RELACION ENTRE EL JUEGO DE HEX Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Diana Paola Socha Godoy

Para obtener el título de

MATEMÁTICA

Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2016

RELACION ENTRE EL JUEGO DE HEX Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Diana Paola Socha Godoy

Dirigido por:

Carlos Orlando Ochoa

Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2016

Agradecimientos

Primero agradezco a Dios, por darme la vida, por permitir mi ingreso a la universidad, y por sacarme adelante, aunque en momentos se vio muy lejana esta meta, tambíen le agradezco por colocar ayudadores en mi camino como el profesor Carlos Orlando Ochoa Castillo y el profesor Milton del Castillo Lesmes Acosta, quienes me forjaron como una persona útil y valiosa para la sociedad y me ayudaron en mi investigación.

Índice general

Introducción

La Teoría de Juegos estudia la manera de tomar decisiones que tienen los adversarios en conflicto. Tales decisiones se consideran estratégicas, es decir, que los que participan en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que tomaran sus contrincantes.

Aunque el término "juego", da la idea de una definición relativa al azar, el objeto de la Teoría de Juegos es el análisis matemático de conflictos y la consecuente toma de decisiones.

El principio fundamental para hallar la solución de un juego de acciones simultáneas, donde los jugadores poseen información completa, es *el equilibrio de Nash*. También es posible tratar juegos dinámicos donde los jugadores toman sus decisiones de forma consecutiva, empleando el principio de inducción hacia atrás.

Los jugadores son agentes decisores, en cada juego según la decisión de cada participante, se puede obtener una ganancia o una pérdida, dependiendo de la estrategia elegida dentro del conjunto de opciones posibles.

Con base en lo anterior y con el apoyo de instrumentos matemáticos, se pretende determinar la mejor decisión posible a tomar para lograr un victoria contundente en cada juego; esto casi siempre se logra exaltando la importancia de las matemáticas en la creación de estrategias en cada juego. Es natural que se tenga la siguiente cuestión,

¿Es posible presentar una demostración de algún teorema, relacionando un juego?

El juego objeto de este trabajo es el juego de Hex, este juego puede encontrarse en el siguiente enlace http://www.lutanho.net/play/hex.html, así los objetivos propuestos para este propósito son relacionar el juego con un objeto matemático, presentando en primer lugar una descripción de juego, luego una presentación breve del objeto matemático y por último la relación existente. Esto con base e inspiración en el articulo *The Game of Hex and the Brouwer Fixed- Point Theorem de David Gale* (ver [5]) y [3].

Capítulo 1

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO Y EL TEOREMA HEX

El juego HEX fue creado por el danés Piet Hein en 1942 y actualizado por John Nash en Princeton en 1948.

El juego consiste en un tablero de 11 × 11 hexágonos distribuidos en forma de rombo y dos jugadores; cada jugador posee dos lados opuestos del tablero, que cuentan con el mismo color.

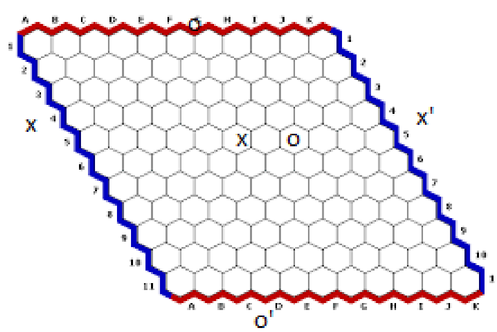

Figura 1.1:

Se inicia la partida con un jugador determinado al azar, quien decide con cual color jugar; éste coloca una ficha en cualquiera de los hexágonos (o celdas) coloreando el hexágono elegido, el turno es ahora para el segundo jugador quien coloca su ficha o colorea un hexágono que se encuentre libre (o vacío).

Los turnos son alternados, ocupando una celda vacía a la vez. El objetivo de cada jugador es crear un camino continuo de fichas o hexágonos coloreados de tal forma que los lados opuestos correspondientes queden conectados. El ganador del juego es el sujeto que primero realice el citado camino.

