UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNA APLICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE BANACH AL ANÁLISIS COMPLEJO

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

Miguel Angel Aguilar Orduña
Dirigido por: Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Bogotá DC
Octubre de 2022

Resumen

En este trabajo estudiamos las álgebras de Banach complejas y tres de sus aplicaciones al análisis complejo.

La teoría de álgebras de Banach es una importante interacción visible entre el álgebra abstracta y el análisis matemático, convirtiéndose así en una de las teorías más bonitas y con más aplicaciones en matemáticas.

En el trabajo llenamos los detalles de las demostraciones de dichos resultados para comprender a profundidad el uso de la teoría de álgebras de Banach en conceptos del análisis matemático.

Palabras clave: Álgebra de Banach, espacio de Banach, función holomorfa.
Clasificación AMS: 46J10, 46J05, 46H99.
Agradecimientos: En primera instancia he de aclarar que le agradezco a muchas personas, pero menciono mi más sinceros agradecimientos a mi familia y maestros que me enseñaron y guiaron tras estos años de estudio.

1. Introducción

Las álgebras de Banach son el resultado del estudio de dos estructura matemáticas, una algebraica y la otra analítica que se relacionan estrechamente. Fueron nombradas en honor al matemático Stefan Banach debido a las importantes contribuciones que hizo para el desarrollo de esta teoría. Los trabajos de Hilbert, Banach y Riesz fueron necesarios para el desarrollo de esta teoría y dieron paso a que Izrail Gelfand formulara y publicara sus primeros resultados fundamentales en 1941 [3, p. 402].

Para la lectura de este trabajo, el lector debe estar familiarizado con la teoría elemental de álgebras de Banach complejas. Aunque introduciremos parte de la teoría elemental, no la desarrollaremos a profundidad.

Este trabajo se divide en dos partes. La primera parte expone los resultados fundamentales teóricos de álgebras de Banach, de los cuales inferimos hechos importantes y complementamos argumentos notables. En la segunda parte se exhiben las tres aplicaciones, desglosamos a profundidad sus demostraciones añadiendo premisas que consideramos pertinentes para la justificación y comprensión de dichos resultados.

Para el desarrollo de la segunda aplicación es necesario recordar uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional: el Teorema de Hahn-Banach. Este teorema y sus consecuencias pueden ser consultados en [2, p.213].

2. Álgebras de Banach

Un álgebra de Banach A, es un espacio de Banach complejo (i.e. un espacio vectorial normado completo con la métrica inducida por la norma) con un producto $\cdot : A \times A \to A$ que cumple ciertas propiedades. El producto debe ser asociativo, distributivo respecto a la suma vectorial a izquierda y a derecha, asociativo con respecto al producto por escalar, es decir, $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ y cumplir la desigualdad multiplicativa $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, para $x, y \in A$ y α escalar (ver [3, p. 356]).

En nuestro trabajo asumiremos que el álgebra de Banach tiene una unidad. Es decir, que hay un elemento $e \in A$ que satisface $xe = ex = x$ para todo $x \in A$. Además supondremos que $\|e\| = 1$. En caso contrario, de no tener elemento unidad se puede emplear el procedimiento canónico expuesto en [4, p. 246], que dota de un elemento unidad a un álgebra de Banach que no lo posea.

Antes de continuar mostremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El espacio de Banach trivial $(\{0\}, \cdot, \|\cdot\|)$ es claramente un álgebra de Banach trivial que omitimos al asumir la existencia de la identidad con $\|e\| = 1$. Es así, que para toda álgebra diferente a la trivial, se cumple $e \neq 0$.

Otro ejemplo trivial, es dotar a un espacio de Banach del siguiente producto trivial $x \cdot y = 0$ para todo $x, y \in A$.

Un álgebra de Banach A es conmutativa, si para todo $x, y \in A$, se cumple que $xy = yx$. Si A posee unidad e y bajo la operación de producto es un anillo de división, recordemos que esto quiere decir que todo elemento diferente del cero vectorial $\vec{0}$ posee un inverso, entonces se dice que A es un álgebra de división. Que un elemento $x \in A$ posea un inverso significa que existe un $z \in A$ tal que $xz = e = zx$, este elemento es el inverso de x en el álgebra de Banach y lo denotamos como $z = x^{-1}$. Un ejemplo de una álgebra de Banach de división es el siguiente.

Ejemplo 2. $\mathbb{C}^n$, con las operaciones por componentes, es decir, componente a componente y con la norma del máximo, es un álgebra de Banach conmutativa con unidad $e = (1, 1, 1, \ldots)$. Si $n = 1$ obtenemos el álgebra de Banach más simple no trivial $(\mathbb{C}, \cdot, |\cdot|)$, con el producto usual y la norma euclídea. Claramente se ve que en este caso el "producto" es el mismo que el producto por escalar.

Podemos deducir fácilmente que el elemento unidad es único. Es decir, $e' = e'e = e$. Además, el inverso de un elemento también es único, cuando existe. Asimismo, podemos observar que sí x y y son invertibles en A también lo son x^{-1} y xy, dado que el inverso de x^{-1} es el mismo x y el inverso de xy es $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Si definimos el conjunto G como el conjunto de todos los elementos en A que tienen inverso, tenemos que G es un grupo bajo la multiplicación definida en el álgebra.

Ejemplo 3. $(\mathbb{R}, \cdot, |\cdot|)$ es un álgebra de Banach real con el producto usual y la norma euclídea. La diferencia entre un álgebra de Banach compleja y un álgebra de Banach real es que el espacio de Banach ya no esta definido sobre los complejos si no sobre los reales.

En este trabajo no haremos un estudio de las álgebras de Banach reales por un hecho teórico que abordaremos más adelante. Para un estudio de las álgebras de Banach reales se puede consultar [1, cap. 4].

Ejemplo 4. Sea $B(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales acotados en un espacio de Banach X, con elemento unidad $\underset{x \to I(x)=x}{I : X \to X}$ y las operaciones definidas a continuación:

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x), \quad (A_1A_2)(x) = A_1(A_2(x)), \quad \|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

$B(x)$ es un álgebra de Banach.

