



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

**Métricas Riemannianas en k –superficies de \mathbb{R}^n , un
acercamiento a grupos de Heisenberg**

Presentado por: Luisa Paulina Rodríguez Quevedo

Código: 20112167028.

Carlos Julio Arrieta.

Bogotá D.C., Colombia.

Septiembre, 2016.

Dedicado a mi familia especialmente a mis padres por sus consejos y apoyo, al profesor Julio Arrieta por su ayuda académica y a mis amigos compañeros de vida.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por todo lo que me ha brindado, a mi familia por la paciencia y colaboración brindada, al profesor Julio Arrieta por la motivación y sus valiosos aportes en Geometría, de igual modo a mis amigos quienes estuvieron día a día apoyando y acompañándome a lo largo de mi carrera, de corazón muchas gracias.

Resumen

El siguiente trabajo busca estudiar la geometría en grupos de Heisenberg. Un grupo de Heisenberg de dimensión tres, notado como H_3 es un subgrupo del grupo $GL(3; \mathbb{R})$ que denota el grupo de matrices cuadradas de orden tres e invertibles.

Dado que toda álgebra de Lie de dimensión n puede ser representada dentro del álgebra de matrices cuadradas de orden $n \times n$, veremos que H_3 es un subgrupo cerrado de $GL(3; \mathbb{R})$ y con las propiedades de los grupos de Lie se dotará con una métrica invariante a izquierda que a su vez permitirá deducir las formas fundamentales, geodésicas y funciones normales en hipersuperficies. Al final se da una breve introducción a superficies minimales en H_3 con algunos ejemplos.

Índice general

1	Preliminares	3
1.1	Variedades	3
1.1.1	Inmersiones y encajes	5
1.1.2	Métrica	8
1.1.3	Conexión	9
1.1.4	Geodésicas	13
1.1.5	Grupos de Lie	14
1.1.6	Función exponencial	19
2	Grupo de Heisenberg	25
2.1	Grupo lineal del espacio euclidiano. $GL(n, \mathbb{R})$	25
2.2	Grupos de Lie nilpotentes	32
2.3	Conexión en H_3	35
2.4	Curvatura	35
2.5	Isometrías	36
2.6	Superficies en H_3	36
3	Geometría en H_3	40
3.1	Geodésicas	40
3.2	Subvariedades Riemannianas	43
3.3	Segunda forma fundamental	43
3.4	Hipersuperficies en espacios euclidianos	45
3.5	Superficies orientables	46
3.6	Mapeo de Gauss	47
3.7	Superficies minimales no parametrizadas	52
4	Conclusión	56

Índice de figuras

Figura 1.1	Ejemplo de inmersión	6
Figura 1.2	Subvariedad encajada	7
Figura 1.3	Pushforward	16
Figura 1.4	Campo de vectores W	20
Figura 1.5	Encaje subgrupo de Lie	23
Figura 2.1	Construcción de la vecindad	29
Figura 2.2	Teorema subgrupo cerrado	30
Figura 3.1	Geodésicas en el grupo de Heisenberg	43

Introducción

En el siguiente trabajo se estudiará la geometría en el grupo de Heisenberg notado como H_3 , con una pequeña introducción a las superficies minimales. El espacio de Heisenberg H_3 es un subgrupo del grupo $GL(3; \mathbb{R})$, es decir, las matrices cuadradas de orden tres invertibles, dados de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se demostrará que H_3 es un subgrupo cerrado de Lie, para dotarlo con una métrica invariante a izquierda, después de ello se darán algunos resultados geométricos sobre geodésicas, función normal de Gauss extendido a hipersuperficies, todo ello con el fin de dar una pequeña introducción a superficies minimales en dicho espacio.

En el capítulo de preliminares se dan los conceptos previos para el desarrollo del tema, empezando por variedades diferenciables, inmersiones y encajes, para introducir grupos de Lie y su álgebra asociada. Un tema fundamental es la función exponencial vital para el hallazgo de la métrica en Heisenberg, la cual se ofrece al final del capítulo.

En el segundo capítulo se parte del concepto de métrica Riemanniana y derivada covariante, después de ello demostrar que H_3 puede verse como un grupo de Lie y dotarlo de un álgebra, después se hallaran las formas fundamentales y conexiones asociadas.

El tercer capítulo habla de algunos resultados geométricos sobre el grupo fundamentados en las hipersuperficies para ello se hace necesario el desarrollo del mismo y de la segunda forma fundamental, esto permitirá caracterizaciones al hablar de superficies mínimas no parametrizadas en el grupo de Heisenberg.

Los grupos de Heisenberg han sido aplicados mayormente a la física cuántica donde tiene sus aplicaciones y análisis de Fourier. Por otro lado el estudio de las superficies mínimas ha sido aplicado en diversas ramas de la ciencia actual, entre ellas la biología molecular, la ciencia de materiales y en física quizás la más destacada es la teoría de la relatividad general. La importancia como investigador reside en el despliegue algebraico y analítico que conlleva el estudio de la geometría sobre una métrica Riemanniana, además abre posibles soluciones a diversos problemas geométricos. Se espera alcanzar una comprensión del espacio de Heisenberg, y que implica el cambio de métrica sobre un espacio real. Las métricas Riemannianas generalizan

el espacio euclidiano a espacios geométricos localmente similares al mismo, lo cual permite extender distintas nociones como lo son la longitud de curva o el área de una superficie. Se busca hallar una generalización de las métricas, con tal fin se toma el espacio n -dimensional euclidiano y el espacio de Heisenberg.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

1. Profundizar en el espacio de Heisenberg asociado a \mathbb{R}^3 dando algunos resultados geométricos entre ellos el comportamiento de las superficies mínimas en dicho espacio.

OBJETIVO ESPECIFICO

1. Estudiar la métrica Riemanniana y las diferentes conexiones en el espacio euclidiano.
2. Comprender los grupos de Lie y sus propiedades para generar una métrica tomando como ejemplo el grupo de Heisenberg.
3. Entender como varían las propiedades geométricas con dos métricas distintas sobre un mismo espacio.
4. Identificar superficies minimales y dar una idea de las caracterizaciones sobre las métricas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el presente capítulo se expondrán conceptos previos y la notación usada para el desarrollo del tema.

SECCIÓN 1.1

Variedades

En esta sección abordaremos algunos resultados básicos de Geometría Riemanniana a fin de poder hablar de una métrica Riemanniana.

Definición 1.1 Una **variedad diferenciable** de dimensión n sobre un conjunto M es una familia de aplicaciones biyectivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ de abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tal que:

- (1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
- (2) Para todo par α, β con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, $(x_\alpha)^{-1}(W)$ y $(x_\beta)^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $(x_\beta)^{-1} \circ (x_\alpha)$ son diferenciables.
- (3) La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es maximal bajo las condiciones (1) y (2).

Un par (U_α, x_α) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ es una parametrización de M en p , $x_\alpha(U_\alpha)$ es una vecindad coordinada en p y una familia satisfaciendo (1) y (2) es una **estructura diferenciable**.

Nota 1.1 Una estructura diferenciable en un conjunto M induce de una manera natural una topología en M , donde si $A \subset M$ es un abierto de M si $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ es un abierto de \mathbb{R}^n para todo α . Tenga en cuenta que la topología esta definida tal que los conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos y las aplicaciones x_α son continuas.

Se exige en las variedades el axioma de Hausdorff para garantizar la unicidad del límite de una sucesión convergente y el axioma de numerabilidad para la existencia de particiones de la unidad diferenciables.

Las variedades de dimensión k que trabajaremos están contenidas en \mathbb{R}^n , o también llamadas k -superficies. Además una función f se dice que es C^∞ o **función suave** si existen todas las derivadas de todos los ordenes.

Definición 1.2 Un **campo de vectores** X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que a cada punto $p \in M$ asocia un vector $X(p) \in T_pM$. Es decir, X es una función de M en el fibrado tangente TM . Un campo es diferenciable si una función $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable.

Considerando una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es posible escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ es una base asociada a x para $i = 1, \dots, n$. También se puede pensar como una función $X : D \rightarrow F$ donde D es el conjunto de funciones diferenciables en M en el conjunto F de funciones en M , definida como

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

donde f expresa una parametrización de x .

Supongamos ahora que tenemos dos campos de vectores X y Y , ¿de qué forma podemos componer estos campos vectoriales para que den otro campo vectorial?.

Nótese que no siempre se tiene esta composición, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1 Sea $V = \frac{\partial}{\partial x}$ y $W = \frac{\partial}{\partial y}$ sobre \mathbb{R}^2 , entonces suponga $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$. Por un lado la composición es

$$VW(fg) = VW(xy) = V(x) = 1$$

pero utilizando regla del producto tenemos

$$VW(fg) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y}(fg) \right) = fVWg + gVWf = 0$$

esto indica que la composición de VW no es derivación de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Para resolver este problema tengamos en cuenta el siguiente lema.

Lema 1.1 Sea X y Y campos de vectores diferenciables en una variedad diferenciable M . Entonces existe un único campo vectorial Z tal que para todo $f \in D$,

$$Zf = (XY - YX)f.$$

Una demostración de este lema se puede ver en [6]. Un campo vectorial Z como en el lema (1.1) es llamado un corchete $[X, Y]_p = X_pY - Y_pX$ de X, Y que a su vez es diferenciable.¹

¹*Geometría Riemanniana*. Manfredo P. Docarmo. Geometria Riemanniana. Livros tecnicos e cientificos editora s.a. edition, 1988. p. 22

Lema 1.2 Sean X, Y, Z campos de vectores en M , sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, entonces el corchete de Lie tiene las propiedades siguientes:

(1) (Bilineal).

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \text{ y } [X, aV + bW] = a[X, V] + b[W, X]$$

(2) (Antisimétrico). $[X, Y] = -[Y, X]$,

(3) (Identidad de Jacobi). $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y + gY(f)X$.

Demostración 1.1 Los puntos (1) y (2) se demuestran desde la definición. La identidad de Jacobi se tiene dado que

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

por otro lado

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XYZ.$$

se concluye usando antisimetría.

