UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

TEOREMA DE ENCAJE DE WHITNEY

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Andres Guillermo Torres Vega
Dirigido por: Luís Alejandro Másmela Caita
Codirigido por: Martín Barajas Sichaca

Bogotá DC
Julio de 2022

Resumen

Mediante un breve desarrollo en topología diferencial, en esta monografía trataremos con el problema de demostrar la existencia de un encaje en un espacio Euclídeo para cualquier variedad de dimensión finita y de esta forma deducir que toda variedad de dimensión finita es difeomorfa a una subvariedad con $\mathbb{R}^n$ como espacio ambiente para algún n relacionado con la dimensión de la variedad, finalizando con el enunciado del Teorema fuerte de encaje de Whitney y el Teorema de Nash-Kuiper.

Palabras clave: proyecciones, partición de la unidad, encajes,Teorema de Sard.
Clasificación AMS:58A05,58A99

Agradecimientos: Le doy gracias a mi Madre y en general a toda mi familia por apoyarme en este proceso de formación y creer en mi siempre, a mis compañeros por estar acompañándome en este arduo proceso y por supuesto a los docentes del proyecto curricular de Matemáticas por su excelente labor guiándome en el proceso de aprendizaje, en especial agradezco al profesor Martín Barajas Sichaca por guiarme e ilustrarme en la elaboración de este trabajo y por ultimo agradezco al profesor Luís Alejandro Másmela Caita por dirigir este trabajo para así lograr culminar el primer paso en mi formación académica.

1. Introducción

El matemático Hassler Whitney publico su Teorema en 1936 en el que se afirma que para toda variedad abstracta existe un encaje en un espacio Euclídeo con una dimensión relacionada a la dimensión de la variedad en cuestión y así dando una respuesta negativa a la siguiente interrogante, ¿existen variedades suaves abstractas que no sean difeomorfas a las subvariedades con $\mathbb{R}^n$ como espacio ambiente para algún n?, por lo cual podemos trabajar con variedades como una subvariedad de un espacie Euclídeo o definida en su forma original como variedad abstracta sin contar con un espacio ambiente.

En esta monografía realizaremos un análisis en topología diferencial con el fin de comprender el Teorema de encaje de Whitney, dar una demostración detallada de este complementando nuestro estudio al enunciar el Teorema fuerte de Whitney y el Teorema Nash-Kuiper.

Para lograr esto, este trabajo se divide en seis Secciones. Comenzaremos definiendo las propiedades topológicas de una variedad y algunos resultados relacionados con variedades topológicas, luego definiremos una estructura diferenciable sobre variedades para así conseguir variedades diferenciables las cuales son el objeto sobre el que se llevara a cabo este estudio. Esto nos permitirá generalizar el concepto de espacio tangente a variedades lo que conlleva a definir el Haz Tangente a una variedad el cual es también una variedad como se demostrara en un Teorema relacionado también con su dimensión.

En la quinta Sección tener todas las herramientas previas para demostrar la primer versión del Teorema de Whitney donde encontramos un encaje para el caso de una variedad compacta en un espacio Euclídeo, este primer Teorema no trata el tema de la dimensión de llegada del encaje por lo que se introducirán algunos conceptos mas para así lograr acercarnos a una dimensión óptima en la cual tengamos la seguridad de que existe el encaje, luego conseguiremos una generalización mas al eliminar la condición de compacidad en la demostrar el Teorema de encaje de Whitney; Logrado esto finalizamos exponiendo el Teorema fuerte de Whitney y el Teorema Nash-Kuiper los cuales no se demostraran aquí pero sus respectivas demostraciones podrán encontrarse en la bibliografía.

2. Preliminares Topológicos

Vamos a iniciar esta sección con dos definiciones que clasifican a los espacios topológicos según la cantidad de conjuntos abiertos con las que cuentan sus bases.

Definición 1.[1] Una base local en $x \in X$ es una colección S_x de abiertos que genera el sistema de vecindades de x, Un espacio X se dice que es $1-numerable$ si admite una base local numerable en cada uno de sus puntos.

Definición 2. [1] Un espacio topológico X que admite una base numerable se dice que es $2-numerable$, o que satisface el $segundo\ axioma\ de\ numerabilidad$.

Ahora definimos un conjunto de axiomas el cual clasifica espacios topológicos en base a la forma en que podemos distinguir y separar los objetos contenidos en dicho espacio.

Definición 3.[1][2] Axiomas de separación:

T_1 -Un espacio topológico es un $T_1-espacio$ si para cualesquiera 2 puntos $x \neq y$ existen conjuntos abiertos tales que uno contiene a x y el otro a y.

T_2-Un espacio topológico es de $Hausdorff$ si para cada par de puntos cualesquiera $x, y \in X$ tienen vecindades ajenas.

T_3-Un T_1 espacio topológico X es $Regular$ si para algún cerrado cualquiera $B \subseteq X$ y un punto $x \notin B$, existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $B \subseteq V$.

T_4-Un T_1 espacio topológico X es $Normal$ si dados dos cerrados ajenos $E, F \subseteq X$, existen abiertos ajenos U y V tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$.

Por ultimo definiremos propiedades de espacios topológicos las cuales están relacionados con la cantidad de conjuntos abiertos con los cuales podemos recubrir un espacio topológico, claramente esto esta muy ligado al concepto de una base topológica como lo veremos mas adelante.

Definición 4.[3] Si X es un espacio topológico, $x \in X$ y U_α es un abierto tal que existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ con $\mathfrak{A}$ un conjunto de índices, el conjunto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\}$ el cual cumple que $x \in U_\alpha$ se dice que es una cubierta abierta de X, se dice que $A \subseteq X$ es un espacio compacto si toda cubierta abierta para A admite una subcubierta finita.

Definición 5.[1][2] Un espacio topológico X se dice que es Localmente compacto en $x \in X$ si existe un compacto $K \subseteq X$ tal que K es una vecindad de x, el espacio X se dice Localmente compacto si es localmente compacto para cada punto.

Definición 6.[2] Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\}$ una cubierta abierta para X. Se dice que una cubierta $\mathfrak{V} = \left\{V_\beta | \beta \in \mathfrak{B}\right\}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ si para cada $\beta \in \mathfrak{B}$ existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$. Una familia $\mathfrak{V}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x que intercepta a lo sumo a una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{V}$, un espacio topológico se dice $paracompacto$ si toda cubierta abierta de X admite un refinamiento localmente finito.