En efecto, es claro que $B(X)$ es un espacio vectorial complejo normado dado que sus elementos son operadores lineales acotados y la suma vectorial es puntual. Además, el producto por escalar es puntual y está dado con el cuerpo del espacio de Banach X. De las propiedades del supremo se infiere que la norma está bien definida.

Omitimos las cuentas alegebraicas que prueban que el producto cumple con las propiedades mencionadas, porque estas son verificables directamente de la definición.

Ahora basta probar que cumple la desigualdad multiplicativa y es espacio de Banach. Por la definición de $||A||$, $||A|| \geq \frac{||Ax||}{||x||}$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$, implica que $||Ax|| \leq ||A||||x||$. Veamos que la desigualdad multiplicativa se cumple. Para esto, sean $A, B \in B(X)$ de modo que

$$\begin{aligned} ||(AB)|| = \sup \frac{||(AB)x||}{||x||} &= \sup \frac{||A(Bx)||}{||x||} \\ &\leq \sup \frac{||A|| \cdot ||(Bx)||}{||x||} \\ &\leq \sup \frac{||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||}{||x||} \\ &\leq \sup ||A|| \cdot ||B|| = ||A|| \cdot ||B||. \end{aligned}$$

Por último, probaremos que $B(X)$ es un espacio métrico completo. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$. Entonces $\{A_i x\}$ es una sucesión de Cauchy en X, de modo que posee un límite. Sea este $l(x)$.

Tomemos $\epsilon > 0$ y $n, m > k$ con $n, m, k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$||A_m - A_n|| = \sup \frac{||(A_m - A_n)x||}{||x||} \leq \epsilon,$$

de forma que

$$||A_m x - A_n x|| \leq ||A_m - A_n|| \cdot ||x|| \leq \epsilon ||x||.$$

Como $A_n(x) \to l(x)$ cuando $n \to \infty$, podemos aplicar límite a ambos lados de la desigualdad anterior obteniendo

$$||(A_m x - l(x)|| \leq \epsilon ||x|| \quad \forall x.$$

Conociendo que el supremo es la mínima cota superior, concluimos que

$$||A_m - l|| = \sup \frac{||(A_m x - l(x)||}{||x||} \leq \epsilon.$$

De modo que $B(X)$ es un espacio de Banach. Por lo tanto $B(X)$ es un álgebra de Banach con la operación de "producto" definida como la composición de aplicaciones lineales acotadas. Dado que la composición es no conmutativa, $B(X)$ es un álgebra de Banach no conmutativa.

Finalmente, definamos un concepto clave no solo de nuestro estudio sino de la propia teoría, pues aclara la importancia del cuerpo en donde está definido el espacio de Banach.

Definición 1. El espectro de un elemento $x \in A$ es el subconjunto de números complejos λ tal que $x - \lambda e$ no es invertible. Es decir, el conjunto denotado por $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G\}$ donde G es el conjunto de todos los invertibles en A.

Observemos que si el álgebra de Banach es de división, entonces $x - \lambda e = \vec{0}$. Por lo tanto $x = \lambda e$ y $\sigma(x) = \{\lambda\}$. Es decir, $\sigma(x)$ esta compuesto por un solo número complejo para cada $x \in A$. Si suponemos que existe más de un λ tendríamos que $x = \lambda_1 e$ y $x = \lambda_2 e$ entonces,

$$\lambda_1 e = \lambda_2 e \ \rightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2)e = 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2$$

Así para toda álgebra de Banach de división, el espectro de todos sus elementos esta determinado como conjuntos unitarios.

2.1. Resultados Fundamentales

Expondremos algunos resultados fundamentales de las álgebras de Banach que consideramos cruciales en la teoría. Además varios serán necesarios es nuestro estudio posterior. Los demás resultados importantes pueden ser consultados en [3, p. 356] y [4, p.245 280].

Como antes, A es un álgebra de Banach y G el conjunto de invertibles de A.

Teorema 1. *Si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces $e + x \in G$,*

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{1}$$

y

$$\|(e+x)^{-1} - e + x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}. \tag{2}$$

Este teorema es la base para muchos de los resultados que se exponen a continuación. Una consecuencia inmediata es ver que la bola abierta de radio 1 y centro e está contenida en G, dado que si remplazamos a x por $-x$ obtenemos que el elemento $e - x \in G$ y

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

De forma que si $y \in B_1(e) = \{y \in A : \|e - y\| < 1\}$, entonces $v = e - y$ es tal que $\|v\| < 1$. Por lo tanto el Teorema 1 implica que $e - v = e - e + y = y \in G$.[1, p. 186]

Teorema 2. *Supongamos $x \in G$, $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$, $h \in A$ y $\|h\| = \beta < \alpha$. Entonces $x + h \in G$ y*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}.$$

El Teorema 2 es una consecuencia directa del teorema previo 1, su importancia radica en su uso posterior. Podemos notar que este teorema al igual que el anterior nos proporcionan una relación entre un elemento invertible de A y su respectiva norma. Es claro, dado que se generaliza para todo $x \in A$ invertible con $\|x\| = \alpha$ y $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$, que $B_\alpha(x) = \{h \in A : \|x - h\| < \alpha\} \subseteq G$. Esta característica es una implicación de conceptos métricos a algebraicos, ya que nos permite encontrar elementos invertibles por métodos métricos más no algebraicos.

Corolario 1. *G es un conjunto abierto, y la aplicación $x \to x^{-1}$ es un homeomorfismo de G a G*

Aunque no expongamos la prueba de este corolario en el estudio, los detalles pueden revisarse en [1, p. 186-189]. A pesar de que en este texto, el espacio de Banach sea real, las demostraciones de estos hechos valen para el caso complejo.

Corolario 2. *Para todo $x \in A$, $\sigma(x)$ es compacto y si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $|\lambda| \leq \|x\|$*

La demostración de este coralario está expuesto en [3, p. 359]. Debido a que en este solo se expone formalmente la segunda parte. Adicionaremos los detalles de la primera parte.