Para demostrar (4),

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) = fgXY + fX(g)Y - gf(YX) - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)X - gY(f)X. \end{aligned}$$

1.1.1. Inmersiones y encajes

Definición 1.3 Sea M^m y N^n variedades diferenciables.

- (1) Una función diferenciable $\varphi : M \rightarrow N$ tal que $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$, se le denomina **inmersión**.
- (2) Si φ cumple (1) y además es un homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, donde $\varphi(M)$ tiene una topología inducida por N , se dice que φ es un **encaje**.
- (3) Una función diferenciable $\psi : M \rightarrow N$ es una submersión si $d\psi_p : T_pM \rightarrow T_{\psi(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in M$.

Ejemplo 1.2

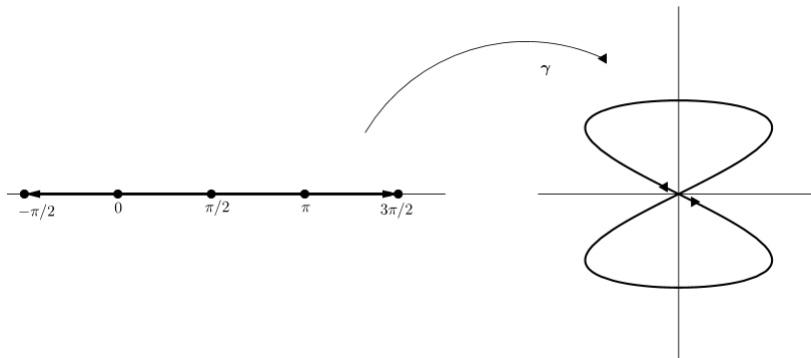


Figura 1.1: Ejemplo de inmersión

Considere la curva $\gamma: (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Esta curva es una inmersión, en efecto para que $d\gamma_p$ sea inyectiva para todo $p \in M$ es equivalente en este caso a que $\gamma'(t) \neq 0$ dado que la curva es regular para el dominio donde esta definida. Pero esta curva no es un encaje, sabemos que la compacidad se conserva bajo homeomorfismos como la imagen es un compacto en la topología de subespacio pero el dominio no lo es, no es homeomorfismo y el resultado se sigue. Este ejemplo tampoco es una submersión pues no es sobreyectiva.

Subvariedades encajadas

Definición 1.4 Suponga que M es una variedad $N \subset M$, N se dice una subvariedad encajada de M si

- (I) La función $i: N \rightarrow M$ es suave
- (II) La diferencial $(di)_p$ en cada punto de $p \in N$ es una función lineal inyectiva.
- (III) i es un homeomorfismo sobre la imagen, es decir un $D \subseteq N$ es un abierto en la topología de N si y solo si D es abierto en la topología inducida sobre N desde M , es decir los subconjuntos abiertos en N son las intersecciones con N de los subconjuntos abiertos en M .

Ejemplo 1.3 Un ejemplo es una curva parametrizada de \mathbb{R}^3 , la condición (i) implica que la parametrización es suave y la segunda que la parametrización es regular.

Definición 1.5 Si una función i satisface la condición (i) y (ii) entonces N definida como en la definición (1.4) es una subvariedad inmersa.

Otro ejemplo de subvariedad encajada es el grafo de una función

Definición 1.6 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ser una función continua. EL grafo de F es el subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definido por

$$G(F) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ y } y = F(x) \right\}$$

con la topología de subespacio.

Ejemplo 1.4 Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable, entonces el grafo de F es una subvariedad encajada n - dimensional de \mathbb{R}^{n+k} .

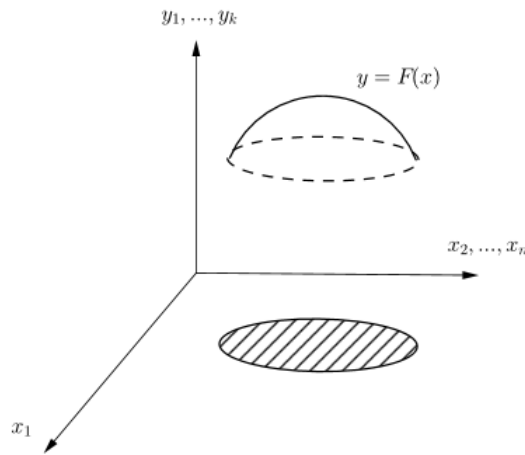


Figura 1.2: Subvariedad encajada

Demostración 1.2 Sea φ una función $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ por

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

Note que φ es diferenciable y es un difeomorfismo porque la inversa se puede escribir explícitamente como

$$\varphi^{-1}(u, v) = (u, v + F(u)).$$

Como $\varphi(G(F))$ es el corte $\{(u, v) : v = 0\}$ de $U \times \mathbb{R}^k$, lo cual demuestra que $G(F)$ es una subvariedad encajada.

Definición 1.7 Si W es un subespacio lineal de un espacio vectorial finito dimensional V , entonces la codimensión de W en V es la diferencia entre las dimensiones

$$\text{codim}(W) = \dim(V) - \dim(W)$$

Definición 1.8 M es una **hipersuperficie** si es una subvariedad de codimensión 1 en \mathbb{R}^{n+1} .

1.1.2. Métrica

Definición 1.9 Una **métrica Riemanniana** sobre una variedad diferenciable M es una función g que asocia a cada punto p un producto interno \langle, \rangle esto es una forma bilineal tal que para todo $X, Y \in T_p M$.²

- (1) $g(X, Y) = g(Y, X)$ **(Simétrica).**
- (2) $g(X, X) > 0$, si $X \neq 0$. **(Definida positiva).**
- (3) Si $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema local de coordenadas en p , tal que $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$.

Algunos aspectos a tener en cuenta son:

- (1) Si $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ son dos campos de vectores sobre M , entonces:

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j.$$

- (2) La longitud o norma de un vector X está dada por:

$$\|X\| = \sqrt{g(X, Y)}.$$

- (3) El ángulo entre los dos vectores X y Y esta determinado por

$$\beta = \text{Arcos} \left(\frac{g(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|} \right) \quad (X, Y \text{ no nulos.})$$

- (4) Si la condición de que g este definida positiva se reemplaza, da origen a una métrica subriemanniana. Un ejemplo es la métrica de Lorentz.

Ejemplo 1.5 (Métrica euclidiana) Es la dupla $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_0)$, donde la métrica $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$ tal que el producto escalar inducido por esta métrica es el producto escalar euclidiano $g_0(,) = \langle, \rangle$.

- **Coordenadas Esféricas.** Si las coordenadas (r, θ, φ) asociadas a $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi = x(r, \theta, \varphi). \\ y = r \sin \theta \sin \varphi = y(r, \theta, \varphi). \\ z = r \cos \theta = z(r, \theta, \varphi). \end{cases}$$

Para $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < \pi$, la matriz asociada es

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

²Ibid, p. 18.

1.1.3. Conexión

Definamos $\chi(M)$ el conjunto de campo de vectores de clase C^∞ y por $\mathcal{D}(M)$ el anillo de funciones reales de clase C^∞ definidas en M .

Definición 1.10 (Conexión afín) Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una función

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que satisface las siguientes propiedades

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$.
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$.
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

donde $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A toda conexión se le asocia una derivación covariante como se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1.1 Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c : I \rightarrow M$ en otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c , denominada la derivada covariante de V a lo largo de c tal que,

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ donde } W \text{ es un campo de vectores a lo largo de } c \text{ y } f \text{ es una función diferenciable en } I.$$

$$(c) \quad \text{Si } V \text{ es inducido por un campo de vectores } Y \in \chi(M), \text{ es decir } V(t) = Y(c(t)), \text{ entonces } \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y.$$

Demostración 1.3 Supongamos que existe tal correspondencia. Sea $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ un sistema de coordenadas con $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ y sea $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ una expresión local de $c(t)$ para $t \in I$. Sea $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, es posible expresar localmente el campo de vectores V de la siguiente forma

$$V = \sum_j v^j X_j, \quad j = 1, \dots, n \text{ donde } v^j = v^j(t) \text{ y } X_j = X_j(c(t)).$$

Por las condiciones a y b tenemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Además por c e y la primera propiedad de conexión afín

$$\begin{aligned}\frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j. \quad (1.2)$$

La expresión anterior muestra que si existe una correspondencia que satisface las condiciones de la hipótesis tal correspondencia es única.

Para mostrar la existencia, se define $\frac{DV}{dt}$ en $x(U)$ por la última ecuación. Note que esta cumple las propiedades deseadas, si $y(W)$ es otra vecindad coordinada, con $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ en $y(W)$ como la última ecuación las definiciones coinciden en $y(W) \cap x(U)$ por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $x(U)$. La definición puede ser extendida para todo M y se concluye la demostración..³

Definición 1.11 Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ y una métrica Riemanniana \langle, \rangle . Una conexión se dice **compatible** con una métrica \langle, \rangle cuando para toda curva diferenciable c y cualesquiera par de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de c , tenemos $\langle P, P' \rangle = k$, donde k es constante.

En esta definición es necesario el concepto de campos paralelos, si M es una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ , un campo vectorial V a lo largo de una curva $c : I \rightarrow M$ es llamado paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposición 1.2 Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ en M es compatible con una métrica si y solo si para todo par V, W de campo de vectores a lo largo de una curva diferenciable $c : I \rightarrow M$ se cumple que

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Es decir si ∇ es compatible con \langle, \rangle entonces se puede diferenciar el producto interno por la regla del producto usual. Esta demostración y el siguiente corolario se pueden ver en [6].

Corolario 1.1 Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana M es compatible con una métrica si y solo si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad X, Y \text{ y } Z \in \chi(M).$$

³Ibid. p. 25.

