolos usando una forma de onda dentro de una ventana de tiempo y es necesario comparar un sistema a nivel de bits. Es por esta razón que es necesario usar otro tipo de relación que tenga en cuenta la energía de la

3.1. SIMULACIÓN DE CANALES CON RUIDO

señal digital, que es de corta duración, en vez de la potencia de la señal, que es utilizada en la SNR para caracterizar señales analógicas de infinita energía[?].

La relación E_b/N_0 divide el nivel de energía por bit (E_b) entre la densidad espectral de potencia del ruido (N_0), en (14) se muestra la siguiente equivalencia

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S \cdot T_b}{N/W} = \frac{S/R_b}{N/W} \quad (3.1)$$

Donde S es la potencia de la señal, T_b es el tiempo del bit que también puede expresarse como $1/R_b$ debido a que R_b es la tasa de transmisión de bits por segundo. Por la parte del ruido, N es la potencia del ruido y W es el ancho de banda.

3.1.2. Ruido Blanco Gaussiano Aditivo (AWGN)

El ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN) es un modelo básico producido por interferencias físicas presentes en la naturaleza como lo es la radiación de cuerpo negro o vibraciones térmicas de los átomos conductores[?]. El ruido blanco tiene la propiedad de que su densidad espectral de potencia es una constante en todas las frecuencias, mientras el ruido gaussiano cumple con la siguiente distribución

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

El AWGN muestra una distribución normal en el dominio del tiempo cuyo promedio es cero.

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

Un canal modelado con ruido AWGN se expresa como

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3.4)$$

En la ecuación 3.4, $r(t)$ es la señal recibida, $s(t)$ la señal transmitida y $n(t)$ es el ruido blanco gaussiano simulado. Esta ecuación es valida cuando solo se transmite una señal[]. En la figura 3.1 se muestra el diagrama de bloques del modelado de canal.

Los números al azar generados con la ayuda de algoritmos computacionales han sido utilizados por décadas en diferentes aplicaciones[?]. La distribución originada por software es uniforme, pero es absolutamente necesario obtener una distribución normal para poder simular al AWGN. Sin embargo, con la ayuda del algoritmo Box-Muller [?] se puede lograr transformar dos distribuciones normales independientes en una distribución normal con un promedio cero y una desviación estándar igual a uno.

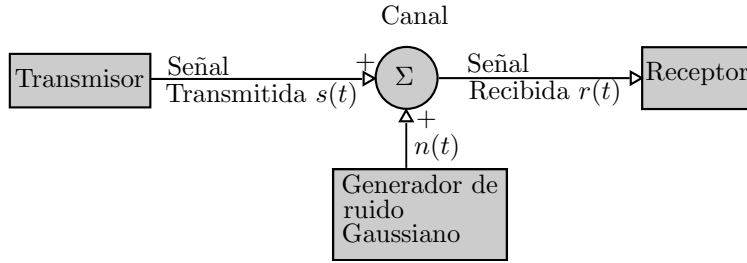


Figura 3.1: Simulación del canal AWGN.

$$X = \sqrt{-2 \log R_1} \cos(2\pi R_2) \quad (3.5)$$

Donde R_1 y R_2 son distribuciones independientes uniformes. Para determinar la utilidad del algoritmo se ha de comparar su funcionamiento con el comando `randn()` de MATLAB. La distribución generada por el algoritmo y el comando `randn()` presentan resultados de números con varios dígitos de precisión, lo que hace complicado visualizar la función de distribución debido a que se necesita dividir la función en intervalos y contar los números que están en ellos. Por esta razón, resulta más cómodo comparar estos dos métodos por su función de distribución acumulada.

En la figura 3.2 se muestra la función de distribución acumulada del algoritmo Box-Muller junto a los datos aleatorios generados por el comando `randn()` que produce números con una función de probabilidad normal. La función se obtiene al incrementar por una constante cuando se encuentra un número aleatorio de forma ascendente, definiendo la relación de conjuntos como

$$\begin{aligned} f &: p \mapsto y \\ p &= \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \\ y &= \left\{ \frac{k}{n} \mid k = 1, 2, 3, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde el conjunto p representa el conjunto de los números aleatorios generados x ordenados de forma ascendente.

3.1.3. Ruido Rayleigh

Distribución Rayleigh

La distribución Rayleigh es de gran utilidad al modelar las interferencias que se producen cuando no hay línea de vista entre el transmisor y el receptor y la señal se encuentra con diferentes obstáculos como lo son las construcciones en

3.1. SIMULACIÓN DE CANALES CON RUIDO

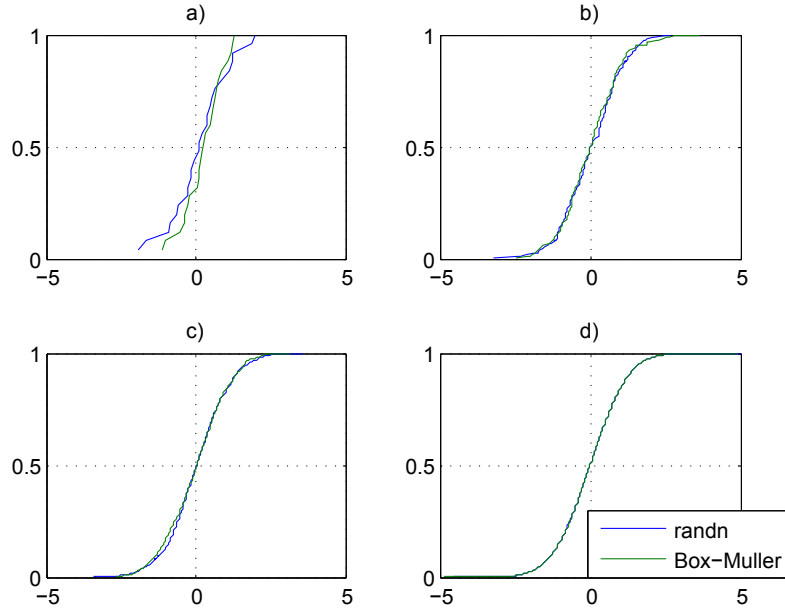


Figura 3.2: Función de distribución acumulada del algoritmo Box-Muller con diferentes cantidades de números aleatorios generados. a) 25 números. b) 225 números c) 900 números. d) Un millón de números.

las ciudades que atenúan, reflejan y refractan la señal [?].

La distribución Rayleigh puede hallarse partiendo de la respuesta al impulso complejo $h(t)$ de un canal de desvanecimiento plano (*flat fading channel*)[]

$$h(t) = h_I(t) + jh_Q(t) \quad (3.7)$$

Donde $h_I(t)$ y $h_Q(t)$ son números aleatorios con distribuciones normales independientes con promedios nulos y desviaciones estandar identicas. La magnitud de $h(t)$ 3.7 queda como

$$|h(t)| = \sqrt{|h_I(t)|^2 + |h_Q(t)|^2} \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 sigue una distribución Rayleigh que se muestra a continuación

$$r(z) = \frac{2z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \quad (3.9)$$

En la figura 3.3 se observa la distribución Rayleigh con diferentes σ .

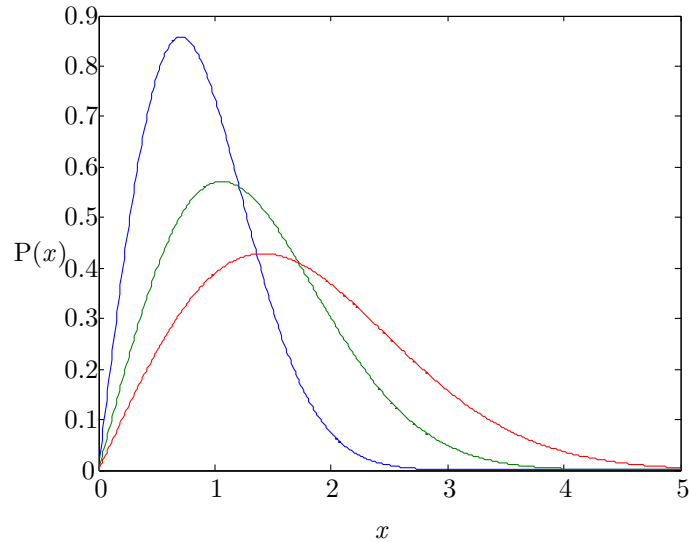


Figura 3.3: Distribuciones de Probabilidad Rayleigh. En azul $\sigma = 1$, en verde $\sigma = 1,5$ y en rojo $\sigma = 2$.