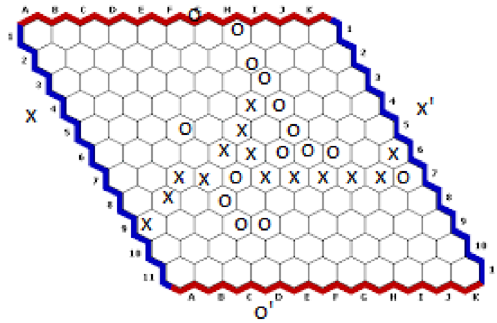

Figura 1.2: ¡Gana azul!

Toda estrategia en éste juego incluye la manera de obstaculizar la realización del camino del contrincante junto con la construcción de su propio camino.

1.1. Teorema de Hex

Teorema 1.1 (Teorema del Hex)**.** . *El juego del Hex nunca termina empatado, es decir siempre existe un camino que sea una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.*

Demostración. Se asume que todo el cuadro del Hex se cubre con hexágonos negros o blancos pero que no hay ningún ganador.

Los cuatro hexágonos de las esquinas son propiedad común; los hexágonos que ya están marcados con negro y blanco sólo pertenecen a estos colores. Partiendo del vértice de la esquina en el hexágono se comienza a hacer un camino que vaya por algún lado del hexágono, con la condición que el lado por el cual vaya tenga el color negro en un lado y blanco en el otro. El vértice de la esquina tiene tres lados de salida por lo cual, cumple inicialmente con esa propiedad; basta con seguir el lado que está justo en frente de él pues ese lado tendrá el color negro en su parte superior y el blanco en su parte inferior. Entonces se traza una primera línea. En el hexágono en blanco que hay a continuación puede ir el color blanco o el negro; no importa el color que se ubique allí, el camino se puede continuar así (en el caso que el siguiente hexágono sea blanco).
Se puede ver como el camino elegido continúa y ahora se debe decidir cual color poner en el hexágono siguiente: no importa que color se ubique, el camino podrá siempre continuar sucesivamente hasta llegar a cualquiera de los extremos blancos o negros respectivamente. Si a un lado de la curva que se está trazando siempre habrá de quedar un color o el otro, y éste podrá llegar a un extremo opuesto del tablero, al color que se llegue se tendrá que se han unido los dos extremos con una línea continua de un solo color.

De acuerdo con lo anterior, siempre es posible unir los dos extremos del tablero con una línea continua. Si se comienza en el otro vértice común, se procede de manera similar con igual razonamiento. Se concluye así, la demostración un tanto intuitiva de este teorema. □

Capítulo 2

TEOREMA DEL PUNTO FIJO

En términos generales, los teoremas del punto fijo aseveran que si una función $f : X \longrightarrow X$ verifica ciertas propiedades, entonces existe un punto $a \in X$ tal que

$$f(a) = a,$$

En tal caso, se dice que f tiene un punto fijo en a o que a es punto fijo de f.

Se considera que fue Luitzen Egbertus Jan Brouwer quien se ocupó de esta fenomenología y por ello se conocen los resultados inherentes como teoremas del punto fijo de Brouwer, pero se debe tener en cuenta que Poincaré, Picard entre otros, son precursores de los teoremas del punto fijo de Brouwer. Sin más preámbulo se enuncia el teorema de Bolzano como elemento preliminar y luego el teorema del punto fijo para el intervalo cerrado $[0,1]$.

El teorema de Bolzano es como sigue y su prueba está en [2].

Teorema 2.2. *Si $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

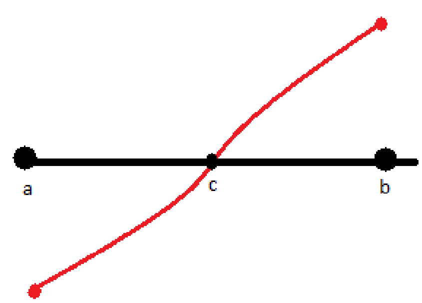

Figura 2.1:

Como se anunció antes, se exhibe el Teorema del Punto Fijo de Brouwer (ver [4]) en un intervalo cerrado

Teorema 2.3 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer en un intervalo cerrado)**.** *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *continua, entonces existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$.