Este corolario servirá para expresar más fácilmente lo que implica que una variedad sea compatible a una métrica, que es importante para el desarrollo del siguiente teorema, considerado el teorema fundamental de conexión. Antes de empezar, se debe tener en cuenta que una conexión afín se dice **simétrica** cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$. Esto a su vez implica $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Estos Γ_{ij}^k son llamados los símbolos de Christoffel. En términos de coordenadas locales, escogiendo un sistema de coordenadas en torno de $p, (x_1, x_2, \dots, x_n)$, si

$$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i \text{ y } Y = \sum_{j=1}^n Y_j e_j \text{ con } e_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Usando propiedades obtenemos la igualdad,

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j} X_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j + Y_j \nabla_{e_i} e_j \right),$$

Haciendo $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$, por tanto

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j} X_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j + Y_j \Gamma_{ij}^k e_k \right),$$

Teorema 1.1 (Levi-Civita) Dada una variedad Riemanniana M , existe una única conexión afín ∇ en M que satisface las siguientes condiciones

- ∇ es simétrica.
- ∇ es compatible con una métrica Riemanniana.

Demostración 1.4 Suponga la existencia de ∇ , entonces por el corolario anterior

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

de igual modo

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Luego teniendo en cuenta la definición de simetría de la conexión podemos reescribir como

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle,$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle,$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Adicionando las primeras dos ecuaciones y restando la tercera se obtiene

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ahora suponga que ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones que son simétricas y compatibles con la métrica. Como el lado derecho de (1.3) no depende de la conexión, calcular $\langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle$ y $\langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle$ es equivalente y tendríamos que $\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0$, para todo X , Y , y Z . Esto se tiene solo si $\nabla_X^1 = \nabla_X^2$ para todo X y Y , por tanto $\nabla^1 = \nabla^2$.⁴ Para mostrar la existencia se debe mostrar que (1.3) define una conexión y que cumple las propiedades. En efecto si definimos una conexión $C(X, Y, Z)$ que cumple (1.3), entonces

$$\begin{aligned} C(fX, Y, hZ) &= fX(h \langle Y, Z \rangle) + Y(fh \langle Z, X \rangle) - hZ(f \langle X, Y \rangle) + h(\langle Z, [fX, Y] \rangle) \\ &\quad + (\langle Y, [hZ, fX] \rangle) + f(\langle X, [hZ, Y] \rangle) \\ &= fhX(\langle Y, Z \rangle) + fhY(\langle Z, X \rangle) - fhZ(\langle X, Y \rangle) + f(Xh)(\langle Y, Z \rangle) + \\ &\quad fY(h)(\langle Z, X \rangle) + hY(f)(\langle Z, X \rangle) - hZ(f)(\langle X, Y \rangle) + hf(\langle Z, [X, Y] \rangle) \\ &\quad + hf(\langle Y, [Z, X] \rangle) + fh(\langle X, [Z, Y] \rangle) - hY(f)(\langle Z, X \rangle) - fX(h)(\langle Y, Z \rangle) \\ &\quad + hZ(f)(\langle Y, X \rangle) - fY(h) \langle X, Z \rangle \\ &= fhC(X, Y, Z) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} C(X, fY, Z) &= fC(X, Y, Z) + X(f) \langle Y, Z \rangle - Z(f) \langle X, Y \rangle + X(f) \langle Z, Y \rangle + Z(f) \langle X, Y \rangle \\ &= fC(X, Y, Z) + 2X(f) \langle Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

Entonces para definir $\nabla_X Y$ se requiere que $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} C(X, Y, Z)$ por tanto

$$\langle \nabla_X(fY), Z \rangle = f \langle \nabla_X Y, Z \rangle + X(f) \langle Y, Z \rangle = \langle f \nabla_X Y + X(f)Y, Z \rangle$$

Entonces ∇ satisface la regla de Leibniz y a su vez define una conexión.

Si tomamos la ecuación (1.2) y como $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, una derivada covariante tiene la siguiente expresión

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k. \quad (1.4)$$

⁴Ibid p. 26

1.1.4. Geodésicas

Definición 1.12 Sea M una variedad con una conexión lineal ∇ y sea γ una curva en M . La aceleración de γ es el campo de vectores $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)$ a lo largo de γ . Una curva γ es llamada una geodésica con respecto a ∇ si la aceleración es cero, es decir

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0.$$

Teorema 1.2 (Existencia y unicidad de geodésicas) Sea M una variedad con una conexión lineal. Para cada $p \in M$ y cada $V \in T_p M$ y cada $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ conteniendo a t_0 y una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ que satisface $\gamma(t_0) = p, \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = V$.

Demostración 1.5 Para ello se debe determinar ecuaciones locales satisfechas por una geodésica γ en un sistema de coordenadas (U, x) en torno de $\gamma(t_0), t_0 \in I$. En U

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Pero γ es una geodésica si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

esto se tiene por la (1.4). Luego el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

cumple esta ecuación. El camino usual para probar la existencia y unicidad para un sistema de ecuaciones de segundo orden es introducir variables auxiliares para poder convertirlo en un sistema equivalente de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= y_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \end{aligned}$$

Por la existencia y unicidad del teorema para EDO de primer orden, para cada $(p, V) \in U \times \mathbb{R}^n$, existe $\varepsilon > 0$ y una única solución $\eta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tal que satisface la condición inicial $\eta(t_0) = (p, V)$. Si escribimos las componentes de la función de η como $\eta(t) = (x_i(t), y_i(t))$, entonces $\gamma(t)$ satisface la existencia del lema.

Para probar la unicidad suponga que $\gamma, \sigma : I \rightarrow M$ son geodésicas definidas sobre un intervalo abierto con $\gamma(t_0) = \sigma(t_0)$ y $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$. Por la parte de la unicidad del teorema de EDO, esto se tiene para alguna vecindad de t_0 . Sea β el supremo de B en $[t_0, b]$. Si $\beta \in I$ por la continuidad $\gamma(\beta) = \sigma(\beta)$ y $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$ y aplicando la unicidad local en una vecindad de β entonces se tiene a lo largo del intervalo, lo cual es una contradicción. Un argumento similar sirve para el lado izquierdo de t_0 y se concluye el teorema para todo I .

1.1.5. Grupos de Lie

Definición 1.13 Un **difeomorfismo** entre variedades suaves M y N una función suave $F : M \rightarrow N$ que tiene inversa suave.

Definición 1.14 Un **Grupo de Lie** G es una variedad diferenciable dotado de una estructura de grupo tal que la función

$$\begin{aligned} m & : G \times G \rightarrow G \\ (a, b) & \mapsto ab, \end{aligned}$$

y la inversa

$$\begin{aligned} i & : G \rightarrow G \\ a & \mapsto a^{-1}, \end{aligned}$$

son diferenciables.

Dado que ambas funciones son suaves entonces son continuas, por tanto un grupo de Lie es en particular un grupo topológico, es decir un espacio topológico con una estructura de grupo tal que m e i son funciones continuas.

Ejemplo 1.6 El grupo \mathbb{R}^n es un grupo de Lie de dimensión n . En efecto, \mathbb{R}^n es una variedad C^∞ y un grupo abeliano con la adición. Es más

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{aligned}$$

es una función diferenciable. Además la función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n que toma a cada x y saca su inversa también es diferenciable.

Notemos que G es un grupo de Lie si y solo si la función

$$\begin{aligned} \pi & : G \times G \rightarrow G \\ (a, b) & \mapsto ab^{-1}, \end{aligned}$$

es diferenciable.

Sea G un grupo arbitrario de Lie. Cada elemento $g \in G$ define funciones, **translación a izquierda** como

$$\begin{aligned} L_g & : G \rightarrow G \\ h & \mapsto L_g(h) = gh. \end{aligned}$$

y *translación a derecha* como

$$\begin{aligned} R_g &: G \rightarrow G \\ h &\mapsto R_g(h) = hg. \end{aligned}$$

Dado que L_g puede escribirse como la composición de funciones diferenciables de la siguiente forma

$$G \xrightarrow{i_g} G \times G \xrightarrow{m} G$$

donde $i_g(h) = (g, h)$ y m es como la definimos anteriormente, se sigue que L_g es diferenciable. Además es un difeomorfismo de G , porque L_g^{-1} es inversa diferenciable para este. Del mismo modo $R_g : G \rightarrow G$ es difeomorfismo.⁵

Definición 1.15 Si G y H son grupos de Lie, un **homomorfismo de grupo de Lie** de G a H es una función diferenciable $F : G \rightarrow H$ que también es un homomorfismo de grupo. Se denomina isomorfismo de grupo de Lie si también es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.7 La función exponencial es un homomorfismo de grupo de Lie. En efecto,

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

tal que $\exp(t) = e^t$ es diferenciable, y es un homomorfismo de grupo dado que $e^{(s+t)} = e^s e^t$. Además la imagen de \exp es un subgrupo abierto \mathbb{R}^+ consistiendo de los números reales positivos y $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es un isomorfismo de grupo de Lie con inversa $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.16 Si G es un grupo de Lie y V es un espacio vectorial, cada homomorfismo de grupo de Lie $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G , donde $GL(V)$ denota el grupo de transformaciones lineales invertibles de V en V .

Definición 1.17 Un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G es un subgrupo de G dotado con una topología y una estructura diferenciable haciendo de este un grupo de Lie y una subvariedad encajada de G .

Ejemplo 1.8 EL subconjunto $GL^+(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ que consiste de las matrices cuadradas de $n \times n$ con determinante positivo es un subgrupo porque $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Además es un subconjunto abierto de $GL(n, \mathbb{R})$ por la continuidad de la función determinante y entonces es un subgrupo encajado de Lie de dimensión n^2 .

⁵John M. Lee. *An introduction to smooth manifolds*. University of Washington Department of Mathematics. 2002. p. 126

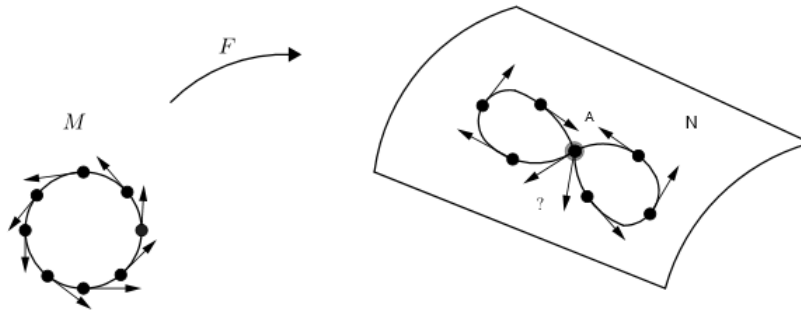


Figura 1.3: Pushforward

Corchete de Lie

Para poder verificar el siguiente teorema se necesita la siguiente definición

Definición 1.18 Si M y N son variedades suaves y $F : M \rightarrow N$ es una función suave para $p \in M$ definimos una función $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, llamado *pushforward* asociado con F por $(F_* X)(f) = X(f \circ F)$.