Modelo de Canal Rayleigh

Existen varios modelos para simular un canal con ruido Rayleigh que han sido estudiados durante años. Estos modelos no utilizan la distribución Rayleigh directamente como se hace en el caso del canal AWGN con la distribución gaussiana, en cambio, se trata de generar las múltiples señales que afectan al receptor del sistema de comunicación.

El modelo de Clark, también conocido como el modelo matemático de referencia fue uno de los primeros modelos para simular el canal Rayleigh [], es básicamente un sumatorio de ondas sinusoides donde cada una tiene su propio ángulo de fase, ganancia y ángulo de entrada de la onda, como se observa en la figura[????]. Una desventaja importante al usar el modelo de Clark es que no es muy eficiente frente a otros modelos como el de Jack, el cual se ha convertido en el más popular de todos por varias décadas y se puede obtener al usar las siguientes ecuaciones

3.1. SIMULACIÓN DE CANALES CON RUIDO

$$h(t) = h_I(t) + jh_Q(t) \quad (3.10a)$$

$$h_I(t) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^M a_n \cos(\omega_n t) \quad (3.10b)$$

$$h_Q(t) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^M b_n \cos(\omega_n t) \quad (3.10c)$$

Donde $N = M + 4$ y

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(\beta_0), & n = 0 \\ 2 \cos(\beta_n), & n = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.11)$$

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(\beta_0), & n = 0 \\ 2 \sin(\beta_n), & n = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & n = 0 \\ \frac{\pi n}{M}, & n = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\omega_n = \begin{cases} \omega_d, & n = 0 \\ \omega_d \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & n = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.14)$$

La ecuación 3.10.a es exactamente a la ecuación 3.7 y al hallar $|h(t)|$ se obtienen una distribución Rayleigh. N es el número de trayectorias y ω_d es la frecuencia del efecto doppler.

El modelo Jack es un modelo determinístico debido a las simplificaciones hechas del modelo de referencia matemática y no refleja la aleatoriedad de un canal Rayleigh, dejando por fuera muchas situaciones que se puedan presentar en una transmisión real. Por esta razón, se han desarrollado innumerables modificaciones para agregar cierta incertidumbre característica de un canal con ruido. En [], los autores proponen el siguiente modelo

$$h(t) = h_I(t) + h_Q(t) \quad (3.15a)$$

$$h_I(t) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \cos(\psi_n) \cdot \cos(\omega_d t \cos(\alpha_n) + \phi) \quad (3.15b)$$

$$h_Q(t) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \sin(\psi_n) \cdot \cos(\omega_d t \cos(\alpha_n) + \phi) \quad (3.15c)$$

Con

$$\alpha_n = \frac{2\pi n - \pi + \theta}{4M}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.16)$$

Donde $M = N/4$. Las variables ϕ , θ y ψ_n son números aleatorios que siguen una distribución uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi)$ para todo n .

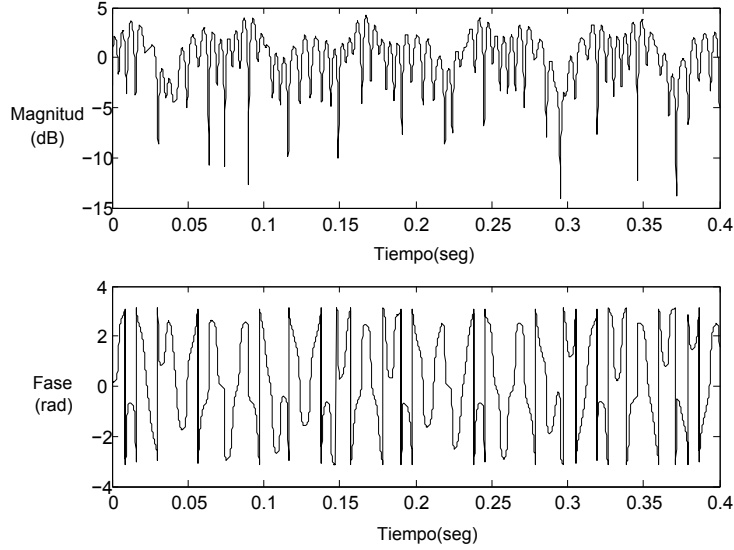


Figura 3.4: Ruido Rayleigh generado por las ecuaciones 3.15 y 3.16 con 15 trayectorias y un ω_d de 100 Hz.

3.2. Simulación del Canal de Comunicación

Con la teoría de la sección anterior es posible construir la simulación de un canal de comunicación que sufre de interferencias modeladas por el ruido AWGN y Rayleigh.

$$s = r \cdot h + n_g \quad (3.17)$$

$$\frac{s}{h} = r + \frac{n_g}{h} \quad (3.18)$$

$$\tilde{n} = \frac{n_g}{h} = \frac{n_g}{h} \cdot \frac{\bar{h}}{\bar{h}} \quad (3.19)$$

$$\tilde{n} = \frac{n_g \cdot \bar{h}}{h_I^2 + h_Q^2} \quad (3.20)$$

$$\tilde{n} = \frac{x_n(h_I - h_Q)}{h_I^2 + h_Q^2} + j \frac{x_n(h_I + h_Q)}{h_I^2 + h_Q^2} \quad (3.21)$$

3.2. SIMULACIÓN DEL CANAL DE COMUNICACIÓN

Capítulo 4

Calculo de las probabilidades de error de un sistema 16-CQAM bajo los ruidos AWGN y Rayleigh

4.1. Probabilidad de Error bajo ruido AWGN

El calculo de probabilidades de error en constelaciones CQAM sigue el mismo procedimiento para calcular la probabilidad de error de simbolo de una constelación QAM[]. La principal diferencia es que en el CQAM se deben calcular dos probabilidades, probabilidad de error de los bits mas y menos significativos, dejando de lado el error de simbolo generalmente aplicado en las constelaciones QAM.

4.1.1. Probabilidad de Error de los Bits más Significativos

En la figura se muestra los simbolos del primer cuadrante de una constelación CQAM. Primero, se ha de calcular la probabilidad de que cada simbolo

4.1. PROBABILIDAD DE ERROR BAJO RUIDO AWGN

permanezca en su respectiva región para ser plenamente identificado. La región es la misma para todos los símbolos del cuadrante debido a que se está identificando a los bits más significativos.

La probabilidad de que el primer símbolo (s_1) permanezca en la región es

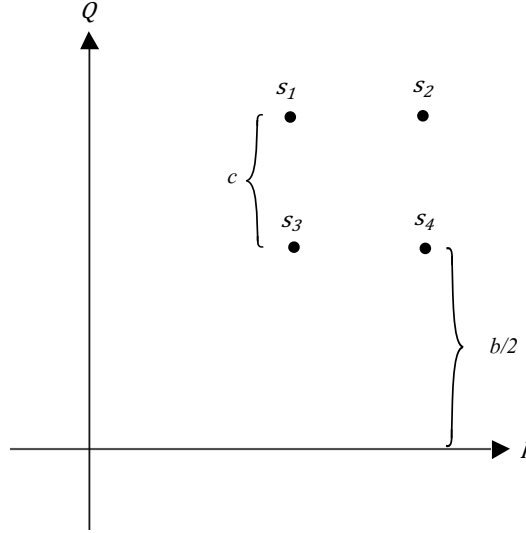


Figura 4.1: figura

$$\begin{aligned}
 P(C|m_1) &= P(0 < n_1, 0 < n_2) \\
 &= P(0 < n_1)P(0 < n_2) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr \right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{b/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(b+2c)/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \\
 &= Q\left(\frac{-b/2}{\sigma_n}\right) Q\left(\frac{-(b+2c)}{2\sigma_n}\right) \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{b}{2\sigma_n}\right) \right] \left[1 - Q\left(\frac{b+2c}{2\sigma_n}\right) \right]
 \end{aligned}$$

La probabilidad $P(C|m_2)$ se define como

$$\begin{aligned}
 P(C|m_2) &= P(0 < n_1, 0 < n_2) \\
 &= P(0 < n_1)P(0 < n_2) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr \right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(b+2c)/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(b+2c)/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \\
 &= Q\left(\frac{-(b+2c)}{2\sigma_n}\right) Q\left(\frac{-(b+2c)}{2\sigma_n}\right) \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{b+2c}{2\sigma_n}\right) \right]^2
 \end{aligned}$$