Para demostrar que $\sigma(x)$ es compacto, vamos a utilizar el Teorema de Heine-Borel. Este es acotado por la segunda parte del mismo corolario 2. Falta ver que es cerrado. Para esto, vamos a demostrar que es la imagen inversa de un cerrado por una función continua. Notoriamente, la función

$$\underset{\lambda \to x - \lambda e}{T : \mathbb{C} \to A}$$

es continua para x fijo, además es evidente que $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si, $x - \lambda e \notin G$. Recordemos que el complemento de G es un subconjunto cerrado de A por el Corolario 1. Así $T^{-1}(G^c) = \sigma(x)$ es un conjunto cerrado. La igualdad se comprueba fácilmente mediante

$$T^{-1}(G^c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T(\lambda) = x - \lambda e \in G^c\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G\} = \sigma(x).$$

El siguiente teorema establece una de las primeras relaciones que hay entre el análisis complejo y las álgebras de Banach, además de ser la herramienta para demostrar un hecho fundamental para la teoría de álgebras de Banach y la teoría espectral.

Teorema 3. *Sea Φ un funcional lineal acotado sobre A, fijemos $x \in A$, y definamos*

$$f(\lambda) = \Phi[(x - \lambda e)^{-1}] \quad (\lambda \notin \sigma(x)).$$

Entonces f es holomorfa en el complemento de $\sigma(x)$ y $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$

La demostración de este teorema hace uso del teorema 2, por eso su importancia. Además usa el hecho ya mencionado, el cual se deduce de la definición de $\sigma(x)$. Otro hecho que usa es el siguiente

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{x}{\lambda} = \vec{0}.$$

Para verlo supongamos que el límite no fuera cero, entonces podemos ver que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\|x\|}{|\lambda|} = 0.$$

Esto es evidente por ser la norma una aplicación a los reales al igual que el modulo de λ, pero si esto ocurre se concluye que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{x}{\lambda} = \vec{0},$$

dado que el único elemento con norma cero es $\vec{0}$.

El siguiente teorema es la razón principal por la cual es más conveniente trabajar con álgebras de Banach definidas en los complejos en vez de los reales, además es el resultado fundamental de la teoría de álgebras de Banach y la teoría espectral mencionados al final del corolario 2.

Teorema 4. *Para todo $x \in A$, $\sigma(x)$ es no vacío.*

Su demostración (ver en [3, p. 359]) hace uso del teorema 3, además de una consecuencia del teorema de Hahn-Banach [3, p. 107], [2, p. 223] y del teorema de Liouville [3, p. 212]. Esta es la forma más simple de demostrarlo, se puede consultar otra en [4, p. 253]. En ella también se utiliza el teorema 3 implícitamente. Este hecho es fundamental para el estudio del espectro de los elementos en un álgebra y para dar sentido al radio espectral, el cual definiremos más adelante.

Como pudimos observar el resultado anterior 4 hace uso del análisis complejo, particularmente de las funciones holomorfas tanto en subconjuntos de $\mathbb{C}$ como en todo el plano $\mathbb{C}$. Esto es posible dado que el espacio de Banach es complejo, mostraremos a continuación que de no ser así, existen elementos para los cuales $\sigma(x)$ es vacío en una determinada álgebra.

Ejemplo 5. Sea $X = \mathbb{R}^2$, el cual es un espacio de Banach real conocido. Usando el Ejemplo 4 obtenemos que $B(\mathbb{R}^2)$ es un álgebra de Banach real. Puesto que en el Ejemplo 4 no se particulariza el espacio de Banach. Además, la mención del cuerpo complejo para su prueba es también cumplida por el cuerpo real.

Ahora sea $A \in B(\mathbb{R}^2)$, de modo que es un operador lineal acotado que posee una representación matricial respecto a la base canónica. Sea esta representación matricial la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Revisemos entonces el espectro de A. Antes observemos que, si el espacio de Banach esta definido sobre los reales, el conjunto σ será $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : x - \lambda e \notin G\}$ donde G es el subconjunto de $B(\mathbb{R}^2)$ compuesto por todos los operadores lineales acotados que poseen inversa en $\mathbb{R}^2$.

De manera que para $A - \lambda I$ posea inversa su determinante debe ser distinto de cero, pero al calcular su determinante obtenemos que

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$$

Por lo cual para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ debe cumplirse que $\lambda^2 = -1$, pero como sabemos no es posible puesto que su solución son números complejos, a saber, $\pm i$. Por lo tanto $\sigma(A)$ es vacío para esta álgebra de Banach real.

Demos ahora la definición formal del radio espectral de un elemento.

Definición 2. Sea A un álgebra de Banach compleja para cualquier $x \in A$, el radio espectral $\rho(x)$ de x es el radio del disco cerrado más pequeño con centro en el origen y que contiene a $\sigma(x)$. Definida como

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Es evidente que, si $\sigma(x)$ fuera vacío esta definición no tendría sentido, dado que no existe sup del conjunto vacío por el axioma del supremo. Este hecho teórico es la razón por la cual no exponemos las álgebras de Banach reales mencionadas al final del ejemplo 3.

El siguiente teorema es importante puesto que tanto el espectro de x y el radio espectral son conceptos definidos en la estructura algebraica de A, sin tener en cuenta ninguna consideración métrica (o topológica). El límite que aparece en el enunciado del siguiente teorema 5, por otra parte, depende de propiedades métricas de A. Esto Afirma la igualdad de dos cantidades que surgen de forma enteramente distinta.[3, p. 361]

Teorema 5 (Fórmula del Radio Espectral). *Para todo $x \in A$ con A álgebra de Banach compleja se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(x)$$

(La existencia del límite es parte de conclusión)

La demostración de este teorema es por método directo, se procede acotando tanto superiormente como inferiormente a $\rho(x)$ por cotas apropiadas. Lo anterior resulta en la igualdad del límite del teorema. Esta demostración es extensa por lo tanto no será expuesta aquí, puede ser consultada en [3, p. 360],[4, p. 253]

Notemos la siguiente observación interesante acerca de los espectros de los elementos. Sea A una subálgebra de Banach de un álgebra de Banach más amplia B. Puede suceder que $x \in A$ no tenga inverso en A pero en B si lo posea. En tal caso, es claro que el espectro del mismo elemento en las dos álgebras es diferente. Veamos que se cumple $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$.