Si $f \in C^\infty(N)$, entonces $f \circ F \in C^\infty M$, luego $X(f \circ F)$ tiene sentido. El operador $F_* X$ es lineal. Notemos que si $F : M \rightarrow N$ es una función suave y Y es un campo de vectores en M , entonces para cada $p \in M$, obtenemos un vector $F_* Y_p \in T_{F(p)} N$ por *pushforward* de Y_p . Sin embargo esto no define un campo vectorial sobre N . Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.9 Si F no es sobreyectiva no se puede asignar un camino de vectores a un punto q que no este en $F(M)$, y si no es inyectiva para algún punto de N podríamos tener distintos vectores como *pushforward* de Y , como se ve en la imagen (1.3). En la figura podemos ver como se asocia dos vectores al mismo punto A , es decir no se le puede asociar un único vector.

Por tanto se da la siguiente definición.

Definición 1.19 Si $F : M \rightarrow N$ es diferenciable y Y es un campo de vectores en M , si existe un campo de vectores Z sobre N con la propiedad que cada $p \in M$, entonces $F_* Y_p = Z_{F(p)}$, decimos que Y y Z son F -relacionados

Lema 1.3 Suponga $F : M \rightarrow N$ es una función diferenciable, Y campo de vectores en M , y Z campo de vectores en N . Entonces Y y Z son F -relacionados si y solo si para cada función a valor real diferenciable f definida sobre un subconjunto de N ,

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Demostración 1.6 Para cada $p \in M$ y cada función a valor real diferenciable f cercana a $F(p)$,

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = (F_*Y_p)f.$$

mientras que

$$Zf \circ F(p) = (Zf)(F(p)) = Z_{F(p)}f.$$

Pero $F_*Y_p = Z_{F(p)}$ si y solo si $Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$ para todo p , por tanto Y y Z son F -relacionados.

Proposición 1.3 (Naturalidad del corchete de Lie) Sea $F : M \rightarrow N$ una función diferenciable, y sea X_1, X_2 campos de vectores en M y Y_1, Y_2 campos de vectores en N tal que X_i es F -relacionado a Y_i para $i = 1, 2$. Entonces $[X_1, X_2]$ es F -relacionada a $[Y_1, Y_2]$.

Demostración 1.7 Usando el lema anterior y como X_i es F -relacionado con Y_i

$$X_1X_2(f \circ F) = V_1((Y_2f) \circ F) = (Y_1Y_2f) \circ F.$$

del mismo modo

$$X_2X_1(f \circ F) = (Y_2Y_1f) \circ F.$$

Entonces

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1X_2(f \circ F) - X_2X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1Y_2f) \circ F - (Y_2Y_1f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2]f \circ F). \end{aligned}$$

Corolario 1.2 Suponga $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y X_1, X_2 son campos de vectores de M . Entonces $F_*[V_1, V_2] = [F_*V_1, F_*V_2]$.

Demostración 1.8 Para este caso $W_i = F_*V_i$.

Notemos que el corolario es equivalente a afirmar que $[X_1, X_2] = dF([Y_1, Y_2])$, lo cual servirá para mostrar que el corchete esta en un grupo de Lie.

Proposición 1.4 Si G es un grupo de Lie y $X, Y \in Lie(G)$, entonces $[X, Y] \in Lie(G)$.

Demostración 1.9 Dado que $X = dL_p(X)$ y $Y = dL_p(Y)$ para todo $p \in G$, por el lema anterior

$$dL_p([X, Y]) = [dL_p(X), dL_p(Y)] = [X, Y].$$

Luego, $[X, Y] \in Lie(G)$.

Álgebras de Lie

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{h} dotado con una función bilineal $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ denotado por $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ llamado el corchete de X y Y satisfaciendo las siguientes propiedades, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$

1. (Bilinealidad). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \text{ y } [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

2. (Antisimétrico). $[X, Y] = -[Y, X]$,

3. (Identidad de Jacobi). $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Si \mathfrak{h} es un álgebra de Lie, un subespacio lineal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ es denominado **subálgebra de Lie de \mathfrak{h}** si esta es cerrada bajo corchetes de Lie.

Definición 1.20 El álgebra de Lie de todos los campos de vectores a izquierda diferenciables sobre un grupo de Lie es llamado el álgebra de Lie de G y es denotado por $Lie(G)$.

Ejemplo 1.10 El espacio vectorial $M(n, \mathbb{R})$ de las matrices reales es un n^2 -dimensional álgebra de Lie bajo el corchete conmutador

$$[A, B] = AB - BA$$

Calculando directamente vemos que cumple la antisimetría y la identidad de Jacobi. Cuando se toma a $M(n, \mathbb{R})$ como un álgebra de Lie con este corchete, denotamos a esta como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Si \mathfrak{a} y \mathfrak{h} son álgebras de Lie, una función lineal $A : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un **homomorfismo de álgebra de Lie** si preserva corchetes, es decir $A[X, Y] = [AX, AY]$. Además, si es invertible recibe el nombre de **isomorfismos de álgebras de Lie**.

Teorema 1.3 Si G y H son grupos de Lie isomorfos, entonces sus respectivas álgebras de Lie son isomorfas también.

Demostración 1.10 Si $F : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de grupos de Lie, tenemos en particular que F es un difeomorfismo y $F(e) = e$, luego, $dF_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como F es difeomorfismo y por el corolario (1.2)

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)], \quad \text{para todo } X, Y \in Lie(G).$$

Si se aplica a ambos lados de la igualdad sobre e , entonces $dF_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Dado que $F^{-1} : H \rightarrow G$ también es un homomorfismo de grupos de Lie de manera análoga

se tiene $dF_e^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Teniendo en cuenta que si M, N y P son variedades diferenciables y $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ son funciones diferenciables, sabemos que $d(F \circ G) = dG \circ dF$ como funciones de $TM \rightarrow TP$. Esto garantiza que $dF_e^{-1} \circ dF_e$ y $dF_e \circ dF_e^{-1}$ son inversas una de otras, por ende es isomorfismo de grupos de Lie.⁶

1.1.6. Función exponencial

Definición 1.21 Sea G un grupo de Lie. Un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ es denominado un subgrupo uniparamétrico de G .

Es necesario el concepto de flujo para el desarrollo de la exponencial, usado para visualizar la familia de curvas integrales asociadas con un campo de vectores.

Definición 1.22 Si V es un campo de vectores diferenciables sobre M , una **curva integrable** de V es una curva suave $\gamma : J \rightarrow M$, donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto tal que

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \text{ para todo } t \in J.$$

Demostración 1.11 Sea $W = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ sobre \mathbb{R}^2 . Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva suave, debe cumplir la condición $\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$ donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, por tanto

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x(t), y(t))} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x(t), y(t))} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x(t), y(t))} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x(t), y(t))}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(t) - b \sin(t) \\ y(t) &= a \sin(t) + b \cos(t) \end{aligned}$$

para a, b constantes, es decir $\gamma(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$ son las curvas integrales de W . Como lo podemos ver en la imagen⁷ (1.4).

Para el próximo teorema necesitamos el siguiente resultado

Teorema 1.4 Sea G un grupo de Lie. El subgrupo uniparamétrico de G son precisamente las curvas integrales de vectores invariantes a izquierda empezando en la identidad, entonces existe una correspondencia uno a uno de los subgrupos uniparamétricos de G , $\text{Lie}(G)$ y $T_e G$.

⁶Edson Sampaio. *A aplicacao de Gauss de superficies minimas no espaco de heisenberg*. 2012. p. 5

⁷Ibid. p. 551

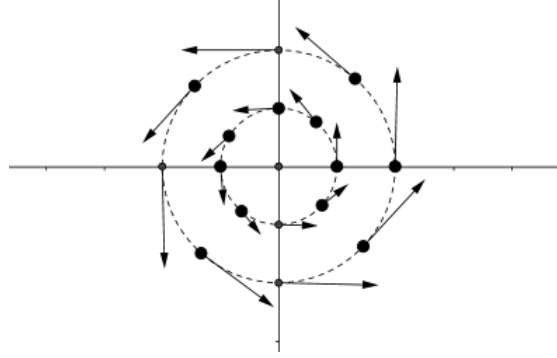


Figura 1.4: Campo de vectores W

Demostración 1.12 Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico, y sea $X = F_*(d/dt) \in \text{Lie}(G)$ donde el d/dt es tomado como un campo de vectores invariantes a izquierda sobre \mathbb{R} . Entonces se mostrará que F es una curva integrable de X . Como $F_*(d/dt)$ está definido como el único campo vectorial invariante a izquierda sobre G que está F -relacionado a d/dt , lo cual se puede ver en [10], tenemos para cada $t_0 \in \mathbb{R}$

$$F'(t_0) = F_*(d/dt)|_{t_0} = X_{F(t_0)},$$

por ende F es una curva integral de X , y queda demostrado.

Sea V un campo de vectores suaves sobre una variedad M , y si para cada punto $p \in M$ existe una única curva integral $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ empezando en p . Para cada $t \in \mathbb{R}$ se puede definir una función θ_t de M en M que envía cada punto p al punto en la curva integral

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$$

Además como una curva integral bajo traslación es una curva integral, si se tiene que $q = \theta^{(p)}(s)$, entonces $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$ es una curva integral que empieza en q , asumiendo la unicidad de curvas integrales, tenemos $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s)$, lo cual describe la siguiente ecuación

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Como $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$ que se cumple por definición, entonces la función $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ es una acción de grupo de \mathbb{R} en M . (Si G es un grupo y M es un conjunto, una acción a izquierda de G sobre M es una función de $\theta : G \times M \rightarrow M$ que satisface, primero $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ para todo $p \in M$ y $g_1, g_2 \in G$ y segundo que $\theta_e = \text{Id}_M$.)