Las propiedades topológicas que definimos anteriormente nos permitirá clasificar espacios topológicos para así identificar en cuales sera posible la existencia de las herramientas matemáticas que desarrollaremos en este capitulo, los espacios que cumplan las condiciones buscadas serán nombrados como $variedad\ topológica$, así como veremos en la Sección 3.

Proposición 2.1[1] Un espacio paracompacto es $normal$

Demostración: Primero vamos a mostrar que X es *regular*, por lo tanto supondremos que $x \in X$ y $C \subset X$ con C un cerrado tal que $x \notin C$, para algún punto $y \in C$ hay conjuntos abiertos disjuntos U_x, V_y con $x \in U_x$ y $y \in V_y$. Recubrimos X con $X - C$ junto con los V_y, entonces este es un recubrimiento localmente finito , consideremos los conjuntos U_α y sea

$$U = \bigcup_\alpha \left\{ U_\alpha \mid U_\alpha \ esta\ contenido\ en\ algun\ V_y \right\}$$

Notemos que este conjunto contiene a C. Ya que esta es una colección localmente finita, notemos que la cerradura de U es $\overline{U} = \bigcup_{\alpha=1}^{k} \overline{U}_\alpha$, a demás $x \notin \overline{U}_\alpha$ por lo que $x \notin \overline{U}$, entonces U y $X - \overline{U}$ cumplen las condiciones para que X sea *regular*, Ahora sea C un cerrado tal que $x \notin C$ y a demás sabemos que existe un abierto U_c tal que $C \subset U_c$, sea V_x un abierto que contiene a x tal que $V_x \cap U_c = \emptyset$, como antes consideramos el conjunto

$$U = \bigcup \{ U_\alpha \mid U_\alpha \ esta\ contenido\ en\ algun\ V_x \}$$

tenemos que $C \not\subseteq \overline{U}$ por lo que U y $X - \overline{U}$ cumplen la condición para que X sea *Normal*.

■

Lema 2.1 [2] Si X es paracompacto, toda cubierta abierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\}$ admite un refinamiento abierto y localmente finito $\mathfrak{V} = \left\{ V_\beta | \beta \in \mathfrak{B} \right\}$ tal que para todo $\beta \in \mathfrak{B}$ existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ que satisface $\overline{V}_\beta \subseteq U_\alpha$.

Demostración: Sea $\mathfrak{W} = \left\{ W_\beta | \beta \in \mathfrak{B} \right\}$ un refinamiento abierto y localmente finito de $\mathfrak{U}$. Definimos

$$F_{\beta_0} = \left(\bigcup_{\beta \in \mathfrak{B} - \beta_0} W_\beta \right)^c$$

Para cada $\beta_0 \in \mathfrak{B}$. Claramente F_β es cerrado y $F_\beta \subseteq W_\beta$ para cada β. Por normalidad, (Por proposición 2.1), existen entonces abiertos V_β tal que exista α con la propiedad de que

$$F_\beta \subseteq V_\beta \subseteq \overline{V}_\beta \subseteq W_\beta \subseteq U_\alpha$$

la colección $\mathfrak{V} = \left\{ V_\beta | \beta \in \mathfrak{B} \right\}$ es claramente una cubierta de X y es localmente finita.

■

Definición 7.[2](Particiones de la Unidad)

Si se definen sobre un espació X una colección de funciones continuas $\eta_\alpha : X \to [0,1]$ para $\alpha \in \mathfrak{A}$ un conjunto de índices, de tal manera que para todo $x \in X$ satisface:

1. $\eta_\alpha(x) = 0$ para todos los α excepto una cantidad finita.

2. $\sum \eta_\alpha(x) = 1$

Esta es una partición de la unidad sobre X, Si a demás dada una cubierta abierta $\mathfrak{U}$ de X ocurre que para cada $\alpha \in \mathfrak{A}$ existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que

$$soporte\{\eta_\alpha\} \subseteq U$$

Se dice que la partición de la unidad $\{\eta_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\}$ esta subordinada a la cubierta $\mathfrak{U}$. (Siendo para alguna función f el $soporte\{f\}$ la cerradura del conjunto de $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$).

Lema 2.2[1] **(Lema de Urysohn)** Un espacio topológico X es *normal* si y solo si para dos cerrados no vacíos $A, B \subset X$ y con intersección bacía, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(0)$ y $B \subseteq f^{-1}(1)$.

la Demostración puede encontrarse en [1].

Una función con la propiedad descrita en el Lema 2.2 se conoce como función de Urysohn, en el teorema siguiente para algunos espacios topológicos se asegura la existencia de las *particiones de la unidad*, una herramienta indispensable en el estudio de *variedades*.

Teorema 2.1[1]

Sea X un espacio $Hausdorff$ paracompacto y $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de X entonces existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}$.

Demostración: Sin perdida de generalidad podemos asumir $\{U_\alpha\}$ es localmente finito, sea $\{W_\alpha\}$ un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta, tales que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ y $\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha$, (gracias al Lema 2.1), Sean $\phi_\alpha : X \to [0,1]$ para cada α funciones de Urysohn tales que es 1 en $\overline{W}_\alpha$ y 0 en V_α^c, entonces

$$soporte\{\phi_\alpha\} \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$$

a demás podemos definir

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \phi_\alpha(x) \geq 1$$

es una suma finita y positiva, porque $\mathfrak{U}$ es una cubierta localmente finita. Basta entonces definir.

$$\eta_\alpha = \frac{\phi_\alpha(x)}{\Phi(x)}$$

para obtener la partición de la unidad cuya existencia ha sido propuesta.

■

Las siguientes proposiciones nos muestran algunas relaciones existentes entre las propiedades de espacios topológicos que son consecuencia de la naturaleza de sus bases, sus recubrimientos y de los axiomas de separación que satisfacen.

Proposición 2.3[1] Los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ son localmente compactos.

Demostración: En el caso de la recta real, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ podemos hacer $K = [x-\epsilon, x+\epsilon]$ y claramente $x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset K$, de manera que K es una vecindad de x, ya que $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ se pueden extender de forma sencilla la construcción anterior.

■

Proposición 2.4 Sea M un espacio topológico de $Hausdorff$ con base numerable, tal que existe un homomorfismo $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ entonces M es localmente compacto.