La probabilidad $P(C|m_3)$ se expresa

$$\begin{aligned}
 P(C|m_1) &= P(0 < n_1, 0 < n_2) \\
 &= P(0 < n_1)P(0 < n_2) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr \right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{b/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{b/2}{\sigma_n}}^\infty e^{-z^2/2} dz \right] \\
 &= Q\left(\frac{-b/2}{\sigma_n}\right) Q\left(\frac{-b/2}{\sigma_n}\right) \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{b}{2\sigma_n}\right) \right]^2
 \end{aligned}$$

Las coordenadas del simbolo s_4 estan intercambiadas respecto a las del simbolo s_1 , por lo tanto la probabilidad $P(C|m_4)$ es igual a la probabilidad $P(C|m_1)$. Despues de hallar estas cuatro probabilidades, es posible calcular la probabilidad de que todos los simbolos permanezcan en su respectiva región, esto es, determinar $P(C)$. Para simplificar el calculo de $P(C)$ se introducen las variables p_{hb} y q_{hb} .

$$p_{hb} = 1 - Q\left(\frac{b}{2\sigma_n}\right) \quad (4.1)$$

$$q_{hb} = 1 - Q\left(\frac{b+2c}{2\sigma_n}\right) \quad (4.2)$$

4.1. PROBABILIDAD DE ERROR BAJO RUIDO AWGN

Con lo cual las probabilidades anteriormente calculadas quedarían como

$$P(C|m_1) = p_{hb} \cdot q_{hb} \quad (4.3)$$

$$P(C|m_2) = q_{hb}^2 \quad (4.4)$$

$$P(C|m_3) = p_{hb}^2 \quad (4.5)$$

$$P(C|m_4) = p_{hb} \cdot q_{hb} \quad (4.6)$$

$P(C)$ se define

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{i=1}^{16} P(C|m_i)P(m_i) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} P(C|m_i) \\ &= \frac{1}{16} [4p_{hb}^2 + 8p_{hb} \cdot q_{hb} + 4q_{hb}^2] \\ &= \left(\frac{1}{2}p_{hb} + \frac{1}{2}q_{hb} \right)^2 \end{aligned}$$

La probabilidad del error de los bits más significativos se define como la probabilidad de que al menos un símbolo no se encuentre dentro de su respectiva región $P(C)$.

$$P_{HB} = 1 - P(C) = 1 - \left(\frac{1}{2}p_{hb} + \frac{1}{2}q_{hb} \right)^2 \quad (4.7)$$

Antes de aplicar la ecuación (4.7), las distancias b y c de las constelaciones han de expresarse de una forma más generalizada en términos de la figura de mérito E_b/N_o y el radio α . La energía de cada símbolo del cuadrante es calculado

$$E_1 = \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{b+2c}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}b^2 + bc + c^2$$

$$E_2 = 2 \left(\frac{b+2c}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2bc + c^2$$

$$E_3 = 2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{b^2}{2}$$

$$E_4 = E_1$$

La energía promedio de estos 4 símbolos queda como

$$\bar{E} = \frac{1}{4} [E_1 + E_2 + E_3 + E_4] = \frac{b^2}{2} + bc + c^2 \quad (4.8)$$

La energía por bit se define como

CAPÍTULO 4. CALCULO DE LAS PROBABILIDADES DE ERROR DE
UN SISTEMA 16-CQAM BAJO LOS RUIDOS AWGN Y RAYLEIGH

$$E_b = \frac{\bar{E}}{4} = \frac{1}{8} (b^2 + 2bc + 2c^2) \quad (4.9)$$

La energía por bit esta expresada en terminos de b y c , los cuales pueden ser reemplazados por el radio $\alpha = b/c$, de esta forma E_b queda

$$E_b = \frac{c^2}{8} (\alpha^2 + 2\alpha + 2) \quad (4.10)$$

Despejando para c en (54)

$$c = \sqrt{\frac{8E_b}{\alpha^2 + 2\alpha + 2}} \quad (4.11)$$

La ecuación (55) junto a la relación de ruido espectral $\sigma_n = \sqrt{N_o/2}$ se utilizarán para reemplazar los terminos $\frac{b}{2\sigma_n}$ y $\frac{b+2c}{2\sigma_n}$ que se encuentran en p_{hb} y q_{hb} .

$$\frac{b}{2\sigma_n} = \frac{\alpha c}{2\sigma_n} = \alpha \sqrt{\frac{4E_b}{N_o (\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \quad (4.12)$$

$$\frac{b+2c}{2\sigma_n} = \frac{c(\alpha+2)}{2\sigma_n} = (\alpha+2) \sqrt{\frac{4E_b}{N_o (\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \quad (4.13)$$

De esta forma, p_{hb} y q_{hb} se reescriben como

$$p_{hb} = 1 - Q \left(\alpha \sqrt{\frac{4E_b}{N_o (\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.14)$$

$$q_{hb} = 1 - Q \left((\alpha+2) \sqrt{\frac{4E_b}{N_o (\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.15)$$

4.1.2. Probabilidad de Error en los Bits Menos Significativos

En la figura se muestra los simbolos del primer cuadrante y sus regiones que identifican a los bits menos significativos. En esta constelación, los simbolos estan ordenados de acuerdo a la codificación gray, ya que esta permite una menor probabilidad de error []. A continuación se determina las probabilidades de los simbolos al permanecer en su respectiva región. $P(C|m_1)$ queda como

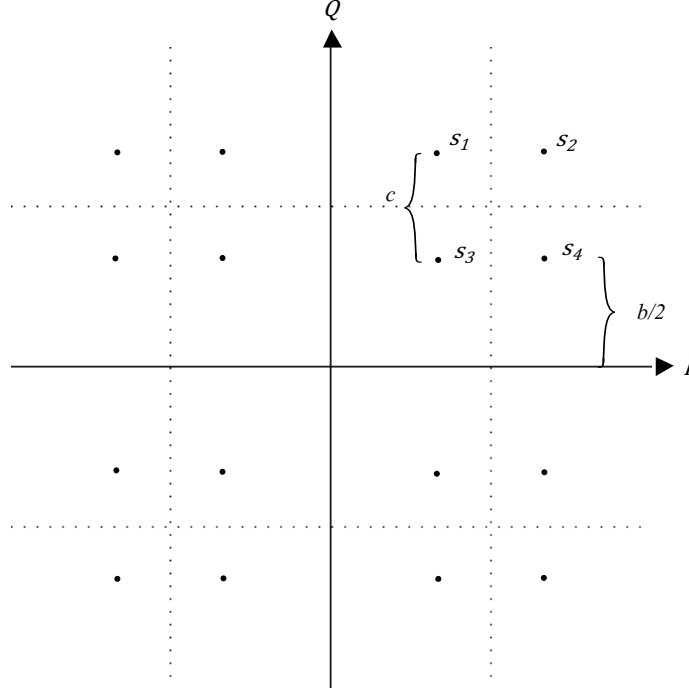


Figura 4.2: figura

$$\begin{aligned}
 P(C|m_1) &= P\left(-\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}, \frac{c+b}{2} < n_2\right) \\
 &= P\left(-\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}\right) P\left(\frac{c+b}{2} < n_2\right) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+b}{2}}^{\frac{c+b}{2}} e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr\right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c+b}{2}}^{\infty} e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr\right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+2b}{2\sigma_n}}^{\frac{c}{2\sigma_n}} e^{-z^2/2} dz\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c}{2\sigma_n}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz\right] \\
 &= \left[1 - \left(F\left(-\frac{c+2b}{2\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right)\right)\right] \left[Q\left(-\frac{c}{2\sigma_n}\right)\right] \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{c+2b}{2\sigma_n}\right) - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right)\right] \left[1 - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$P(C|m_2)$ se determina como

$$\begin{aligned}
 P(C|m_2) &= P\left(\frac{c+b}{2} < n_1, \frac{c+b}{2} < n_2\right) \\
 &= P\left(\frac{c+b}{2} < n_1\right) P\left(\frac{c+b}{2} < n_2\right) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c+b}{2}}^{\infty} e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr \right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c+b}{2}}^{\infty} e^{-(r-\frac{b+2c}{2})^2/2\sigma_n^2} dr \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c}{2\sigma_n}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c}{2\sigma_n}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right] \\
 &= \left[Q\left(-\frac{c}{2\sigma_n}\right) \right] \left[Q\left(-\frac{c}{2\sigma_n}\right) \right] \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right) \right]^2
 \end{aligned}$$