Definición 1.23 Un flujo global sobre M o acción de grupo uniparamétrico es una acción a izquierda de \mathbb{R} sobre M , que es una función continua $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que cumple las siguientes propiedades para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y todo $p \in M$:

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t+s, p), \quad \theta(0, p) = p.$$

Ejemplo 1.11 El flujo de $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ es la función $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\theta_t(x, y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, θ_t rota el plano en un ángulo t .⁸

Definición 1.24 (Función exponencial) Dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie \mathfrak{g} , defina una función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, por $\exp X = F(1)$, donde F es subgrupo uniparamétrico generado por X .

Proposición 1.5 (Propiedades de la función exponencial) Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{g} su álgebra de Lie.

- (1) Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $F(t) = \exp tX$ es subgrupo uniparamétrico de G generado por X .
- (2) Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\exp (s+t)X = \exp sX \exp tX$
- (3) El *pushforward* $\exp_* = T_0\mathfrak{g} \rightarrow T_eG$ es la función identidad, bajo las identificaciones canónicas de ambos $T_0\mathfrak{g}$ y T_eG con \mathfrak{g} mismo.
- (4) La función exponencial es un difeomorfismo de una vecindad de 0 en \mathfrak{g} sobre una vecindad de e en G .

Demostración 1.13 Como el subgrupo uniparamétrico generado por X es igual a la curva integral de X empezando en e , entonces se debe mostrar que $\exp tX = \theta_{(X)}^{(e)}(t)$ donde para cada $X \in \mathfrak{g}$ se denota $\theta_{(X)}$ como el flujo de X . pero mostrar la igualdad anterior es equivalente a

$$\theta_{(tX)}^{(e)}(1) = \theta_{(X)}^{(e)}(t).$$

Para esto se probará que

$$\theta_{(tX)}^{(e)}(s) = \theta_{(X)}^{(e)}(st).$$

Fijando t y $t \in \mathbb{R}$ si se define una curva suave $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ por

$$\gamma(s) = \theta_{(X)}^{(e)}(st),$$

por la regla de la cadena,

$$\gamma'(s) = t(\theta_{(X)}^{(e)})'(st) = tX_{\gamma(s)},$$

es decir γ es una curva integral del campo de vectores tX . Como $\gamma(0) = e$, por la unicidad de las curvas integrales tenemos $\gamma(s) = \theta_{(tX)}^{(e)}(s)$ y con esto probamos la igualdad.

La siguiente proposición se tiene de la anterior dado que $t \rightarrow \exp tX$ es un homomorfismo de grupo.

⁸John M. Lee. *Riemannian manifolds*. University of Washington Department of Mathematics. 1997. p. 524.

Para probar la tercera proposición, sea X en \mathfrak{g} arbitraria, y sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ la curva $\sigma(t) = tX$. Entonces $\sigma'(0) = X$, tenemos

$$\exp_* X = \exp_* \sigma'(0) = (\exp \circ \sigma)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tX = X.$$

Para probar el segundo ítem teniendo en cuenta lo anterior y el teorema de la función inversa, la \exp es un difeomorfismo local.

Teorema 1.5 Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{g} ser su álgebra de Lie. Para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, existe una función suave $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo que $Z(0) = 0$, y tal que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp t(X + Y + Z(t)).$$

Demostración 1.14 Como la función exponencial es un difeomorfismo para alguna vecindad del origen en \mathfrak{g} , entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el mapeo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$ definido por

$$\gamma(t) = \exp^{-1}(\exp tX \cdot \exp tY)$$

es diferenciable, además $\gamma(0) = 0$. Pero γ se puede ver como una composición de la siguiente forma

$$\mathbb{R} \xrightarrow{e_x \times e_y} G \times G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{\exp^{-1}} G$$

donde $e_x(t) = \exp tX$ y $e_y(t) = \exp tY$. Entonces considerando que $m_* : T_\varepsilon G \oplus T_\varepsilon G \rightarrow T_\varepsilon G$ está dado por $m_*(X, Y) = X + Y$, tenemos que

$$\gamma'(0) = \exp_*^{-1}(e'_x(0) + e'_y(0)) = X + Y.$$

Por la fórmula de Taylor para γ se tiene

$$\gamma(t) = t(X + Y) + tZ(t)$$

para alguna Z tal que $Z(0) = 0$.

Proposición 1.6 Sea G un grupo de Lie, y suponga $H \subset G$ es un subgrupo que es también una subvariedad encajada. Entonces H es un subgrupo cerrado de Lie de G .

Demostración 1.15 Para ello se debe verificar que la multiplicación $H \times H \rightarrow H$ y la inversión $H \rightarrow H$ son funciones suaves. Como la multiplicación es una función suave de $G \times G \rightarrow G$ luego $H \times H \rightarrow G$. Como H es un subgrupo entonces $H \times H$ esta en H y como H es un encaje, esto es una función suave en H . El mismo argumento se usa para la inversión, luego H es un subgrupo de Lie.

Suponga que existe $\{h_i\}$ una sucesión de puntos en \overline{H} convergiendo a un punto $g \in G$. Sea U el

dominio de la carta para H conteniendo la identidad, y sea W ser una vecindad tal que $\overline{W} \subset U$. Como

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto \mu(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2 \end{aligned}$$

es continuo, existe una vecindad V de la identidad con la propiedad que $V \times V \subset \mu^{-1}(W)$, es decir que $g_1^{-1}g_2 \in W$ siempre que $g_1, g_2 \in V$. Podemos ver en la figura (1.5) las vecindades des-

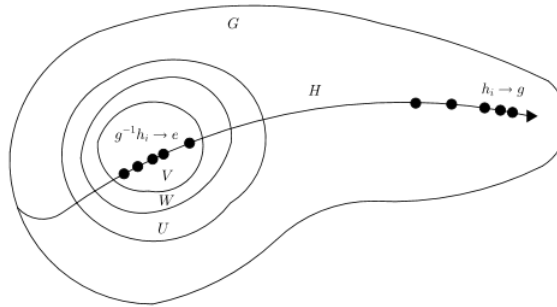


Figura 1.5: Encaje subgrupo de Lie

critas anteriormente, como $g^{-1}h_i \rightarrow e$ descartando un número finito de términos de la sucesión, se puede asumir que $g^{-1}h_i \in V$ para todo i . Luego

$$h_j^{-1}h_i = (g^{-1}h_j)^{-1}(g^{-1}h_i) \in W$$

para todo i, j . Fijando j y dejando $i \rightarrow \infty$ encontramos $h_j^{-1}h_i \rightarrow h_j^{-1}g \in \overline{W} \subset U$. Por tanto $H \cap U$ es una carta, es cerrada en U , y $h_j^{-1}g \in H$, lo cual implica que $g \in H$, entonces H es cerrado.⁹

Para el próximo teorema necesitamos el siguiente resultado

Teorema 1.6 Sea G un grupo de Lie. El subgrupo uniparamétrico de G es precisamente las curvas integrales de vectores invariantes a izquierda empezando en la identidad, entonces existe una correspondencia uno a uno de los subgrupos uniparamétricos de G , $Lie(G)$ y $T_e G$.

Demostración 1.16 Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico, y sea $X = F_*(d/dt) \in Lie(G)$ donde el d/dt es tomado como un campo de vectores invariantes a izquierda sobre \mathbb{R} . Entonces se mostrará que F es una curva integrable de X . Como $F_*(d/dt)$ está definido como el único campo vectorial invariante a izquierda sobre G que está F -relacionado a d/dt , lo cual se puede ver en [10], tenemos para cada $t_0 \in \mathbb{R}$

$$F'(t_0) = F_*(d/dt)|_{t_0} = X_{F(t_0)},$$

por ende F es una curva integral de X , y queda demostrado.

⁹Ibid,p. 354.

Proposición 1.7 Para cada $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, sea

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + 1/2A^2 + \dots$$

Esta serie converge a una matriz invertible $e^A \in GL(n, \mathbb{R})$ y el subgrupo uniparamétrico de $GL(n, \mathbb{R})$ generado por $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ es $F(t) = e^{tA}$.

Demostración 1.17 Lo primero que se hará es ver la convergencia, recordando que la matriz de multiplicación cumple que $|AB| \leq |A||B|$, con la norma euclidiana sobre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Si hacemos $A = B$ la desigualdad es $|A^2| \leq |A|^2$, por inducción se muestra entonces que $|A^k| \leq |A|^k$.

El teorema M -Weierstrass demuestra que la serie es uniformemente convergente sobre cada subconjunto acotado de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, esto se cumple por comparación con la serie $\sum_k (1/k!)c^k = e^c$ la cual es convergente. Ahora, fijemos $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. El subgrupo uniparamétrico generado por A es una curva integral de campo de vectores invariantes a izquierda \tilde{A} sobre $GL(n, \mathbb{R})$ y por tanto satisface la ecuación diferencial ordinaria con valores iniciales

$$\begin{aligned} F'(t) &= \tilde{A}_{F(t)} \\ F(0) &= I_n. \end{aligned}$$

Por tanto

$$(F_k^i)'(t) = F_j^i(t)A_k^j$$

o en la notación de matriz

$$(F)'(t) = F(t)A$$

Veamos que $F(t) = e^{tA}$ satisface esta ecuación. Como $F(0) = I_n$ lo cual implica que F es la única curva integral de \tilde{A} que empieza en la identidad y por tanto un subgrupo uniparamétrico. F es diferenciable, dado que si diferenciamos la serie

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} t^{k-1} A^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} \right) A = F(t)A.$$

Notemos que la serie diferenciada converge uniformemente sobre conjuntos acotados, justifica la diferenciación término a término. Por la suavidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, F es una curva suave.