Sea $G_1 \subseteq A$ el conjunto de invertibles de A, al igual que $G_2 \subseteq B$, se ve fácilmente que $G_1 \subseteq G_2$. Ahora sea $y \in \sigma_B(x)$ entonces por definición se tiene que $x - \lambda e \notin G_2$ lo cual implica que $x - \lambda e \notin G_1$, por tal se concluye que $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$.

Aunque la anterior inclusión no parece natural es importante porque proporciona una diferencia entre propiedades algebraicas y métricas. Aunque no se cumple la igualdad entre el espectro del mismo elemento en las dos álgebras, si se cumple la igualdad de $\rho(x)$. Esto es debido al teorema 5, ya que $\rho(x)$ se puede obtener también por el límite de su norma y ésta no es alterada por lo que ocurra fuera de A.

Para continuar con los aspectos fundamentales del tema, debemos suponer que las álgebras de Banach son conmutativas, esto para facilitar el trabajo con los ideales que expondremos en seguida.

Definición 3. Un subconjunto I de un álgebra compleja conmutativa A (i.e. un espacio vectorial complejo con la operación del producto definida igual que un álgebra de Banach), se dice un ideal si, (1) I es un subespacio vectorial de A y (2) $xy \in I$ si $x \in A$ e $y \in I$. Si $I \neq A$, I es un ideal propio. Los ideales maximales son ideales propios que no están contenidos en ningún ideal propio más amplio. Si B es otra álgebra compleja conmutativa, una aplicación ϕ de A en B se llama un homomorfismo, si ϕ es una aplicación lineal que conserva también la multiplicación: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todo x e $y \in A$.

El hecho de suponer las álgebras conmutativas simplifica el caso de los ideales laterales.

Ejemplo 6. El ejemplo más simple de un ideal es el formado por el núcleo (kernel) de un homomorfismo entre álgebras de Banach. Sea ϕ tal homomorfismo entre A y B entonces el conjunto $N(\phi) = \{x \in A : \phi(x) = \vec{0}_B\}$ es un ideal.

Es claro que es un subespacio vectorial, lo único por probar es la segunda propiedad. Sea $z \in A$ y $x \in N(\phi)$, como

$$\begin{aligned}\phi(zx) &= \phi(z)\phi(x)\\ &= \phi(z)\vec{0}_B = \vec{0}_B,\end{aligned}$$

$zx \in N(\phi)$.

Unas consecuencias inmediatas de la definición anterior son las siguientes. Por un lado, todo ideal propio de A no posee elementos invertibles, ya que si existe $x \in I$ invertible por definición tendríamos que $x^{-1}x = e \in I$. Por lo tanto, para todo $y \in A$ $ye \in I$ de modo que $I = A$. Por otro lado, podemos ver que para toda álgebra de Banach con unidad, se cumple que si $y \in A$ con $\phi(y) \neq 0$ entonces

$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$. Por lo tanto $\phi(e) = 1$. Veamos ahora que, $\phi(x) \neq 0$ para todo invertible en A. Esto se deduce de $\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(x^{-1}x) = \phi(e) = 1$.

La anterior característica de los homomorfismos de las álgebras de Banach es también una condición suficiente para que sea un homomorfismo. Esto significa que, si se cumple $\phi(e) = 1$ y $\phi(x) \neq 0$ para cada invertible $x \in A$ además de ser ϕ una forma lineal, entonces ϕ es un homomorfismo entre álgebras de Banach. [4, 251]

El siguiente teorema (Teorema 6) es usado implícitamente más adelante. Por lo tanto mostraremos aquí un hecho que en su demostración no está expuesto en los textos guías.

Antes de exponer el hecho (Proposición 1), notemos que de la definición de álgebra de Banach por su desigualdad multiplicativa se desprende la continuidad de la operación del producto. Esto quiere decir que, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ para x, y, x_n y $y_n \in A$ entonces

$$x_n y_n \to xy.$$

Podemos verlo fácilmente por la identidad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En efecto, supongamos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ para x, y, x_n y $y_n \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \\ &\leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \\ &\leq \|(x_n - x)\|\|y_n\| + \|x\|\|(y_n - y)\| \to 0. \end{aligned}$$

Proposición 1. *Si I es un ideal en una álgebra de Banach conmutativa A, entonces su clausura $\overline{I}$ es también un ideal.*

Demostración. Para ver que $\overline{I}$ es un ideal debemos ver primero que es un subespacio vectorial. Para esto, solo hace falta ver que si x, y son puntos de acumulación de $\overline{I}$, se tiene que $y_n \to y$ y $x_n \to x$ entonces $x_n + y_n \to x + y$ y esto se cumple por la continuidad de la suma, que es evidente, además de $\lambda y_n \to \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por último, sea $x \in A$ y $y_n \to y$ con $y_n \in I$. Entonces $xy_n \in I$. Ahora, por la continuidad del producto se tiene que $xy_n \to xy$ y como $\overline{I}$ es cerrado concluimos que $xy \in \overline{I}$. Por lo tanto $\overline{I}$ también es un ideal. □

Teorema 6. *Si A es un álgebra compleja conmutativa con elemento unidad, todo ideal propio de A está contenido en un ideal maximal. Si además A es un álgebra de Banach, todo ideal maximal de A es cerrado.*

Nuestra Proposición 1 es usada en la demostración de la segunda parte. La primera parte es consecuencia del principio de maximalidad de Hausdorff (y se verifica en cualquier anillo conmutativo con elemento unidad). Para su demostración formal ver [3, 362], [4, 276].

Hablemos ahora de las álgebras cocientes. Su formulación es análoga a la de anillos cociente en el álgebra abstracta [3, p. 362]. Supongamos que J es un ideal propio de un álgebra compleja A conmutativa con elemento unidad, asociemos a cada $x \in A$ la clase,

$$\phi(x) = x + J = \{x + y : y \in J\}.$$

El conjunto de todas las clases de J se denota por A/J y es un espacio vectorial si definimos

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \lambda\phi(x) = \phi(\lambda x).$$

La notación anterior no solo es útil, sino que además nos permite ver que ϕ es claramente una aplicación lineal de A sobre A/J. El elemento cero de A/J es $\phi(0) = J$. Es evidente que si $x' - x \in J$ entonces $\phi(x') = \phi(x)$. Esto debido a que $x' - x = y \in J$ implica que $\phi(x') = x' + J = y + x + J = x + J = \phi(x)$. Con lo anterior y suponiendo además que $y' - y \in J$, podemos obtener la siguiente igualdad

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y).$$

Teniendo en cuenta la igualdad anterior podemos definir el producto en A/J de forma apropiada,

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad (x, y \in A).$$

Se deduce que A/J resulta ser un álgebra compleja conmutativa, además $\phi(e)$ es el elemento unidad de A/J. ϕ definida de esta manera implica que es un homomorfismo entre álgebras complejas conmutativas con núcleo J.

