Estabilidad en bases ortonormales y frames en espacios de Hilbert

Carlos Mario Piñeros Parra

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Estabilidad en bases ortonormales y frames en espacios de Hilbert

Carlos Mario Piñeros Parra

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director: Samuel Barreto Melo
Matemático

Línea de Investigación:
Análisis armónico
Grupo de Investigación:
Semillero de análisis armónico

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2019

A mi hermana y mis padres, quienes son mi fortaleza y mi única certeza.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, Carlos Piñeros y Yadira Parra, y a mi hermana, Alejandra Piñeros, quienes siempre me brindaron una voz de aliento y me dieron su apoyo incondicional durante este camino. Así mismo quiero agradecer a mis amigos cercanos, por la paciencia, la compañía y por todos los momentos tanto gratos como difíciles que hemos compartido. Agradezco especialmente a Camila Peña por todo lo que me brindó durante la carrera.

Quiero agradecer a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por permitir los espacios y la oportunidad de poder culminar mis estudios académicos. También agradezco al profesor Samuel Barreto, por su paciencia, dedicación y guía para poder finalizar este trabajo de grado. Por último, quiero agradecer a cada uno de los profesores con los que tuve clase y que me guiaron durante la carrera.

Infinitas gracias a todos.

Contenido

Introducción

Las bases en los espacios lineales juegan un papel importante tanto en la matemática como en sus aplicaciones. Estos son conjuntos de vectores los cuales son generadores y a su vez linealmente independientes que permiten representar de manera única cada elemento del espacio vectorial. En muchas de las aplicaciones, las bases por su estructura rígida presentan ciertas limitaciones, lo que condujo al desarrollo matemático de los Frames. Estos son elementos generadores del espacio más no son linealmente independientes, lo cual da una flexibilidad a una gran cantidad de aplicaciones, como se señala en [5] (pág. 2426).

En un sentido formal, un frame sobre un espacio lineal sea de dimensión finita o infinita, es un conjunto numerable $\{f_k\}$ para el cual existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo f en el espacio se cumple que

$$A\|f\|^2 \leq \sum |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Como se referencia en [6] (pág. 101), si el frame esta sobre un espacio de dimensión finita contendrá al menos una cantidad de elementos igual a la dimensión del espacio (como una base), en el caso de dimensión infinita, el frame puede llegar a tener una cantidad infinita de vectores, como sucede en los espacios de Hilbert.

Como se menciona en [3] (pág. 160), el encontrar una base que pueda representar series ortogonales a la hora de trabajar en aplicaciones sobre campos de ingeniería, física y matemáticas, puede resultar un trabajo complicado y no garantiza ser una óptima representación. Con los frames se logra tener una mejor representación gracias a la cantidad de propiedades adicionales que estos tienen respecto a las bases ortonormales. Algunas de las aplicaciones más importantes que se encuentra de los frames esta en el procesamiento de imágenes y señales.

El concepto de frame empezó a considerarse cuando Dennis Gabor buscó la manera de optimizar el trabajo con la transformada de Fourier para la descomposición de señales. Gabor fue capaz de crear un procedimiento el cuál guardara las características importantes de las señales evitando perder información como solía ocurrir con la transformada de Fourier. En 1952, Richard Duffin y Albert Schaeffer describieron por primera vez la condición de Frame en su trabajo sobre series no armónicas de Fourier.

Como se mencionó anteriormente, el desarrollo de la teoría de Frames es clave para el trabajo en el área del procesamiento de imágenes y señales, y por ende la base para el desarrollo de la teoría de Wavelets desarrollada por Yves Meyer, Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat y Gilbert Strang, y la cuál es uno de los pilares de la matemática aplicada en la actualidad.

En el presente trabajo, se estudia la teoría de los frames, que son una generalización de las bases ortonormales donde se analiza el concepto de estabilidad para frames en espacios de Hilbert. En el capítulo 2, se desarrolla la teoría de frames en espacios de dimensión finita como una manera de comprender la teoría para el caso infinito, además se da una mirada matricial de los frames y una aplicación con la transformada de Fourier. En el capítulo 3 se estudian los frames en espacios de Hilbert, se hará una comparación con las bases de Riesz y se analiza el concepto de estabilidad a partir de un frame dado.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar la teoría de los Frames en espacios de dimensión finita y en espacios de Hilbert, además la estabilidad en los Frames.

Objetivos Específicos

- Estudiar y ejemplificar la teoría de los Frames para espacios vectoriales de dimensión finita
- Estudiar la teoría de los Frames en espacios de Hilbert y su relación con las bases de Riesz
- Construir Frames en espacios de Hilbert
- Analizar la estabilidad en Frames en espacios de Hilbert.

1 Preliminares

Para el estudio de la teoría de ***Frames*** y el estudio de la estabilidad de los mismos, se requiere del conocimiento de algunos elementos de álgebra lineal y análisis funcional. En este capítulo se enunciarán los principales resultados que se necesitarán para el desarrollo de la teoría a estudiar.

Se iniciará con algunas nociones de espacios vectoriales para luego abordar los espacios métricos, normados y con producto interno.

1.1. Espacios Vectoriales

En el desarrollo de la teoría que estudiaremos en el presente trabajo se basa en esta estructura algebraica la cual es fundamental en el trabajo sobre diversos campos de las matemáticas. Las siguientes definiciones y proposiciones fueron tomadas de [1] capítulo 1.

Definición 1.1.1. *Un **espacio vectorial** sobre un campo K es un conjunto no vacío V de vectores, junto a dos operaciones algebraicas. Estas operaciones son llamadas suma vectorial y multiplicación por un escalar del campo K y las cuáles cumplen las siguientes propiedades:*

- *El conjunto es cerrado respecto a la suma, esto es, para $x, y \in V$*

$$x + y \in V$$

- *La suma de vectores es asociativa y conmutativa, esto es que para los vectores x, y, z en V se tiene:*

$$x + y = y + x \qquad y \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

- *Existe el vector 0, llamado vector cero o nulo tal que para cualquier $x \in V$*

$$x + 0 = x$$

- *Para todo $x \in V$ existe el vector $-x$ tal que:*

$$x + (-x) = 0$$

- *Para* $\alpha \in K$*, el producto* $\alpha * x \in V$ *con* $x \in V$*. Este producto es asociativo, es decir que para* $\alpha, \beta \in K$ *se tiene*

$$\alpha(\beta * x) = (\alpha * \beta)x$$

- *Si* $1 \in K$ *entonces* $1 * x = x$ *para todo* $x \in V$*,*

- ***leyes distributivas respecto al producto por escalar:*** *Sean* $\alpha, \beta \in K$ *y* $x, y \in V$*, entonces:*

$$\alpha(x + y) = \alpha * x + \alpha * y$$
$$(\alpha + \beta)x = \alpha * x + \beta * x$$

K es llamado campo escalar *(o campo de coeficientes)* del espacio vectorial V, y V es llamado **espacio vectorial real** si $K = \mathbb{R}$ o **espacio vectorial complejo** si $K = \mathbb{C}$. Por comodidad, al producto por escalar se le notará por: $\alpha * x = \alpha x$

Proposición 1.1.2. *En un espacio vectorial* V *se cumplen las siguientes propiedades:*

- *El espacio vectorial tiene un único elemento identidad*
- *Para cada* $x \in V$ *tiene un único inverso*
- $0x = 0$ *para todo* $x \in V$
- $(-1)x = -x$ *para todo* $x \in V$

Definición 1.1.3. *Un* ***subespacio vectorial*** *de un espacio vectorial* V *es un subconjunto no vacío* Y *de* V *tal que para todo* $y_1, y_2 \in Y$ *y para todo escalares* α, β *se tiene* $\alpha * y_1 + \beta * y_2 \in Y$*.* Y *es un espacio vectorial, las dos operaciones en éste son inducidas por el espacio vectorial* X

Se definirá ahora un concepto importante en los espacios vectoriales pero que más adelante tomará vital importancia en el trabajo con conjuntos ortogonales.

Definición 1.1.4 (Suma y Suma Directa). *Sean* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *subespacios vectoriales de* V*.* ***La suma*** *de* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$*, denotada por* $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ *es definida por:*

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n : \{y_1 + y_2 + \ldots + y_n : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \ldots, y_n \in Y_n\}$$

Ahora, si $V = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$*, entonces cada elemento de* V *se puede escribir de la forma* $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$*. Si esta representación para cada elemento de* V *es única, se dice que* V *es* ***suma directa*** *de* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *y se nota por:*

$$V = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_n$$

Proposición 1.1.5. *Suponga que* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *son subespacios vectoriales de* V. *Entonces* $V = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_n$ *si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

- $V = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$
- *La única manera de escribir 0 como suma* $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ *es tomando a cada* $y_j \in Y_j$ *iguales a 0*

Proposición 1.1.6. *Suponga que* Y_1, Y_2 *son subespacios vectoriales de* V. *Entonces* $V = Y_1 \oplus Y_2$ *si y sólo si* $V = Y_1 + Y_2$ *y* $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

En el estudio de los espacios vectoriales es importante el concepto de **combinación lineal** de vectores. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$, una combinación lineal es una expresión de la forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in K$.

Las siguientes defienciones y proposiciones fueron tomadas de [4] capítulo 2.

Definición 1.1.7. *Sea* $M = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *un subconjunto no vacío de* V. *Al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de* M *se le llama* ***generado de M*** *y se nota por:*

$$spanM := \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k v_k | c_1, c_2, \ldots, c_n \in K \right\}$$

Definición 1.1.8. *Sea* $M \subset V$ *y sean* $x_1, \ldots, x_r$ *en* M, *se dice que los elementos son* ***linealmente independientes*** *si la combinación:*

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ *se cumple solamente cuando* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. *Si los escalares no son iguales a cero (no necesariamente todos), se dice que el conjunto es* ***linealmente dependiente***.

Dadas las anteriores definiciones, se puede introducir uno de los conceptos más fuertes e importantes en el estudio del álgebra, el concepto de **base**.

Definición 1.1.9. *Sea* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *elementos del espacio vectorial* V. *Se dice que* B *es una base para* V *si los elementos de* B *son linealmente independientes y si* $SpanB = V$.

Es importante notar que para todo $x \in V$, x tendrá una única representación como combinación lineal de los elementos de la base. Esto es, suponiendo que el espacio V tiene la base $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ y para $x \in V$, se tiene:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \tag{1-1}$$

Además, al ser generado el espacio vectorial V por todas las combinaciones lineales de B, entonces la base B determina la dimensión del espacio vectorial.

Definición 1.1.10. *Un espacio vectorial V es de dimensión finita si existe un entero positivo n tal que V contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores. Cualquier conjunto de vectores con $n+1$ o más elementos es linealmente dependiente. n es llamado **dimensión de** V y se nota $dimV = n$. Por definición, $V = \{0\}$ es de dimensión finita con $dimV = 0$. Si V no es de dimensión finita, se dice que V es de **dimensión infinita**.*

Teorema 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial n-dimensional. Entonces cualquier subespacio propio Y de V tiene dimensión menor que n*

A continuación se define un objeto matemático el cual permite relacionar dos espacios vectoriales: **las transformaciones lineales**. Las siguientes definiciones, proposiciones fueron tomadas de [1] capítulo 3.

Definición 1.1.12. *Una tranformación lineal de V a W, espacios vectoriales, es una función $T : V \to W$ la cual cumple las siguientes propiedades:*

- $T(v + w) = T(v) + T(w)$, *para todo* $v \in V$ *y* $w \in W$
- $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ *para todo* $\alpha \in K$ *y* $v \in V$

Por comodidad se notará $T(v) = Tv$. Ell conjunto de todas las tranformaciones lineales de V sobre W se notará por: $\mathcal{L}(V, W)$ y este es a su vez un espacio vectorial. Ahora se definirá el **espacio nulo** y el **rango**, los cuales son importantes a la hora de estudiar las tranformaciones lineales.

Definición 1.1.13. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, el **espacio nulo** de T es un subconjunto de V cuyos vectores evaluados en T son enviados a 0, es decir:*

$$\mathfrak{N}(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$$

*El **rango** de T es el subconjunto de W el cual contiene al conjunto de vectores Tv, es decir:*

$$\mathfrak{R}(T) = \{Tv : v \in V\}$$

Proposición 1.1.14. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se dice que T es inyectiva si y sólo si $\mathfrak{N}(T) = \{0\}$.*

Proposición 1.1.15. *Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $\mathfrak{R}(T)$ es un subespacio vectorial de W.*

Teorema 1.1.16. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $\mathfrak{R}(T)$ es un suubespacio vectorial de dimensión finita de W y*

$$dimV = dim\mathfrak{N}(T) + dim\mathfrak{R}(T)$$

El trabajo con transformaciones lineales sobre espacios vectoriales de dimensión finita se facilita al usar una herramienta elemental en las matemáticas, las matrices, en este caso se definirá la matriz asociada a una transformación lineal, lo cual será también de utilidad en el posterior trabajo sobre operadores lineales.

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, y $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base para W. Para cada $k = 1, \ldots, n$, se puede escribir Tv_k de manera única como combinación lineal de los elementos de la base B'

$$Tv_k = a_{1,k}w_1 + a_{2,k}w_2 + \ldots + a_{m,k}w_m$$

Donde $a_{j,k} \in K$ para $j = 1, \ldots, m$. Los escalares $a_{j,k}$ caracterizan la transformación lineal T pues esta siendo determinada por sus valores respecto a la base. La matriz formada por los escalares $a_{j,k}$ se llama **matriz asociada a la transformación lineal** T respecto a las bases B y B'

En el estudio del álgebra lineal y las transformaciones lineales, surgen dos nuevos elementos, ligados entre si, los cuales dan una idea de subespacio invariante. Estos conceptos son los **autovalores** y **autovectores**. La definición y teorema que se darán a continuación fueron tomadas de [1] capítulo 5.

Definición 1.1.17. *Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal sobre V. Un elemento $v \in V$ se dice* ***autovector*** *de T si existe $\lambda \in K$ tal que:*

$$Tv = \lambda v$$

Si $v \neq 0$, entonces λ esta determinado de manera única puesto que si $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$. En este caso se dice que λ es un ***autovalor*** *de T asociado al autovector v.*

Teorema 1.1.18. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de T y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sus correspondientes autovectores. Entonces $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es linealmente independiente.*

1.2. Espacios Métricos

Las definiciones, proposiciones y teoremas de esta sección fueron tomadas de [4] capítulo 1.

Definición 1.2.1. *Un espacio métrico es una pareja (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X (o una función de distancia sobre X), esto es, una función definida sobre $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$, se tiene:*

i) d es una función a valor real, finita y no negativa

ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría)

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular)

Algunos ejemplos de espacios métricos es el conjuntos de todos los números reales y la métrica definida por el valor absoluto

$$d(x, y) = |x - y|$$

En el plano $\mathbb{R}^2$, dados los vectores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, se define la métrica euclidea por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Si se trabaja ahora en el plano complejo $\mathbb{C}^n$, se define la métrica por:

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|}$$

Un ejemplo el cuál será fundamental para este trabajo esta en los espacios l^p y en el espacio l^2 de Hilbert.

Definición 1.2.2. *Sea $p \geq 1$ un número real fijo. El espacio l^p es el conjunto de sucesiones $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ de números tal que:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

La métrica definida en este espacio es dada por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}$$

con $x = (\xi_i)$ e $y = (\eta_i)$ en l^p

En este punto es importante resaltar dos desigualdades importantes, la ***desigualdad de Hölder*** y la ***desigualdad de Minkowski***. Tomando p y q números conjugados, esto es, que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Y sean (ξ_i) y (η_i) sucesiones, entonces la ***Desigualdad de Hölder*** para sumas es:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}$$

Si $p=q=2$, se tiene la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2} \tag{1-2}$$

Por último, la ***Desigualdad de Minkowski*** para sumas:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}$$

Ahora se definirán tipos de subconjuntos que serán de gran utilidad en el desarrollo de los espacios métricos.