Queda por demostrar que $F(t)$ es invertible para toda t , esto es que F toma valores en $GL(n, \mathbb{R})$. Sea $\sigma(t) = F(t)F(-t) = e^{tA}e^{-tA}$, entonces σ es una curva suave en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y por la regla del producto

$$\sigma'(t) = (F(t)A)F(-t) - F(t)(AF(-t)) = 0.$$

Entonces σ es una curva constante $\sigma(t) \equiv \sigma(0) = I_n$ lo cual afirma que $F(t)F(-t) = I_n$. Sustituyendo $-t$ por t , obtenemos $F(-t)F(t) = I_n$. Con esto se mostró que $F(t)$ es invertible y $F(t)^{-1} = F(-t)$.¹⁰

¹⁰Ibid,p. 426.

CAPÍTULO 2

Grupo de Heisenberg

En este capítulo se estudiará el grupo de Heisenberg y tiene como objetivo hallar la métrica invariante a izquierda que permitirá hallar las conexiones del grupo.

SECCIÓN 2.1

Grupo lineal del espacio euclidiano. $GL(n, \mathbb{R})$

Dado que el espacio euclídeo es un espacio vectorial, su *grupo lineal* está representado por todas las transformaciones lineales que tienen inversa. Tomando una base cualquiera una función lineal se puede expresar mediante una matriz, por tanto dichas matrices tienen determinante distinto de cero. Luego,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \text{Det}(A) \neq 0\},$$

donde $M(n, \mathbb{R})$ son las matrices cuadradas de dimensión n considerada sobre \mathbb{R}^{n^2} .

Proposición 2.1 El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

En efecto, la función $\text{Det} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua dado que es una función polinomial, entonces $GL(n, \mathbb{R}) = \text{Det}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es abierto, esto ya que $\{0\}$ y las matrices de determinante cero son cerradas y una función continua envía cerrados en cerrados. Note que $GL(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable n^2 -dimensional porque es un subconjunto abierto del espacio de $n \times n$ matrices isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} .

Además $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo con respecto a la multiplicación dado que

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$$

donde A y B son no singulares, entonces AB tampoco lo es y $\text{Det}(A) \neq 0$ si y solo si A tiene una inversa multiplicativa. Por último la multiplicación de matrices es C^∞ , puesto que las entradas de AB son polinomios en las entradas de A y B . La inversa de $A = (a_{ij})$ se puede escribir como $A^{-1} = (1/\text{Det}(A))(\widetilde{a}_{ij})$, donde \widetilde{a}_{ij} es la matriz de cofactores de A . Como las entradas de A

son polinomios entonces $\text{Det}(A)$ es un polinomio que no se eliminan, por tanto las entradas de A^{-1} son funciones racionales sobre $GL(n, \mathbb{R})$, con denominadores que no se eliminan en consecuencia es C^∞ .

Notemos que $GL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad encajada de codimensión $n \times n$ en $M(n, \mathbb{R})$, esta propiedad es un caso particular que se obtiene del teorema siguiente.

Teorema 2.1 Cuando $0 \leq k \leq \min(m, n)$, $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ es una subvariedad encajada de codimensión $(m - k)(n - k)$ en $M(m \times n, \mathbb{R})$, donde $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ denota el subconjunto de $M(m \times n, \mathbb{R})$ consistiendo de las matrices de rango k .

Demostración 2.1 Sea E_0 una matriz de $m \times n$ y expresemos esta matriz en forma de bloque como

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \right\}.$$

donde A_0 es una matriz $k \times k$ y D_0 es una matriz de $(m - k) \times (n - k)$, y A_0 no es singular. Sea U el conjunto

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R}) : \text{Det}A \neq 0 \right\}.$$

Luego U es un subconjunto abierto de $M(m \times n, \mathbb{R})$ conteniendo a E_0 . Dado $E \in U$ y multiplicando por su inversa

$$EP = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Defínase $F : U \rightarrow M(m - k \times n - k, \mathbb{R})$ por

$$F \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D - CA^{-1}B.$$

F es suave, resta mostrar que es submersión, es decir que $DF(E)$ es sobreyectiva para cada $E \in U$. Como $M(m - k \times n - k, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial, los vectores tangentes pueden ser naturalmente identificados con $(m - k) \times (n - k)$ matrices. Dado E y una matriz $X \in M(m - k \times n - k, \mathbb{R})$, defínase una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + tX \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$F_*\gamma'(0) = (F \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (D + tX - CA^{-1}B) = X.$$

Por tanto F es una submersión y entonces $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U$ es una subvariedad de U . Luego, si E'_0 es una matriz arbitraria de rango k , reorganizando filas y columnas puede estar en U ,

esta reordenación es un isomorfismo lineal $R : M_k(m \times n, \mathbb{R}) \rightarrow M_k(m \times n, \mathbb{R})$ que preserva el rango, entonces $U' = R^{-1}(U)$ es una vecindad de E'_0 y $F \circ R : U' \rightarrow M(m - k \times n - k, \mathbb{R})$ es una submersión cuyo conjunto cero es $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U'$. Entonces cada punto en $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ tiene una vecindad U' en $M(m \times n, \mathbb{R})$ tal que $U' \cap M_k(m \times n, \mathbb{R})$ es una subvariedad encajada de U' . En conclusión $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ es una subvariedad encajada, dado que se puede mostrar que si M es una variedad suave y S un subconjunto de M . Suponga que para algún k , cada punto $p \in S$ tiene una vecindad $U \subset M$ tal que $U \cap S$ es una subvariedad encajada de U , entonces S es una subvariedad encajada de M .

El grupo de Heisenberg H_3

El grupo de Lie real de dimensión 3, es un subconjunto cerrado de $GL(3, \mathbb{R})$ cuyos elementos son matrices de la forma:

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

dotado con una estructura de grupo de $GL(3, \mathbb{R})$. Sean A y B dos matrices de \mathbb{H}_3 entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_3 + b_3 + a_1 b_2 \\ 0 & 1 & a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde la inversa de A y análogamente para B es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_1 a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego es posible hallar el conmutador $[A, B]$ dado por:

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que H_3 es un subgrupo de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$, para ello necesitaremos del siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Subgrupo cerrado) Si G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo que es un subconjunto cerrado de G , entonces H es un subgrupo de Lie encajado.

Demostración 2.2 Por el teorema (1.6) solo es necesario demostrar que H es una subvariedad encajada de G .

Sea $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ y defina un subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Veamos que \mathfrak{h} es un subespacio vectorial de \mathfrak{g} . En primer lugar, si $X \in \mathfrak{h}$, entonces $tX \in \mathfrak{h}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora veamos que es cerrado bajo la adición, sea X y $Y \in \mathfrak{h}$. Por el teorema anterior tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}$ y para un entero n suficientemente grande ¹

$$\left(\exp \frac{t}{n} X\right) \left(\exp \frac{t}{n} Y\right) = \exp \frac{t}{n} \left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right)$$

con $Z(0) = 0$, además usando inducción se tiene

$$\begin{aligned} \left(\left(\exp \frac{t}{n} X\right) \left(\exp \frac{t}{n} Y\right)\right)^n &= \left(\exp \frac{t}{n} \left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right)^n \\ &= \exp t \left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Fijando t y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\exp \frac{t}{n} X\right) \left(\exp \frac{t}{n} Y\right)\right)^n = \exp t(X + Y).$$

Dado que $\exp((t/n)X)$ y $\exp((t/n)Y)$ están en H por hipótesis y H es un subgrupo cerrado de G , entonces $\exp t(X + Y)$ está en H para toda t . Con esto se concluye que \mathfrak{h} es un subespacio.

Resta probar que existe una vecindad U del origen en \mathfrak{g} sobre la cual la función exponencial de G es un difeomorfismo, y que cumple la propiedad que

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = (\exp U) \cap H.$$

en la figura (2.1) como la función exponencial envía un abierto intersección con \mathfrak{h} y da una interpretación geométrica de la igualdad. Si U es una vecindad de $0 \in \mathfrak{g}$ sobre la cual la exponencial es un difeomorfismo, entonces $\exp(U \cap \mathfrak{h}) \subset \exp(U) \cap H$ por la definición de \mathfrak{h} y dado que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Ahora se para verificar la otra desigualdad se necesita encontrar una vecindad lo suficientemente pequeña. Para ello supongamos que no es posible, sea $\{U_i\}$ una base contable para \mathfrak{g} en 0 . La negación implica que para cada i , existe $h_i \in (\exp U_i) \cap H$ tal que $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Escoja una base E_1, E_2, \dots, E_k para \mathfrak{h} y una base E_1, \dots, E_m para \mathfrak{g} . Sea \mathfrak{b} el subespacio generado

¹Edson Sampaio. A aplicacao de gauss de superficies minimas no espaco de heisenberg. 2012. p.10

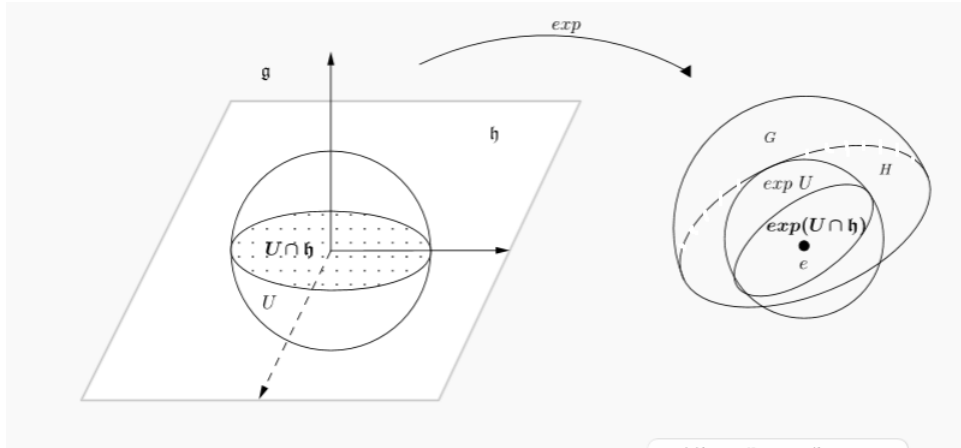


Figura 2.1: Construcción de la vecindad

por E_{k+1}, \dots, E_m tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$ entendido como espacios vectoriales. Cuando i es suficientemente grande, la función $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$ en G dado por $X + Y \mapsto \exp X \cdot \exp Y$ es un difeomorfismo sobre U_i a una vecindad de e en G . Entonces podemos escribir

$$h_i = \exp X_i \cdot \exp Y_i \quad (2.1)$$

para algún $X_i \in U_i \cap \mathfrak{h}$ y $Y_i \in U_i \cap \mathfrak{b}$, con $Y_i \neq 0$ dado que $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$, en la figura (2.2) muestra que evidentemente que $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Como $\{U_i\}$ es una base de vecindades, $Y_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Además $\exp X_i \in H$ por definición de \mathfrak{h} entonces $\exp Y_i = (\exp X_i)^{-1} h_i \in H$ por (2.1).