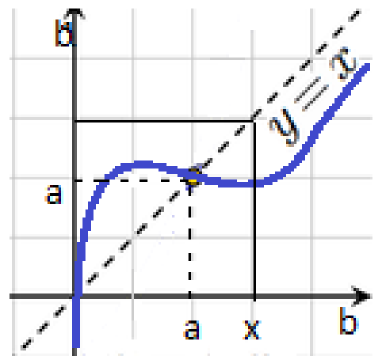

Figura 2.2:

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - x$; claramente $g(x)$ es continua en $[a,b]$. Se supone que $f(a) > a$ y $f(b) < b$ (de lo contrario, a o b es fijo). Se tiene que $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, así por el teorema de Bolzano se garantiza la existencia de un c en el intervalo $[a,b]$ tal que $g(c) = 0$. Lo que equivale a escribir $f(c) = c$ y la prueba se concluye. $\square$

Como se ha dicho, hay versiones mas generales del teorema del punto fijo de Brouwer, entre ellas, el que sigue.

Teorema 2.4. *Sea* $I = [0,1]$ *y* $f : I^2 \longrightarrow I^2$ *continua, entonces existe* $x \in I^2$ *tal que* $f(x) = x$.

También se tiene la version simplicial, que es útil en la prueba del teorema central,

Teorema 2.5 (Lema Simplicial)**.** *Sean* z^1, z^2, z^3 *los vértices de algún triangulo en* R^2 *y sea* $\hat{\rho}$ *la extension simplicial de la función* ρ *definida por* $\rho(z^i) = z^i + v^i$ *donde* v^1, v^2, v^3 *son vectores dados. Entonces* f *tiene un punto fijo si y solo* 0 *se encuentra en el casco convexo de* v^1, v^2, v^3.

Demostración. Sea $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$. Entonces $\hat{\rho}(x = \lambda_1(z^1 + v^1) + \lambda_2(z^2 + v^2) + \lambda_3(z^3 + v^3)$ y x es fijo si y solo si $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 = 0$. $\square$

Capítulo 3

EQUIVALENCIA JUEGO HEX Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

El tablero de hexágonos del juego Hex, se puede pensar como un cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ con las siguientes consideraciones:

- Cada hexágono se identifica con un punto.
- Si dos hexágonos comparten un lado, entonces son adyacentes y se representa mediante una arista, se presenta este proceso en la siguiente figura:

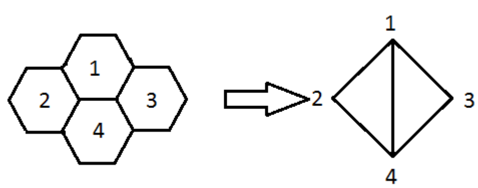

Figura 3.1:

- Como se ha obtenido un cuadrado, a este se le aplica un giro de $\frac{\pi}{4}$ en el sentido horario; esto con el objeto de obtener siempre el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$. Esta situación se representa ahora asumiendo que se tiene un tablero de hexágonos 4×4

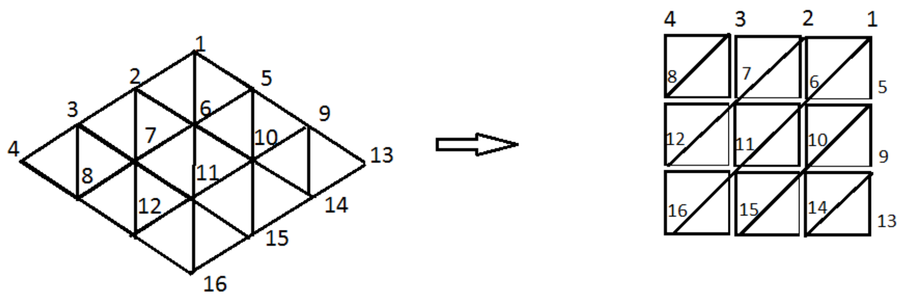

Figura 3.2:

- Así, el tablero Hex y su representación en $[0,1] \times [0,1]$ es:

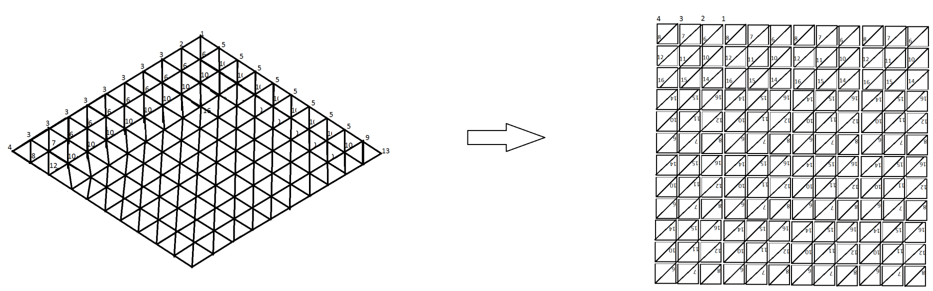

Figura 3.3:

Las reglas de juego con esta nueva presentación son como siguen:

- Cada vértice del tablero representa un hexágono.
- El azar determina quien es el primer jugador, este colorea un punto en el tablero.
- Si un jugador pinta dos puntos adyacentes, entonces pinta a la arista común.
- El ganador es quien logre realizar una linea continua de extremo a extremo.

Es importante presentar ahora un lema sobre teoría de grafos,

Teorema 3.6 (LEMA DEL GRAFO)**.** *Un grafo (finito) cuyos vértices tienen grado a lo sumo dos, es la unión de subgrafos disjuntos , cada uno de los cuales es bien (i) un vértice aislado, (ii) un ciclo simple, (iii) una trayectoria simple.*

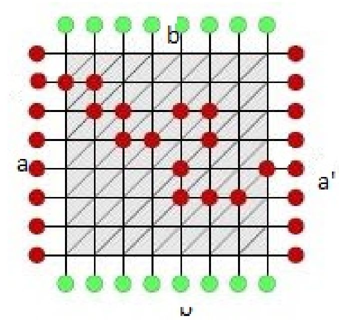

Figura 3.4:

Ahora se presenta el teorema central de este trabajo:

Teorema 3.7. *Hex es equivalente al teorema del punto fijo en* I^2.

Demostración. Sea $f : I^2 \to I^2$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Por la compacidad de I^2 es suficiente mostrar que para $\epsilon > 0$ existe $x \in I^2$ tal que $|f(x) - x| < \epsilon$. Por continuidad uniforme de f se muestra que $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Ahora, se considera el tablero B_k de HEX donde $1/k < \delta$, y se definen cuatro subconjuntos H^+, H^-, V^+, V^- de B_k como sigue:

$$\begin{aligned}
H^+ &= \{z | f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon\} \\
H^- &= \{z | z_1/k - f_1(z/k) > \epsilon\} \\
V^+ &= \{z | f_2(z/k) - z_2/k > \epsilon\} \\
V^- &= \{z | z_2/k - f_2(z/k) > \epsilon\}.
\end{aligned}$$

Intuitivamente un vértice z pertenece a H^+, H^-, V^+, V^- teniendo en cuenta como z/k es movido por f por lo menos ϵ unidades a la derecha, izquierda, arriba, o abajo respectivamente.

El teorema se prueba si es posible mostrar que estos cuatro conjuntos no cubren B_k; si el vértice z no está en este, entonces $|f(z/k) - z/k| < \epsilon$. La observación es ahora ver que los conjuntos disyuntos H^+ y H^- (V^+ y V^-) no son contiguos (un par de subconjuntos A y B de un grafo reciben el nombre de *contiguos* si existe un $a \in A$ y $b \in B$ donde a y b son adyacentes). Para este caso, si $z \in H^+$ y $z' \in H^-$ entonces

$$f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon \tag{3.1}$$

y

$$z_1'/k - f_1(z'/k) > \epsilon. \tag{3.2}$$

Adicionando las anteriores expresiones se obtiene:

$$f_1(z/k) - z/k + z_1'/k - f_1(z'/k) > 2\epsilon \tag{3.3}$$

pero $z_1'/k - z - 1/k < \delta < \epsilon$ para la elección de δ y k se tiene:

$$z_1'/k - z_1/k > -\epsilon \tag{3.4}$$

Adicionando las dos últimas expresiones se obtiene

$$f_1(z/k) - f_1(z'/k) > \epsilon \tag{3.5}$$

Que muestra que z y z' no son adyacentes; ya que si lo fueran se haría $|z/k - z'/k| = 1/k < \delta$ que contradice la elección de δ.