Demostración: Ya que $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto entonces para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe un compacto K que es vecindad de x, entonces $\varphi^{-1}(K)$ es un conjunto compacto en M a demás $\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(K)$ con lo cual queda demostrado el enunciado.

■

Proposición 2.5[1] Todo espacio X paracompacto, Hausdorff y $2-numerable$ es metrizable.

Demostración: Tenemos que todo espacio paracompacto es $regular$, entonces, por el teorema de metrizacion de Urysohn, siendo además $Hausdorff$ y $2-numerable$ es metrizable. (puede consultar la demostración del teorema de metrizacion de Urysohn en [1])

■

Proposición 2.6[2] Si un localmente compacto espacio X es de $Hausdorff$ y de base numerable. Entonces es paracompacto.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [2]

Con esto concluimos esta Sección tras haber dado su propósito el cual era encontrar las características que debe satisfacer un espacio topológico para asegurar la existencia de refinamientos y *particiones de la unidad* a demás de adoptar propiedades locales de un espacio euclídeo, estos espacios los clasificaremos baje el nombre de *variedades topológicas* en la siguiente Sección.

3. Variedades Diferenciables

Iniciamos esta Sección definiendo las $variedades\ topológicas$ y luego las $variedad\ diferenciables$ por medio de la diferenciabilidad de sus cartas coordenadas, estos objetos son de gran importancia en matemáticas por que sera posible generalizar sobre ellos conceptos de calculo y geometría como lo veremos en la Sección 4.

Definición 8.[8] Sea n un entero no negativo. Una $variedad\ topológica$ de dimensión n es un espacio topológico de $Hausdorff\ M$ con base numerable, tal que para cada punto $p \in M$ existe un abierto U de p en M y un homeomorfismo $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ de U sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. La pareja (U, φ) es una carta coordenada de M o de manera breve una carta de M.

Nota: ya que φ es un Homeomorfismo podemos reformular la definición de variedad en términos de la función inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$, por lo general llamada parametrizacion.

gracias a lo desarrollado en la Sección 2 podemos dotar a una variedades topológica M de las siguientes propiedades, por la Proposición 2.5 M es metrizable, por la Proposición 2.4 M es localmente compacto entonces por Proposición 2.6 M es paracompacto, luego por Proposición 2.1 M es $normal$, por Lema 2.1 para toda cubierta abierta de M, esta admite un refinamiento abierto localmente finito y por ultimo, por Teorema 2.1 M admite una partición de la unidad como en la (Definición 7.), para continuar el desarrollo hacia las variedades diferenciables consideremos un par de cartas (U, φ), (V, ψ) cuyos dominios se traslapen, es decir $U \cap V \neq \emptyset$, en este caso podemos construir las transformaciones $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$. Llamaremos a estas transformaciones cambios de coordenadas.

Definición 9.[4] Se dice que dos cartas (U, φ),(V, ψ) son C^k compatibles, $K \in \mathbb{N}$, si y solo si las transformaciones de cambio de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ y $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^k.

1. Un atlas A de clase C^k en M es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M y cuales quiera dos de ellas son C^k compatibles.

2. Una estructura $diferenciable$ es un atlas máximal A, en el sentido que si la carta (U, φ) es C^k compatible con todas las cartas de A, entonces $(U, \varphi) \in A$.

Con estas definiciones ya tenemos todos los conceptos necesarios para definir el objeto matemático en el que se centrarán las Secciones restantes.

Definición 10.[4] Sea n un entero no negativo, una $variedad\ diferenciable$ de dimensión n y clase C^k es una pareja (M, A), donde M es una variedad topológica y A es una estructura diferenciable de clase C^k en M.

Definición 11.[4]Sean M y N $variedades\ diferenciables$, una transformación continua $f : M \to N$ es $diferenciable$ de clase C^k en un punto $p \in M$ si y solo si existe una carta $(U, \varphi) \in A$ de una vecindad de p en M y una carta $(V, \psi) \in B$ de una vecindad de $f(p)$ en N, con $\varphi(p) = 0$, tales que

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^k en 0, decimos que f es de clase C^k si y solo si f es de clase C^k para todo $p \in M$; Si $f : M \to \mathbb{R}$ es de clase C^k denotaremos $f \in C^k(M)$.

Para continuar debemos modificar nuestra definición de *particiones de la unidad* (Definición 7.), ya que trabajaremos con variedades diferenciables debemos agregarle una condición extra a las η_α y esta condición es que $\{\eta_\alpha\} \in C^\infty(M)$, para ello primero encontraremos una función diferenciable $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para luego "subirla", a la variedad por medio de una carta coordenada como se mostrara en el siguiente Lema.

Lema 3.1 [5] Sea $D^n(r)$ la bola abierta de radio r en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una función diferenciable $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ igual a 1 en $\overline{D^n(1)}$ e igual a 0 en $\mathbb{R}^n/D^n(2)$.

Demostración: Consideremos la función $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$

esta función es $C^\infty(\mathbb{R})$, consideremos la función

$$\rho(t) = \frac{\int_t^2 \mu(x-1)\mu(2-x)dx}{\int_1^2 \mu(x-1)\mu(2-x)dx}$$

notemos que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_t^2 \mu(x-1)\mu(2-x)dx\right]}{\int_1^2 \mu(x-1)\mu(2-x)dx}$$

Usando el teorema fundamental del calculo tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{-\mu(t-1)\mu(2-t)}{\int_1^2 \mu(x-1)\mu(2-x)dx} = Ce^{\frac{-1}{(t-1)(2-t)}}$$

Con C una constante, Ahora vemos que para $1 > t$ tenemos que $\mu(t-1) = 0$ y para $2 < t$ tenemos que $\mu(2-t) = 0$ por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{(t-1)(2-t)}}, & t \in (1,2) \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

esta es una función continua por lo que ya es claro que $\rho(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Tenemos que $\rho(1) = 1$, $\rho(t)$ es distinto de 0 en $(-\infty, 2)$ y $\rho(t) : \mathbb{R} \to [0,1]$, por lo que $\rho(|t|)$ cumple las propiedades para $n = 1$, ahora para $t \in \mathbb{R}^n$ definimos $\rho(t) = \rho(\|t\|)$.

■

Teorema 3.1

Sea M una variedad diferenciable, sobre M existe una partición de la unidad $\{\eta_\alpha\}$ como en la (Definición 9.) que satisface $\{\eta_\alpha\} \in C^\infty(M)$.