La base $\{E_j\}$ determina un producto interno sobre \mathfrak{g} por el cual $\{E_j\}$ es ortonormal. Sea $|\cdot|$ la norma asociada con el producto punto y defina $c_i = |Y_i|$, esto es $c_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. La sucesión $\{c_i^{-1} Y_i\}$ está en la esfera unidad en \mathfrak{b} con respecto a la norma, remplazando esta por una subsucesión entonces $c_i^{-1} Y_i \rightarrow Y \in \mathfrak{b}$ con $|Y| = 1$ por continuidad. En particular, $Y \neq 0$. Se demostró que $\exp tY \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, el cual implica que $Y \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, lo cual es una contradicción.

Sea $t \in \mathbb{R}$, para cada i , sea n_i ser el mayor entero menor o igual a t/c_i . Por tanto

$$\left| n_i - \frac{t}{c_i} \right| \leq 1,$$

lo cual implica

$$|n_i c_i - t| \leq c_i \rightarrow 0$$

entonces $n_i c_i \rightarrow t$. Luego

$$n_i Y_i = (n_i c_i)(c_i^{-1} Y_i) \rightarrow tY,$$

el cual implica $\exp n_i Y_i \rightarrow \exp tY$ por continuidad. Pero $\exp n_i Y_i = (\exp Y_i)^{n_i} \in H$ como H es cerrado implica que $\exp tY \in H$. Sea $E : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ la base de isomorfismos determinados por la

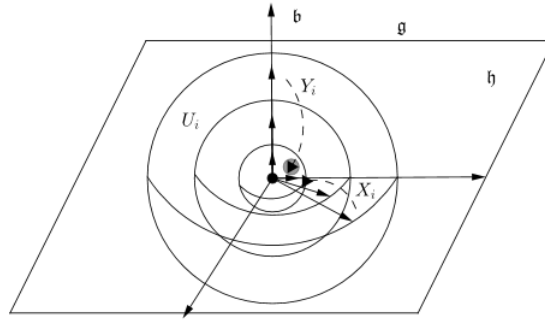


Figura 2.2: Teorema subgrupo cerrado

base (E_1, E_2, \dots, E_m) . La función de composición $\varphi = E^{-1} \circ \exp^{-1} : \exp U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que es una carta derivable para G y por la elección de la base $\varphi(\exp U) \cap H = E^{-1}(U \cap \mathfrak{h})$ es la parte obtenida por las $m - k$ coordenadas igual a cero. Si $h \in H$ es arbitraria, el mapeo de translación a izquierda L_h es un difeomorfismo de $\exp U$ a vecindades de \mathfrak{h} . Como H es un subgrupo, $L_h(H) = H$ y entonces

$$L_h((\exp U) \cap H) = L_h(\exp U) \cap H$$

y $\varphi \circ L_h^{-1}$ es una carta para H en una vecindad de \mathfrak{h} . Entonces H es una subvariedad encajada de G , por tanto un subgrupo de Lie.

Con este resultado podemos concluir que H_3 es un grupo de Lie, lo que sigue es describir el álgebra de Lie asociada a dicho grupo. Para ello, si $\alpha : I \rightarrow H_3$ es una curva diferenciable, existen funciones $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tal que

$$\alpha(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a(t) & c(t) \\ 0 & 1 & b(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para todo } t \in I \right\}.$$

Entonces su derivada es

$$\alpha'(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a'(t) & c'(t) \\ 0 & 1 & b'(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para todo } t \in I \right\}.$$

De donde, el álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 la constituyen los elementos de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Notemos que si fijamos el elemento A , que puede ser denotado como (x, y, z) como familias uniparamétricas de matrices que forman las curvas en H , y se toma la derivada a lo largo de estas curvas para determinar los vectores tangentes, tomando por ejemplo

$$e_1 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio tangente a H en (x, y, z) es generado por los campos de vectores invariantes a izquierda $\{e_1, e_2, e_3\}$. Esto permite calcular los corchetes de Lie:

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = e_3$$

$$[e_2, e_3] = e_2 e_3 - e_3 e_2 = 0$$

$$[e_3, e_1] = e_3 e_1 - e_1 e_3 = 0$$

El grupo de Heisenberg es un grupo de Lie nilpotente como veremos después y su álgebra de Lie tiene las siguientes propiedades

- $\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$, donde V_1 tiene dimensión 2 y V_2 tiene dimensión 1.
- $[V_1, V_1] = V_2$ $[V_1, V_2] = 0$ y $[V_2, V_2] = 0$

Y la presentación matricial representa la estructura general del grupo. De otro lado como $H_3 \subset GL(3, \mathbb{R})$ entonces una función exponencial esta dada por

$$\exp : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A \in \mathfrak{h}.$$

Pero H_3 es nilpotente, entonces

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y como vimos en los preliminares la función exponencial es un difeomorfismo local. Haciendo una identificación del álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 con \mathbb{R}^3 y usando una función exponencial como parametrización global, el espacio de Heisenberg se podrá dotar de una operación. Pero para ello se necesitará la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff, y es pertinente hablar primero de grupos nilpotentes.²

SECCIÓN 2.2

Grupos de Lie nilpotentes

Un grupo de Lie G nilpotente es aquel cuya álgebra de Lie \mathfrak{g} es nilpotente. Se puede asumir que G es conexo. Decimos que G es nilpotente si $G^{(j)} = e$ para alguna j . Además los $G^{(j)}$ son subgrupos de Lie de G y el álgebra de Lie de $G^{(j)}$ es $\mathfrak{g}^{(j)}$.

Sea G ser un grupo de Lie conexo, con la función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ y defina

$$X * Y = \exp^{-1}(\exp X \exp Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Esta función analítica esta bien definida cerca de $X = Y = 0$. Esta está dada por una serie de potencias la cual envuelve solo conmutadores. La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff, reconstruye a G localmente, conociendo solo la estructura de \mathfrak{g} , la fórmula es

$$X * Y = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{p_i+q_i>0, 1 \leq i \leq n} \frac{(\sum_{i=1}^n (p_i + q_i))^{-1}}{p_1! q_1! \dots p_n! q_n!} \\ \times (adX)^{p_1} (adY)^{q_1} \dots (adX)^{p_n} (adY)^{q_n-1} Y$$

donde $(adA)B = [A, B]$. Entonces

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] - \frac{1}{48}[Y, [X, [X, Y]]] \\ - \frac{1}{48}[X, [Y, [X, Y]]] + (\text{conmutadores de cinco o más términos}).$$

Para el grupo de Lie de matrices $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset gl(n, \mathbb{R})$ es el espacio tangente y la identidad, el conmutador es $[A, B] = AB - BA$ y la función exponencial coincide con la función exponencial usual de matrices

$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

²Ibid, p.15

En este caso la fórmula se obtiene resolviendo para Z en $e^Z = e^X e^Y$

$$\begin{aligned} Z &= \exp^{-1}(I + (e^X e^Y - I)) \\ &= \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^X e^Y - I)^n \\ &= \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{p_i+q_i>0, 1 \leq i \leq n} \frac{X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_n} Y^{q_n}}{p_1! q_1! \dots p_n! q_n!}. \end{aligned}$$

Teorema 2.3 Sea G ser un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces la fórmula de Campbell- Baker-Hausdorff se tiene para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.³

Demostración 2.3 La fórmula de Campbell- Baker-Hausdorff también es finita, ambos $\exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y)$ y la serie son funciones analíticas de X, Y en una vecindad de 0, entonces también globalmente.

Teorema 2.4 Sea G un grupo de Lie nilpotente, con álgebra \mathfrak{g}

1. $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ es un difeomorfismo analítico.
2. La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff se tiene para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demostración 2.4 Consideremos la exponencial, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ que se puede expresar como una serie por la proposición (1.7), esta serie es finita y es un difeomorfismo como se probó en preliminares, por ende la fórmula es finita, además $\exp^{-1} \exp X \cdot \exp Y$ y la serie son funciones analíticas en una vecindad de cero, por tanto también lo son globalmente.

Entonces haciendo una identificación canónica del álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 con \mathbb{R}^3 y usando una función exponencial como parametrización global, un espacio de Heisenberg H_3 identificado con \mathbb{R}^3 se puede dotar a \mathbb{R}^3 , fijemos una base arbitraria X_1, X_2 de V_1 y sea $X_3 = [X_1, X_2] \in V_2$. Considerando la fórmula de Baker- Campbell- Hausdorff y teniendo en cuenta la nilpotencia, podemos definir la siguiente operación

$$x * y = \exp^{-1}(\exp(x)\exp(y)) = x + y + 1/2[x, y], \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

Donde $x = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1)X_1 + (x_2 + y_2)X_2 + (x_3 + y_3)X_3 + 1/2 \{x_1 y_1 \\ &\quad [X_1, X_1] + (x_1 y_2 - x_2 y_1) [X_1, X_2] + x_2 y_2 [X_2, X_2]\} \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + 1/2(x_1 y_2 - x_2 y_1)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

³Lawrence J. Corwin and Frederick P. Greenleaf. Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Cambridge university press edition, 1990. p. 56

tenemos que la función $\exp : \mathbb{R}^3 \rightarrow H_3$ es un isomorfismo de grupos de Lie. Entonces diremos que H_3 como \mathbb{R}^3 dotado con un producto dado por la (2.2).