Definición 1.2.3. *Sea $x_0 \in X$ un punto fijo y sea $r>0$ un real, se define tres tipos de conjuntos:*

i) $B(x_0;r)=\{x\in X|d(x,x_0)<r\}$ *(Bola abierta)*

ii) $B(x_0;r)=\{x\in X|d(x,x_0)\leq r\}$ *(Bola cerrada)*

iii) $B(x_0;r)=\{x\in X|d(x,x_0)=r\}$ *(Esfera)*

En los tres casos, al valor r se le llama ***radio***

Las siguientes definiciones son importantes para el desarrollo en la teoría de Frames sobre espacios de Hilbert.

Definición 1.2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y $M\subset X$. Sea $x\in X$, se dice que x es un* ***punto de acumulación*** *de M si $(B(x;\epsilon)\cap M)-\{x\}\neq\emptyset$ para $\epsilon>0$ cualquiera. El conjunto de todos los puntos de acumulación de un subconjunto M se llama* ***clausura de M*** *y se nota por $\overline{M}$*

Es importante resaltar que la clausura es el conjunto cerrado más pequeño contenido en M.

Definición 1.2.5. *Un subconjunto M de un espacio métrico (X,d) se dice que es* ***denso*** *en X si:*

$$\overline{M} = X$$

X se dice que es ***separable*** *si contiene un subconjunto contable el cuál es denso.*

Para finalizar esta parte de espacios métricos, se introducirá la noción de sucesión convergente y de sucesión de Cauchy.

Definición 1.2.6. *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X,d)$ se dice que es convergente si existe un $x \in X$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

x es llamado el límite de (x_n) y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad o \quad x_n \to x$$

Proposición 1.2.7. *Sea $X = (X,d)$ un espacio métrico, entonces:*

a) Una sucesión convergente es acotada y su límite es único

b) Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X, entonces $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

Definición 1.2.8. *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico $X = (X,d)$ se dice que es de* ***Cauchy*** *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon)$ tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

para todo $n, m > N$. El espacio X se dice que es ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy en el espacio converge.*

Teorema 1.2.9. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy*

Teorema 1.2.10. *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X,d) y $\overline{M}$ su clausura. Entonces:*

a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) en M tal qué $x_n \to x$

b) M es cerrado si y sólo si la situación $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica que $x \in M$

Enunciados los resultados más importantes de espacios métricos, se estudiarán ahora los **espacios vectoriales**.

1.3. Espacios Normados

Dada la la noción de *métrica* anteriormente, se pasa a definir el concepto **espacio normado**. Las definiciones, proposiciones y teoremas de esta sección fueron tomados de [4] capítulo 2.

Definición 1.3.1. *Un espacio normado X es un espacio vectorial con una norma definida. Una norma sobre un espacio vectorial (real o complejo) X es una función a valor real sobre X cuyo valor sobre $x \in X$ se denota por:*

$$\|x\|$$

y la cuál cumple las siguientes propiedades:

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Con $x, y \in X$ arbitrarios y α cualquier escalar.

Una norma sobre X define una métrica d sobre X la cuál es dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

y esta es llamada *la métrica inducida por la norma*. Usualmente se nota al espacio normado por $(X, \|.\|)$ o simplemente se notará por X.

Algunos ejemplos de espacios normados, se pueden ver los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

Se puede ver que la métrica que definimos anteriormente esta inducida por esta norma:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}$$

Otro ejemplo importante para el desarrollo de este trabajo es el espacio l^p cuya norma esta dada por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$$

Podemos ver que la norma induce la métrica anteriormente definida:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}$$

Definidos los conceptos de norma y espacio normado, se puede redefinir el concepto de sucesión convergente y sucesión de Cauchy usando la norma del espacio. Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es convergente si y sólo si existe $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Al igual que en la parte de espacios métricos, se nota por $x_n \to x$ y a x se le llama límite de (x_n)

Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon$$

Para todo $m, n > N$

Pasamos a definir un concepto muy importante en el análisis y la topología,la compacidad.

Definición 1.3.2. *Un espacio métrico X es compacto si para toda sucesión en X existe una subsucesión convergente en X. Igualmente, un subconjunto $M \subset X$ se dice compacto si M para cada sucesión en M existe una subsucesión convergente en M.*

Lema 1.3.3. *Un subconjunto compacto M de un espacio métrico es cerrado y acotado*

Teorema 1.3.4. *En un espacio normado X de dimensión finita, cualquier subconjunto $M \subset X$ es compacto si y sólo si M es cerrado y acotado.*

Lema 1.3.5 (Lema de Riesz). *Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X de cualquier dimensión, y suponga que Y es cerrado y es un subconjunto propio de Z. Entonces para cada numero real θ en el intervalo $(0,1)$ existe un $z \in Z$ tal que:*

$$\|z\| = 1 \quad y \quad \|z-y\| \geq \theta$$

para todo $y \in Y$

Teorema 1.3.6. *Si un espacio normado X tiene la propiedad que la bola unitaria cerrada $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ es compacta, entonces X es de dimensión finita.*

Teorema 1.3.7. *Sean X e Y espacios métricos y $T : X \to Y$ una función continua. Entonces la imagen de un subconjunto compacto M de X bajo T es compacta en Y.*

Ahora se definirá un objeto fundamental en el desarrollo de la teoría de Frames, los operadores lineales:

Definición 1.3.8. *Un operador lineal T es un operador tal qué*

i) El dominio $\mathfrak{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathfrak{R}(T)$ es un espacio vectorial sobre el mismo campo

ii) para todo $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ y cualquier escalar α

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

La notación se puede simplificar escribiendo Tx en vez de $T(X)$, ademas cabe recordar que se nota por $\mathfrak{D}(T)$ al dominio del operador T, $\mathfrak{R}(T)$ al rango de T y $\mathfrak{N}(T)$ al espacio nulo de T *(recuerde que el espacio nulo son todos los $x \in \mathfrak{D}(T)$ tales que $Tx = 0$).*

Teorema 1.3.9. *Sean X, Y espacios vectoriales, ambos reales o ambos complejos. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ un operador lineal con dominio $\mathfrak{D}(T) \subset X$ y $\mathfrak{R}(T) \subset Y$. Entonces:*

a) El operador inverso $T^{-1} : \mathfrak{D}(T) \to \mathfrak{D}(T)$ existe si y sólo si

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

b) Si T^{-1} existe, este es un operador lineal

c) Si $\mathfrak{D}(T) = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $dim\mathfrak{R}(T) = dim\mathfrak{D}(T)$

Dada la noción de operador lineal, es importante definir cuando estos son acotados.

Definición 1.3.10. *Sean X, Y espacios normados y $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ un operador lineal donde $\mathfrak{D}(T) \subset X$. El operador se dice acotado si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$:*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

Lema 1.3.11. *Sea T un operador lineal acotado como se definió anteriormente. Entonces, una fórmula alternativa para la norma de T es*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

Teorema 1.3.12. *Si un espacio normado X es de finito dimensional, entonces cada operador lineal sobre X es acotado.*

Teorema 1.3.13. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ un operador lineal donde $\mathfrak{D}(T) \subset X$ y X, Y son espacios de normados. Entonces.*

i) T es continua si y sólos si T es acotada

ii) Si T es continua sobre un punto cualquiera, entonces T es continua.

Con el concepto de operador lineal y operador lineal acotado entre espacios vectoriales y espacios normados, surge un nuevo operador el cuál no relaciona los elementos de dos espacios sino que asocia elementos de un espacio con su campo escalar, estos son los **funcionales lineales**.

Definición 1.3.14. *Un funcional lineal f es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar K de X; así:*

$$f : \mathfrak{D}(f) \to K$$

donde $K = \mathbb{R}$ si X es real y $K = \mathbb{C}$ si X es complejo.

Definición 1.3.15. *Un funcional lineal acotado es un operador lineal acotado con rango en el campo escalar del espacio normado X en el cual el $\mathfrak{D}(f)$ se extiende. Así existe un número real c tal que para todo $x_{\in}\mathfrak{D}(f)$*

$$|f(x)| \leq c\|x\|$$

Teorema 1.3.16. *Un funcional lineal f con dominio $\mathfrak{D}(f)$ en un espacio normado es continuo si y sólo si es acotado.*

1.4. Producto Interno y ortogonalidad

Se ha visto, que a medida que se definen más objetos matemáticos aparecen nuevos tipos de espacios, como ocurrió anteriormente al definirse una métrica y una norma. Ahora se definirá un nuevo objeto que es de vital importancia en el objetivo de este trabajo: **el producto interno**, pues apartir de este se definen bases ortonormales, el operador adjunto y el espacio base en el cual se desarrolla la teoría del este trabajo de grado: **Los espacios de Hilbert**. Las definiciones, proposiciones y teoremas de esta sección fueron tomados de [4] capítulo 3.

Definición 1.4.1. *Un espacio con* ***producto interno*** *es un espacio vectorial X con un producto interno definido. Un producto interno sobre X es una función de $X \times X$ al campo escalar K de X, la cual a cada par de vectores x e y les asocia un escalar el cual se nota por:*

$$\langle x, y\rangle$$

y el cual se llama el producto interno entre x e y, tal que para todos los vectores x, y, z y escalares α se tiene:

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, z\rangle}$

iv) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad y \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

El prodcuto interno sobre X define una norma sobre X dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1-3}$$

y una métrica sobre X esta dada por:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

Por último, un ***Espacio de Hilbert*** *es un espacio con producto interno el cuál es completo.*

La propiedad *iii)* denota la conjugación compleja. Se puede notar que si el espacio X es real, entonces se tiene:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

También se pueden deducir de las condiciones *i),ii) y iii)* las siguientes propiedades:

a) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

b) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$

c) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

Definido el producto interno, se puede hablar de ortogonalidad.

Definición 1.4.2 (Ortogonalidad). *Un elemento x de un espacio con producto interno X se dice que es ortogonal a un elemento $y \in X$ si:*

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Se dice también que x e y son ortogonales y se nota por $x \perp y$. De manera similar para subconjuntos, $A, B \subset X$, se escribe $x \perp A$ si $x \perp a$ para todo $a \in A$, y $A \perp B$ si $a \perp b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Es importante resaltar algunas propiedades que serán útiles en el trabajo con producto interno.

Lema 1.4.3. *Un producto interno y su correspondiente norma satisfacen la desigualdad de Schwarz y la desigualdad triangular como sigue.*

a) Desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \tag{1-4}$$

Donde la igualdad se tiene si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

b) Desigualdad triangular:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1-5}$$

Donde la igualdad se tiene si y sólo si $y = 0$ o $x = cy$ con c un real positivo.

Lema 1.4.4. *Si en un espacio con producto interno, $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Teorema 1.4.5. *Sea Y un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces:*

i) Y es completo si y sólo si Y es cerrado

ii) Si y es de dimensión finita entonces Y es completo.

iii) Si H es separable, Y también lo es. Más general, todo subconjunto de un espacio con producto interno separable es separable.

Definición 1.4.6. *Un espacio vectorial se dice que es suma directa de dos subespacios Y y Z de X, notados:*

$$X = Y \oplus Z$$

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z$$

con $y \in Y$ y $z \in Z$
Entonces Z es llamado el complemento algebráico de Y en X y vice versa, y al par Y, Z se les llama pareja complementaria de subespacios en X.

Definición 1.4.7. *Sea $Y \subset H$, siendo H un espacio de Hilbert, el complemento ortogonal de Y en H es el conjunto de todos los $z \in H$ tal que $z \perp Y$, esto es:*

$$Y^{\perp} = \{z \in H | z \perp Y\}$$

Teorema 1.4.8. *Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces:*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Lema 1.4.9. *El complemento ortogonal $Y^{\perp}$ de un subespacio cerrado Y de un espacio de Hilbert H es el espacio nulo $\mathfrak{N}(P)$ de las proyecciones ortogonales P de H sobre Y.*

Lema 1.4.10. *Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces.*

$$Y = Y^{\perp\perp}$$

Lema 1.4.11. *Para cualquier subconjunto $M \neq \emptyset$ de un espacio de Hilbert H, el span$M$ es denso en H si y sólo si $M^{\perp} = \{0\}$.*

En el desarrollo de los espacios con producto interno y los espacios de Hilbert, los conjuntos ortonormales cumplen un papel importante y son de interés para el presente trabajo debido a la necesidad de definir una base ortonormal.

Definición 1.4.12. *Un conjunto ortogonal M en un espacio con producto interno X es un subconjunto $M \subset X$ cuyos elementos son ortogonales entre ellos. Un conjunto ortonormal $M \subset X$ es un conjunto ortogonal en X cuyos elementos tienen norma 1, esto es, para todo $x, y \in M$:*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & si\ x \neq y \\ 1 & si\ x = y \end{cases}$$

Lema 1.4.13. *Un conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

En la parte de espacios vectoriales definimos la base de un espacio vectorial como un conjunto linealmente independiente el cual genera a todo el espacio. Se puede definir una base para el espacio vectorial la cual cumpla una condición más, que esta sea un conjunto ortonormal, así, tomando el conjunto $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, se dice que es una base ortonormal para un espacio vectorial X si:

$$\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Al encontrar una base ortonormal para un espacio vectorial facilita la tarea de hallar los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ que determinan a cada elemento del espacio a través de combinaciones lineales entre los coeficientes que estamos interesados en encontrar y los elementos de la base, así con una base ortonormal el trabajo se simplifica debido a que tomando el producto interno de $f \in X$, con un e_j arbitrario de la base se tiene:

$$\langle f, e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = c_j$$

Así

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \tag{1-6}$$

Definido el concepto de complemento ortogonal, se enuncia el concepto de proyección ortogonal. La definición y el teorema fueron tomados de [1] capítulo 6.

Definición 1.4.14. *Sea Y un subespacio de X con $dimY < \infty$. La* ***proyección ortogonal*** *es el operador $P_Y \in \mathcal{L}(X)$ tal que para todo $x \in X$, $x = y_1 + y_2$, con $y_1 \in Y$ e $y_2 \in Y^{\perp}$.*

Teorema 1.4.15. *Sea Y un subespacio de X, entonces:*

i) $P_Y y = y$ *para todo* $y \in Y$

ii) $P_Y w = 0$ *para todo* $w \in Y^{\perp}$

iii) $\mathfrak{R}(P_Y) = Y$

iv) $\mathfrak{N}(P_Y) = Y^{\perp}$

v) $y - P_Y y \in P_Y$

vi) $P_Y^2 = P_Y$

vii) $\|P_Y y\| \geq \|y\|$ *para todo* $y \in Y$

viii) Para cualquier base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *de* Y*, se tiene:*

$$P_Y y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$$

Se enunciarán ahora los teoremas de representación los cuales nos dan una representación de funcionales lineales por medio del producto interno. Los siguientes teoremas y definiciones fueron tomados de [4] capítulo 3.

Teorema 1.4.16 (**Teorema de Riesz**)**.** *Todo funcional lineal acotado* f *sobre un espacio de Hilbert* H *puede representarse en términos del producto interno, es decir,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

donde z *depende de* f*, y esta determinado de manera única por* f *y tiene norma:*

$$\|z\| = \|f\|$$

La prueba del anterior teorema se encuentra en [4] (pág. 189)

Lema 1.4.17. *Si* $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$ *para todo* $w \in X$*, espacio con producto interno, entonces* $v_1 = v_2$*. En particular* $\langle v_1, w \rangle = 0$ *para todo* $w \in X$*, implica* $v_1 = 0$

Definición 1.4.18 (Forma sesquilineal)**.** *Sean* X *e* Y *espacios vectoriales sobre el mismo campo. Entonces una* ***forma sesquilineal*** h *sobre* $X \times Y$ *es una función*

$$h : X \times Y \to K$$

tal que para todo $x, x_1, x_2 \in X$*,* $y, y_1, y_2 \in Y$ *y* α, β *escalares:*

i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

iii) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

iv) $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$

Teorema 1.4.19 (Representación de Riesz). *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y*

$$h : H_1 \times H_2 \to K$$

una forma sesquilineal acotada. Entonces h tiene una representación

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle \tag{1-7}$$

donde $S : H_1 \to H_2$ es un operador lineal acotado. S esta determinado de manera única por h y tiene norma

$$\|S\| = \|h\|$$

Con las definiciones de operador lineal y el enunciado de los teoremas de representación de Riesz, un nuevo objeto matemático aparece, el *operador adjunto de Hilbert*. Este será de gran utilidad en el estudio del operador de Frame el cuál se verá más adelante.