Demostración: Sobre la variedad M podemos elegir un atlas $A = \{(\mathfrak{U}, \tau)\}$ tal que el recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathbb{N}\}$, sea localmente finito y que satisfaga $\tau_\alpha(U_\alpha) = D^n(3)$ y que $\tau_\alpha(\overline{V}_\beta) = \overline{D^n(2)}$ con $\mathfrak{V} = \left\{V_\beta | \beta \in \mathbb{N}\right\}$ un refinamiento abierto y localmente finito de $\mathfrak{U}$ tal que $\overline{V}_\beta \subseteq U_\alpha$ para algún α y algún β, considere la siguiente familia de funciones.

$$(\rho \circ \tau_\alpha) : U_\alpha \subset M \to [0,1]$$

(con ρ como en el Lema 3.1) vemos que

$$soporte(\rho \circ \tau_\alpha) \subseteq U_\alpha$$

tomando $\phi_\alpha = (\rho \circ \tau_\alpha)$

tenemos que (como en la demostración del Teorema 2.1)

$$\Phi(x) = \sum_\alpha \phi_\alpha(x) \geq 1$$

es una suma finita y positiva, porque $\mathfrak{U}$ es una cubierta y es localmente finita. Basta entonces definir.

$$\eta_\alpha = \frac{\phi_\alpha(x)}{\Phi(x)}$$

para obtener la partición de la unidad deseada.

■

Finalizamos esta Sección tras lograr presentar la definición de una estructura diferenciable en una *variedad* y redefinir las *particiones de la unidad* dotándolas con la propiedad extra de ser funciones $C^\infty(M)$, esta propiedad sera usada en la demostración de el Teorema 5.1.

4. Espacio Tangente y Haz tangente

En esta Sección vamos a mostrar algunos resultados y definiciones relacionadas con un espacio vectorial asociado de forma intrínseca a una $variedad\ diferenciable$ M en cada punto $p \in M$ que llamaremos espacio tangente de M en el punto p, luego definiremos la unión de estos espacios al que llamaremos haz tangente el cual como veremos tiene estructura de $variedad\ diferenciable.$

Definición 12.[5] Sean M una $variedad\ diferenciable$ y $p \in M$. Consideremos el conjunto de funciones diferenciables al menos en una vecindad de p. Definimos una relación en este conjunto dada por $f \sim_p g$ si y solo si $f = g$ en alguna vecindad de p. Una clase de equivalencia bajo esta relación se denota $[f]$ y se llama $germen\ de\ f\ en\ p$, denotamos al conjunto de estos gérmenes como G_pM; El conjunto G_pM tiene una estructura natural de espacio vectorial al tomar representantes de las clases de equivalencia $[f]$ y definir sobre estos representantes las operaciones usuales de suma y producto escalar de funciones, ya que en una vecindad de p estas operaciones no dependen de la elección del representante.

Definición 13.[4] Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un vector tangente a M en p es un operador lineal $v : G_pM \to \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz.

$$v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f])$$

El espacio tangente a M en p es el conjunto T_pM de vectores tangentes a M en p. El espacio tangente T_pM tiene una estructura natural de espacio vectorial dada por

$$(\alpha v + \beta w)\left([f]_p\right) = \alpha v\left([f]_p\right) + \beta w\left([f]_p\right)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w \in T_pM$ y $[f]_p \in G_pM$.

Con los siguiente resultados tendremos información sobre la dimensión de T_pM.

Definición 14.[4] Sea (U, φ) una carta coordenada de la variedad M, con $p \in U$ y sean u_i las funciones coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^n$. Escribimos $x_i = u_i \circ \varphi$ y definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : G_pM \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p ([f]) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Lema 4.1[4] Sean $V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, con $0 \in V$ y $f \subset C^\infty(V)$ entonces existen $g_1, ..., g_n \in C^\infty(V)$ tales que

$$f(u) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} u_i g_i(u), \qquad u = (u_1, ..., u_n)$$

y $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(0)$.

Su Demostración puede encontrarse en [4].

Teorema 4.1[4]

Sean M una $variedad\ diferenciable$ de dimensión n, $p \in M$. Sea (U, φ) una carta con $p \in U$ y $x_i = u_i \circ \varphi$ entonces.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

Para todo $v \in T_pM$ y el conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ es una base para T_pM y $dim(T_pM) = n$.

Demostración: Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(p) = 0$. Sea $f \subset C^\infty\left(\varphi^{-1}(B_r(0))\right)$. Por el Lema 4.1 tenemos que.

$$f \circ \varphi^{-1}(u) = f \circ \varphi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{n} u_i g_i(u), \quad g_i(0) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1})(0)$$

de modo que haciendo la composición con φ tenemos

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i (g_i \circ \varphi)$$

Ahora aplicando un operador v que cumple la regla de Leibniz, y como $\varphi(p) = 0$ tenemos.

$$\begin{aligned} v([f]) &= \sum_{i=1}^{n} v([x_i])(g_i \circ \varphi)(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p) v([g_i \circ \varphi]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([f]) \end{aligned}$$

Por ultimo demostraremos que el conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ es linealmente independiente ya que de no ser lo podríamos tomar $a_i \neq 0$ para algún i y se cumpliría que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \left[x_j\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij}(x_j) = a_j$$

entonces $a_j = 0$ para $i = j$ contradiciendo la elección de a_i por lo cual el conjunto es linealmente independiente y seria una base para T_pM.

■

Definición 15.[4] Sean M, N variedades diferenciables y $f \in C^{\infty}(M,N)$. Definimos la $diferencial$ $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ de f en un punto $p \in M$ como

$$df_p(v)([g]) = v([g \circ f])$$

donde $v \in T_pM, [g] \in G_{f(p)}N$. Vemos que

$$df_p(\alpha v + \beta w)([g]) = (\alpha v + \beta w)(g \circ f) = \alpha v(g \circ f) + \beta w(g \circ f).$$

Por lo que bajo esta definición df_p es lineal.

Definición 16.[4] Dada una variedad M de dimensión n, el *haz tangente* a M es la unión de los espacios tangentes a M en cada punto $p \in M$.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Ahora procederemos a enunciar el resultado mas importante de esta Sección el cual utilizaremos en la demostración del Teorema de Whitney.