$P(C|m_3)$ queda como

$$\begin{aligned}
 P(C|m_3) &= P\left(-\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}, -\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}\right) \\
 &= P\left(-\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}\right) P\left(-\frac{c+b}{2} < n_1 < \frac{c+b}{2}\right) \\
 &= \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+b}{2}}^{\frac{c+b}{2}} e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr \right] \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+b}{2}}^{\frac{c+b}{2}} e^{-(r-b/2)^2/2\sigma_n^2} dr \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+2b}{2\sigma_n}}^{\frac{c}{2\sigma_n}} e^{-z^2/2} dz \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{c+2b}{2\sigma_n}}^{\frac{c}{2\sigma_n}} e^{-z^2/2} dz \right] \\
 &= \left[1 - \left(F\left(-\frac{c+2b}{2\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right) \right) \right]^2 \\
 &= \left[1 - Q\left(\frac{c+2b}{2\sigma_n}\right) - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right) \right]^2
 \end{aligned}$$

Al igual que con el calculo de la probabilidad de error en los bits más significativos, las coordenadas del simbolo s_4 estan intercambiadas respecto a las del simbolo s_1 , por lo tanto la probabilidad $P(C|m_4)$ es igual a la probabilidad $P(C|m_1)$. Para simplificar, las variables p_{lb} y q_{lb} se expresan como

$$p_{lb} = 1 - Q\left(\frac{c+2b}{2\sigma_n}\right) - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right)$$

$$q_{lb} = 1 - Q\left(\frac{c}{2\sigma_n}\right)$$

Las probabilidades $P(C|m_i)$ pueden expresarse de la misma manera que en las ecuaciones (4.15). También, la probabilidad de error de los bits menos significativos es igual a P_{HB} realizando un cambio de los terminos p_{hb} y q_{hb} por p_{lb} y q_{lb} respectivamente.

$$P_{LB} = 1 - \left(\frac{1}{2}p_{lb} + \frac{1}{2}q_{lb}\right)^2 \quad (4.16)$$

Utilizando una vez más (4.15) y la relación de ruido $\sigma_n = \sqrt{N_o/2}$, se reemplaza los terminos $\frac{c}{2\sigma_n}$ y $\frac{c+2b}{2\sigma_n}$

$$\frac{c}{2\sigma_n} = \sqrt{\frac{4E_b}{N_o(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \quad (4.17)$$

$$\frac{c+2b}{2\sigma_n} = \frac{c(2\alpha+1)}{2\sigma_n} = (2\alpha+1)\sqrt{\frac{4E_b}{N_o(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \quad (4.18)$$

Reescribiendo p_{lb} y q_{lb} quedarían como

$$p_{lb} = 1 - Q\left((2\alpha+1)\sqrt{\frac{4E_b}{N_o(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}}\right) - Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{N_o(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}}\right) \quad (4.19)$$

$$q_{lb} = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{N_o(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}}\right) \quad (4.20)$$

4.1.3. Probabilidad de Error Bajo Ruido Rayleigh

La probabilidad de error bajo ruido Rayleigh se define como []

$$P_r = \int_0^\infty P(\gamma)p_r(\gamma)d\gamma \quad (4.21)$$

Donde $P(\gamma)$ es la función de probabilidad bajo ruido gaussiano y $p_r(\gamma)$ es descrita como

$$p_r(\gamma) = \frac{1}{\gamma_0}e^{-\gamma/\gamma_0} \quad (4.22)$$

CAPÍTULO 4. CALCULO DE LAS PROBABILIDADES DE ERROR DE
UN SISTEMA 16-CQAM BAJO LOS RUIDOS AWGN Y RAYLEIGH

La ecuación () es una distribución chi cuadrado con dos grados de libertad. γ_0 es

$$\gamma_0 = \frac{E_b}{N_0} E(a^2) \quad (4.23)$$

$E(a^2)$ es el valor promedio de a^2 . Teniendo en cuenta las ecuaciones () y (), la probabilidad de error en ruido Rayleigh de los bits mas significativos es

$$P_{HBr} = \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{1}{2} p_{hb}(\gamma) + \frac{1}{2} q_{hb}(\gamma) \right)^2 \right] p_r(\gamma) d\gamma \quad (4.24)$$

Con $p_{hb}(\gamma)$ y $q_{hb}(\gamma)$ definidos como

$$p_{hb}(\gamma) = 1 - Q \left(\alpha \sqrt{\frac{4\gamma}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.25)$$

$$q_{hb}(\gamma) = 1 - Q \left((\alpha + 2) \sqrt{\frac{4\gamma}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.26)$$

El calculo de la probabilidad de los bits menos significativos quedaría

$$P_{LBr} = \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{1}{2} p_{lb}(\gamma) + \frac{1}{2} q_{lb}(\gamma) \right)^2 \right] p_r(\gamma) d\gamma \quad (4.27)$$

Con $p_{lb}(\gamma)$ y $q_{lb}(\gamma)$ definidos como

$$p_{lb} = 1 - Q \left((2\alpha + 1) \sqrt{\frac{4\gamma}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) - Q \left(\sqrt{\frac{4\gamma}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.28)$$

$$q_{lb} = 1 - Q \left(\sqrt{\frac{4\gamma}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}} \right) \quad (4.29)$$

4.1. PROBABILIDAD DE ERROR BAJO RUIDO AWGN

Capítulo 5

Evaluación del desempeño del sistema de modulación CQAM respecto a la modulación QAM tradicional

5.1. Algoritmos

5.1.1. Modulación

La simulación de la modulación se puede dividir en 4 partes, como se muestra en la figura: Inicialización de variables, Asignación de los valores de las componentes I y Q y modulación QAM. El calculo de los valores de la constelación de acuerdo a los conjuntos de Cantor se hace por medio de funciones `cpammod()` antes de la asignación de los valores de los componentes.

Los bloques de Asignación de valores de los componentes son básicamente iteraciones sobre toda la lista de datos aleatorios generados, agruparlos y determinar su valor según los resultados de la modulación CPAM.

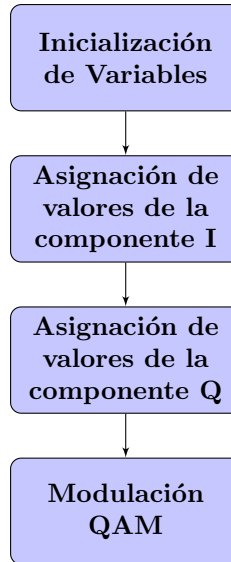


Figura 5.1: Diagrama de flujo general para la modulación.

Inicialización de Variables

Los datos de entrada de la simulación son: el factor de escala (f_1), Energía por bit (e_b), la relación señal a ruido en dB (snr) y la longitud de la trama a simular en bits (frl). En la modulación se usarán el factor de escala (f_1), para la modulación CPAM y la longitud de trama (frl) con el objetivo de conocer la cantidad total de datos a procesar.

En el segundo bloque se especifican ciertas variable generales para la simulación: F_c es la frecuencia en Hz de la señal portadora, R_{sym} es la tasa de simbolos por segundo y F_s es la tasa de muestreo. Luego, se generan de forma aleatoria los datos que van a ser transmitidos que son 4 arreglos representando los bits de baja prioridad de cada una de las componentes b_i y b_q , y también los bits de alta prioridad b_{ii} y b_{qq} .

El ultimo bloque contiene los valores de todas las posibilidades de una modulación 4-CPAM, estos valores se obtienen de la función `cpammod()`, con el segundo factor de escala fijado en 2. Como los resultados de `cpammod()` se encuentran en un rango de $[-1, 1]$, se realiza un escalamiento por 4 para aumentar el rango y ser mas comodo para su interpretación por parte del usuario. Por ejemplo, una constelación 4-PAM tendría sus valores en $\{-3, -1, 1, 3\}$ en ves de los valores originales $\{-0.75, -0.25, 0.25, 0.75\}$.

CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA DE
MODULACIÓN CQAM RESPECTO A LA MODULACIÓN QAM
TRADICIONAL

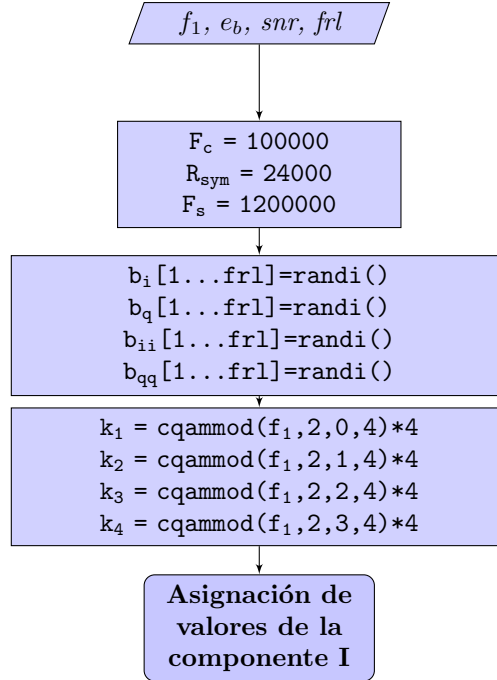


Figura 5.2: Diagrama de Inicialización de variables.