Definición 1.4.20. *Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el operador adjunto de Hilbert T^* es el operador:*

$$T^* : H_2 \to H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{1-8}$$

Teorema 1.4.21. *El operador adjunto de Hilbert T^* de T existe, es único y es un operador lineal acotado con norma*

$$\|T^*\| = \|T\| \tag{1-9}$$

Se enunciarán ciertas propiedades útiles en el trabajo con el operador adjunto.

Teorema 1.4.22. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $S : H_1 \to H_2$ y $T : H_1 \to H_2$ operadores lineales acotados y α cualquier escalar. Entonces se tiene:*

a) $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad (x \in H_1, y \in H_2)$

b) $(S + T)^* = S^* + T^*$

c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$

d) $(T^*)^* = T$

e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

f) $T^*T = 0 \iff T = 0$

g) $(ST)^* = T^*S^* \quad$ *(asumiendo $H_2 = H_1$)*

Ahora se enunciarán ciertas propiedades importantes del operador adjunto de Hilbert respecto al dominio, rango y nulidad. Estos teoremas fueron tomados de [1] capítulo 6.

Teorema 1.4.23. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado, entonces:*

a) $\mathfrak{N}(T^*) = (\mathfrak{R}(T))^\perp$

b) $\mathfrak{R}(T^*) = (\mathfrak{N}(T))^\perp$

c) $\mathfrak{N}(T) = (\mathfrak{R}(T^*))^\perp$

d) $\mathfrak{R}(T) = (\mathfrak{N}(T^*))^\perp$

donde $\mathfrak{N}(T)$ denota el núcleo de T y $\mathfrak{R}(T)$ el rango de T.

Proposición 1.4.24. *La inversa del operador adjunto es el adjunto del operador inverso.*

Cuando se estudian los operadores lineales, estos se pueden representar por medio de una matriz asociada la cual facilita el desarrollo operativo del operador sobre su dominio. Recordemos que el cálculo de esta sea hace tomando una base del espacio sobre el cual actúa el operador y evaluando cada elemento de la base en el operador. Luego cada imagen debe ser representada como combinación lineal de una base en el espacio al que llega el operador lineal. Se enunciará ahora una proposición la cual relaciona la matriz del operador lineal con la de su adjunto.

Proposición 1.4.25. *Sea $T : V \to W$ un operador lineal acotado, y sean $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ bases ortonormales de cada espacio respectivamente. Entonces la matriz asociada al operador adjunto T^* es al transpuesta conjugada del operador lineal T.*

Demostración. Sean $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal para V y $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ una base ortonormal para W. Supongamos que:

$$M(T) = \{a_{j,k}\} \qquad\qquad M(T^*) = \{b_{j,k}\}$$

Se puede escribir la k-ésima columna de $M(T)$ como combinación lineal de B' así:

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m} \langle Te_k, f_j \rangle f_j$$

Esto, por ser B' ortonormal. Luego, si la entrada j,k-ésima de la matriz $M(T)$ estará dada por:

$$\{a_{j,k}\} = \langle Te_k, f_j \rangle$$

De igual forma, se puede representar la k-ésima columna de la matriz $M(T^*)$ como combinación lineal de la base ortonormal B de V, así:

$$T^* f_k = \sum_{j=1}^{n} \langle T f_k, e_j \rangle e_j$$

y por ende la j,k-ésima entrada esta dada por: $\{b_{j,k}\} = \langle T^* f_k, e_j \rangle$. Luego:

$$\begin{aligned} \{b_{j,k}\} &= \langle T^* f_k, e_j \rangle \\ &= \overline{\langle e_j, T^* f_k \rangle} \\ &= \overline{\langle T e_j, f_k \rangle} \\ &= \overline{\{a_{k,j}\}} \end{aligned}$$

Y por tanto $M(T^*)$ es equivalente a la matriz transpuesta conjugada de $M(T)$. □

Se enunciaran una caracterización importante de los operadores adjuntos. La definición y teorema siguientes fueron tomados de [4] capítulo 3.

Definición 1.4.26. *Un operador lineal $T : H \to H$ sobre un espacio de Hilbert H se dice que es:*

- *autoadjunto o hermitiano si $T^* = T$*
- *Unitario si T es biyectivo y $T^* = T^{-1}$*
- *normal si $TT^* = T^*T$*

Teorema 1.4.27. *Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert H, entonces:*

a) Si T es autoadjunto, $\langle Tx, x \rangle$ es real para todo $x \in H$

b) Si H es complejo y $\langle Tx, x \rangle$ es real para todo $x \in H$, el operador T es autoadjunto

Para finalizar, se enunciará uno de los teorema más importantes que une los conceptos de autovalores y autovector con los operadores lineales.El siguiente teorema será útil en el desarrollo de los Frames en espacios de dimensión finita. El teorema fue tomado de [2] capítulo 1.

Teorema 1.4.28. ***Teorema Espectral*** *Si un operador lineal $T : V \to V$ es autodjunto, entonces todos los autovalores son reales y V tiene una base ortonormal compuesta por los autovectores de T.*

2 Teoría de Frames en espacios de dimensión finita

2.1. Frames en espacios de dimensión finita

En este capítulo se introduce la teoría de *frames* en espacios vectoriales finitos para su posterior estudio en los espacios de Hilbert, el cuál es parte de los objetivos de este trabajo.

En el estudio de espacios vectoriales la noción de *base* es imprescindible ya que esta determina la dimensión del espacio y da una representación a cada elemento del espacio a través de combinaciones lineales. Sin embargo, una *base* resulta ser una herramienta algebraica demasiado restrictiva ya que requiere que sus elementos sean linealmente independientes y a su vez que generen todo el espacio vectorial. En muchos casos se exige que los elementos de la base sean ortonormales respecto a un producto interno definido sobre el espacio vectorial. Debido a la rigidez de este elemento algebraico, encontrar una *base* puede resultar ser algo complejo.

Los ***Frames*** resultan ser una herramienta mucho más flexible que una base debido a que un frame para un espacio vectorial determina a todos los elementos del mismo por medio de combinaciones lineales más no requiere la independencia lineal entre sus elementos. Los ***Frames*** tienen diversas aplicaciones en la vida real las cuáles se presentan sobre espacios de dimensión finita, no obstante el trabajo sobre espacios de dimensión infinita es importante y se verá más adelante debido a que en cierto modo, es una extensión del trabajo sobre espacios finitos.

Las teoría que se desarrollará en esta capítulo se basa en [2] capítulo 1.

Definición 2.1.1. *Una familia contable de elementos* $\{f_k\}_{k\in I}$ *en* V *es un* **Frame** *para* V *si existen constantes* $A, B > 0$ *tales qué:*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Para todo $f \in V$

Los valores A, B son llamados *cotas del frame* las cuales no son únicas. La ***óptima cota inferior*** será el supremo de las cotas inferiores del Frame, y la ***óptima cota superior*** será el ínfimo de las cotas superiores del Frame.

Dado que se esta operando en espacios de dimensión finita, se puede ver que por la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \|f\|^2 \|f_k\|^2 \qquad \forall f \in V$$

De donde se observa que la condición para la cota superior del frame se tiene con $B = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$

De este modo la desigualdad de Cauchy-Schwarz garantiza la existencia de la cota superior del frame, sin embargo, hay casos donde ésta no resulta ser la óptima cota superior. Dada la cota superior del frame, el problema se reduce a probar la existencia de la cota inferior del mismo.

Definición 2.1.2. *Un frame se dice que es* normalizado *si* $\|f_k\| = 1$ *para todo* $k \in I$

Proposición 2.1.3. *Sea* $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ *un sucesión en* V*. Entonces* $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ *es un frame para el subespacio vectorial* $W := span\{\{f_k\}_{k=1}^{m}\}$

Demostración. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ una sucesión en V. Si todos los f_k son cero, entonces $W = \{0\}$ entonces se puede asumir que no todos sus términos son nulos. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz existe la cota superior del frame

$$B = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$$

Para la prueba la condición de Frame inferior, se define la función continua:

$$\begin{aligned} \phi :& W \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \phi(f) := \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Como el espacio vectorial V es finitio y $W \subseteq V$ es cerrado, entonces la bola unitaria en W, $B_1(0) = \{f \in W : \|f\| \leq 1\}$ es compacta (por 1.3.6) y por lo tanto su frontera, la esfera unitaria $\partial B_1 = \{f \in W : \|f\| = 1\}$ es cerrada y naturalmente compacta. Por hipótesis, ϕ es continua y por tanto la imagen de compactos es compacta, así se tiene que

$$\phi(\partial B_1) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 : f \in W, ||f|| = 1 \right\}$$

es compacto y acotado, es decir que existe $g \in W$, con $\|g\| = 1$, tal qué

$$\phi(g) = inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 : f \in W, \|f\| = 1 \right\}$$

Como por definición, $\phi(g) = \sum_{k=1}^{m} |\langle g, f_k \rangle|^2$, entonces se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle g, f_k \rangle|^2 = inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 : f \in W, \|f\| = 1 \right\}$$

Eligiendo $A = \phi(g)$ tenemos:

$$A := \sum_{k=1}^{m} |\langle g, f_k \rangle|^2 = inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 : f \in W, \|f\| = 1 \right\}$$

Se tiene que $A > 0$ pues $|\langle g, f_k \rangle|^2 > 0$ y la suma de términos positivos es positiva, así mismo $|\langle f, f_k \rangle|^2 > 0$. Ahora con $f \in W$ no nulo, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\|f\| \langle \frac{f}{\|f\|}, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle \frac{f}{\|f\|}, f_k \rangle|^2 \|f\|^2$$

Y como $\frac{f}{\|f\|}$ pertenece a la esfera unitaria entonces:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle \frac{f}{\|f\|}, f_k \rangle|^2 \right) \|f\|^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle g, f_k \rangle|^2 \right) \|f\|^2 = A\|f\|^2$$

Así $A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2$, para todo $f \in W$ por lo cuál se ha demostrado que existe la cota inferior del frame y por lo tanto $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un frame para su generado W $\square$

Corolario 2.1.4. *Una familia de elementos* $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ *es un frame para* V *si y sólo si* $V = span\{f_k\}_{k=1}^{m}$

Demostración. La primera implicación se hará por contrarrecíproco. Asumiendo que $span\{f_k\}_{k=1}^{m} \neq V$. Sea $W = span\{f_k\}_{k=1}^{m}$, luego existe $f_0 \in W^{\perp}$, entonces $\langle f_0, f_k \rangle = 0$ para todo $f_k \in W$ y

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f_0, f_k \rangle|^2 = 0$$

Luego como $f_0 \neq 0$ entonces $\|f_0\|^2 > 0$ y por definición de Frame, $A > 0$, entonces $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ no es un frame pues no existe la cota inferior del frame.
El recíproco se tiene por la proposición anterior (2.1.3), pues si $V = span\{f_k\}_{k=1}^{m}$ entonces $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un frame para V $\square$

Se puede deducir del anterior corolario que un frame puede contener más elementos de los que requiere una base. Una propiedad interesante de los frames es: dado un frame $\{f_k\}_{k=1}^m$ en V y sea $\{g_k\}_{k=1}^m$ una colección arbitraria de vectores en V, entonces $\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{g_k\}_{k=1}^m$ es también un frame. Se llama ***Frame redundante (o sobrecompleto)*** a un frame el cuál no es una base.

Dado que el trabajo en frames se desarrolla en espacios vectoriales, se pueden introducir operadores lineales que definan el frame en el espacio. Dicho esto, se busca definir el operador de frame.

Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame para V y sea:

$$\begin{aligned} T :&\mathbb{C}^m \longrightarrow V \\ \{c_k\}_{k=1}^m &\mapsto T\left(\{c_k\}_{k=1}^m\right) = \sum_{k=1}^m c_k f_k \end{aligned}$$

Al operador T usualmente se le llama ***Operador de pre-frame (o síntesis)***. Se sabe que el *operador adjunto* de T esta dado por $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, así:

Se considera $f \in V$ y $\{c_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^m\rangle_V = \langle f, \sum_{k=1}^m c_k f_k\rangle = \sum_{k=1}^m \bar{c_k}\langle f, f_k\rangle_V \tag{2-1}$$

Como los espacios vectoriales son de dimensión finita, entonces los operadores T y T^* son acotados. Si se expresa T^*f en términos de sus coordenadas, se tiene:

$$T^*f = \{(T^*f)\}_{k=1}^m = ((T^*f)_1, (T^*f)_2, \dots, (T^*f)_m)$$

están en $\mathbb{C}$ para todo $f \in V$. Dado que T^* es acotado, se tiene que:

$$\|T^*f\|_{\mathbb{C}^m} = \left(\sum_{k=1}^m |(T^*f)_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|T^*\|\|f\|_V$$

para toda $f \in V$. Lo anterior implica que para cada $k = 1, 2, \dots, m$

$$|(T^*f)_k| \le \|T^*\|\|f\|_V$$

Siendo (T^*f) la k-ésima coordenada del vector $T * f \in \mathbb{C}^m$. Así el operador lineal definido por la proyección k-ésima $\varphi_k : V \longleftarrow \mathbb{C}; \varphi_k f = (T^*f)_k$ es acotado. Por lo tanto usando el *teorema de representación de Riesz* existe un vector fijo $w_k \in V$ tal que: $(T^*f)_k = \langle f, w_k\rangle$, para todo $f \in V$. Es así como el vector T^*f tiene la forma: $T^*f = \{\langle f, w_k\rangle\}_{k=1}^m$ para alguna secuencia fija $\{w_k\}_{k=1}^m$ en V. Note que

$$T^*f = ((T^*f)_1, (T^*f)_2, \ldots, (T^*f)_1) = (\langle f, w_1\rangle_V, \langle f, w_2\rangle_V, \ldots, \langle f, w_m\rangle_V$$

Por definición de T^*

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^m\rangle_V = \langle T^*f, \{c_k\}_{k=1}^m\rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle\{\langle f, w_k\rangle_v\}_{k=1}^m, \{c_k\}_{k=1}^m\rangle_m$$

de donde

$$\langle f, T\{c_k\}_{k=1}^m\rangle_V = \sum_{k=1}^m \bar{c_k}\langle f, w_k\rangle_V \tag{2-2}$$

Para cada $\{c_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$ y $f \in V$. Igualando (2.1) y (2.2) se tiene:

$$\sum_{k=1}^m \bar{c_k}\langle f; w_k\rangle_v = \sum_{k=1}^m \bar{c_k}\langle f; f_k\rangle_v$$

Para todo $\{c_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$ y $f \in V$. De la igualdad se tiene que $w_k = f_k$. Así se concluye que T^* tiene la forma:

$$T^*f = \{\langle f, w_k\rangle\}_{k=1}^m = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$$

Nota:Recopilando, se tiene que los operadores de análisis y síntesis son:

$$T\left(\{c_k\}_{k=1}^m\right) = \sum_{k=1}^m c_k f_k$$

$$T^*f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$$

Dados los operadores T y T^* se define el ***Operador de Frame***.

Definición 2.1.5. *Sea T el operador de pre-frame y T^* su adjunto. El* **operador de frame** *S esta dado por la composición de T y T^**

$$\begin{aligned} S :&V \longrightarrow V \\ &f \longmapsto Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k\rangle f_k \end{aligned}$$

Es importante notar que:

$$\begin{aligned}\langle Sf, f\rangle &= \langle\sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k, f\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m}\langle\langle f, f_k\rangle f_k, f\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle\langle f_k, f\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle\overline{\langle f, f_k\rangle} \\ &= \sum_{k=1}^{m}|\langle f, f_k\rangle|^2\end{aligned}$$

Con esto, se puede considerar la cota inferior del frame como una especie de cota inferior del operador de frame.