Teorema 4.2[4]

El haz tangente TM de una variedad M de dimensión n es una $variedad$ y $dim(TM) = 2n$

Demostración: Denotamos por $\mathcal{A}$ al $Atlas$ que define la estructura diferenciable de la $variedad$ M. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es una carta, denotamos.

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_pM$$

Ahora induciremos una topología al Haz Tangente mediante la proyección canónica $\pi : TM \to M$ definida como $\pi(v) = p$ si $v \in T_pM$, vemos que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_pM = TU$$

por lo cual TU sera un abierto de TM, ahora si u_i son las funciones coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $x_i = u_i \circ \varphi$ (por la Teorema 4.1) tenemos que para cada $w \in TU$ se puede escribir como

$$w = \sum_{i=1}^{n} w([x_i])(q)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$$

ya que podemos expresar los vectores tangentes de esta forma, para $\{e_i\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ podemos definir la siguiente transformación $\overline{\varphi}(w) : TU \to \varphi(U)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$\overline{\varphi}(w) = \left(\varphi(q), \sum_{i=1}^{n} w([x_i])(q)e_i\right) = (\varphi(q), w([x_1]), ..., w([x_n])) = (x_1(q), ..., x_n(q), w([x_1]), ..., w([x_n]))$$

ya que $\overline{\varphi}(w)$ es inyectiva tenemos que la dimensión de TM es $2n$, ahora veremos que $\overline{\varphi}(w)$ es un $homeomorfismo$, de antemano tenemos que $\varphi(q)$ lo es por lo que debemos analizar la siguiente transformación $\gamma(w) : T_qM \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma(w) = \sum_{i=1}^{n} w([x_i])(q)e_i$$

la cual le asigna a cada vector en T_qM con coordenadas $w([x_i])$ un vector en $\mathbb{R}^n$ con esas mismas coordenadas , (por el Teorema 4.1) sabemos que T_qM es un espacio vectorial de dimensión n, por lo cual este es $isomorfo$ a $\mathbb{R}^n$, mostraremos que esta función es un $isomorfismo$. Notemos que los vectores de la base de T_qM se pueden escribir como sigue.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}(\left[x_j\right])(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

aplicando la transformación γ tenemos que

$$\gamma\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}(\left[x_j\right])(p)e_j = e_i$$

ya que γ envía vectores de una base en T_qM a vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ este es un $isomorfismo$ y como $\overline{\varphi}(w)$ es bicontinúa entonces $\overline{\varphi}(w)$ es un $homeomorfismo$ entre TU y $\mathbb{R}^{2n}$, de esta manera sabemos que TM posee todas las propiedades topológicas locales de un espacio euclídeo y es claro que para $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cartas de M se tiene que

$$\bigcup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_\alpha TU_\alpha$$

es un recubrimiento abierto de TM por lo tanto podemos considerar $\overline{\mathbb{A}}$ como el $Atlas$ máxima que contiene la familia $\{(TU, \overline{\varphi}) | (U, \varphi) \in A\}$, este define una estructura diferenciable sobre TM por lo tanto TM es una $variedad\ diferenciable$.

■

Finalizamos esta Sección consiguiendo comprender el concepto de vector tangente a una variedad abstracta sin tener en cuenta la existencia de un entorno alrededor de ella, a demás de estudiar un nuevo ejemplo de variedad, $el\ Haz\ Tangente$, el cual esta íntimamente relacionado con la variedad en la cual los T_PM son tangentes, esto nos ayudara cuando tratemos el tema de la dimensión en el Teorema de Whitney que abordaremos en la Sección 5.

5. Teorema de Encaje de Whitney

En esta Sección procederemos primero a definir las propiedades que debe satisfacer una función para ser un $encaje$, luego procederemos a encontrar un $encaje$ para una variedad diferenciable compacta de dimensión n en un espacio Euclídeo en el primer Teorema. Conseguido esto procederemos a enunciar y demostrar el segundo Teorema el cual es el Teorema de Whitney en su caso compacto donde sera necesario definir nuevos conceptos relacionados con la dimensión. En el tercer Teorema lograremos eliminar la condición de compacidad del Teorema de Whitney para luego enunciar el Teorema Fuerte de Encaje de Whitney que consigue minimizar en 1 la dimensión óptima del $encaje$, finalizamos tratando con el concepto de métrica sobre una variedad.

Definición 17.[5] Sean M y N variedades diferenciables, Una función $f : M \to N$ se dice que es una $inmersión\ en\ un\ punto\ p$ de su dominio si df_p en p es inyectiva. Si f es $inmersión$ en todos los puntos de su dominio diremos que f es una $inmersión$, Cuando el dominio de f es M diremos que f es una $inmersión\ global$.

Si f es una inmersión global se dice que f es un $encaje$ si $f : M \to f(M)$ es también un $homeomorfi$–smo, en el caso de que además f es una inclusión se dice que M es una subvariedad de N.

Lema 5.1[4] Si $f : M \to N$ es una inmersión inyectiva y M es compacta, entonces f es un encaje.

Demostración: Solo tenemos que probar que $f^{-1} : f(M) \to M$ es continua. Si $U \subset M$ es abierto, y como M es compacta entonces $M \setminus U$ es compacto, Así $f(M \setminus U)$ es compacto y por consiguiente cerrado. Como f es inyectiva, $f(M \setminus U) = f(M) \setminus f(U)$, de donde $f(U)$ es abierto en $f(M)$ y $f^{-1}(f(U)) = U$ por lo que esta es continua.

■

Teorema 5.1[4]

Si M es una variedad diferenciable compacta de dimensión n, entonces hay un encaje $f : M \to \mathbb{R}^q$ para algún q.

Demostración: Como M es compacta, podemos encontrar una colección finita de cartas $(U_1, \varphi_1), \ldots,$ (U_k, φ_k) tal que $M = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Por el Lema 2.1 existe una cubierta localmente finita $\mathfrak{V} = \{V_i | i = 1, \ldots, k\}$ tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$. Por el Teorema 2.1 existe $\phi_i : M \to [0, 1]$ diferenciable tal que $\phi_i(V_i) = 1$ y $soporte\{\phi_i\} \subset U_i$, definimos la función.

$$f : M \to \mathbb{R}^q, \qquad f(p) = (\phi_1(p)\varphi_1(p), \ldots, \phi_k(p)\varphi_k(p), \phi_1(p), \ldots, \phi_k(p))$$

escribiendo $\varphi_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ tenemos que f se puede escribir mas precisamente como.

$$f(p) = (\phi_1(p)x_{1,1}(p), \ldots \phi_1(p)x_{1,n}(p), \ldots, \phi_k(p)x_{k,1}(p), \ldots \phi_k(p)x_{k,n}(p), \phi_1(p), \ldots, \phi_k(p)).$$

aquí podemos notar mas claramente que $f : M \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$, ahora mostraremos que f es el *encaje* buscado.