Una propiedad interesante es la siguiente; A/J es un cuerpo si y sólo si, J es un ideal maximal. Se menciona ya que posteriormente permitirá deducir una propiedad de las álgebras de Banach. Su justificación está en [3, p. 365].

La norma en A/J se define naturalmente como,

$$\|\phi(x)\| = \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in J\}.$$

De esta definición se desprenden varias propiedades, pero para nuestro estudio consideramos la siguiente.

Proposición 2. *Si A es una álgebra de Banach conmutativa y J es un ideal cerrado propio, entonces A/J es una álgebra de Banach conmutativa.*

Notemos aquí la necesidad de que J sea cerrado como subconjunto de A. Esto permite que A/J sea espacio normado. Más aún, si A es espacio de Banach entonces A/J es espacio de Banach.

El siguiente teorema nos permitirá concluir la propiedad buscada. Además es muy importante en la teoría de álgebras de Banach.

Teorema 7 (Teorema de Gelfand-Mazur). *Si A es una álgebra de Banach compleja con elemento unidad en la que todo elemento distinto de cero es invertible (álgebra de división), entonces A es isométricamente isomorfa al el cuerpo complejo.[3, p. 359]*

Por el teorema 7 y la proposición 2 además de los comentarios anteriores, obtenemos que para toda álgebra de Banach conmutativa con unidad y J un ideal de A propio maximal, A/J es álgebra de Banach de división (cuerpo). Por lo tanto, isomorfa isométricamente al cuerpo de los complejo. Esto nos asegura que sin importar el álgebra de Banach A podemos construir otra a partir de A, tal que sea el cuerpo complejo.

Para concluir la primera parte finalizaremos con un teorema muy valioso teóricamente y crucial para nuestro trabajo, utilizado implícitamente y explícitamente en muchas ocasiones a lo largo de las aplicaciones.

Primero supongamos que A es un álgebra de Banach compleja conmutativa con elemento unidad e. Asociamos a A el conjunto Δ de todos los homomorfismos de A sobre el cuerpo complejo, o de manera equivalente los funcionales lineales multiplicativos sobre A que no son idénticamente 0.

Teorema 8. *Sea Δ definido por,*

$$\Delta = \{h : A \to \mathbb{C} : \ h \ es \ homomorfismo \ entre \ álgebras\}$$

Se cumple las siguentes propiedades,

a) Todo ideal maximal I de A es el núcleo de algún $h \in \Delta$.

b) $\lambda \in \sigma(x)$ si, y sólo si, $h(x) = \lambda$ para algún $h \in \Delta$.

c) x es invertible en A si, y sólo si, $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \Delta$.

d) $h(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in A$ y $h \in \Delta$.

e) $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in A$ y $h \in \Delta$.

En este resultado notable, los ítem esenciales son a y b, debido a que el resto de ellos son consecuencias de estos. Por ejemplo, el ítem c es consecuencia de b y del siguiente hecho: x es invertible si y solo si, $0 \notin \sigma(x)$. Para probarlo razonemos por reducción al absurdo, de forma que supongamos que $0 \in \sigma(x)$ tendríamos $x - 0e = x$ lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis de x ser invertible. Por ende $x \in G$. La otra implicación se deduce razonando por contrarrecíproco. Es decir si $0 \in \sigma(x)$ entonces x es no invertible. Lo cual es inmediato por la definición de $\sigma(x)$.

3. Aplicaciones al análisis complejo

Antes de exponer la primera aplicación, mencionamos unos hechos importantes a tener en cuenta. Sea K un espacio de Hausdorf compacto no vacío y $C(K)$ el conjunto de todas las funciones continuas complejas definidas sobre K. Si se definen las operaciones de suma vectorial, producto por escalar, y producto de forma puntual con la norma del supremo en $C(K)$; entonces $C(K)$ es una álgebra de Banach.

El espacio $C(K)$ es similar al Ejemplo 4 y la demostración de ser espacio de Banach es análoga. Que se cumpla la desigualdad multiplicativa se desprende del siguiente hecho,

$$\sup\{\|f(x)\|\cdot\|g(x)\| : x\in K\} \leq \sup\{\|f(x)\| : x\in K\}\cdot\sup\{\|f(x)\| : x\in K\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\|fg\| &= \sup\|f(x)g(x)\| \\ &\leq \sup\|f(x)\|\cdot\sup\|g(x)\| \\ &\leq \|f\|\cdot\|g\|.\end{aligned}$$

Si $K\subseteq\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^n$ es un conjunto compacto y A es una subálgebra de $C(K)$ tal que toda $f\in A$ es holomorfa en el interior de K, entonces A es una álgebra de Banach. La completitud de A se debe a que, si una sucesión de funciones es convergente en $C(K)$, esta sucesión es uniformemente convergente. Además, se puede deducir de la fórmula integral de Cauchy o del teorema de Morera que el límite uniforme de funciones holomórficas es holomórfico. En otras palabras, A es un cerrado en un completo y por lo tanto, es completo.

Para nuestra primera aplicación, consideremos una función holomorfa no-nula en el disco unidad, $f(z)$. Es claro que $g(z)=1/f(z)$ también es holomorfa en el disco unidad y el producto de las dos es la unidad. Esto se puede generalizar para varias funciones al tiempo. Por ejemplo, $f_1(z)=z^2$ y $f_2(z)=z^2+1$ son holomorfas en el disco unidad y la suma de sus módulos es no nula en todo el disco. Para este caso, existen $g_1(z)=-1$ y $g_2(z)=1$ de tal forma que $f_1(z)g_1(z)+f_2(z)g_2(z)=1$. Este proceso se puede generalizar en el siguiente teorema.