Definición 2.1.6. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame para V. Se dice que es un* **Tight Frame** *si $A = B$, es decir:*

$$\sum_{k=1}^{m}|\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$$

para todo $f \in V$. Al valor A se le llama **cota del frame**

Proposición 2.1.7. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un tight frame para V con cota de frame A. Entonces $S = AI$ (siendo I el operador identidad sobre V), y*

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k$$

para todo $f \in V$

Demostración. Por hipótesis, $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un tight frame, así

$$\sum_{k=1}^{m}|\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$$

Además, usando el hecho de:

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{m}|\langle f, f_k\rangle|^2$$

Se tiene que

$$\langle Sf, f\rangle = A\|f\|^2 = \langle Af, f\rangle$$

despejando se obtiene:

$$\langle Sf, f\rangle - \langle Af, f\rangle = 0$$

de donde

$$\langle (S-A)f, f\rangle = 0$$

así $(S-A)f = 0$ y por tanto $S = A$. Como S es operador y A es una constante, multiplicando a A por el operador identidad se obtiene

$$S = AI$$

Para la segunda parte de la prueba se considera de nuevo la hipótesis de que se tiene un tight frame , entonces:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \langle f, f\rangle \\
&\Longrightarrow \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 - \langle f, f\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{A}\langle Sf, f\rangle - \langle f, f\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{A}\langle \sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k\rangle - \langle f, f\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \langle \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k - f, f\rangle = 0
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k - f = 0$$

De donde

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m}\langle f, f_k\rangle f_k$$

□

La anterior proposición da una similitud entre un tight frame y una base ortonormal, pues al tomar un elemento $f \in V$ este se puede expresar como combinación lineal $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$. Definiendo $g_k = \frac{1}{A} f_k$ y tomando $c_k = \langle f, g_k\rangle$. El resultado de la proposición 2.1.7 es similar a la representación por medio de bases ortonormales, siendo la única diferencia el factor $\frac{1}{A}$

El siguiente teorema es uno de los resultados más importante sobre la teoría de Frames. Es conocido como *Teorema de descomposición de Frames*

Teorema 2.1.8. *Sea* $\{f_k\}_{k=1}^m$ *un frame para* V *con operador de frame* S*. Entonces las siguientes proposiciones se tienen:*

i) S es invertible y auto-adjunto

ii) Cada $f \in V$ puede representarse como:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k$$

iii) Si $f \in V$ también tiene representación $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$ para algunos escalares $\{c_k\}_{k=1}^m$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2$$

Demostración. i) Se probará que S es auto-adjunto e invertible. Por definición de operador adjunto (1.4.20) se tiene $\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^* y \rangle$, así:

$$\begin{aligned} \langle Sx, y \rangle &= \langle x, (TT^*)^* y \rangle \\ &= \langle x, (T^*)^* T^* y \rangle \\ &= \langle x, TT^* y \rangle \\ &= \langle x, Sy \rangle \end{aligned}$$

Luego $S^* = S$ y por ende S es auto-adjunto. Sea $Sf = 0$, entonces:

$$0 = \langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2$$

Luego $\langle f, f_k \rangle = 0$ de donde se infiere que $f = 0$, luego por teorema 1.3.9, S es invertible.

ii) Sea $f \in V$, entonces:

$$f = (SS^{-1}) f = \sum_{k=1}^{m} \langle S^{-1} f, f_k \rangle f_k$$

Como S es auto-adjunto, se tiene:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k$$

De igual modo:

$$f = (S^{-1} S) f = \sum_{k=1}^{m} S^{-1} \langle f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k$$

iii) Supongase $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$ y por el ítem ii), se tiene

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k$$

Se puede escribir:

$$\begin{aligned} \{c_k\}_{k=1}^m &= \{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m + \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m \\ &= \{c_k - \langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m + \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m \end{aligned}$$

Aplicando T se tiene:

$$T\{c_k\}_{k=1}^m = T\{c_k - \langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m + T\{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m$$

Por definición de T, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k f_k = \sum_{k=1}^{m} (c_k - \langle f, S^{-1} f_k\rangle) f_k + \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k\rangle f_k$$

Por elección de los $\{c_k\}_{k=1}^m$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} (c_k - \langle f, S^{-1} f_k\rangle) f_k = 0$$

entonces $\{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathfrak{N}(T) = \mathfrak{R}(T^*)^{\perp}$.

También se puede notar que: $\{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m = \{\langle S^{-1} f, f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathfrak{R}(T^*)$

Tomando $A = \{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathfrak{N}(T)$, entonces $A \in \mathfrak{R}(T^*)^{\perp}$, y $B = \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m \in \mathfrak{R}(T^*)$. Se tiene:

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = 0$$

Así:

$$\langle A, B\rangle = \langle \{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m, \{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^m\rangle = 0$$

Como $\{c_k\} = A + B$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 &= \langle A + B, A + B\rangle \\ &= \langle A, A\rangle + \langle A, B\rangle + \langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle \\ &= \langle A, A\rangle + \langle B, B\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} |c_k - \langle f, S^{-1} f_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{m} |\langle f, S^{-1} f_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.9. *Todo Frame en un espacio de dimensión finita contiene una subfamilia que es base.*

Demostración. Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame de V, entonces $span\{f_k\}_{k=1}^m = V$. Sean los conjuntos A y B definidos de la siguiente manera:

$$A = \{f_1 = 0\} \cup \{f_k : f_k \in span\{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}\}\}$$

$$B = \{f_1 \neq 0\} \cup \{f_k : f_k \notin span\{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}\}\}$$

Se puede notar que B es el conjunto de vectores $\{f_k\}_{k=1}^l$ que no son generados por sus vectores anteriores, salvo el f_1. Se probará que el conjunto B es una base para V:
Es claro que B es no vacío puesto que no todos los f_k son cero, pues $f_1 \in B$. Para ver que B es linealmente independiente, sean $c_1, c_2, \ldots, c_l$ escalares tales que:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_l f_l = 0$$

entonces $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_{l-1} f_{l-1} = -c_l f_l$
Por construcción de B, f_l no es combinación lineal de sus vectores previos, luego $c_l = 0$. Repitiendo el proceso se concluye que:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_l = 0$$

Por lo cual el conjunto es linealmente independiente.
Para ver que el B genera a V, tomemos f_i como combinación lineal de los elementos de B, con $i > l$. Dado un $f_j \in \{f_k\}_{k=l+1}^m$, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_l$ no todos nulos tales que:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_l f_l + d f_j = 0$$

Con $l + 1 \leq j < m$. Note que $d \neq 0$, pues en caso contrario, el conjunto B sería linealmente dependiente. Despejando f_j:

$$f_j = \frac{c_1}{d} f_1 + \frac{c_2}{d} f_2 + \ldots + \frac{c_l}{d} f_l$$

Lo que muestra a f_j como combinación lineal de B, con $l + 1 \leq j < m$.
Tomando ahora $g \in V$, por hipótesis existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tales que:

$$g = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_l f_l + c_{l+1} f_{l+1} + \ldots + c_m f_m$$

Usando lo que se probó anteriormente, se tiene:

$$
\begin{aligned}
g &= c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_l f_l + \left(\frac{c_1}{c_{l+1}} f_1 + \frac{c_2}{c_{l+1}} f_2 + \ldots + \frac{c_l}{c_{l+1}} f_l \right) \\
&+ \left(\frac{c_1}{c_{l+2}} f_1 + \frac{c_2}{c_{l+2}} f_2 + \ldots + \frac{c_l}{c_{l+2}} f_l \right) + \ldots + \left(\frac{c_1}{m} f_1 + \frac{c_2}{m} f_2 + \ldots + \frac{c_l}{c_m} f_l \right) \\
&= \left(c_1 + \frac{c_1}{c_{l+1}} + \frac{c_1}{c_{l+2}} + \ldots + \frac{c_1}{m} \right) f_1 + \left(c_2 + \frac{c_2}{c_{l+1}} + \frac{c_2}{c_{l+2}} + \ldots + \frac{c_2}{m} \right) f_2 \\
&+ \ldots + \left(c_l + \frac{c_l}{c_{l+1}} + \frac{c_l}{c_{l+2}} + \ldots + \frac{c_l}{m} \right) f_l
\end{aligned}
$$

Así $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}$ genera a V y por tanto B es una base para V. Así queda probado que todo frame tiene una subfamilia que es base para el espacio, siempre que este sea de dimensión finita. □

El teorema de descomposición de Frames muestra que entre todas las sucesiones de escalares $\{c_k\}_{k=1}^m$ para los cuales $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$ los coeficientes $\{\langle f, S^{-1} f_k \rangle\}_{k=1}^m$ tiene norma l^2- minimal. Los números $\langle f, S^{-1} f_k \rangle$, con $k = 1, 2, \ldots, m$ son llamados **Coeficientes Frame**. Se vio que el operador de Frame es invertible, entonces la sucesión $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^m$ es también un frame para V, pues basta ver que para todo $f \in V$, por el ítem ii) del teorema de descomposición, se tiene $f = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k$, así $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^m$ genera a V. A esta sucesión se le denomina **frame canónico dual**.

Ejemplo 2.1.10. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^2$ una base ortonormal para un espacio V de dimensión 2, con producto interno. Sea:*

$$
f_1 = e_1 \qquad\qquad f_2 = e_1 - e_2 \qquad\qquad f_3 = e_1 + e_2
$$

Entonces $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame de V. Usando la definición del operador de frame se tiene:

$$
Sf = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle f_k
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
Se_1 &= \sum_{k=1}^m \langle e_1, f_k \rangle f_k \\
&= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\
&= e_1 + (e_1 - e_2) + (e_1 + e_2) \\
&= 3e_1
\end{aligned}
$$

Aplicando S^{-1} se tiene $S^{-1} Se_1 = 3S^{-1} e_1$, de donde $S^{-1} e_1 = \frac{1}{3} e_1$

De igual forma

$$\begin{aligned} Se_2 &= \sum_{k=1}^{m} \langle e_2, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) \\ &= e_2 - e_1 + e_1 + e_2 \\ &= 2e_2 \end{aligned}$$

Aplicando S^{-1} se tiene $S^{-1}Se_2 = 2S^{-1}e_2$, de donde $S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2$
Luego, el frame canónico dual es:

$$\begin{aligned} \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{m} &= \{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3\} \\ &= \{S^{-1}e_1, S^{-1}e_1 - S^{-1}e_2, S^{-1}e_1 + S^{-1}e_2\} \\ &= \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right\} \end{aligned}$$

Siguiendo el teorema de descomposición 2.1.8, para un $f \in V$, este tiene representación

$$\begin{aligned} \left\{S^{-1}f_k\right\}_{k=1}^{m} &= \{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3\} \\ &= \{S^{-1}e_1, S^{-1}e_1 - S^{-1}e_2, S^{-1}e_1 + S^{-1}e_2\} \\ &= \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right\} \end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.11. *Asuma que $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ una base para V. Entonces existe una única familia $\{g_k\}_{k=1}^{m}$ en V tal qué*

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, g_k \rangle f_k$$

Para todo $f \in V$. En términos del operador de frame, $\{g_k\}_{k=1}^{m} = \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{m}$. Además $\langle f_j, g_k \rangle = \delta_{j,k}$

Demostración. Por el teorema de descomposición se tiene:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

Tomando $\{g_k\}_{k=1}^{m} = \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{m}$ se tiene:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, g_k \rangle f_k$$

Suponga que existe $\{h_k\}_{k=1}^m$ tal que $f = \sum_{k=1}^m \langle f, h_k\rangle f_k$, así:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, g_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \langle f, h_k\rangle f_k$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{m} \langle f, g_k - h_k\rangle f_k = 0$$

De donde $\langle f, g_k - h_k\rangle = 0$. Como $f \in V$ es arbitrario, entonces $g_k - h_k = 0$ y por tanto $\{g_k\}_{k=1}^m = \{h_k\}_{k=1}^m$.

Por último, sea f_j fijo, entonces:

$$f_j = \sum_{k=1}^{m} \langle f_j, g_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \langle f_j, S^{-1} f_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \langle f_j, f_k\rangle S^{-1} f_k$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^m$ es una base para V, entonces $\langle f_j, f_k\rangle = \delta_{j,k}$, así tenemos: $\langle f_j, g_k\rangle = \delta_{j,k}$

□

Definición 2.1.12. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame para V que no es base, entonces existe un frame $\{g_k\}_{k=1}^m \neq \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^m$ tal qué:*

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, g_k\rangle f_k$$

*Para todo $f \in V$. El frame $\{g_k\}_{k=1}^m$ se le conoce como **frame dual***

Proposición 2.1.13. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ una frame para V con dimensión n, entonces existen $n-1$ vectores $h_2, h_3, \ldots, h_n$ tales que la colección $\{f_k\}_{k=1}^n \bigcup \{h_k\}_{k=2}^n$ forman un tight frame para V*

Demostración. Sea $S : V \longrightarrow V$ el operador de frame, como S es autoadjunto, entonces existe una base para V compuesta por los autovectores $\{e_k\}_{k=1}^n$ de S (por teorema 1.4.28). Sea $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ los correspondiente autovalores de cada autovecctor de la base. Asumamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ y definamos:

$$h_k = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_k} e_k$$

El operador de frame para $\{f_k\}_{k=1}^n \bigcup \{h_k\}_{k=2}^n$ esta dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{S} : V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto Sf + \sum_{k=2}^{n} \langle f, h_k\rangle h_k \end{aligned}$$

Tomando $f \in V$, como $\{e_k\}$ es base ortonormal, se tiene

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

Y aplicando S a f,

$$Sf = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle Se_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

Así:

$$\begin{aligned}
\widehat{S}f &= Sf + \sum_{k=2}^{n} \langle f, h_k \rangle h_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \sum_{k=2}^{n} \langle f, h_k \rangle h_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \sum_{k=2}^{n} \langle f, \sqrt{\lambda_1 - \lambda_k} e_k \rangle \sqrt{\lambda_1 - \lambda_k} e_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \sum_{k=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_k) \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 \langle f, e_1 \rangle e_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k + \sum_{k=2}^{n} \lambda_1 \langle f, e_k \rangle e_k - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \\
&= \lambda_1 f
\end{aligned}$$

Así, para todo $f \in V$:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, f_k \rangle|^2 + \sum_{k=2}^{n} |\langle f, h_k \rangle|^2 = \langle \widetilde{S}f, f \rangle = \lambda_1 \|f\|^2$$

De este modo, queda probado que $\{f_k\} \bigcup \{h_k\}$ es un tight frame con cota de frame λ_1 $\square$

Se vio que para un $f \in V$, los coeficientes de frame $\{\langle f, S^{-1} f_k \}_{k=1}^{m}$ tienen norma l^2-minimal entre todas las sucesiones $\{c_k\}_{k=1}^{m}$ para las cuales

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

Se puede minimizar también la norma en otros espacios distintos a l^2, el resultado se enuncia a continuación:

Teorema 2.1.14. *Sea* $\{f_k\}_{k=1}^m$ *un frame de un espacio vectorial* V *finito dimensional. Dado* $f \in V$*, existen coeficientes* $\{d_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$ *tales que* $f = \sum_{k=1}^m d_k f_k$ *y*

$$\sum_{k=1}^{m} |d_k| = inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |c_k| : f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\}$$

Demostración. Sea $f \in V$ un elemento fijo y sean $\{c_k\}_{k=1}^m$ tales que:

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

Definiendo $r = \sum_{k=1}^m |c_k|$, como se quiere minimizar la l^1-norma de los coeficientes, basta con restringir la búsqueda a la sucesión minimizadora $\{d_k\}_{k=1}^m$ que pertenece al conjunto compacto:

$$M := \{\{d_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m : |d_k| < r, K = 1, \ldots, m\}$$

$$M := \{\{d_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m : |d_k| < \sum_{k=1}^{m} |c_k|, K = 1, \ldots, m\}$$

Del conjunto se tiene que $|M| \leq mr$. Se llega al resultado del hecho que el conjunto

$$\left\{ \{d_k\}_{k=1}^m \in M : f = \sum_{k=1}^{m} d_k f_k \right\}$$

es compacto y que dada la función continua:

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R} \\ &\{d_k\}_{k=1}^m \mapsto \phi(\{d_k\}) = \sum_{k=1}^{m} |d_k| < m \sum_{k=1}^{m} |c_k| \end{aligned}$$

envía compactos en compactos. Como el conjunto de los $\phi(\{d_k\})$ es compacto en $\mathbb{R}$, este es a su vez cerrado y acotado, por lo tanto posee inf, así:

$$\sum_{k=1}^{m} |d_k| = inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} |c_k| : f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\}$$

$\square$

A diferencia del teorema de descomposición el cual muestra una sucesión explicita la cual minimiza la l^2-norma de los coeficientes de expansión de f, en este la sucesión es única y depende linealmente de f. En cambio, en el anterior teorema solo se da la existencia de un minimizador de l^1 el cual podría no ser único y aún si lo fuese , podría no depender linealmente de f.