Veamos primero que f es inyectiva, Supongamos que $f(p) = f(q)$, con $p, q \in M$. Si $p \in V_i$, tenemos que $\phi_i(p) = 1$, entonces $\phi_i(q) = 1$ y así $q \in V_i$. Luego

$$\varphi_i(p) = \phi_i(p)\varphi_i(p) = \phi_i(q)\varphi_i(q) = \varphi_i(q)$$

ya que φ_i es un *homeomorfismo* se sigue que $p = q$, ahora solo falta ver que f es una *inmersión*

$$df = [d(\phi_1\varphi_1), \ldots, d(\phi_k\varphi_k), d\phi_1, \ldots, d\phi_k]$$

Sea $p \in V_i$. Como $\varphi_i(p) = \phi_i(p)\varphi_i(p)$ en V_i entonces $d_p(\phi_i\varphi_i) = d_p\varphi_i$ y ya que las cartas coordenadas forman una estructura diferenciable sobre M estas cartas son *difeomorfismos* por lo que df es inyectiva y f es una *inmersión* inyectiva entonces por el Lema 5.1, f es un encaje.

■

En el Teorema anterior logramos mostrar que toda variedad abstracta compacta es $difeomorfa$ a alguna subvariedad de algún espacio Euclideo pero aun no tenemos mucha información acerca de la dimensión del espacio Euclídeo de llegada de nuestro encaje f la cual parece ser de dimensión alta, esto es un gran problema ya que para $n < m$ tenemos que $\mathbb{R}^n$ de forma natural es un $encaje$ en $\mathbb{R}^m$, entonces podríamos tener una $variedad$ que admite un $encaje\ n-dimensional$ encajada en un espacio Euclídeo de dimensión m por lo cual la descripción de la $variedad$ puede ser mas compleja en base a las dimensiones sobrantes e incluso podría suceder que la $variedad$ se enroscarse a lo largo de las dimensión extra formando así una nueva $variedad$ para la cual no pueda existir un $encaje$ en un espacio Euclídeo de dimensión n, para solucionar este problema primero podríamos intuir cual podría ser la dimensión óptima q en la cual pueda construirse un $encaje$ en $\mathbb{R}^q$ de una $variedad$ M de dimensión n notando por ejemplo que si tenemos un $cilindro$ en $\mathbb{R}^3$ podríamos estirar sus extremos para luego juntarlos formando un $Toro$ como se muestra oprimiendo la descripción de la Figura 1.

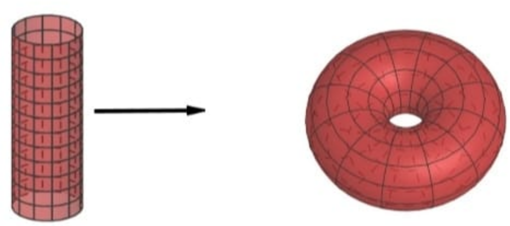

Figura 1: Gráfica con geogebra del **Cilindro y del Toro**

el $cilindro$ es una $variedad\ 2-dimensional$ encajada en $\mathbb{R}^3$, es decir en $n+1$, ahora podríamos invertir la orientación de un extremo del cilindro para luego pegarla con el otro extremo con lo cual tendremos una $botella\ de\ Klein$, como se muestra oprimiendo la descripción de la Figura 2.

la cual es una $variedad\ 2-dimensional$ que esta inmersa en $\mathbb{R}^3$ pero este no es un $encaje$ ya que presenta auto intersecciones por lo que $n+1$ no es una dimensión suficiente y además haría falta el uso de dimensiones extra para poder eliminar la auto intersección, para darnos una idea de la dimensión necesaria para eludir esta auto intersección consideremos una $variedad\ 1-dimensional$, una recta la cual inmersa en $\mathbb{R}^2$ presenta una auto intersección y por lo tanto no es un $encaje$, pero en $\mathbb{R}^3$, es decir en $2n+1$ podemos estirarla y así formar un $encaje$ como se muestra dando click, gracias a la intuición conseguida con estos ejemplos a continuación probaremos que para un espacio Euclídeo con dimensión $2n+1$ tenemos el espacio suficiente para que exista un $encaje$ para toda

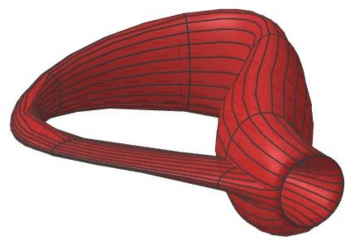

Figura 2: Gráfica con geogebra de una **Botella de Klein**

variedad diferenciable compacta de dimensión n pero antes debemos introducir algunas definiciones y resultados auxiliares.

Definición 18.[3] Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue 0 en dimensión n si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ a lo mas numerable de A por rectángulos cerrados tal que, denotando por $V(U_i)$ el volumen de U_i se cumple que.

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \epsilon$$

.

Definición 19.[7] Sea M una $variedad\ n-dimensional$, y $\mathfrak{A}$ un atlas numerable para M. Un conjunto $A \subset M$ tiene medida de Lebesgue 0 en M si para cada carta $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$, $\varphi(A)$ tiene medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^n$.

Definición 20.[7] Sean $M, N\ variedades\ diferenciables$, $f : M \to N$ una función entre ellas, $p \in M$ y $q \in N$. Decimos que.

- $p \in M$ es un punto critico de f si df_p no es sobreyectiva.

- $q \in N$ es un valor critico si existe al menos un punto $p \in f^{-1}(q)$ que sea punto critico de f.

Teorema 5.2[7] **(Teorema de Sard)**

Sean $M, N\ variedad\ diferenciables$ y $f : M \to N$ una $transformacion\ diferenciable$ entre ellas. Entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida de Lebesgue 0 en N.

la Demostración se puede encontrar en [7] [9].