Asignación de valores de las componentes

Los diagramas de flujo que se muestran en las figuras describen el proceso de asignación de los valores para las componentes. Los valores de los símbolos se determinaron en las variables k_1 , k_2 , k_3 y k_4 . El resultado de esta operación quedará registrado en los arreglos s_i y s_q .

El proceso fundamental de los diagramas de flujo es revisar todos los datos que se encuentran en los arreglos mediante un bucle y, dependiendo de la codificación Gray formada por los bits de alta y baja prioridad se obtiene el correspondiente k_i .

La variable **sps** representa las muestras por dato especificada por F_c , esto significa que cada dato procesado tendrá 12 valores k_i , la asignación de los valores es hecha por medio de f_a que toma como parametros las variables s_i o s_q , **sps**, **n** y k_i .

La funcionalidad de f_a es un procedimiento que ciertos lenguajes de programación como MATLAB u Octave pueden realizar en una sola línea de código debido a sus facilidades para el procesamiento de arreglos. Para otros lenguajes de programación de mas bajo nivel, esta función se puede implementar mediante el siguiente diagrama de flujo.

5.1. ALGORITMOS

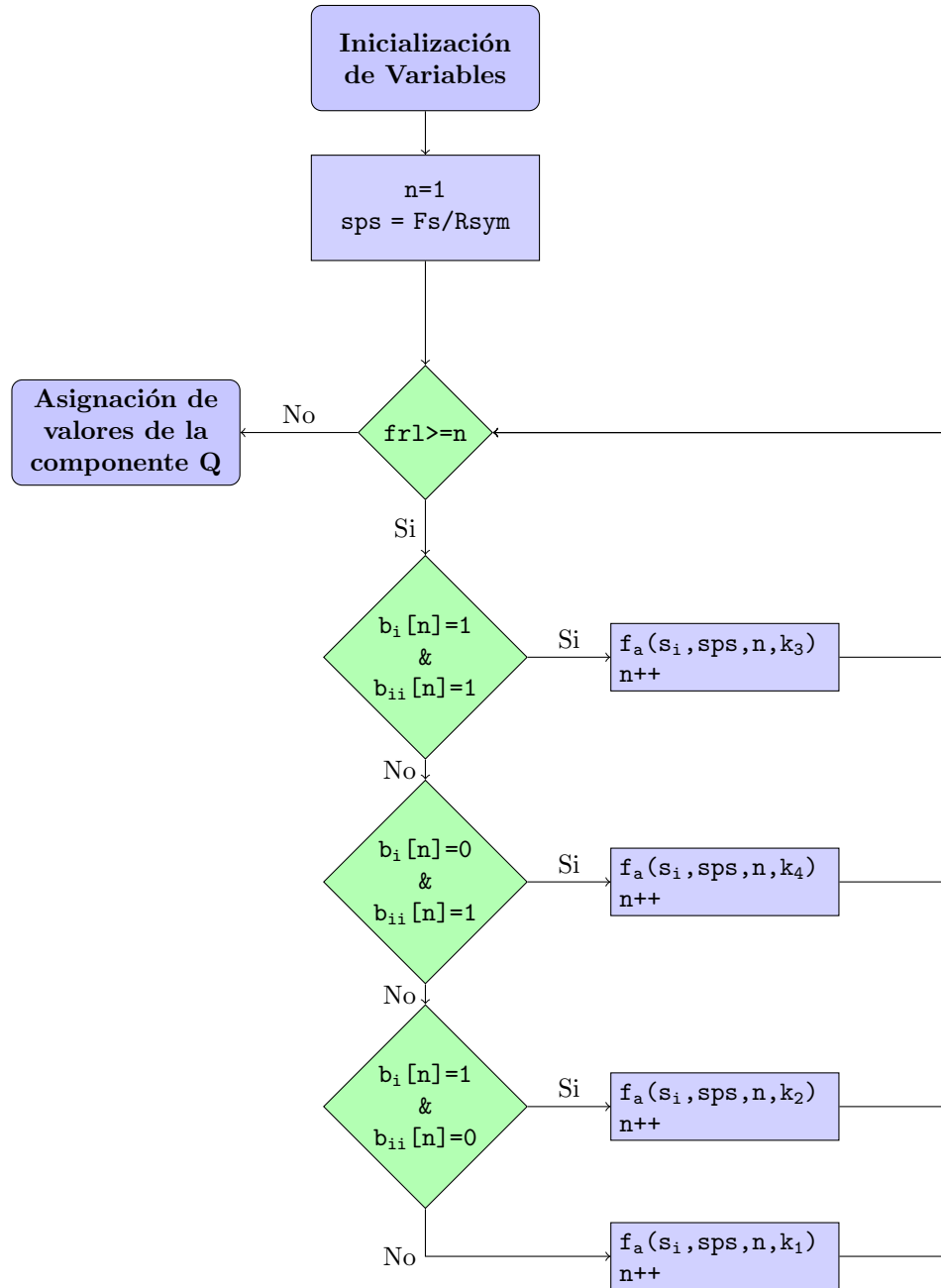


Figura 5.3: Diagrama de flujo de la asignación de valores para la componente I.

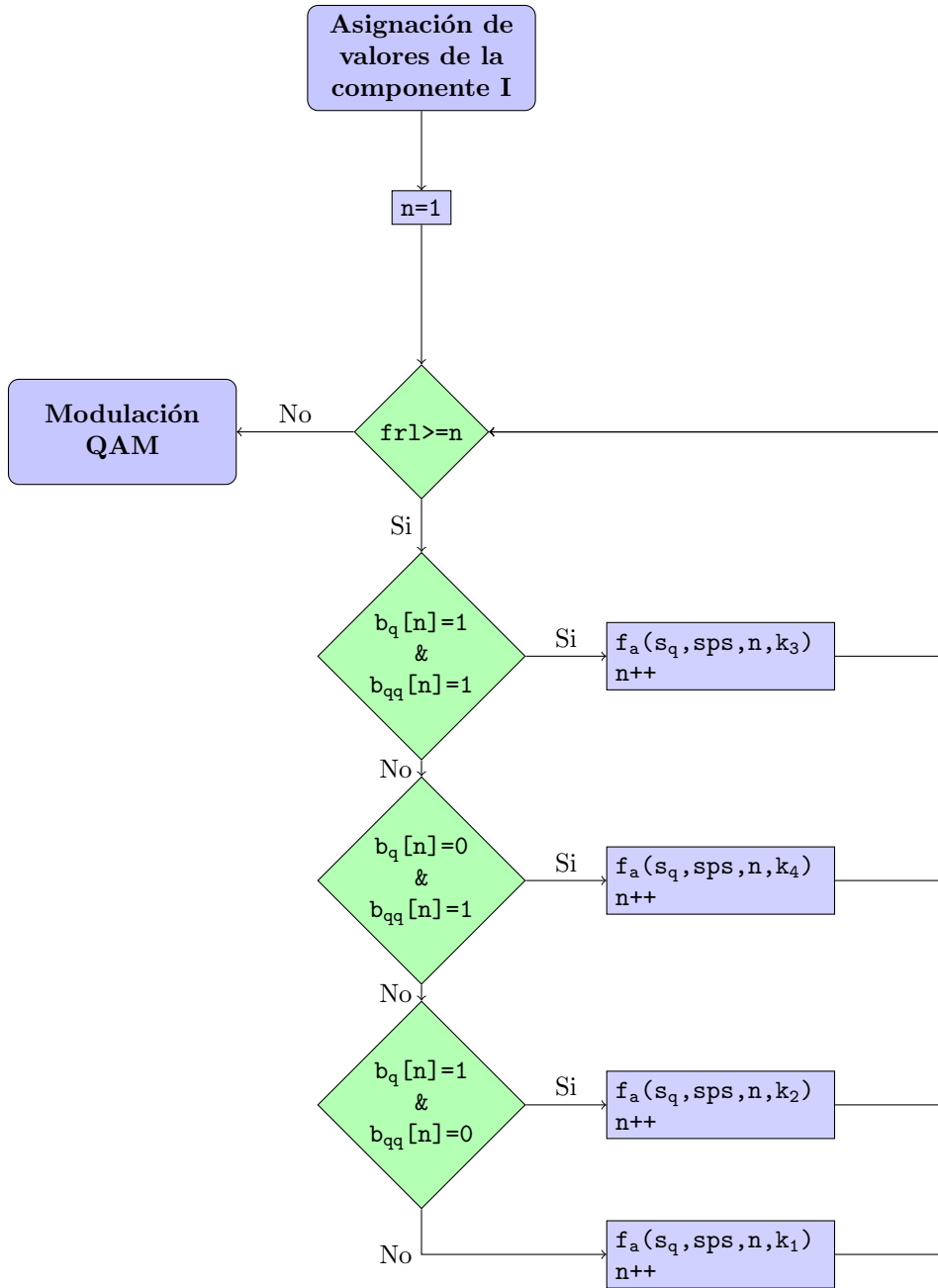


Figura 5.4: Diagrama de flujo de la asignación de valores para la componente Q.