Se vio que un conjunto finito es un frame de su generado. Si $span\{f_k\}_{k=1}^m \neq V$, la descomposición frame asociada con $\{f_k\}_{k=1}^m$ suministra una expresión que determina la proyección ortogonal sobre $span\{f_k\}_{k=1}^m$.

Teorema 2.1.15. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame de un subespacio W de V. Entonces la proyección ortogonal de V sobre W esta dada por:*

$$Pf = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k$$

Demostración. Basta probar que si se define $Pf = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k$, entonces

$$Pf = f; \quad \forall f \in W \qquad \text{y} \qquad Pf = 0; \quad \forall f \in W^{\perp}$$

Por el teorema de descomposición, $f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = Pf$ para todo $f \in W$ puesto que $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame para W.
Ahora suponga $Pf = 0$, como el operador de frame S es biyectivo, entonces $\mathfrak{R}(S^{-1}) = W$, luego $S^{-1} f \in W$ y por tanto $\langle f, S^{-1} f_k \rangle = 0$ si $f \in W^{\perp}$. □

Teorema 2.1.16. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ una frame de V. Entonces se cumple:*

i) La cota de frame inferior óptima es el más pequeño autovalor de S y la cota de frame superior óptima es el más grande autovalor.

ii) Suponiendo que V tiene dimensión n, que $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ de los autovalores de S y que cada autovalor aparece en la lista de acuerdo a su multiplicidad algebraica , entonces:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|^2$$

iii) Suponiendo que V tiene dimensión n. Si $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un tight frame y $\|f_k\| = 1$ para todo k, entonces la cota de frame esta dada por $A = \frac{m}{n}$

Demostración. i) Por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame para V. Como el operador de frame S es autoadjunto entonces V tiene una base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^n$ de autovectores de S (por teorema 1.4.28) y sean $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ sus respectivos autovalores. Dado $f \in V$, se tiene

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

entonces

$$Sf = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle Se_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

Además

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2$$

Note que

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f \rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k, f \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle e_k, f \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

Así se tiene

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame, entonces existen $A, B > 0$ tales que:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

entonces

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Como

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|f\|^2 \|e_k\|^2$$

Se tiene entonces que $B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Tomando $\lambda_{max} = sup\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, entonces $\lambda_{max} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = B$, luego λ_{max} es el supremo del conjunto de cotas superiores del frame, así λ_{max} es la óptima cota del frame.

Ahora, note que:

$$\lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2$$

Además

$$\lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \lambda_k \|f\|^2$$

Tomando $inf\{\lambda_k\} = \lambda_{min}$, entonces, $A \leq \lambda_{min}$, así λ_{min} es la óptima cota inferior del frame.

ii) Se tiene la suma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|e_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\langle e_k, e_k \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle S e_k, e_k \rangle \end{aligned}$$

Se tiene también que

$$S e_k = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k, f_l \rangle f_l$$

así

$$\langle S e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k, f_l \rangle \langle f_l, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle e_k, f_l \rangle|^2$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |\langle c_k, f_l\rangle|^2 \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} |\langle c_k, f_l\rangle|^2\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \|f_l\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2\end{aligned}$$

iii) Por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un tight frame, entonces: $\sum\limits_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$ y por el ítem i) $\sum\limits_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \lambda\|f\|^2$ siendo $\lambda_{min} = \lambda_{max} = \lambda$. Así

$$A\|f|^2 = \lambda\|f\|^2$$

De donde $A = \lambda$, luego:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda = \sum_{k=1}^{n} A = nA$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 = m$$

Por tanto $nA = m$, de donde $A = \frac{m}{n}$

□

2.2. Frames en $\mathbb{C}^n$

En esta sección se usarán frames en el campo complejo, considerando operadores de frame que van de una campo complejo de dimensión n a un campo complejo de mayor dimensión. Para este estudio será indispensable el uso de las matrices.

La siguiente proposición enuncia la relación entre los frames de un espacio y otro.

Proposición 2.2.1. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un frame, entonces:*

i) Si $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame para $\mathbb{C}^n$, entonces los 2m vectores consistentes en la parte real y la parte imaginaria de los vectores frame f_k constituyen un frame para $\mathbb{R}^n$.

ii) Un frame para $\mathbb{R}^n$ es un frame para $\mathbb{C}^n$

La prueba de esta proposición se encuentra en [2] (pág 14).
En la sección se trabajará sobre la base canónica de $\mathbb{C}^n$ la cual consiste en los vectores $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ donde:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{en la k-ésima componente} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se enuncia un teorema que caracteriza las matrices en $\mathbb{C}^n$:

Teorema 2.2.2. *Considere n vectores en $\mathbb{C}^n$ escritos en la matriz $n \times n$*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Las columnas en A constituyen una base para $\mathbb{C}^n$.

ii) Las filas en A constituyen una base para $\mathbb{C}^n$.

iii) $det(A) \neq 0$.

iv) A es invertible.

v) A define una función inyectiva de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.

vi) A define una función sobreyectiva de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.

vii) Las columnas de A son linealmente independientes.

viii) A tiene rango igual a n

La demostración del anterior teorema se encuentra en [2](pág 15).
En los preliminares se enunció que un operador lineal tiene representación matricial por medio de las bases canónicas de los espacios de salida y llegada del operador. Tomando el operador de pre-frame T definido en la sección anterior por:

$$T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \qquad \{c_k\}_{k=1}^m \mapsto \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

Siendo $B = \{e_k\}_{k=1}^m$ base canónica de $\mathbb{C}^m$ y $\widetilde{B} = \{\widetilde{e_k}\}_{k=1}^m$ base canónica de $\mathbb{C}^n$ entonces:

$$T(e_1) = \sum_{k=1}^{m} e_1 f_k = f_1$$
$$T(e_2) = \sum_{k=1}^{m} e_2 f_k = f_2$$
$$\vdots$$
$$T(e_m) = \sum_{k=1}^{m} e_n f_k = f_m$$

Así $[T(e_k)]_{\widetilde{B}} = f_k$. Obteniendo así la matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Para hallar esta matriz de T respecto a la base canónica basta considerar los vectores f_k del frame de $\mathbb{C}^n$ como columnas, pues estos al ser m vectores pueden generar a lo más un espacio de dimensión m, necesariamente se tiene $m \geq n$. Cuando $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un frame de $\mathbb{C}^n$, entonces la matriz de T tiene por lo menos tantas columnas como filas.

El siguiente teorema muestra como los frames en $\mathbb{C}^n$ aparecen por medio de proyecciones de ciertas bases canónicas de $\mathbb{C}^m$ sobre $\mathbb{C}^n$

Teorema 2.2.3. *Si $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un frame para $\mathbb{C}^n$, entonces se tiene lo siguiente:*

i) Los vectores f_k pueden ser considerados como las primeras n-coordenadas de algunos vectores $g_k \in \mathbb{C}^m$ estableciendo una base para $\mathbb{C}^n$.

ii) Si $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un tight frame, entonces los vectores f_k son las primeras n-coordenadas de algunos vectores $g_k \in \mathbb{C}^m$ estableciendo una base ortogonal para $\mathbb{C}^m$

Demostración. i) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ un frame arbitrario para $\mathbb{C}^n$. Usando el operador de análisis (adjunto del operador de pre-frame):

$$\begin{aligned} T^* : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^m \\ x &\mapsto \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{m} \end{aligned}$$

La matriz asociada a T^* es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cdots & \overline{f_1} \cdots \\ \cdots & \overline{f_2} \cdots \\ & \vdots \\ \cdots & \overline{f_m} \cdots \end{pmatrix}$$

T^* es inyectivo pues si $T^*x = 0$ entonces.

$$0 = \|T^{*x}\| = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle \{\langle x, f_k\rangle\}, \{\langle x, f_k\rangle\}\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle x, f_k\rangle \overline{\langle x, f_k\rangle}$$

Así

$$0 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x, f_k\rangle|^2 \iff \langle x, f_k\rangle = 0$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame para $\mathbb{C}^n$, enotnces $span\{f_k\} = \mathbb{C}^n$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= \langle x, f_1\rangle f_1 + \langle x, f_2\rangle f_2 + \ldots + \langle x, f_m\rangle f_m \\ &= 0f_1 + 0f_2 + \ldots + 0f_m \end{aligned}$$

Luego $x = 0$, así $\mathfrak{N}(T^*) = \{0\}$ y por tanto la función es inyectiva. Por teorema de la dimensión:

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{C}^n) &= dim(\mathfrak{N}(T^*) + dim(\mathfrak{R}(T^*) \\ &= dim(\mathfrak{R}(T^*)) \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede extender al operador T^* a un operador biyectivo $\widetilde{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Teniendo la base canónica $\{\delta_k\}$ para $\mathbb{C}^n$, sean $\{\phi_k\}_{k=n+1}^m$ la base de $(\mathfrak{R}(T^*))^\perp$, defieniendo el operador $\widetilde{T}$ por $\widetilde{T}\delta_k := \phi_k$ para $k = n+1, n+2, \ldots, m$.

La matriz asociada a $\widetilde{T}$ es $m \times m$ cuyas primeras n-columnas son las mismas de la matriz asociada a T^*, de este modo:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|cccc} \cdots \ \overline{f_1} \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots \ \overline{f_2} \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \phi_{n+1} & \phi_{n+2} & \cdots & \phi_m \\ \cdots \ \overline{f_m} \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right)$$

Como $\widetilde{T}$ es sobreyectivo, por teorema 2.5, las columnas generan a $\mathbb{C}^m$ y de igual forma las filas constituyen una base para el mismo, donde las primeras n-coordenadas son formadas por los vectores de $\{f_k\}_{k=1}^m$.

ii) Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un tight frame con cota A y sea $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ la base canónica para $\mathbb{C}^m$. La (j,l)-ésima entrada de la matriz asociada al operador de frame S es $\langle S\delta_l, \delta_j\rangle$ Por proposición 2.2:

$$\langle S\delta_l, \delta_j\rangle = \langle\sum_{k=1}^{m}\langle\delta_l, f_k\rangle f_k, \delta_j\rangle = \langle A\delta_l, \delta_j\rangle = A\delta_{l,j}$$

Entonces las n-filas de la representación matricial de S son ortogonales en $\mathbb{C}^m$. Añadiendo $m-n$ filas se puede extender la matriz asociada a S a una matriz cuadrada $m\times m$ en la cual las filas son ortogonales, luego las columnas son ortogonales y constituyen una base para $\mathbb{C}^m$

□

El anterior teorema se muestra que para frame en $\mathbb{C}^n$ existen vectores $\{h_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^{m-n}$ tal que las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots\vdots & \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ \vdots & \vdots & \cdots\vdots & \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_m \\ \vdots & \vdots & \cdots\vdots & \end{pmatrix}$$

Constituyen una base para $\mathbb{C}^m$.

Ejemplo 2.2.4. *Considere la colección de vectores*

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Si los vectores $\{h_1, h_2, h_3\} = \{[0],[0],[3]\} \subset \mathbb{R}$ *son adjuntados a los vectores del frame obtenemos una base para* $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{pmatrix}f_1\\h_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_2\\h_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_3\\h_3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Proposición 2.2.5. *Para una matriz* $m\times n$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Existe una constante $A>0$ *tal que:*

$$A\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leq \|\Lambda\{c_k\}_{k=1}^n\|^2; \forall\{c_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

ii) Las columnas de Λ constituyen una base para su generado en $\mathbb{C}^m$

iii) Las filas de Λ constituyen un frame para $\mathbb{C}^n$

Demostración. Denotando las columnas de Λ como los vectores $g_1, g_2, \ldots, g_n$, estos resultan ser vectores en $\mathbb{C}^m$. Del item i), para todas las sucesiones $\{c_k\} : k = 1^n \in \mathbb{C}^n$, se tiene:

$$A\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|\Lambda\{c_k\}_{k=1}^{n}\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k\|^2$$

Lo cual equivale a que la sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ es base de su generado en $\mathbb{C}^m$
Para el item iii), denotando las filas en Λ por $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se tiene:

$$A\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|\Lambda\{c_k\}_{k=1}^{n}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f_k, \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} \rangle|^2; \forall \{c_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$$

Basta notar que:

$$\Lambda\{c_k\}_{k=1}^{n} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f_1, \overline{c} \rangle \\ \langle f_2, \overline{c} \rangle \\ \vdots \\ \langle f_m, \overline{c} \rangle \end{pmatrix}$$

Donde, $\overline{c} = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix}$ Así

$$\langle \begin{pmatrix} \langle f_1, \overline{c} \rangle \\ \langle f_2, \overline{c} \rangle \\ \vdots \\ \langle f_m, \overline{c} \rangle \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \langle f_1, \overline{c} \rangle \\ \langle f_2, \overline{c} \rangle \\ \vdots \\ \langle f_m, \overline{c} \rangle \end{pmatrix} \rangle = \langle f_1, \overline{c} \rangle \overline{\langle f_1, \overline{c} \rangle} + \langle f_2, \overline{c} \rangle \overline{\langle f_2, \overline{c} \rangle} + \ldots + \langle f_m, \overline{c} \rangle \overline{\langle f_m, \overline{c} \rangle}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} |\langle f_k, \overline{c} \rangle|^2$$

Lo que equivale a que $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ es un frame para $\mathbb{C}^n$ dado que cada $f_k \in \mathbb{C}^n$ □

El siguiente ejemplo da una noción más clara de la anterior proposición.

Ejemplo 2.2.6. *Considere la matriz*

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas de $\lambda\ \{f_1, f_2, f_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *constituyen un frame para* $\mathbb{C}^2$. *Las columnas* $\{g_1, g_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *constituyen una base para su generado en* $\mathbb{C}^3$.

Como consecuencia de la anterior proposición se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2.7. *Sea* Λ *una matriz* $m \times n$. *Denotando* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *como las columnas y* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *como las filas de* Λ. *Dado* $A, B > 0$ *los vectores* $\{f_k\}_{k=1}^m$ *constituyen un frame para* $\mathbb{C}^n$ *con cotas* A *y* B *si y sólo si:*

$$A \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \| \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \|^2 \leq B \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2; \quad \forall \{c_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$$

El siguiente corolario es un caso especial del anterior resultado

Corolario 2.2.8. *Sea* Λ *una matriz* $m \times n$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\Lambda^* \Lambda = I$

ii) Las columnas $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *en* Λ *constituyen un sistema ortonormal en* $\mathbb{C}^m$

iii) Las filas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *en* Λ *constituyen un tight frame para* $\mathbb{C}^n$ *con cota de frame igual a 1*

2.3. Frames y la transformada de Fourier

En esta sección se estudia la relación entre las transformada de Fourier y los Frames.