Teorema 9. *Sea $A(\overline{U})$ el conjunto de todas las funciones continuas en la adherencia $\overline{U}$ del disco unidad abierto $U\subseteq\mathbb{C}$ cuyas restricciones a U son holomorfas. Supongamos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son elementos de $A(\overline{U})$, tales que*

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+\ldots+|f_n(z)|>0 \tag{4}$$

para todo $z\in\overline{U}$. Entonces existen $g_1,\ldots,g_n\in A(\overline{U})$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)g_i(z)=1 \quad (z\in\overline{U}).$$

Demostración. Para demostrar el teorema por métodos algebraicos, la intensión es mostrar que la función constante $u(z) = 1$ para todo $z \in \overline{U}$ se puede escribir por medio de una sumatoria de funciones apropiadas. Recordemos que esta función constante hace de unidad en el álgebra de Banach $A(\overline{U})$. La justificación de ser $A(\overline{U})$ álgebra de Banach, se infiere por los comentarios previos a este teorema.

Es fácil ver que el conjunto J formado por todas las funciones de la forma $\sum f_i g_i$, donde las g_i son elementos arbitrarios de $A(\overline{U})$, es un ideal en el álgebra de Banach $A(\overline{U})$.

En efecto, es claro que es un subespacio vectorial de $A(\overline{U})$. Lo anterior se debe al hecho de; $\sum f_i g_i + \sum f_j g_j = \sum f_k g_k$ con $k = \{1, ..., i, ..., j, ...\}$ y $\alpha \sum f_i g_i = \sum f_i(\alpha g_i)$. Ahora, sea $\beta \in A(\overline{U})$. Entonces $\beta \sum f_i g_i = \sum f_i(\beta g_i)$, de donde J es un ideal de $A(\overline{U})$.

Veamos ahora que J contiene el elemento unidad $u(z) = 1$ de $A(\overline{U})$. Por el Teorema 6 esto ocurre si y sólo si, J no está en ningún ideal maximal de $A(\overline{U})$. Por el Teorema 8a, basta demostrar que no existe ningún homomorfismo h de $A(\overline{U})$ sobre el cuerpo complejo tal que $h(f_i) = 0$ para todo $i(1 \leq i \leq n)$. Esto es ya que $h(J) = 0$ por tanto $h(\sum f_i g_i) = \sum h(f_i)h(g_i)$. De forma que solo nos interesan las f_i puesto que g_i son arbitrarias.

Antes de determinar estos homomorfismos, notemos que los polinomios constituyen un subconjunto denso de $A(\overline{U})$. Para verlo supongamos $f \in A(\overline{U})$ y $\epsilon > 0$; como f es uniformemente continua en $\overline{U}$ lo cual es consecuencia del Teorema de Heine-Cantor (toda función continua definida en un compacto es uniformemente continua), entonces existe un $r < 1$ tal que $|f(z) - f(rz)| < \epsilon$ para todo $z \in \overline{U}$. El desarrollo de $f(rz)$ en potencias de z converge si $|rz| < 1$. Por tanto, tiende a $f(rz)$ uniformemente para $z \in \overline{U}$ y esto proporciona la aproximación deseada.

Sea ahora h un homomorfismo complejo de $A(\overline{U})$. Pongamos $f_0(z) = z$. En consecuencia $f_0 \in A(\overline{U})$. Se deduce que $\sigma(f_0) = \overline{U}$, esto dado que $f_0 - \lambda u = z - \lambda = 0 \rightarrow z = \lambda$. Por el Teorema 8d, existe un $\alpha \in \overline{U}$ tal que $h(f_0) = \alpha$. Por ende, $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha)$ para $n = 1, 2, 3, ...$ Por lo tanto, $h(P) = P(\alpha)$ para todo polinomio P. Como h es continuo (por Teorema 8e) y los polinomios son densos en $A(\overline{U})$, se desprende que $h(f) = f(\alpha)$ para todo $f \in A(\overline{U})$.

Nuestra hipótesis 4 implica que $|f_i(\alpha)| > 0$ para al menos un índice i, $1 \leq i \leq n$. Así que $h(f_i) \neq 0$.

Hemos demostrado que a cada $h \in \Delta$ le corresponde al menos una de las funciones dadas f_i tal que $h(f_i) \neq 0$, esto nos permite concluir la demostración del teorema.

Notemos por lo anterior que J no es un ideal propio y tampoco es trivial, de forma que es todo $A(\overline{U})$ y por tal debe tener la unidad. Por lo tanto esta debe ser expresada como un elemento de J, de lo cual se obtiene la igualdad expuesta el la tesis del teorema. □

Hemos determinado también todos los ideales maximales de $A(\overline{U})$ en el transcurso de la demostración, puesto que cada uno de ellos es el núcleo de algún $h \in \Delta$. Si $\alpha \in \overline{U}$ y si M_α es el conjunto de todas las $f \in A(\overline{U})$ tales que $f(\alpha) = 0$, entonces M_α es un ideal maximal de $A(\overline{U})$. Además todos los ideales maximales de $A(\overline{U})$ se obtienen de esta manera.

Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria, podemos notar que $C(T)$ es un álgebra de Banach, dado que T es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$ y por ende compacto. Las restricciones de los elementos de $A(\overline{U})$ a la circunferencia unidad T constituyen una subálgebra cerrada de $C(T)$, de forma que es el subconjunto $A = \{F \in C(T) : F = f|_T \wedge f \in A(\overline{U})\}$. La prueba de ser A subálgebra de Banach de $C(T)$ se desprende de los comentarios previos al Teorema 9. De hecho, A es una subálgebra maximal de $C(T)$. Explícitamente, si $A \subset B \subset C(T)$ y B es una subálgebra cerrada de $C(T)$ (relativa a la norma del supremo), entonces o $B = A$ o $B = C(T)$.

Para mostrar este hecho razonaremos como es usual en estos casos, por reducción al absurdo. Es decir, supondremos que existe B y que $B \neq C(T)$, entonces concluiremos una contradicción.