5.1. ALGORITMOS

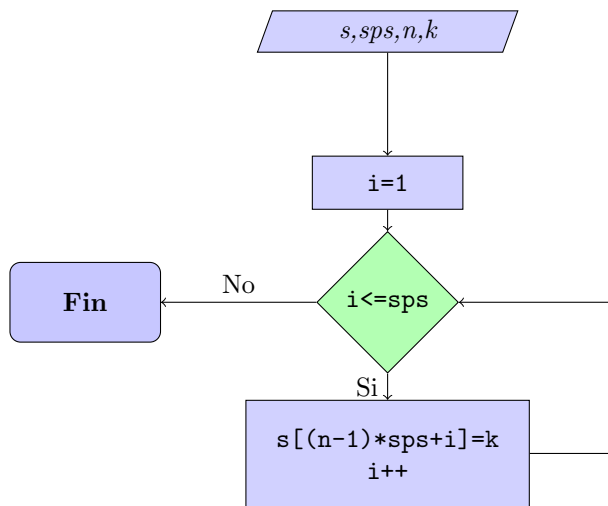


Figura 5.5: Diagrama de flujo de la función f_a

Modulación QAM

Una vez obtenidos los arreglos s_i y s_q , es posible realizar la modulación en cuadratura para estas dos señales. En la figura se muestra el diagrama de flujo de este procedimiento, el cual se halla limitado a mostrar su forma matemática por simplicidad. Al implementar las operaciones, se debe tener en cuenta que x_i y x_q han de ser arreglos con la misma longitud de s_i y s_q .

El resultado de esta modulación es el vector x_{up} , la cual representa la señal modulada que será llevada al canal de ruido, ya sea tipo Gaussiano o Rayleigh.

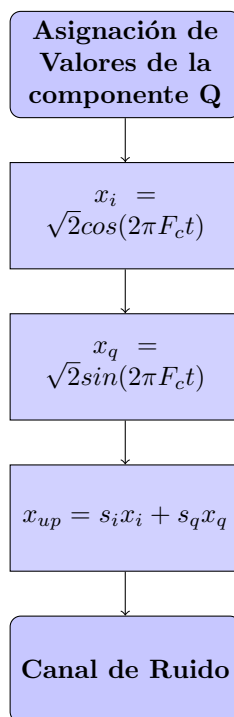


Figura 5.6: Diagrama de flujo de la modulación QAM

5.1.2. Demodulación

El proceso de demodulación se divide en 5 partes: La demodulación QAM, el cálculo de las regiones de decisión, los dos correladores para cada componente y finalmente, la comparación de los datos originales con los obtenidos al final

5.1. ALGORITMOS

de la simulación del sistema de comunicación.

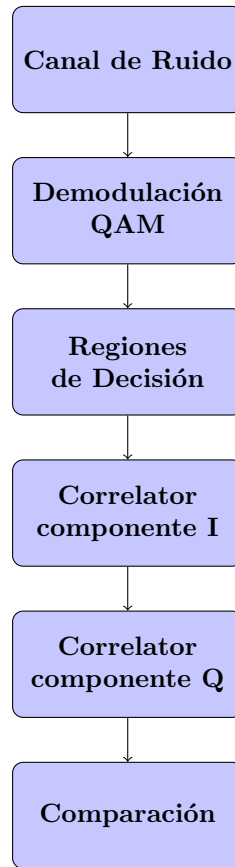


Figura 5.7: Sistema General de demodulación.

Demodulación QAM

En la figura se muestra el diagrama de flujo de una demodulación QAM convencional, este proceso se realiza directamente de los datos obtenidos del canal de ruido que se representan en el vector x_n . El resultado de esta demodulación son los dos arreglos x_I y x_Q .

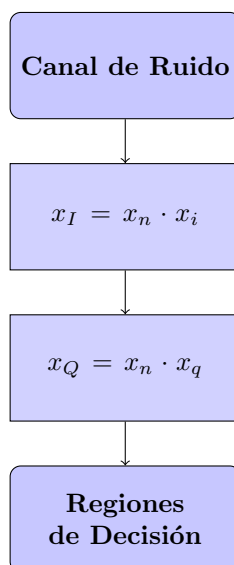


Figura 5.8: Diagram de flujo de la demodulación QAM.

Regiones de Decisión

Antes de que se logre discriminar los valores de los símbolos obtenidos, se tienen que calcular los niveles o regiones de decisión. Para determinar estos niveles, simplemente hay que promediar los valores k_i más cercanos entre ellos obtenidos en la modulación CPAM, como se muestra en la figura

De esta forma, el correlator reconocerá un símbolo con valor k_1 si se encuentra en la región $(-\infty, d_1)$, con valor k_2 si está dentro de la región $[d_1, d_2)$, a k_3 cuando se encuentre dentro de $[d_2, d_3)$ y a k_4 si está en el intervalo $[d_3, \infty)$ ¹.

¹ k_3 se encuentra en la región más hacia la derecha debido a la codificación Gray.

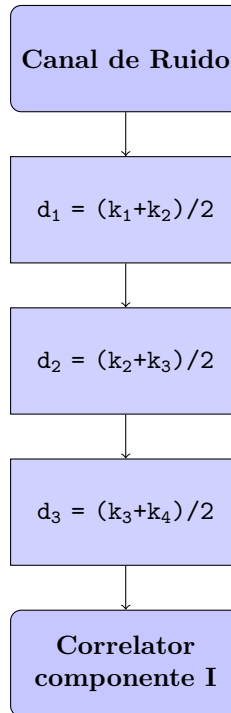


Figura 5.9: Diagrama de flujo del calculo de las regiones de decisión.

Correlatores

Al conocer las muestras por simbolo se puede asegurar que el sistema de comunicación simulado es coherente y por lo tanto, el correlator puede ser empleado para reconocer los simbolos recibidos. La señal recibida ha de multiplicarse por una función, que en este caso es el arreglo \mathbf{h} , el cual es un vector de unos con una longitud dada por sps ; después de la multiplicación, se integra el resultado obteniendose un valor que pasará a ser discriminado por las regiones de decisión.

la función \mathbf{f}_{int} es la encargada de integrar el arreglo **Corr**. En la simulación, \mathbf{f}_{int} hace una sumatoria de los datos de **Corr** y los divide por el número de muestras sps con lo que se determina la variable **InC**. Este procedimiento se realiza para estimar todos los datos enviados a traves del canal de comunicación por medio de un bucle. Las figuras muestran el diagrama de flujo del correlator para cada una de las componentes.

CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA DE
MODULACIÓN CQAM RESPECTO A LA MODULACIÓN QAM
TRADICIONAL

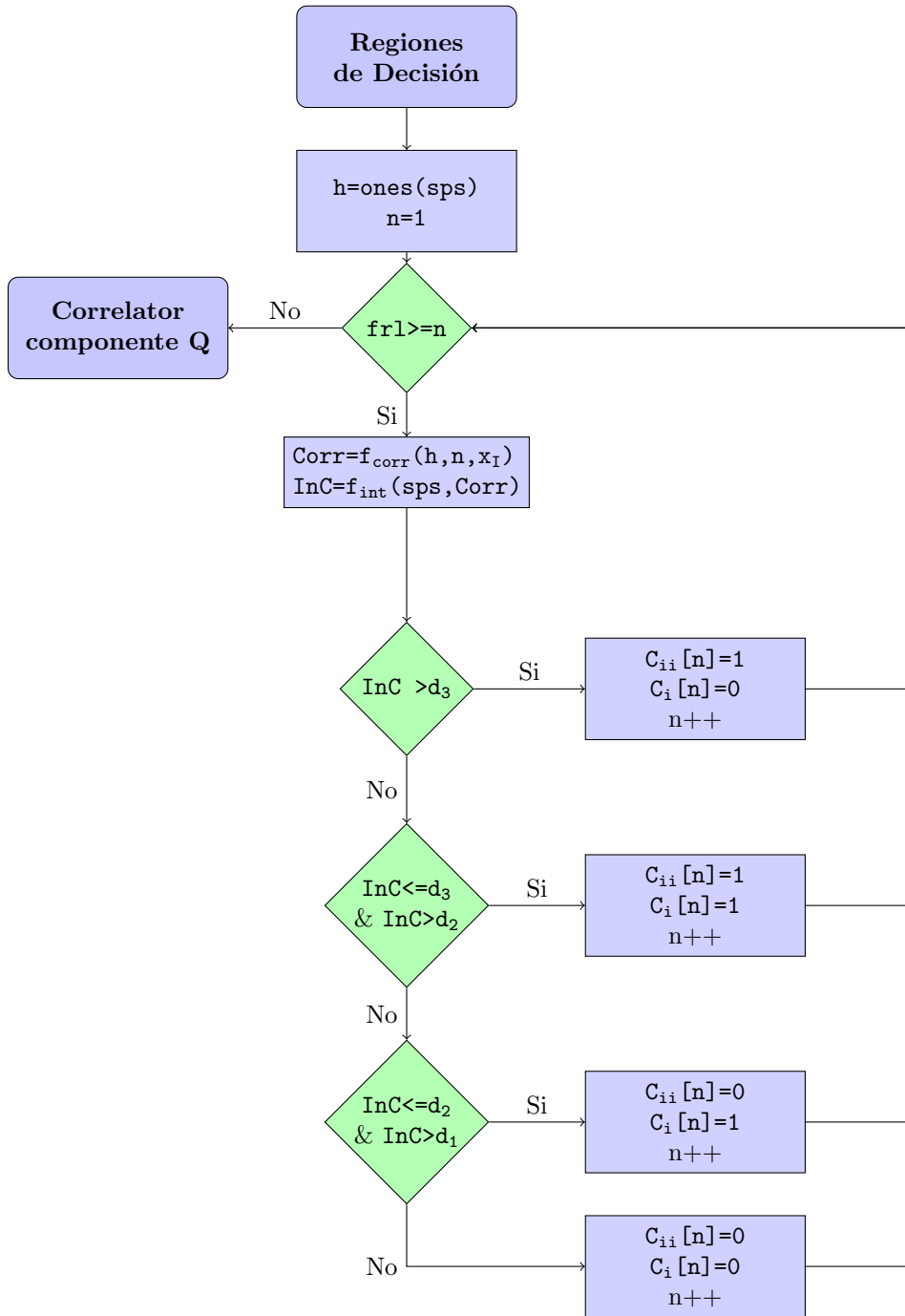


Figura 5.10: Diagrama de flujo del Correlator de la componente I

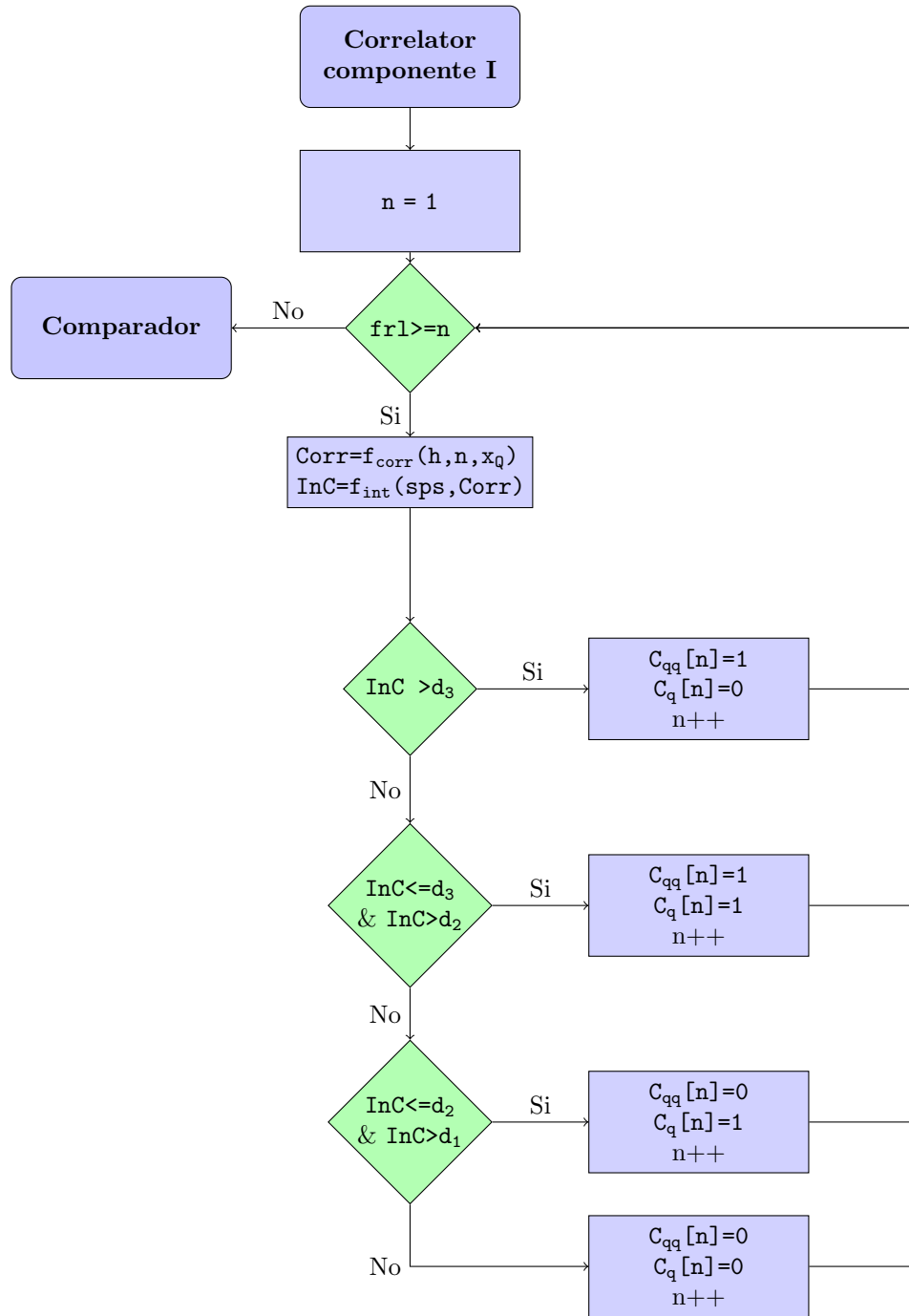


Figura 5.11: Diagrama de flujo del Correlator de la componente Q

Comparación

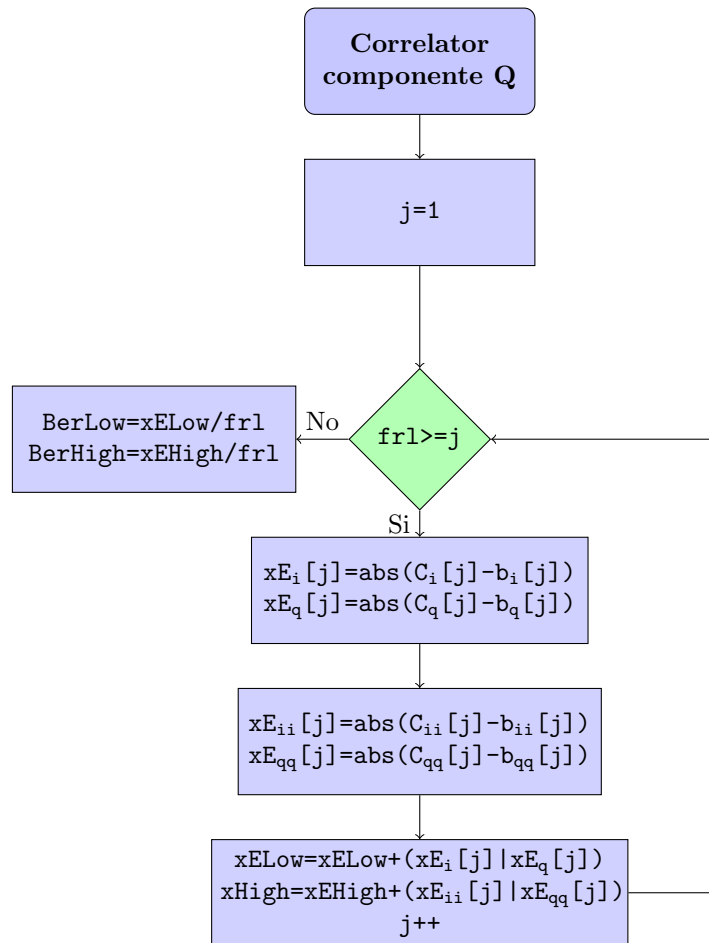


Figura 5.12: diagrama de flujo de la comparación de datos originales y obtenidos en el canal de comunicación.