Dado $f \in \mathbb{C}^n$, denotamos las coordenadas de f con respecto a la base canónica ortnormal $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ mediante $\{f(j)\}_{j=1}^n$:

$$f = (f(1), f(2), \ldots, f(n)) = f(1)\delta_1 + f(2)\delta_2 + \ldots + f(n)\delta_n$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ se definen los vectores $e_k \in \mathbb{C}^n$ mediante

$$e_k(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i2\pi(j-1)(k-1)/n} \quad \text{con j=1,2,...,n} \tag{2-3}$$

esto es:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i2\pi(k-1)/n} \\ e^{i4\pi(k-1)/n} \\ \vdots \\ e^{i2\pi(n-1)(k-1)/n} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3.1. *Los vectores* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *definidos mediante (2-3) constituyen una base ortonormal para* $\mathbb{C}^n$

Demostración. Como $\{e_k\}_{k=1}^n$ son n vectores en un espacio n-dimensional, es suficiente probar que ellos constituyen un sistema ortnormal. Es fácil ver que $\|e_k\| = 1$:

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_k \rangle &= \sum_{k=1}^{n} e_k(n)\overline{e_k(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i k N/n} \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i k N/n}\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{2\pi i k N/n} e^{-2\pi i k N/n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Para la ortogonalidad:

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} e^{2\pi i (j-1)(k-1)/n} e^{-2\pi i (j-1)(l-1)/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i j (k-l)/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[e^{2\pi i (k-l)/n}\right]^j
\end{aligned}$$

Se puede ver que la serie es geométrica, de este modo:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1 - (e^{i2\pi(k-l)/n})^n}{1 - e^{i2\pi(k-l)/n}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1 - 1}{1 - e^{i2\pi(k-l)/n}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De este modo queda probado que el sistema es ortonormal y por ende es una base ortonormal para el $\mathbb{C}^n$.

$\square$

La base $\{e_k\}_{k=1}^n$ es llamada **base de la transformada discreta de Fourier**. Usando dicha base, toda sucesión $f \in \mathbb{C}^n$ tiene una representación

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} f(l) e^{-i2\pi(l-1)(k-1)/n} \right) e_k$$

En términos de coordenadas:

$$\begin{aligned} f(j) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f(l) e^{-2\pi i(l-1)(k-1)/n} e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f(l) e^{2\pi i(j-l)(k-1)/n} \quad \text{j=1,2,...,n} \end{aligned}$$

Lo más notable de esta sección es la relación que hay entre la transformada de Fourier y los Tight frames, las cuales son a menudo requeridas en las aplicaciones de la transformada. La siguiente proposición muestra como se puede obtener tight frames redundantes en $\mathbb{C}^n$ proyectando la base de la transformada de Fourier discreta de cualquier campo $\mathbb{C}^m$ hacia $\mathbb{C}^n$, donde $m > n$

Proposición 2.3.2. *Sea $m > n$ y defina los vectores $\{f_k\}_{k=1}^m$ en $\mathbb{C}^n$ mediante:*

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i2\pi(k-1)/m} \\ \vdots \\ e^{i2\pi(n-1)(k-1)/m} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,m$$

Entonces $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un tight frame redundante para $\mathbb{C}^n$ con cota de frame igual a 1 y $\|f_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}$

Demostración. Sea $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ la base canónica para $\mathbb{C}^n$ y sea $\{e_k\}_{k=1}^m$ la base de la transformada de Fourier discreta para $\mathbb{C}^m$, es decir:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i2\pi(k-1)/m} \\ e^{i4\pi(k-1)/m} \\ \vdots \\ e^{i2\pi(n-1)(k-1)/m} \\ \vdots \\ e^{i2\pi(m-1)(k-1)/m} \end{pmatrix}$$

Considerando $\mathbb{C}^n$ como un subespacio de $\mathbb{C}^m$, la proyección ortogonal de e_k sobre $\mathbb{C}^n$ es $Pe_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle e_k, S^{-1} f_k \rangle f_k = f_k$

Se tiene que $\{Pe_k\}_{k=1}^m = \{f_k\}_{k=1}^m$ es un frame de $W \in \mathbb{C}^n$ con cotas de frame $A = B = 1$. Ahora:

$$\begin{aligned}\|f_k\|^2 &= \langle f_k, f_k\rangle \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} f_k(j)\overline{f_k(j)} \\ &= \frac{1}{m}(n)\end{aligned}$$

Así $\|f_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}$

$\square$

La anterior proposición muestra también qué todos los vectores frame tendrán la misma norma. En caso de ser necesario , es posible normalizar los vectores conservando el tight frame , lo único que habrá que ajustar es la cota de frame correspondiente.

Corolario 2.3.3. *Para cualquier $m \geq n$, existe un tight frame en $\mathbb{C}^n$ consistente de m vectores normalizados*

Ejemplo 2.3.4. *La base de la transformada de Fourier discreta en $\mathbb{C}^4$ consiste de los vectores:*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{pmatrix}$$

Por medio de la proposición 2.3.2, los vectores:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

Constituyen un tight frame para $\mathbb{C}^2$ con cota de frame 1 y $\|f_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3 Frames en espacios de Hilbert

En este capítulo se desarollará el objetivo principal de este trabajo de grado, el estudio de la teoría de frames en espacios de Hilbert que notaremos por H. Antes de introducir el tema, se enunciará algunos resultados útiles para dicho propósito.

3.1. Algunos resultados sobre espacios normado y bases

A continuación dos teoremas importantes en la teoría de los espacios de Hilbert. Estos teoremas fueron tomados de [2] capítulo 2.

Teorema 3.1.1. *Si $U : X \to X$ es acotado y $\|I - U\| < 1$, entonces U es invertible y:*

$$U^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (I - U)^k$$

Por lo tanto

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|}$$

Observe que la primera ecuación podría ser interpretada en el sentido del operador norma, es decir:

$$\|U^{-1} - \sum_{k=0}^{N} (I - U)^k\| \to 0 \text{ cuando } N \to \infty$$

Teorema 3.1.2. *Sean U_1, U_2, U_3 operadores auto-adjuntos. Si $U_1 \leq U_2$, $U_3 \geq 0$ y U_3 conmuta con U_1 y U_2, entonces $U_1 U_3 \leq U_2 U_3$.*

El siguiente resultado define al operador **pseudo-inverso** el cual será necesario para el trabajo con la estabilidad en frames. Se sabe que para que un operador sobre un espacio de Hilbert tenga inversa se requiere que este sea biyectivo. El resultado muestra que si un operador U tiene rango cerrado, existe un "operador inverso a derecha" $U^{\dagger}$ tal que:

Lema 3.1.3. *Sean H, K espacios de Hilbert y suponga que $U : K \to H$ es un operador acotado con rango cerrado $\mathfrak{R}_U$. Entonces existe un operador acotado $U^{\dagger} : H \to K$ el cual:*

$$UU^{\dagger} x = x; \quad \forall x \in \mathfrak{R}_U$$

Los resultados que se presentarán a continuación fueron tomados tomados de [2] capítulo 3. El siguiente lema es útil a la hora de definir el operador de frame sobre espacios de Hilbert puesto que garantiza la existencia del operador adjunto y su respectiva forma.

Lema 3.1.4. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sucesión en H, y suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ es convergente para todo $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Entonces*

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to H; \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

define un operador lineal acotado. El operador adjunto esta dado por:

$$T^* : H \to \ell^2(\mathbb{N}), T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2, \forall f \in H$$

Seguido esto, se definirá un concepto importante en el trabajo en espacios de Hilbert, la sucesión de Bessel.

Definición 3.1.5. *Una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en H se dice que es una sucesión de Bessel si existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \forall f \in H$$

Cualquier B que satisfaga la desigualdad es llamado ***cota de Bessel*** *para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. La óptima cota de Bessel es el más pequeño valor posible $B > 0$ que satisface la desigualdad. Excepto para el caso $f_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la cota óptima siempre existe.*

Teorema 3.1.6. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en H y sea $B > 0$. Entonces $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota de Bessel B si y sólo si:*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

define un operador acotado de $l^2(\mathbb{N})$ sobre H y $\|T\| \leq \sqrt{B}$

Corolario 3.1.7. *Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel en H, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ converge incondicionalmente para todo $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$*

Por último, se definirá el concepto de matriz de Gram.
Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de , se puede componer el operador de pre frame T con su adjunto T^*; por tanto se obtiene el operador acotado:

$$T^*T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$$
$$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to T^*T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\langle\sum_{k=1}^{\infty} c_l f_l, f_k\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$$

Tomando $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ base canónica ortonormal para $\ell^2(\mathbb{N})$, la jk-ésima entrada en la representación matricial para T^*T es

$$\langle T^*Te_k, e_j\rangle = \langle Te_k, Te_j\rangle = \langle f_k, f_j\rangle$$

Identificando a T^*T con la representación matricial, se puede escribir:

$$T^*T = \{\langle f_k, f_j\rangle\}_{j,k=1}^{\infty}$$

La matriz $\{\langle f_k, f_j\rangle\}_{j,k=1}^{\infty}$ es llamada la ***matriz de Gram*** asociada a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Proposición 3.1.8. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base de Riesz para H, y sea $G : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ la matriz de Gram. Entonces las óptimas cotas de Riesz son:*

$$A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} = \frac{1}{\|G^{-1}\|^2} \quad y \quad B = \|U\|^2 = \|G\|^2$$

3.2. Propiedades de los Frames sobre espacios de Hilbert

Para el trabajo en espacios de Hilbert, notaremos $H \neq \{0\}$ como un espacio de Hilbert separable. Los resultados de esta sección se basan en la teoría desarrollada en [2] capítulo 5.

Definición 3.2.1. *Una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos en H es un frame para H si existen constantes $A, B > 0$ tales que:*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

Al igual que en el caso finito, los números A, B son llamados cotas de Frame las cuáles no son únicas. La óptima cota superior será el ínfimo de las cotas superiores y la óptima cota inferior será el supremo de las cotas inferiores.

El siguiente lema facilita la prueba del primer resultado importante que se verá en la sección. Éste garantiza la existencia de la cota de frame superior a partir de sucesiones de Bessel.

Lema 3.2.2. *Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos en H y que existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

para todo f en un subconjunto denso V de H. Entonces $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota B.

Demostración. Se probará que la condición de sucesión de Bessel se tiene para todos los elementos de H. Sea $g \in H$ y suponga que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 \geq B\|g\|^2$$

entonces existe un conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k \in F} |\langle g, f_k \rangle|^2 \geq B\|g\|^2$$

Como V es denso en H, esto implica que existe un $h \in V$ tal que:

$$\sum_{k \in F} |\langle h, f_k \rangle|^2 \geq B\|h\|^2$$

Lo cuál contradice la hipótesis. Así

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 \leq B\|g\|^2; \quad \forall g \in H$$

□

Lema 3.2.3. *Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en H y sean $A, B > 0$ tales que:*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Para todo $f \in V$, con V subconjunto denso de H. Entonces $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H con cotas A, B

Demostración. Por lema 3.2.2 se probó que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota B en H, así se satisface la condición de cota superior del Frame.
Se pasa a demostrar a condición de cota inferior. Expresando en términos del operador de pre-frame T, se tiene que:

$$A\|f\|^2 \leq \|T^* f\|^2; \quad \forall f \in H$$

Como T^* es acotado y V es denso en H, se tiene entones que la desigualdad se cumple para todo $f \in H$. Así $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H con cotas A y B □

El anterior lema garantiza que basta probar la existencia del frame en un subconjunto denso del espacio de Hilbert para que existe en el mismo.

Definición 3.2.4. *Una sucesión* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en* H *es un* ***tight frame*** *si existe un número* $A > 0$ *tal qué*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

El número A *es llamado cota de frame.*

Definición 3.2.5. *Sea* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión en* H*. Se dice que* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión frame si es frame para* $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$

Ejemplo 3.2.6. *Sea* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para H, entonces*

i) Si se toma $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots\}$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + \ldots \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

Así, $A \leq 2$

De igual forma, para la cota superior se tiene:

$$\begin{aligned} B\|f\|^2 &\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + \ldots \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

Luego $A = B = 2$ *y por lo tanto* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es un tight frame con cota igual a 2.*

ii) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots\right\}$

Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\rangle|^2 + |\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\rangle|^2 + |\langle f, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\rangle|^2 + |\langle f, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\rangle|^2 \\ &+ |\langle f, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\rangle|^2 + \ldots \\ &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle f, e_2\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle f, e_2\rangle|^2 + \frac{1}{3}|\langle f, e_3\rangle|^2 + \frac{1}{3}|\langle f, e_3\rangle|^2 \\ &+ \frac{1}{3}|\langle f, e_3\rangle|^2 + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

Así $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es un tight frame con cota de frame* $A = 1$

En el caso de dimensión finita, se asoció a un frame un operador de frame el cual era la composición de dos operadores: Sintésis y análisis. En el caso de dimensión infinita se definen de igual forma, con la ayuda de las sucesiones de Bessel.
Como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, el operador

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

es acotado por teorema 3.1.6. El operador T es llamado **operador de pre-frame (o de sintésis)**. Por lema 3.1.4, el operador adjunto de T esta dado por:

$$T^* : H \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

T^* es llamado **operador de análisis**. Al componer T y T^*, se obtiene el operador de frame:

$$S : H \to H, \quad TT^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle f_k$$

.

Dado que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, la serie definida por S converge incondicionalmente para todo $f \in H$ debido al corolario 3.1.7. A continuación se enuncian propiedades importantes del operador S.

Lema 3.2.7. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame para H con operador frame S y cotas A, B. Entonces se tiene:*

i) S es acotado, invertible, auto-adjunto y positivo.

ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame con operador frame S^{-1} y cotas de frame B^{-1}, A^{-1}.

iii) Si A, B son las óptimas cotas de frame para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces las cotas B^{-1}, A^{-1} son óptimas para $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$

Demostración. i) Puesto que S es composición de T y T^* operadores acotados, entonces:

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|\|T^*\| = \|T^2\| \leq B$$

Además, Es auto-adjunto ya que:

$$S^* = (TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$$

De la definición de frame se tiene que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Reescribiendo en términos del operador de frame, se tiene:

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2$$

de donde

$$AI \leq S \leq BI \tag{3-1}$$

Como $A, B > 0$, entonces el operador S es positivo.

Por último

$$\begin{aligned} AI \leq S \leq BI &\Longrightarrow B^{-1}AI \leq B^{-1}S \leq I \\ &\Longrightarrow B^{-1}AI - I \leq B^{-1}S - I \leq 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leq I - B^{-1}S \leq I - B^{-1}AI \end{aligned}$$

Note que:

$$I - B^{-1}AI = I - \frac{AI}{B} = \left(1 - \frac{A}{B}\right) I = \left(\frac{B - A}{B}\right) I$$

Así:

$$0 \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B} I$$

Y en consecuencia

$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle (I - B^{-1}S)f, f\rangle| \leq \frac{B-A}{B} I < 1$$

Pues si $\frac{B-A}{B} > 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{B-A}{B} > 1 &\Longrightarrow B - A > B \\ &\Longrightarrow -A > 0 \\ &\Longrightarrow A < 0 \end{aligned}$$

Lo que contradice el hecho de que $A > 0$ es cota inferior del frame. Por último, por Teorema 3.1.1, S es invertible.

ii) Como S es auto-adjunto, entonces S^{-1} es también auto-adjunto, así para todo $f \in H$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^{-1}f, f_k\rangle|^2 \\ &\leq B\|S^{-1}f\|^2 \\ &\leq B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2 \end{aligned}$$

Así $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel y por ende se tiene que el operador de frame para $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ esta bien definido. Ahora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k\rangle S^{-1}f_k &= S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k\rangle f_k \\ &= S^{-1}SS^{-1}f \\ &= S^{-1}f \end{aligned}$$

Lo cuál muestra que $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es equivalente a S^{-1}. El operador S^{-1} conmuta con S e I. Usando el Teorema 3.1.2, se puede multiplicar la desigualdad (3-1) por S^{-1}:

$$\begin{aligned} AI \leq S &\Longrightarrow S^{-1}AI \leq S^{-1}S \\ &\Longrightarrow S^{-1}A \leq I \\ &\Longrightarrow S^{-1} \leq A^{-1}I \end{aligned}$$

De igual forma:

$$\begin{aligned} S \leq BI &\Longrightarrow S^{-1}S \leq S^{-1}BI \\ &\Longrightarrow I \leq S^{-1}BI \\ &\Longrightarrow B^{-1}I \leq S^{-1} \end{aligned}$$

De este modo se obtiene la desigualdad:

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-}I$$

Esto es:

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f\rangle \leq A^{-1}\|f\|^2; \quad \forall f \in H$$

Puesto que $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = S^{-1}$, se tiene:

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k\rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2; \quad \forall f \in H$$

Por lo tanto, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame con cotas de frame B^{-1}, A^{-1}

iii) Se probará que si A, B son las cotas óptimas para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces A^{-1}, B^{-1} son las cotas óptimas para el frame $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea A es la óptima cota inferior para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y supongamos $C < A^{-1}$ es la óptima cota superior para $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Aplicando el resultado del item ii) se tendría:

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(S^{-1})S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$$

así la óptima cota inferior del frame es $C^{-1} > A$, lo cuál contradice que A sea la óptima cota inferior del frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Así la óptima cota superior de $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es A^{-1}.