Sea B la adherencia del conjunto P de todas las funciones de la forma

$$P = \left\{ \sum_{n=0}^{N} P_n g^n \right\}$$

con respecto a $C(T)$. Aquí los P_n son los polinomios usuales evaluados en el circulo unitario,

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k} e^{ik\theta} \quad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

y $g \in C(T)$ con $\hat{g}(n) \neq 0$ para algún $n < 0$. Recordemos que la definición de transformada de Fourier se reduce para este caso a

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

De manera que $B = \text{adh } P$ es una subálgebra de Banach de $C(T)$ que contiene a A. Estos hechos se desprenden de, $P \subseteq C(T)$ debido a que los polinomios son continuos y $g \in C(T)$. Además P es cerrado tanto para la suma como para el producto de $C(T)$, lo cual implica que es una subálgebra. Ahora como $B = \text{adh } P$ con respecto a $C(T)$, entonces B es cerrado, de modo que es espacio de Banach y satisface la desigualdad multiplicativa dado que sus elementos pertenecen a $C(T)$.

El hecho de que $A \subseteq B$ se justifica recordando que los polinomios constituyen un subconjunto denso de $A(\overline{U})$. La otra inclusión no se cumple, puesto que g no necesariamente pertenece a A.

En el siguiente diagrama podemos observar claramente la situación.

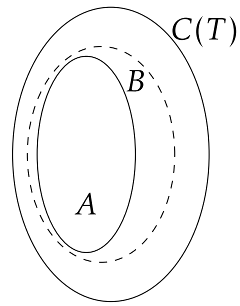

Figura 1: Relación entre A, B y $C(T)$

Como B es una álgebra de Banach que contiene la función f_0, donde $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, dado que puede ser expresada como

$$f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{0} P_n g^n = P_0(e^{i\theta})g^0(e^{i\theta}) = P_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{m(0)} a_{0,k}e^{ik\theta} = a_{(0,1)}e^{i\theta}$$

para $a_{(0,1)} = 1$ y el resto igual a cero.

Nuestra hipótesis $B \neq C(T)$ implica que $\frac{1}{f_0} \notin B$; porque si pertenece a B entonces B contendría a f_0^n para todo entero n, por tanto todos los polinomios trigonométricos estarían en B debido a su representación en términos de la exponencial. Como los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ (ver el teorema 4.24[3, p. 91]) se concluye entonces que $B = C(T)$.

De forma que, f_0 no es invertible en B. Por el Teorema 8d, existe un homomorfismo complejo h de B tal que $h(f_0) = 0$. Como todo homomorfismo sobre el cuerpo complejo satisface $h(e) = 1$, y como $h(f_0) = 0$, tenemos también que

$$h(f_0^n) = [h(f_0)]^n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Sabemos que h es un funcional lineal sobre B, de norma 1 a lo sumo. Esto es una consecuencia de 8e, en particular cada $h \in \Delta$ es continuo. El teorema de Hahn-Banach permite extender h como funcional lineal sobre $C(T)$ (también denotado con h) de la misma norma.

Como $h(e) = 1$ y $||h|| \leq 1$, podemos concluir que h es un funcional lineal positivo sobre $C(T)$. Para probar esta afirmación supongamos que $f \in C(T)$, $0 \leq f \leq 1$. Además definamos $g = 2f - 1$ y $h(g) = \alpha + \beta i$, con α y β reales. Como consecuencia $-1 \leq g \leq 1$, tenemos que $|g + ri|^2 \leq |(\pm 1) + ri|^2 \leq 1 + r^2$ para todo r real. En conclusión obtenemos,

$$(\beta + r)^2 \leq |\alpha + i(\beta + r)|^2 = |h(g + ri)|^2 \leq |g + ri|^2 \leq 1 + r^2.$$

La penúltima desigualdad se deriva del hecho $\|h\| \leq 1$. Inferimos que $\beta^2 + 2r\beta \leq 1$ para todo r real, lo que obliga a que $\beta = 0$. Por consiguiente y de acuerdo al Teorema 8e, $\|g\| \leq 1$ entonces $|h(g)| = |\alpha| \leq 1$, por lo tanto

$$h(f) = \frac{1}{2}h(1+g) = \frac{1}{2}(1+\alpha) \geqslant 0.$$

En particular, $h(f)$ es real para f real. De este modo, $h(\overline{f}) = \overline{h(f)}$. Como f_0^{-n} es la compleja conjugada de f_0^n se tiene que (5), también se verifica para $n = -1, -2, -3, \ldots$ Entonces

$$h(f_0^n) = \begin{cases} 1, & n = 0. \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Como los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$, existe sólo un funcional lineal acotado sobre $C(T)$ que satisface (6). En consecuencia, h viene dado por la siguiente fórmula

$$h(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\theta \quad f \in C(T). \tag{7}$$

Esta fórmula es sugerida implícitamente, por el desarrollo de las series trigonométricas en [3, p 88].

Ahora si n es un entero positivo $gf_0^n \in B$ y como h es homomorfismo multiplicativo en B, además por (7) y (6) obtenemos

$$\hat{g}(-n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = h(gf_0^n) = h(g)h(f_0^n) = 0. \tag{8}$$

Esto contradice nuestra hipótesis sobre g, puesto que n es arbitrario. Por lo tanto hemos llegado a una contradicción. De está manera queda probado que A es una subálgebra maximal de $C(T)$, es decir, no esta contenida en una subálgebra cerrada propia más grande.

El anterior resultado demuestra el siguiente teorema de aproximación, el cual es nuestra segunda aplicación.

Teorema 10. *Supongamos que $g \in C(T)$ y $\hat{g}(n) \neq 0$ para algún n<0. Entonces a toda $f \in C(T)$ y todo $\epsilon > 0$ le corresponden polinomios,*

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}e^{ik\theta} \quad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

tales que

$$|f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^{N} P_n(e^{i\theta})g^n(e^{i\theta})| < \epsilon \quad (e^{i\theta} \in T) \tag{9}$$

Es claro que este teorema de aproximación es una forma de enunciar el teorema de maximalidad antes demostrado.

La aproximación de las funciones $f \in C(T)$ mediantes las funciones determinadas por los polinomios y la función g, se desprende del hecho que $B = C(T)$. Por lo que cada función en $C(T)$ se puede aproximar por las funciones dadas en B.