De manera Similar, V^+ y V^- no son contiguos. Ahora sea $H = H^+ \cup H^-$, $V = V^+ \cup V^-$, y suponga que Q es un subconjunto conexo de H. Del parágrafo anterior, se tiene que Q debe pertenecer totalmente a H^+ o H^- . Pero note que H^+ no está en E ya que f lo aplica a I^2 , y por tanto ningún punto de la frontera derecha se puede asignar a la derecha, de modo similar, H^- no interseca a W, así Q no interseca a E y W. De forma similar, V no contiene un conjunto conexo que interseque a n y s. Por el teorema de HEX se tiene que los conjuntos H y V no cubren B_k completando la prueba .

La prueba que Brouwer implica HEX se basa en la propuesta de John Stalling modificado por Michael Todd, que hace uso del hecho que el tablero B_k de HEX produce una triangulación de los $k \times k$ cuadrados I_k^2 en $\mathbb{R}^2$.Es facil ver que cada punto de I^2 se puede expresar de manera única mediante una combinación convexa de algún conjunto de al menos tres vértices, que son adyacentes dos a dos.

Dada una función f de B_k en $\mathbb{R}^2$, f puede ser extendida a una función simplicial o lineal a trozos $\hat{f}$ sobre I_k^2 a saber, si $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$ (donde λ_i son números no negativos sumando 1) se define $\hat{f}(x) = \lambda_1 f(z^1(+\lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3)$.

Se asume entonces que B_k es particionado en dos conjuntos H y V y de nuevo se define cuatro conjuntos como sigue: sea $\hat{W}$ el conjunto de los vértices conectados a W por H-caminos y sea $\hat{E} = H - \hat{W}$. Sea $\hat{S}$ el conjunto de todos los vértices conectados a S por un V-camino y sea $\hat{N} = V - \hat{S}$. De estas definiciones es claro que $\hat{W}$ y $\hat{E}$ ($\hat{N}$ y $\hat{S}$) no son contiguos. La prueba es por contradicción asumiendo que no existe H-caminos de E a W y tampoco V-caminos de N a S. Sean e^1y e^2 los vectores unitarios de $\mathbb{R}^2$ y se define la función f para B_k en si mismo por :

$$\begin{aligned} f(z) &= z + e^1 \quad para\ \ z \in \hat{W} \\ &= z - e^1 \quad para\ \ z \in \hat{E} \\ &= z + e^2 \quad para\ \ z \in \hat{S} \\ &= z - e^2 \quad para\ \ z \in \hat{N} \end{aligned}$$

Para cada una de las cuatro posibilidades se verifica que $f(z)$ está en efecto en I_k^2. Por ejemplo, $z+e^1$ no esta en B_k, solo si $z \in E$; pero por la suposición que no hay H-caminos de W a E.

Se extiende ahora f simplicialmente para todo I_k^2 y obteniendo una contradicción para mostrar que f no tiene punto fijo.

Aplicando el Lema Simplicial a f, el hecho clave es la no contigüidad de $\hat{W}$ y $\hat{E}$ ($\hat{S}$ y $\hat{N}$) si se mira tres vértices de algún triangulo de vértices mutuamente adyacentes no es posible que suceda, que uno de los vértices se traslade por e^i y otro por $-e^i$. De esta manera los tres vértices son trasladados por vectores que estan en un cuadrante de R^2 y en consecuencia, 0 no está en su envolvente convexa. Así se ha obteniendo un función libre de punto fijo, hecho que contradice el Teorema de Brouwer. □

Bibliografía

[1] Tom Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda edición. Reverté. Barcelona. 2006

[2] Tom Apostol, *Calculus*, vol. 1. segunda edición. Reverté. Barcelona. 1973

[3] Pedro Pablo Cárdenas A, *Modificación de Juego De HEX y su aplicación en La prueba del Punto Fijo de Brouwer* . Scientia et Technica Año XIV, No 38. 2008

[4] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison- Wesley. California. 1989.

[5] David Gale, *The Game of Hex and the Brouwer Fixed- Point Theorem*. The American Mathematical Monthly. vol 86. 1979