Procediendo de igual forma, siendo B la óptima cota superior para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y supongamos que $C > B^{-1}$ es la óptima cota inferior para $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Aplicando el resultado del item ii) se tendría:

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(S^{-1})S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$$

cuya óptima cota superior sería $C^{-1} < B$, lo cuál contradice que B sea la óptima cota superior del frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Así la óptima cota inferior de $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es B^{-1}.

$\square$

Al frame $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se le denomina ***Frame dual canónico*** de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. El siguiente teorema muestra que el frame dual tiene un papel importante en el desarrollo de la teoría de frames.

Teorema 3.2.8. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame con operador de frame S. Entonces:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k; \quad \forall f \in H \tag{3-2}$$

y

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k; \quad \forall f \in H \tag{3-3}$$

Ambas series convergen incondicionalmente para todo $f \in H$.

Demostración. Sea $f \in H$. Usando las propiedades del lema 3.2.7, se tiene:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel y $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces por corolario 3.1.7, la serie converge incondicionalmente.
De igual manera, para $f \in H$ se tiene:

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel y $S^{-1}f_k \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces por corolario 3.1, la serie converge incondicionalmente. □

El anterior teorema muestra la *descomposición de frame* dada por la ecuación (3-2), siendo este uno de los resultados más importantes en la teoría de frames, debido a que muestra que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H, todo elemento del espacio tiene representación como combinación lineal infinita de elementos del frame, de este resultado se puede interpretar a los frames como *bases generalizadas*.

Este teorema muestra que toda la información de un elemento $f \in H$, esta contenida en la sucesión $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Los números $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ son llamados ***coeficientes de frame***.

Cabe resaltar que el teorema también revela una de las principales complicaciones cuando se trabaja con frames. El tener las expresiones (3-2) y (3-3), se requiere poder encontrar el operador S^{-1} o al menos poder calcularlo cuando este actua sobre f_k. Una manera de evitar el problema es trabajar con tight frames.

Corolario 3.2.9. *Si* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es un tight frame con cota A, entonces el frame dual canónico es* $\{A^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *y*

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty}\langle f, f_k\rangle f_k, \quad \forall f \in H \tag{3-4}$$

Demostración. Por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un tight frame con cota de frame A y operador de frame S, entonces:

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2 = \langle Af, f\rangle; \quad \forall f \in H$$

Así:

$$\begin{aligned}\langle Sf, f\rangle = \langle Af, f\rangle &\Longrightarrow \langle Sf, f\rangle - \langle Af, f\rangle = 0\\ &\Longrightarrow \langle (S-A)f, f\rangle = 0\end{aligned}$$

De donde $S - A = 0$, así $S = AI$ y por ende $S^{-1} = A^{-1}$.
Del teorema 3.2.8, se sabe que:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, S^{-1}f_k\rangle f_k$$

Como $S^{-1} = A^{-1}$, reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}f &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, A^{-1}f_k\rangle f_k\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}A^{-1}\langle f, f_k\rangle f_k\\ &= \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty}\langle f S^{-1}f_k\rangle f_k\end{aligned}$$

□

En el caso de tener $A = 1$ en la ecuación (3-4), se evidencia que los elementos del espacio tiene la misma forma que la representación por medio de bases ortonormales. Esto muestra que los frames pueden ser usados sin representar un mayor esfuerzo computacional respecto al uso de las bases ortonormales.

Trabajar con tight frames trae muchas ventajas respecto a los otros tipos de frames que hay. A la hora de diseñar frames con ciertas propiedades, es importante controlar el comportamiento del frame dual canónico, pero la estructura complicada del operador de frame y su inversa hacen complicada la labor. Por ejemplo, si se considera un frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ para $L^2(\mathbb{R})$ que consiste en las funciones con decrecimiento exponencial, nada garantiza que las funciones del frame dual canónico $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ tenga también decrecimiento exponencial. En cambio con el uso de tight frames, resolver problemas de este tipo se hace más fácil puesto que su frame dual canónico tiene la misma estructura y se comporta igual que el tight frame.

Al igual que en el caso finito, se puede encontrar un frame $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ distinto a $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \qquad \forall f \in H$$

Al frame $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ se le conoce como ***frame dual*** de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Con esta nueva herramienta se facilita la tarea de encontrar frames duales distintos al frame dual canónico, que en ocasiones es difícil hallar.

Ejemplo 3.2.10. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal para H y sea*
$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$
Se sabe que:

$$\begin{aligned} Se_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_1, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 + \langle e_1, e_3 \rangle e_3 + \ldots \\ &= 2\langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 + \langle e_1, e_3 \rangle e_3 + \ldots \\ &= 2e_1 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} Se_1 = 2e_1 &\Longrightarrow S^{-1}Se_1 = 2S^{-1}e_1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}e_1 = S^{-1}e_1 \end{aligned}$$

Para e_j con $j > 1$, se tiene:

$$Se_j = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_j, f_k \rangle f_k = \langle e_j, e_j \rangle e_j = e_j$$

De donde:

$$Se_j = e_j \Longrightarrow S^{-1}e_j = e_j$$

Así el frame dual canónico de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es:

$$\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \ldots \right\}$$

Calculado el frame dual canónico, se verán dos ejemplos de frames duales que no son canónicos. El frame:

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{0, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$$

Es frame dual debido a:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,g_k\rangle f_k &= \langle f,0\rangle e_1 + \langle f,e_1\rangle e_1 + \langle f,e_2\rangle e_2 + \langle f,e_3\rangle e_3 + \dots \\ &= \langle f,e_1\rangle e_1 + \langle f,e_2\rangle e_2 + \langle f,e_3\rangle e_3 + \dots \\ &= f\end{aligned}$$

El frame:

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{2}{3}e_1, e_2, e_3, \dots\right\}$$

es frame dual canónico de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *pues:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,g_k\rangle f_k &= \langle f,\frac{1}{3}e_1\rangle e_1 + \langle f,\frac{2}{3}e_1\rangle e_1 + \langle f,e_2\rangle e_2 + \langle f,e_3\rangle e_3 + \dots \\ &= \frac{1}{3}\langle f,e_1\rangle e_1 + \frac{2}{3}\langle f,e_1\rangle e_1 + \langle f,e_2\rangle e_2 + \langle f,e_3\rangle e_3 + \dots \\ &= \langle f,e_1\rangle e_1 + \langle f,e_1\rangle e_1 + \langle f,e_2\rangle e_2 + \langle f,e_3\rangle e_3 + \dots \\ &= f\end{aligned}$$

Cuando se trabajó con espacios de dimensión finita, se sabe que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en H la cual cumple $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$, entonces cada $f \in H$ podría tener una expansión:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

Para ciertos coneficientes escalares $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Sin embargo este hecho no siempre se cumple en espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Ejemplo 3.2.11. *Sea* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para* H *y sea*

$$f_k := e_k + e_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Se probará que:

i) $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$

ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Bessel pero no un frame*

iii) Existe $f \in H$ *que no puede ser escrito de la forma* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$*, para cualquier selección de los coeficientes* c_k

Primero se verá que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es completo, para ello, tomando* $f \in H$ *y asumiendo:*

$$\langle f, f_k\rangle = 0; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\langle f, f_k\rangle &= \langle f, e_k + e_{k+1}\rangle \\ &= \langle f, e_k\rangle + \langle f, e_{k+1}\rangle\end{aligned}$$

Así $\langle f, e_k\rangle = -\langle f, e_{k+1}\rangle$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *De aquí se puede concluir que* $|\langle f, e_k\rangle|$ *es constante. Como:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

Entonces se concluye que si $\langle f, e_k\rangle = 0$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $f = 0$. *Así* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es completo.*

Para probar que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Bessel se usará la desigualdad* $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k + e_{k+1}\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle + \langle f, e_{k+1}\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\langle f, e_k\rangle| + |\langle f, e_{k+1}\rangle|\right)^2 \\ &\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_{k+1}\rangle|^2 \\ &\leq 4\|f\|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Bessel con cota de Bessel igual a 4. Ahora se verá que* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *no cumple la condición de cota inferior de frame y por ende no es un frame.*

Tomando los vectores

$$g_j = \sum_{n=1}^{j} (-1)^{n+1} e_n; \quad j \in \mathbb{N}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \langle\sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}e_n, \sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{j}\langle(-1)^{n+1}e_n, (-1)^{n+1}e_n\rangle \\ &= \langle e_1, e_1\rangle + \langle -e_2, -e_2\rangle + \langle e_3, e_3\rangle + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{j}\langle e_n, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{j} 1 \\ &= j\end{aligned}$$

Ahora, calculando los productos internos $\langle g_j, f_k\rangle$ para un $j \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene:

$$\begin{aligned}\langle g_j, f_k\rangle &= \langle g_j, e_k + e_{k+1}\rangle \\ &= \langle e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + \ldots + (-1)^{j+1}e_j, e_k + e_{k+1}\rangle\end{aligned}$$

Como $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal, entonces:

$$\langle g_j, f_k\rangle = \begin{cases} 0 \ si \ k > j \\ 1 \ si \ k = j \\ 0 \ si \ k < j \end{cases}$$

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle g_j, f_k\rangle|^2 = 1 = \frac{1}{j}\|g_j\|^2$$

Esto se tiene para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ no satisfacce la condición de frame inferior. Por último, note que pese a que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es completo, existen $f \in H$ que no pueden ser escritos como combinación lineal de la forma $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ para cualquier selección de coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Para un caso concreto, sea $f = e_1$. se sabe que $f_k = e_k + e_{k+1}$ entonces si $e_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, se tendría:

$$\begin{aligned}e_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e_k + e_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_{k+1} \\ &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + \ldots + c_1e_2 + c_2e_3 + c_3e_4\end{aligned}$$

Como $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es base ortonormal, entonces sus elementos son linealmente independientes, así* $e_1 = c_1e_1 = 1e_1$, *por lo que* $c_1 = 1$ *y* $c_k = 0$ *para* $k > 1$, *pero de la segunda sumatoria,* $c_1e_2 = e_2$, *así se tendría*

$$e_1 = e_1 + e_2$$

lo cual es una contradicción.

3.3. Frames y Bases de Riesz

En la sección anterior se observó que un frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert H tiene ciertas propiedades en el mismo, una de las más importantes es que el frame puede caracterizar a cada elemento de H a través de combinaciones lineales, esto es, para todo $f \in H$ existen coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tales que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

Esto hace natural la relación existente entre frames y bases. El interés en esta sección es ver la relación entre los frames y las bases de Riesz. Con este propósito se definirá el concepto de base de Riesz y algunas proposiciones respecto a estas. La siguiente definición, teorema y proposición fueron tomadas de [2] capítulo 3.

Definición 3.3.1. *Una base de Riesz para* H *es una familia de la forma* $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$, *donde* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una base ortonormal para* H *y* $U : H \to H$ *es un operador biyectivo acotado.*

Teorema 3.3.2. *Si* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una base de Riesz para* H, *entonces* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Bessel. Por lo tanto, existe una única sucesión* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en* H *tal que*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k; \quad \forall f \in H$$

La sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es también una base de Riesz y la serie converge incondicionalmente para todo* $f \in H$.

La prueba de este teorema se encuentra en [2](pág. 59).

Proposición 3.3.3. *Si* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una base de Riesz para* H, *existen* $A, B > 0$ *tales que:*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

El valor más grande posible para la constante A *es* $\frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$, *y el valor más pequeño posible para* B *es* $\|U\|^2$.

La prueba de esta proposición se encuentra en [2] (pág. 61).

A partir de los resultados anteriores y de la definición de Frames en espacios de Hilbert, se hace evidente que toda base de Riesz es un frame. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema. Los resultados que se presentarán a continuación se basan en [2] capítulo 5.

Teorema 3.3.4. *Una base de Riesz $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ para H es un frame para H y las cotas de la base de Riesz coinciden con las cotas de frame. La base dual de Riesz es equivalente a la base dual canónica de frame $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$.*

Demostración. Por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz. Por proposición 3.2 existen $A, B > 0$ tales que para todo $f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k; \forall f \in H$$

Luego por la definición de frame (3.2.1), $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H.
Implicando la proposición 3.1.8, se tiene que las óptimas cotas de Riesz son

$$A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \quad \text{y} \quad B = \|U\|^2$$

coincidiendo con las óptimas cotas de frame.
Por último, por teorema 3.3.2, al ser $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Bessel, entonces existen $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ en H tal que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k; \quad f \in H$$

De igual forma, como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame con operador de frame S, por teorema 3.2.8

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k; \quad \forall f \in H$$

Así:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$$

Fijando k se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k &= \langle f, g_k \rangle f_k \\ \langle f, S^{-1}f_k \rangle - \langle f, g_k \rangle &= 0 \\ \langle f, S^{-1}f_k - g_k \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Luego $(S^{-1}f_k - g_k) = 0$ de donde $S^{-1}f_k = g_k$. Así $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, de donde se concluye que el frame dual canónico coincide con el la base dual de Riesz □

Un frame que no es base de Riesz se llama **sobrecompleto (o redundante)**.
Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame que no es base, existen coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) - \{0\}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$$

Lo que muestra dependencia entre los elementos del frame.

Teorema 3.3.5. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame para H. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz

ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ para algún $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Demostración.

i)$\Longrightarrow$ ii) Asuma $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ como base de Riesz, entonces por definición

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$$

Siendo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal para H y $U : H \to H$ un operador lineal biyectivo acotado.
Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ con $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U e_k = U \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0$$

Como U en particular es un operador lineal inyectivo, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0$$

Por tanto $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$

ii)$\Longrightarrow$ i) Sea $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base canónica ortonormal para $\ell^2(\mathbb{N})$ y asuma que si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ para algún $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ entonces $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame, existe el operador de pre-frame T asociado a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ el cual es biyectivo debido a que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es frame. Como $T\delta_k = f_k$, entonces por definición de base de Riesz $T\delta_k = f_k$; $\forall k$, con T biyectivo y acotado, se concluye que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz. $\square$

Note que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame sobrecompleto, entonces para un elemento dado $f \in H$, este tiene distintas representaciones en términos del frame. De hecho, para cualquier sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) - \{0\}$ la cual cumple

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$$

El teorema de descomposición de frames muestra que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1} f_k \rangle + c_k) f_k$$

El siguiente teorema muestra que todo frame sobrecompleto tiene otras formas duales aparte de la canónica.