Por último exponemos la siguiente aplicación que garantiza la existencia del inverso de una serie de Fourier como una serie de Fourier.

Teorema 11. *Supongamos que,*

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \textit{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \tag{10}$$

y $f(e^{i\theta}) \neq 0$ *para todo* θ *real. Entonces,*

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta} \quad \textit{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty. \tag{11}$$

Demostración. Para establecer este teorema mostraremos que las funciones f conforman una cierta álgebra de Banach apropiada, y que además poseen inverso. Por lo tanto su inverso es expresado como otra función de la misma álgebra de Banach.

Sea A el conjunto de todas las funciones complejas f definidas sobre T, la circunferencia unidad que satisfacen (10), con la norma

$$\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|. \tag{12}$$

Entonces A es un espacio de Banach. Este hecho, es debido a que en A la suma vectorial y el producto por escalar es puntual, en efecto tenemos que si $g \in A$ y $g(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{i\theta}$ entonces

$$f + g = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{i\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n + b_n) e^{i\theta}$$

como
$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n+b_n| \leq \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|+\sum_{-\infty}^{\infty}|b_n| < \infty.$$
Entonces la suma vectorial es cerrada. Lo mismo ocurre con el producto por escalar, dado que,
$$\lambda f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty}\lambda c_n e^{i\theta}$$
y
$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\lambda c_n| \leq |\lambda|\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty.$$
El resto de las propiedades se desprenden fácilmente de las propiedades de la sumatoria y de c_n.

Es claro que A es espacio métrico completo, ya que su norma es una isometría con la norma del espacio de Banach l^1. Recordemos que la norma en l^1 es,
$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\ X \in l^1.$$
Se puede consultar la demostración de que l^1 es espacio de Banach en [2, p .35].

Ahora en A la operación de multiplicación es también puntual, de hecho esto hace de A un álgebra de Banach conmutativa. Veamos que su producto es cerrado y cumple la desigualdad multiplicativa.

Como se cumple
$$\begin{aligned}
f(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) &= \left(\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}b_n e^{in\theta}\right)\\
&= (\ldots + c_1e^{i\theta}+c_2e^{i2\theta}+\ldots)(\ldots + b_1e^{i\theta}+b_2e^{i2\theta}+\ldots)\\
&= \ldots + c_1b_1e^{i\theta}e^{i\theta}+c_1b_2e^{i\theta}e^{i2\theta}+c_2b_1e^{i2\theta}e^{i\theta}+c_2b_2e^{i2\theta}e^{i2\theta}+\ldots\\
&= \sum_n\left(\sum_k c_{n-k}b_k\right)e^{in\theta},
\end{aligned}$$
en consecuencia,
$$\|fg\| = \sum_n|\sum_k c_{n-k}b_k| \leq \sum_n\sum_k|c_{n-k}b_k| \leq \sum_k|b_k|\sum_n|c_{n-k}| = \|f\|\|g\|.$$
Esto demuestra además que el producto es cerrado. A posee unidad, la función constante $u(e^{i\theta}) = 1$ con $\|u\| = 1$.

Conocemos que $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ pertenece a A, ya que se puede escribir con $c_1 = 1$ y $c_n = 0$ para todo $n \neq 1$. Así también $\frac{1}{f_0}$ pertenece a A, puesto que se puede escribir con $c_{-1} = 1$ y $c_n = 0$ para todo $n \neq -1$. Por otro lado $\|f_0^n\| = 1$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por ser $\|f_0\| = 1$ y la desigualdad multiplicativa.

Si h es un homomorfismo complejo cualquiera de A y $h(f_0) = \lambda$, el hecho que $\|h\| \leq 1$ implica

$$|\lambda^n| = |h(f_0^n)| \leq \|f_0^n\| = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Teniendo en cuenta que $\lambda \in \sigma(f_0)$ y $f_0 - \lambda u = 0$ dado que f_0 es invertible, tenemos que $e^{i\theta} = \lambda$ entonces $|\lambda| = 1$. En otra palabras, a cada h le corresponde un punto $e^{i\alpha} \in T$ tal que $h(f_0) = e^{i\alpha}$. Por lo tanto,

$$h(f_0^n) = e^{in\alpha} = f_0^n(e^{i\alpha}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{13}$$

Si f es dada por (10), entonces $f = \sum c_n f_0^n$ converge en A y h es un funcional lineal continuo multiplicativo sobre A. Por lo cual concluimos de (13) que

$$h(f) = f(e^{i\alpha}) \quad (f \in A).$$

Nuestra hipótesis de que f no se anula en ningún punto de T dice, en consecuencia que f no está en el núcleo de ningún homomorfismo complejo de A. El Teorema 8c implica entonces que f es invertible en A. Por lo tanto queda probado el teorema. □

Este teorema es una generalización del lema de Wiener expuesto en [4, p .278].

4. Conclusiones

1. Las aplicaciones que vimos en este trabajo son teóricas, sin embargo, una aplicación más practica es desarrollada en las álgebras de Banach reales para las ecuaciones diferenciales. Está aplicación resuelve una ecuación diferencial particular. Puede ser consultada en [1, p. 207].

2. Gran parte del estudio de las álgebras de Banach se reduce a la búsqueda de implicaciones de hechos algebraicos a métricos y viceversa. Un ejemplo de esto son los dos primeros teoremas 1 y 2.

3. Sus propiedades teóricas dependen del cuerpo en el cual sea definido el álgebra, por muchas razones, una evidente es que el espectro de un elemento del álgebra está definido sobre el cuerpo. Esto tiene implicaciones muy importante, como por ejemplo, el radio espectral 5.

4. La teoría de las álgebras de Banach permite demostrar teoremas de la teoría de la aproximación y el análisis de Fourier, como el lema de Wiener de una forma diferente.

Referencias

[1] José Caicedo. *Cálculo avanzado Introducción.* Análisis matemático. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas, 2012.

[2] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Aplications.* Functional analysis. John Wiley and Sons, 1989.

[3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* International edition mathematics series. McGraw-Hill Book Co, 1987.

[4] Walter Rudin. *Functional Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, Inc, 1991.