Corolario 5.1 Sean M,N $variedades\ diferenciables$ y $f : M \to N$ una función $diferenciable$ entre ellas, Si $dim(M) < dim(N)$ entonces $f(M)$ tiene medida de Lebesgue 0

Demostración. Para cualquier $p \in M$ la función $diferencial\ df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una aplicación lineal de espacios vectoriales con $dim(T_pM) < dim(T_{f(p)}N)$, por lo que $Ker(df_p) \neq 0$, entonces df_p no es sobrevectiva y por el Teorema de Sard $f(M)$ tiene medida de Lebesgue 0.

■

Teorema 5.3 (Teorema de Whitney caso compacto)[1][2][7]

Sea M una $variedad\ diferenciable$ compacta de dimensión n, entonces M admite un $encaje$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Demostración. Sabemos que M admite un $encaje$ $f : M \to \mathbb{R}^q$, si $q > 2n+1$ vamos a construir una proyección lineal $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{2n+1}$, que se restringe a un $encaje$ en M. Procediendo inductivamente, nosotros demostráremos que si $f : M \to \mathbb{R}^q$ es un $encaje$ entonces existe un vector unitaria $a \in \mathbb{R}^q$ tal que la composición de f con el mapeo de proyección que lleva a $\mathbb{R}^q$ sobre el complemento ortogonal de a sigue siendo un encaje. Luego el complemento $H = \{b \in \mathbb{R}^q : b \perp a\}$ es un subespacio vectorial de dimensión $q-1$ de $\mathbb{R}^q$ por lo tanto isomorfo a $\mathbb{R}^{q-1}$, así obtendremos un encaje en $\mathbb{R}^{q-1}$.

Definiremos el mapeo $h : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ dado por $h(x,y,t) = t[f(x) - f(y)]$ a demás definiremos el mapeo $g : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ dado por $g(x,v,t) = \frac{1}{t} df_x(v)$. Ya que $q > 2n+1$ el Corolario 5.1. implica que la imagen de h unida con la la imagen de g tienen medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^q$ por lo tanto existe un vector a fuera de sus imágenes, $a \neq \overline{0}$ ya que $\overline{0}$ pertenece a ambas imágenes. Sea π_a la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^q$ sobre H. probaremos que la aplicación $\pi_a \circ f : M \to \mathbb{R}^{q-1}$ es un $encaje$. Primero supongamos que $\pi_a \circ f$ no es inyectiva de modo que existen $p, c \in M$ tales que $\pi_a \circ f(p) = \pi_a \circ f(c)$, entonces por la linealidad de π_a tenemos que $\pi_a(f(p) - f(c)) = 0$ lo cual implica que $f(p) - f(c) = at$ para un número $t \neq 0$ entonces.

$$h(x,y,1/t) = a$$

contradiciendo la elección de a, lo cual implica que $\pi_a \circ f$ es inyectiva.

Ahora supondremos que $\pi_a \circ f$ no es una $inmersión$, entonces existe un punto $p \in M$ y un vector v distinto de $\overline{0}$ tales que

$$0 = d(\pi_a \circ f)_p(v) = d(\pi_a)_{f(p)}(df_p(v))$$

Como π_a es una proyección podemos identificarla con su diferencial de modo que $\pi_a(df_p(v)) = 0$, entonces $df_p(v) = at$ y de este modo $g(x, v, 1/t) = a$ contradiciendo la elección de a, por lo que f es una *inmersión*.

■

Con el resultado anterior logramos ver que en $\mathbb{R}^{2n+1}$ tenemos el espacio suficiente para que exista un *encaje* para una variedad compacta, en el siguiente Teorema procederemos a eliminar la condición de compacidad para así mostrar que toda variedad abstracta es *difeomorfa* a alguna subvariedad contenida en un espacio Euclídeo de dimensión $2n+1$.

TEOREMA DE ENCAJE DE WHITNEY 5.4[7][9]

Toda *variedad diferenciable* de dimensión n admite un *encaje* en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Demostración: Gracias al Teorema 5.3 tenemos una inmersión uno a uno de una variedad M en $\mathbb{R}^{2n+1}$. podemos componer con un *difeomorfismo* de $\mathbb{R}^{2n+1}$ a la bola unitaria para obtener una inmersión inyectifa $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $|f(x)| < 1$, sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ una función propia (una función continua tal que para cada compacto en su imagen se tiene que su preimagen es también un compacto), y definimos una nueva inmersión inyectiva $F : M \to \mathbb{R}^{2n+2}$ dada como $F = (f(x), \rho(x))$. Ahora volvemos a bajar a $\mathbb{R}^{2n+1}$ mediante la composición con la proyección ortogonal $\pi_a : \mathbb{R}^{2n+2} \to H$ donde H es el espació ortogonal al vector unitario $a \in \mathbb{R}^{2n+2}$.

Tenemos que $\pi_a \circ F : M \to H$ es una inmersión inyectiva para todo $a \in S^{2n+1}$ a excepción de los polos de la esfera, así que podemos elegir un vector a que no sea ninguno de ellos, ahora dado cualquier limite c podemos pedir que exista un numero b tal que el conjunto de puntos $x \in M$ donde $|\pi_a \circ F(x)| \leq c$ esta contenido en el conjunto $\left|\rho(x)\right| \leq b$. Con ρ propia, el conjunto anterior es un subconjunto compacto de M por lo tanto podemos decir que la preimagen bajo $\pi_a \circ F$ de cada bola cerrada en H es un subconjunto compacto de M. Ahora mostraremos que $\pi \circ F$ es el encaje buscado ya que de no ser entonces existe una sucesión de puntos $x_i \in M$ tales que $|\pi_a \circ F(x_i)| \leq c$ pero $\rho(x_i) \to \infty$. Recordemos que por definición para todo vector $v \in \mathbb{R}^{2n+2}$ el vector $\pi_a(v)$ esta en H por lo que $v - \pi_a(v)$ es múltiplo de a. Entonces $F(x_i) - \pi_a \circ F(x_i)$ es un múltiplo de a para cada i, y por lo tanto también lo es el vector

$$w_i = \frac{F(x_i) - \pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)}$$

considerando lo que sucede si $i \to \infty$.

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1\right) \to (0, \dots, 0, 1)$$

por que $|f(x_i)| < 1$ para todo i a demás $\frac{\pi\circ F(x_i)}{\rho(x_i)}$ tiene norma menor a $\frac{c}{\rho(x_i)}$ se tiene que converge a 0, por lo cual $w_i \to (0,...,0,1)$. Por lo tanto cada w_i es múltiplo de a y también lo sera en el limite y podemos concluir que a es un polo de S^{2n+1} lo que contradice la elección de a.