En la figura se muestra el diagrama de flujo de comparación y la forma como se calcula el Bit Error Rate (BER) para los bits de baja prioridad (**BerLow**) y los bits de alta prioridad (**BerHigh**). El algoritmo compara si cada bit recibido es igual al original, cuando hay alguna diferencia el contador respectivo **xE** aumenta una unidad manteniendo un registro de los errores en los datos durante la transmisión por el canal de comunicación. Los contadores **xE** se agrupan por prioridad y se hace una operación OR entre ellos, al tener el conteo total de los datos recibidos por prioridad, se procede a dividir este número por el número de datos por trama (**frl**) obteniendo la tasa de error de bits.

5.2. Resultados

5.2.1. Simulación de la modulación y demodulación HQAM adicionando ruido GAUSSIANO

Simulación para la transmisión y recepción de datos aleatorios usando MATLAB para una modulación 16-HQAM adicionando a este ruido GAUSSIANO, donde en el siguiente diagrama podemos observar la tasa de error de bits (BER) VS la relación señal a ruido (SNR) para el canal de ruido GAUSSIANO. Al ser una modulación jerárquica esta simulación nos muestra los bit de alta prioridad (AP) y baja prioridad (BP) donde observamos como se comporta con un α que varía de 1 hasta 4 .

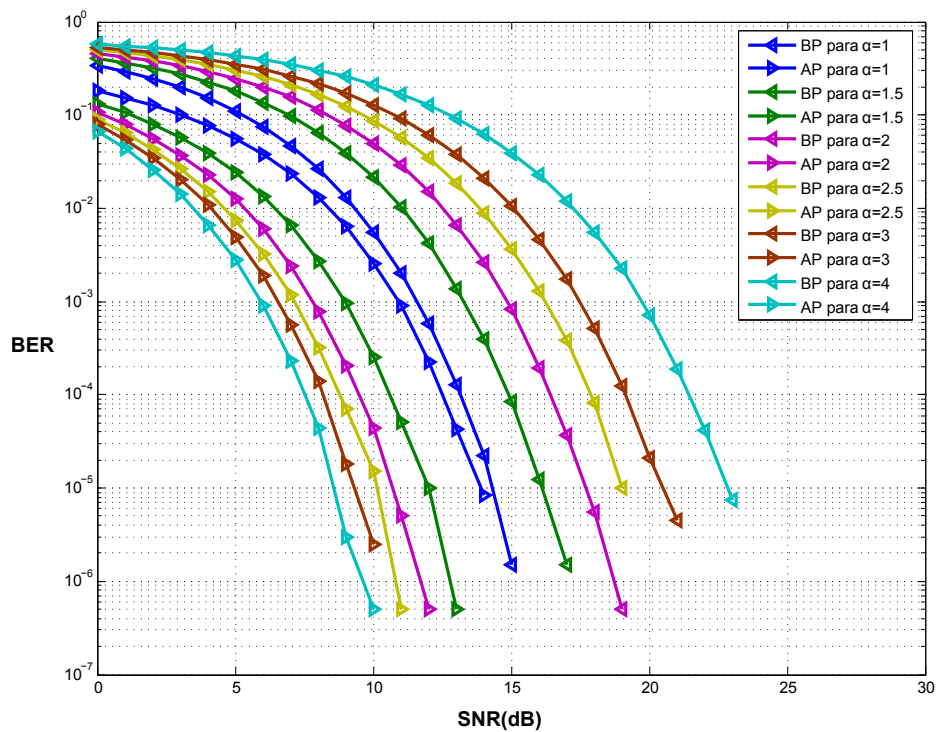


Figura 5.13: figura

En la gráfica se puede observar que los bits de AP a medida que α aumenta disminuye su relación señal a ruido, sin embargo los bits de BP aumentan su relación señal a ruido; cuando $\alpha = 1$ se obtiene la mayor aproximación entre

CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA DE MODULACIÓN CQAM RESPECTO A LA MODULACIÓN QAM TRADICIONAL

los bits de AP y BP sin embargo cuando α esta entre 2 y 4 se observa que la relación señal a ruido de los bits de AP no disminuye significativamente pero los bits de BP si obtienen una mayor excursión de relación señal a ruido en comparación con los bits de AP.

5.2.2. Simulación de la modulación y demodulación HQAM adicionando ruido RAYLEIGH

Simulación para la transmisión y recepción de datos aleatorios usando MATLAB para una modulación 16-HQAM adicionando a este ruido RAYLEIGH, donde en el siguiente diagrama podemos observar la tasa de error de bits (BER) VS la relación señal a ruido (SNR) para el canal de ruido RAYLEIGH. Al ser una modulación jerárquica esta simulación nos muestra los bit de alta prioridad (AP) y baja prioridad (BP) donde observamos como se comporta con un α que varia de 1 hasta 4 .

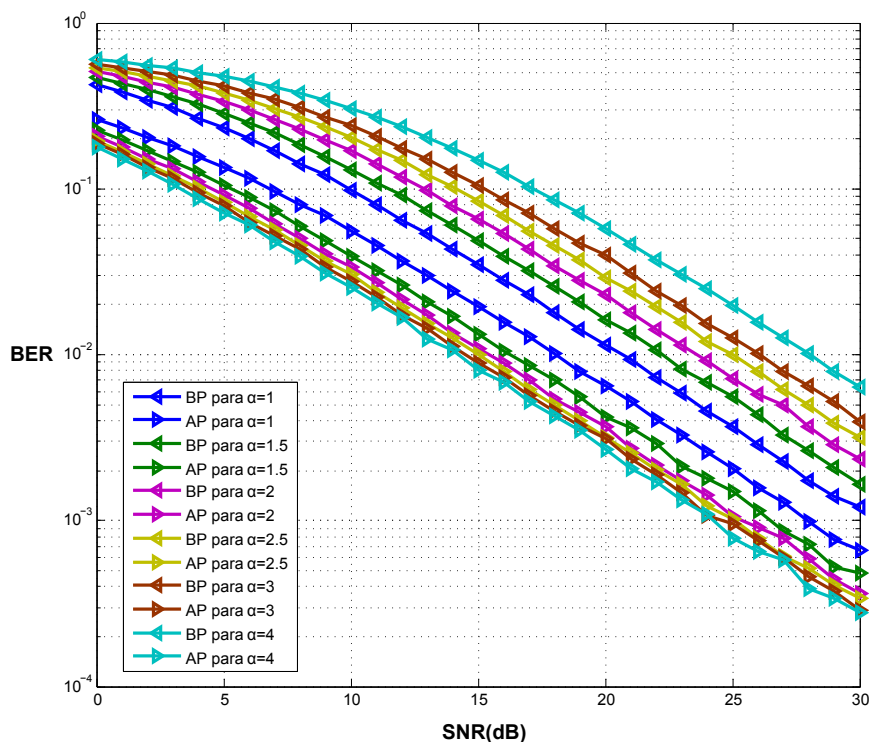


Figura 5.14: figura

Podemos observar como vimos en el canal de ruido GAUSSIANO los bits de AP y BP a medida que α aumenta se van separando simétricamente pero los

5.2. RESULTADOS

bits de AP obtienen una menor relación señal a ruido sin embargo los bits de BP van aumentando la relación señal a ruido pero se puede observar que para una BER baja su relación señal a ruido siempre va a ser alta ya que la excursión de las señales se asemeja a una proporción lineal a medida que disminuye la BER.

Bibliografía

- [1] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.