Teorema 3.3.6. *Sea* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *un frame sobrecompleto. Entonces existen frames*

$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *los cuales*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \qquad \forall f \in H$$

Demostración. Se mirarán dos casos para realizar la prueba. Para el primero,se supone $f_l = 0$, para algún $l \in \mathbb{N}$. En este caso $S^{-1} f_l = 0$. Tomando $g_k := S^{-1} f_k$ para $k \neq l$ y g_l un vector arbitrario no nulo, se tiene que:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k \\ &= \sum_{k \neq l}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k + \langle f, S^{-1} f_l \rangle f_l \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \end{aligned}$$

Siendo $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Ahora se considera $f_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.3.6, existe una sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) - \{0\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$$

Para cierto $l \in \mathbb{N}$ se tiene $c_l \neq 0$ y se puede escribir:

$$f_l = \frac{-1}{c_l} \sum_{k \neq l} c_k f_k$$

Se probará que $\{f_k\}_{k \neq l}$ es un frame para H. Basta probar la existencia de la cota inferior de frame, para ello se observa que para $f \in H$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz muestra:

$$\begin{aligned}
|\langle f, f_l\rangle|^2 &= |\langle f, \frac{-1}{c_l}\sum_{k\neq l} c_k f_k\rangle|^2 \\
&= |\frac{-1}{c_l}\sum_{k\neq l} c_k\langle f, f_k\rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{|c_l|}\sum_{k\neq l}|c_k|^2\sum_{k\neq l}|\langle f, f_k\rangle|^2 \\
&= C\sum_{k\neq l}|\langle f, f_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

Con $C = \frac{1}{|c_l|}\sum_{k\neq l}|c_k|^2$. Siendo A la cota inferior de frame para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces:

$$\begin{aligned}
A\|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, f_k\rangle|^2 \\
&= \sum_{k\neq l}|\langle f, f_k\rangle^2 + |\langle f, f_l\rangle|^2 \\
&\leq (1+C)\sum_{k\neq l}|\langle f, f_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

Lo que prueba la existencia de la cota inferior de frame.
Denotando al frame dual canónico de $\{f_k\}_{k\neq l}$ por $\{g_k\}_{k\neq l}$ y definiendo $g_l = 0$, se ha encontrado un frame $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ el cual es distinto a $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ puesto que $S^{-1}f_l \neq 0$ y el cual cumple:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, g_k\rangle f_k$$

□

3.4. Estabilidad en Frames

La estabilidad juega un papel importante en las aplicaciones donde aparecen bases. El sentido de estabilidad viene dado por la idea de si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es en algún sentido "*cercana*" a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces ¿es $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ también una base para el espacio? En espacios de Banach se tiene que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base para el espacio de Banach X, entonces $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ será base para X si existe $\lambda \in (0,1)$ tal que:

$$\|\sum c_k(f_k - g_k)\| \leq \lambda\|\sum c_k f_k\|; \quad \forall\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{escalares}$$

El objetivo de esta sección es estudiar esta propiedad extendida a espacios de Hilbert y trabajada con Frames.

Asumiendo que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H, se quiere encontrar las condiciones para que una familia " *perturbada*" $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ sea también un frame.
Se notan los operadores de pre-frame para $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ por T y U respectivamente, así

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to H \qquad\qquad U : \ell^2(\mathbb{N}) \to H$$

$$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \qquad\qquad \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$$

T esta bien definido por ser $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame. El operador U esta bien definido sobre sucesiones finitas, para ver que U esta bien definido en $\ell^2(\mathbb{N})$, se debe probar que $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel.

Teorema 3.4.1. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame con cotas A, B. Sea $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en H y suponga que existen constantes $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$ y*

$$\|\sum c_k(f_k - g_k)\| \leq \lambda\|\sum c_k f_k\| + \mu\left(\sum |c_k|^2\right)^{1/2} \tag{3-5}$$

Para toda sucesión finita de escalares $\{c_k\}$. Entonces $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame para H con cotas

$$A\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)^2, \quad B\left(1 + \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{B}}\right)\right)^2$$

Además, si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz, entonces $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es también una base de Riesz.

Demostración. Por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame, entonces el operador de pre-frame T es acotado y $\|T\| \leq \sqrt{B}$. La condición de la hipótesis (3-5) implica que

$$\begin{aligned}
\|\sum c_k g_k\| &= \|\sum c_k g_k + \sum c_k f_k - \sum c_k f_k\| \\
&= \|\sum c_k(g_k - f_k) + \sum c_k f_k\| \\
&\leq \|-\sum c_k(f_k - g_k)\| + \|\sum c_k f_k\| \\
&\leq \lambda\|\sum c_k f_k\| + \mu\left(\sum |c_k|^2\right)^{1/2} + \|c_k f_k\| \\
&\leq (1+\lambda)\|\sum c_k f_k\| + \mu\left(\sum |c_k|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

El cálculo se tiene para $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$.
Primero se verá que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ converge para cualquier $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$.
Dados $m, n \in \mathbb{N}$, con $n > m$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k - \sum_{k=1}^{m} c_k g_k\| &= \|\sum_{k=m+1}^{n} c_k g_k\| \\
&\leq (1+\lambda)\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k\| + \mu\left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Como $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y $\sum c_k f_k$ es convergente, entonces $\{\sum_{k=1}^{n} c_k g_k\}$ es una sucesión de Cauchy en H y por lo tanto es convergente, así el operados U esta bien definido sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Así se sigue que para todo $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k\| \leq (1+\lambda)\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\| + \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} \tag{3-6}$$

En términos de los operadores T, U se tiene

$$\begin{aligned}\|U\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| &\leq (1+\lambda)\|T\{C_k\}_{k=1}^{\infty}\| + \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left((1+\lambda)\sqrt{B} + \mu\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Luego por teorema 3.1.6, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota

$$\begin{aligned}((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2 &= (1+\lambda)^2 B + 2(1+\lambda)\sqrt{B}\mu + \mu^2 \\ &= (1+\lambda)^2 B + 2(1+\lambda)\frac{B\mu}{\sqrt{B}} + \mu^2 \\ &= B\left((1+\lambda)^2 + 2(1+\lambda)\frac{\mu}{\sqrt{B}} + \frac{\mu^2}{B}\right) \\ &= B\left(1+\lambda+\frac{\mu}{\sqrt{B}}\right)^2\end{aligned}$$

Ahora se probará que $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene cota inferior de frame. Como $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame , el operador $S = TT^*$ es invertible, así se define el operador pseudo-inverso de T (ver lema 3.1.3) por:

$$T^{\dagger} : H \to \ell^2(\mathbb{N}); \;\; T^{\dagger} f : T^*(TT^*)^{-1} f = \{\langle f, (TT^*)^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

Se nota que $\{(TT^*)^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es el frame dual canónico de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, luego por lema 3.2.7

$$\begin{aligned}\|T^{\dagger} f\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1} f_k\rangle|^2 \\ &\leq A^{-1}\|f\|^2; \quad \forall f \in H\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ son convergentes para todo $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, la desigualdad (3-5) se tiene para todo $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$. En términos de los operadores T, U, la desigualdad queda

$$\|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} - U\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| \leq \lambda\|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| + \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} ; \quad \forall \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \tag{3-7}$$

Note que para todo $f \in H$

$$TT^{\dagger}f = TT^{*}(TT^{*})^{-1}f = SS^{-1}f = f$$
$$UT^{\dagger}f = \sum_{k=1}^{\infty}(T^{\dagger}f)_k g_k = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, S^{-1}f_k\rangle g_k$$

Por (3-7), tomando la sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = T^{\dagger}f$ se tiene

$$\begin{aligned}\|f - UT^{\dagger}f\| &\leq \lambda\|f\| + \mu\|T^{\dagger}f\| \\ &\leq \lambda\|f\| + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\|f\| \\ &= \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\|, \quad \forall f \in H\end{aligned}$$

Por hipótesis $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$, entonces el operador $UT^{\dagger}$ es invertible. Se calculará la norma de $UT^{\dagger}$ y $(UT^{\dagger})^{-1}$

Como la norma es inducida por la métrica y por la definición 1.2.1, se tiene que $\|x - y\| = \|y - x\|$, así

$$\|f - UT^{\dagger}f\| = \|UT^{\dagger}f - f\|$$

Además, $\|UT^{\dagger}f\| - \|f\| \leq \|UT^{\dagger}f - f\| \leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\|$
así:

$$\begin{aligned}\|UT^{\dagger}f\| - \|f\| &\leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\| \\ \|UT^{\dagger}f\| &\leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\| + \|f\| \\ \|UT^{\dagger}f\| &\leq \|f\|\left(1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\end{aligned}$$

Luego por el lema 1.3.11

$$\begin{aligned}\|UT^{\dagger}\| &\leq \sup_{\substack{f\in H \\ \|f\|=1}}\|UT^{\dagger}f\| \\ &\leq \sup_{\substack{f\in H \\ \|f\|=1}}\|f\|\left(1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right) \\ &= \left(1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\end{aligned}$$

Así $\|UT^{\dagger}\| \leq 1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}$

Se pasa a ver la norma de $\|(UT^{\dagger})^{-1}\|$. Se sabe que:

$$\|f\| - \|UT^{\dagger}f\| \leq \|f - UT^{\dagger}f\| \leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\|$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|f\| - \|UT^{\dagger}f\| &\leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\| \\ -\|UT^{\dagger}f\| &\leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\|f\| - \|f\| \\ -\|UT^{\dagger}f\| &\leq \|f\|\left(\left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right) - 1\right) \\ \|UT^{\dagger}f\| &\geq \|f\|\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)\end{aligned}$$

Ahora, $\|(UT^{\dagger})(UT^{\dagger})^{-1}\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned}1 &\geq \|f\|\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)\|(UT^{\dagger})^{-1}\| \\ \frac{1}{\|(UT^{\dagger})^{-1}\|} &\geq \|f\|\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right) \\ \|(UT^{\dagger})^{-1}\| &\leq \frac{1}{\|f\|\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)}\end{aligned}$$

Esto último debido a que si $A < B$ entonces $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$, luego por el lema 1.3.11

$$\begin{aligned}\|(UT^{\dagger})^{-1}\| &\leq \sup_{\substack{f\in H\\ \|f\|=1}} \|(UT^{\dagger})^{-1}f\| \\ &\leq \sup_{\substack{f\in H\\ \|f\|=1}} \frac{1}{\|f\|\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)}\end{aligned}$$

Así $\|(UT^{\dagger})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\left(\lambda+\frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)}$
Ahora, tomando cualquier $f \in H$, se puede escribir

$$\begin{aligned}f &= UT^{\dagger}(UT^{\dagger})^{-1}f \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle (UT^{\dagger})^{-1}f, (TT^{*})^{-1}f_k\rangle g_k\end{aligned}$$

Tomando esto en la primera entrada de $\langle f, f\rangle$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f\|^4 &= |\langle f, f\rangle|^2 \\
&= |\sum_{k=1}^{\infty} \langle (UT^{\dagger})^{-1} f, (TT^*)^{-1} f_k\rangle \langle g_k, f\rangle|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle (UT^{\dagger})^{-1} f, (TT^*)^{-1} f_k\rangle|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_k, f\rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{A} \|(UT^{\dagger})^{-1} f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_k, f\rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{A} \left(\frac{1}{1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)} \right)^2 \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_k, f\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Luego

$$
A \left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right) \right)^2 \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_k, f\rangle|^2
$$

Así $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene cota inferior y por tanto es un frame.
Por último, asumiendo que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz, se probará que $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ también es una base de Riesz. Por teorema 3.7, asumiendo que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k = 0$ para algunos coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Por teorema 3.6, la cota inferior de frame coincide con la cota inferior de Riesz, así la desigualdad (3-7) implica que:

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\| & \\
&\leq \lambda \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\| + \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right) \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\|
\end{aligned}
$$

Como $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$, luego aplicando el teorema 3.7 sobre la base de Riesz $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, se concluye que $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz. $\square$

Demostrado el teorema principal de este trabajo de grado, se dará un ejemplo en el cual se verá que si al cambiar la condición $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$ es reemplazada por $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} = 1$, el teorema falla, mostrando así que el teorema es el mejor resultado sobre estabilidad en frames sobre espacios de Hilbert. Varias aplicaciones del teorema se pueden considerar cuando el término $\lambda = 0$ o $\mu = 0$. En estos casos la propiedad frame se garantiza para una clase más amplia de sucesiones con parámetros $c \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.4.2. *Sea* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para* H*. Dada una sucesión* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de números complejos y sea la familia de vectores definida por:*

$$g_k := e_k + a_k e_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Se sabe que $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *al ser una base ortonormal, es un tight frame con cotas* $A = B = 1$*, de este modo*

$$\begin{aligned}\|\sum c_k(f_k - g_k)\| &= \|\sum c_k(e_k - (e_k + a_k e_{k+1}))\| \\ &= \|\sum c_k e_k - c_k e_k - c_k a_k e_{k+1}\| \\ &= \|-\sum c_k a_k e_{k+1}\| \\ &\leq \sum \|c_k a_k e_{k+1}\| \\ &\leq \sum \|c_k\||a_k|\|e_{k+1}\|\end{aligned}$$

Si $a = \sup_k |a_k| < 1$*, entonces*

$$\begin{aligned}\|\sum c_k(f_k - g_k)\| &\leq a\sum \|c_k\|\|e_{k+1}\| \\ &\leq a\sum \|c_k\| \\ &\leq a\left(\sum |c_k|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Así, existen $\lambda, \mu \geq 0$ *con* $\lambda = 0$ *y* $\mu = a$*. Luego, por teorema 3.4.1,* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es un frame con cotas:*

$$\begin{aligned}A\left(1 - \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)\right)^2 &= (1-a)^2 \\ B\left(1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)^2 &= (1+a)^2\end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $a_k = 1$*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, se obtiene la familia*

$$g_k = e_k + e_{k+1}$$

En este caso ya se vio en el ejemplo 3.4.2 que no es un frame para H*. En particular, siendo* $f_k = e_k$

$$\begin{aligned}\|\sum c_k(f_k - g_k)\| &= \|\sum c_k(e_k - (e_k + e_{k+1}))\| \\ &= \|\sum c_k e_k - c_k e_k - c_k e_{k+1}\| \\ &= \|\sum c_k e_{k+1}\| \\ &\leq \sum \|c_k\|\|e_{k+1}\| \\ &\leq \left(\sum |c_k|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Así, la condición 3-5 se cumple para $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ *o* $(\lambda, \mu) = (0, 1)$*, pese a esto, se ve que la condición* $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} = 1$ *junto a la condición 5-3 en el teorema 3.4.1 no implican que* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sea un frame.*

Conclusiones

- Dado un frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en H y bajo ciertas condiciones de estabilidad expresadas en el teorema 3.4.1, toda familia perturbada $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ respecto a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, resulte ser también un frame.
- Las condiciones dadas en el *teorema 3.4.1* ($\mu, \lambda \geq 0$ y $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$) garantizan el *mejor resultado* de estabilidad en Frames sobre espacios de Hilbert. (ver ejemplo 3.4.2).
- Los frames como extensión de las *bases ortonormales* sirven como herramienta en el estudio de las series de Fourier no armónicas, las cuales generalizan a las series de Fourier clásicas.
- Toda base de Riesz sobre un frame en un espacio de Hilbert, donde coinciden las respectivas cotas superiores e inferiores y sus duales. El recíproco no se garantiza.
- En el caso finito, las cotas óptimas de frame están dadas por el mínimo autovalor y el máximo autovalor asociado al operador de frame S.
- Al proyectar la base de Fourier discreta sobre el campo $\mathbb{C}^n$, la proyección resulta ser un Tight Frame sobrecompleto para el campo.

Bibliografía

[1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, second edition, Springer, 1997.

[2] O. Christensen, *Frames and Bases An introductory Course*,Appl. Num. Harm. Anal, Birkhäuser, 2008.

[3] S.J. Favier, *On the Stability of Frames and Riesz Bases*, Appl. Comp. Harm. Anal, Instituto de matemática aplicada, Universidad de San Luis, 1995.

[4] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley & Sons. Inc, 1978.

[5] M. Vaezi,F. Labeau, *Systematic DTF Frames: Principle and eigenvalues structure*, McGill University, 2012.

[6] M. Vetterli, J. Kovačević, V.K. Goyal, *Foundations of Signal Processing*, Cambridge Univertsity Press, 2014.