■

Luego de ocho años y mediante el uso de técnicas más sofisticadas de topología algebraica las cuales requerirían la introducción de Teoría y herramientas para su desarrollo formal, Whitney fue capaz de obtener la siguiente mejora donde logra demostrar la existencia de un *encaje* disminuyendo el numero de la dimensión en 1.

Teorema 5.5(Teorema fuerte de encaje de Whitney)[9] Si $n > 0$ entonces toda $n-variedad$ admite un *encaje* en $\mathbb{R}^{2n}$.

Su Demostración se puede encontrar en [9]

Gracias a la Proposición 2.5 sabemos que una *variedad* es metrizable por lo que tiene sentido pensar en un encaje isométrico, en 1954 *Nash* logro mostrar bajo que condiciones es posible esto combinando el siguiente Teorema con el Teorema fuerte de *Whitney* en el Corolario 5.2.

Definición 2.1[5] Una metrica Riemanniana en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $\langle , \rangle_p$ (es decir que es una forma simetrica, bilineal y definida positiva) en el espacio tangente T_pM. Una variedad Riemanniana es la pareja (M, g) donde g es una métrica Riemanniana.

Definición 2.2[6] Denotando por e a la métrica usual en $\mathbb{R}^n$. Si u es una inmersión de una variedad M entonces la expresión $e(du_p(v), du_p(w))$ con $p \in M, v, w \in T_pM$ define una métrica sobre M denotada como u^*e, entonces para que una inmersión u sea isometrica se debe cumplir que $u^*e = g$, una inmersión o encaje es estrictamente corta si $u^*e \leq g$.

Teorema 5.6[6]**(Teorema de Nash-Kuiper)** Sea (M, g) una variedad Rimanniana compacta de dimensión n y $f_0 : M \to \mathbb{R}^q$ con $q > n$ un *encaje* estrictamente corto, entonces existe un encaje isométrico C^1 que esta $C^0 - cerca\ de\ f_0$, es decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un encaje isometrico $f : (M, g) \to \mathbb{R}^q$ tal que $||f - f_0||_{C^0} \leq \varepsilon$.

Corolario 5.2[6] Toda $n-variedad$ diferenciable compacta admite un *encaje* isométrico C^1 en $\mathbb{R}^{2n}$

Demostración: Sea M una variedad diferenciable, Por el Teorema 5.5 existe un *encaje* $f : M \to \mathbb{R}^{2n}$. Como M es compacta, basta multiplicar f por una constante suficientemente chica para que sea a de mas un encaje estrictamente corto. Aplicando el Teorema de Nash encontramos el *encaje* isométrico de M en $\mathbb{R}^{2n}$

■

6. Conclusiones

En este trabajo primeramente se abordaron propiedades de espacios topológicos concluyendo que el satisfacer Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto era suficiente para que en un espacio topológico existan particiones de la unidad y este sea localmente homeomorfo a un espacio Euclídeo, por ello estas serán las condiciones para que un espacio topológico sea una variedad topológica.

Para conseguir nuestro objetivo era necesario generalizar el concepto de espacio tangente a una variedad para que así el hablar de un difeomorfismo sobre variedades tuviera sentido, esto se consiguió por medio de espacios de operadores lineales tomando como base la generalización del concepto de derivada direccional en la Definición 13; Así para una variedad M los espacios tangentes los cuales están definidos localmente se denotaran como T_pM.

Luego conseguimos dar un paso mas al considerar la unión de todos estos espacios para generar una nueva estructura global llamada Haz Tangente de la cual logramos mostrar que su dimensión es $2n$ siendo n la dimensión de M y mostrando que este Haz tangente posee estructura de variedad diferenciable por lo que el Haz Tangente posee a su vez un Haz Tangente a el de dimensión $4n$ y así sucesivamente dándonos a entender que toda variedad esta rodeada por una variedad aun mas grande al igual que sucede con las variedades contenidas en un espacio Euclídeo. Los resultados ha cerca del Haz Tangente los ponemos en practica en la demostración del Teorema 5.3.

El Teorema de encaje de Whitney se presento como 3 Teoremas distintos en donde cada uno tenia un objetivo diferente, el primero consiguió mostrar la existencia de un encaje de una variedad compacta en un espacio Euclídeo, el segundo consiguió aproximarse a la dimensión óptima de llegada para el encaje la cual la concluimos primeramente en $2n + 1$ mediante el uso del Teorema de Sard, el tercer y ultimo Teorema logro eliminar la condición de compacidad alcanzando el cometido de esta Monografía, el trabajo de optimizar la dimensión de llegada del encaje aun no estaba completo ya que Hassler Whitney luego mostró que la existencia del encaje se podía asegurar en dimensión $2n$.

En la realización de esta monografía se logro dar respuesta a la siguiente pregunta, ¿existen variedades suaves abstractas que no sean difeomorfas a las subvariedades con $\mathbb{R}^n$ como espacio ambiente para algún n? concluyendo en un rotundo no y a demás encontrando la dimensión de llegada de este e e incluso mostrando que bajo ciertas condiciones puede existir un e isometrico con en el corolario 5.2.

Referencias

[1] James R. M Munkres, *Topologia*, Massachusetts Institute of Technology, 2002.

[2]Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*,Springer, Departament of Mathematics Rutgers University, 2010.

[3]Michael Spivak,*Calculos on Manifolds : A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*, Brandeis University,1965.

[4] Hectór Sanchez Morgado, Oscar A. Palmas Velasco, *Geometria Riemanniana*, Facultad de ciencias UNAM,2007.

[5] Manfredo Perdigão do Carmo, *Riemannian Geometry*,2nd Edition, Instituto de Matematica Pura e Aplicada Edificio Lelio Gama Rio de Janeiro Brazil. 1992

[6] Bellati Barthés A.(2022.). *Encajes e inmersiones isometricas* C^1: el teorema de Nash-Kuiper. Tesis de grado. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias.

[7] V. Guillemin y A. Pollack,*DifferentialTopology* , Massachusetts Institute of Technology, 1974

[8] John M.Lee, *Introducion to Topological Manifolds*, Springer Second Edition, Departament of Mathematics University of Washington USA, 2010

[9] John M.Lee, *Introducion to Smooth Manifolds*, Springer Second Edition, Departament of Mathematics University of Washington USA.