El siguiente objetivo es hallar una métrica invariante a izquierda en H_3 , para cada $p = (x, y, z) \in H_3$ definimos una traslación a izquierda

$$L_p : H_3 \rightarrow H_3$$

tal que $L_y(x) = y * x$, para todo x en H_3 . Notemos que la diferencial identidad es dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y/2 & x/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos un campo E_i por,

$$E_i(p) = dL_p(e_i)$$

$$E_1(p) = dL_p(e_1) = (1, 0, -y/2) = \frac{\partial}{\partial x}|_p - y/2 \frac{\partial}{\partial z}|_p$$

$$E_2(p) = dL_p(e_2) = (1, 0, -x/2) = \frac{\partial}{\partial y}|_p + x/2 \frac{\partial}{\partial z}|_p$$

$$E_3(p) = dL_p(e_3) = (0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial z}|_p$$

Entonces, para cada $p = (x, y, z) \in H_3$ y $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p H_3$, definimos una métrica invariante a izquierda ds^2 en H_3 haciendo

$$ds_p^2(v, w) = \left\langle dL_{p^{-1}(v)}, dL_{p^{-1}(w)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$ds_p^2(v, w) = \langle (v_1, v_2, v_3 + 1/2(xv_2 - yv_1)), (w_1, w_2, w_3 + 1/2(xw_2 - yw_1)) \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + y/2dy - x/2dx)^2$$

Dado que L_p es una isometría para todo $p \in H_3$ y e_1, e_2, e_3 es una base ortonormal para $T_e H_3 = \mathfrak{h}_3$ entonces E_1, E_2, E_3 es una base de campos de vectores ortonormales invariantes a izquierda. Es posible generalizar los grupos de Heisenberg a n dimensiones y sobre los complejos notado como H_n donde se tiene la variedad $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ y cuya álgebra tiene $\mathfrak{h}_n = V_1 \oplus V_2$, tal que V_1 es de dimensión $2n$, V_2 es de dimensión 1 y $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = 0$ y $[V_2, V_2] = 0$. Usando coordenadas exponenciales se puede notar como

$$x = (z_1, \dots, z_n, x_{2n+1}) = (x_1 + ix_{n+1}, \dots, x_n + ix_{2n}, x_{2n+1})$$

y la operación de grupo queda

$$xy = \left(z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n, x_{2n+1} + y_{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\overline{z_n} w_n) \right)$$

donde $x = (z_1, \dots, z_n, x_{2n+1})$ y $y = (w_1, \dots, w_n, y_{2n+1})$.

SECCIÓN 2.3

Conexión en H_3

Se notará una conexión Riemanniana de (H_3, ds^2) como ∇ y si X, Y y Z son campos invariantes a izquierda de H_3 , tenemos que

$$\langle X(p), Y(p) \rangle = \langle dL_p X(e), dL_p Y(e) \rangle = \langle X(e), Y(e) \rangle, \text{ para todo } p \text{ en } H_3$$

Como, $\langle X, Y \rangle = 0$,

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = -1/2(\langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle)$$

Por tanto para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ obtenemos la conexión en términos de la base E_1, E_2, E_3

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_2 &= 1/2 E_3 &= -\nabla_{E_2} E_1 \\ \nabla_{E_1} E_3 &= -1/2 E_2 &= \nabla_{E_3} E_1 \\ \nabla_{E_2} E_3 &= 1/2 E_1 &= \nabla_{E_3} E_2 \\ \nabla_{E_i} E_i &= 0 \end{aligned}$$

Una vez hallada las conexiones es posible hallar curvatura.

SECCIÓN 2.4

Curvatura

Una curvatura R de una variedad Riemanniana M es una función que a cada $X, Y \in \chi(M)$ asocia una función $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo $Z \in \chi(M)$. Si R denota una curvatura de H_3 , escribimos $R_{ijk} = R(E_i, E_j)E_k$ para $i, j, k \in 1, 2, 3$, donde E_1, E_2, E_3 se una base de campos vectores invariantes a izquierda. Calculemos entonces las curvaturas

$$\begin{aligned} R_{121} &= \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 \\ &= \nabla_{E_1} \left(-\frac{1}{2} E_3 \right) - \nabla_{E_1} (0) - \nabla_{E_3} E_1 \\ &= \frac{1}{4} E_2 + \frac{1}{2} E_2 \\ &= \frac{3}{4} E_2. \end{aligned}$$

Con el mismo procedimiento tenemos:

$$\begin{aligned} R_{122} &= -\frac{3}{4} E_1, & R_{123} &= 0, & R_{131} &= -\frac{1}{4} E_3, & R_{132} &= 0, \\ R_{133} &= \frac{1}{4} E_1, & R_{231} &= 0, & R_{232} &= -\frac{1}{4} E_3, & R_{233} &= \frac{1}{4} E_2. \end{aligned}$$

Luego, para cada punto $p \in H_3$ y $X, Y \in T_p H_3$ vectores linealmente independientes, una curvatura seccional \bar{K} de \mathbb{H}_3 en un punto p del plano generado por $\{X, Y\}$ es dado por

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X \wedge Y\|}$$

donde $\|X \wedge Y\| = \sqrt{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$. Luego

$$\begin{aligned}\bar{K}(E_1, E_2) &= \left\langle \frac{3}{4}E_2, E_2 \right\rangle = \frac{3}{4} \\ \bar{K}(E_1, E_3) &= \left\langle \frac{-1}{4}E_3, E_3 \right\rangle = \frac{-1}{4} \\ \bar{K}(E_2, E_3) &= \left\langle \frac{-1}{4}E_3, E_3 \right\rangle = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

Por tanto H_3 no es un espacio de curvatura seccional constante.

SECCIÓN 2.5

Isometrías

Lema 2.1 Si $f : H_3 \rightarrow H_3$ es una isometría tal que $f(0) = 0$ entonces f es

1. $f(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$
2. $f(x, y, z) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, -z)$

para algún $\theta \in 0$ a 2π .

Teorema 2.5 Sea $\phi : \mathbb{H}_3 \rightarrow H_3$ una isometría tal que $\phi(0) = p$. Entonces $\phi = L_p \circ f$ donde f es la anterior isometría.

Una demostración de este hecho se puede ver en [14].

SECCIÓN 2.6

Superficies en H_3

Sea S una superficie en \mathbb{H}_3 que es localmente un gráfico de una ecuación diferenciable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es un abierto en \mathbb{R}^2 . Entonces

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega$$

es una parametrización local para S . Luego, si $p = (x, y, f(x, y))$ una base del espacio tangente $T_p S$ asociada a esa parametrización es constituida por vectores

$$\begin{aligned}X_x &= \frac{\partial}{\partial x} X(x, y) = (1, 0, f_x) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} X(x, y) = (0, 1, f_y)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} X_x &= E_1 + (f_x + y/2)E_3 \\ X_y &= E_2 + (f_y - x/2)E_3 \end{aligned}$$

Además un campo normal en S en un punto p está dado por

$$\begin{aligned} \eta(x,y) &= \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} \\ &= -\frac{f_x + y/2}{w}E_1 - \frac{f_y - x/2}{w}E_2 + \frac{1}{w}E_3 \end{aligned}$$

donde $w = \sqrt{1 + (f_x + y/2)^2 + (f_y - x/2)^2}$.

Si $f_1 = f_x + \frac{y}{2}$ y $f_2 = f_y - \frac{x}{2}$, los coeficientes de la primera forma fundamental de S son

$$\begin{aligned} E &= \langle X_x, X_x \rangle = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \\ F &= \langle X_x, X_y \rangle = (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \\ G &= \langle X_y, X_y \rangle = 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2. \end{aligned}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} L &= -\langle \nabla X_x \eta, \nabla X_x \rangle \\ M &= -\langle \nabla X_x \eta, \nabla X_y \rangle \\ N &= -\langle \nabla X_y \eta, \nabla X_y \rangle \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_x}\eta &= \nabla_{X_x} \left[-\left(\frac{f_x+y/2}{w}\right) E_1 - \left(\frac{f_y-x/2}{w}\right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \right] \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right)_x E_1 - \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \nabla_{X_x} E_1 - \left(\frac{f_x-\frac{x}{2}}{w}\right)_x E_2 \\
&\quad - \left(\frac{f_x-\frac{x}{2}}{w}\right) \nabla_{X_x} E_2 + \left(\frac{1}{w}\right) \nabla_x E_3 + \left(\frac{1}{w}\right) \nabla_{X_x} E_3. \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right)_x E_1 - \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \nabla_{E_1} E_1 - \left(\frac{(f_x+\frac{y}{2})^2}{w}\right) \nabla_{E_3} E_1 \\
&\quad - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right)_x E_2 - \left(\frac{f_y-x/2}{w}\right) \nabla_{E_1} E_2 - \left(\frac{(f_y-x/2)(f_x+y/2)}{w}\right) \nabla_{E_3} E_2 \\
&\quad \left(\frac{1}{w}\right)_x E_3 + \left(\frac{1}{w}\right) \nabla_{E_1} E_3 + \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \nabla_{E_3} E_3 \\
&= \left[-\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right)_x - \frac{(f_y-x/2)(f_x+y/2)}{2w} \right] E_1 + \left[\frac{(f_x+\frac{y}{2})^2-1}{2w} - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right)_x \right] E_2 \\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{w}\right)_x - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{2w}\right) \right] E_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_y}\eta &= \nabla_{X_y} \left[-\left(\frac{f_x+y/2}{w}\right) E_1 - \left(\frac{f_y-x/2}{w}\right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \right] \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right)_y E_1 - \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \nabla_{X_y} E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right)_y E_2 \\
&\quad - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right) \nabla_{X_y} E_2 + \left(\frac{1}{w}\right)_y E_3 + \left(\frac{1}{w}\right) \nabla_{X_y} E_3. \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right)_y E_1 - \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \nabla_{E_2} E_1 - \left(\frac{(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2})}{w}\right) \nabla_{E_3} E_1 \\
&\quad - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right)_y E_2 - \left(\frac{f_y-x/2}{w}\right) \nabla_{E_2} E_2 - \left(\frac{(f_y-x/2)^2}{w}\right) \nabla_{E_3} E_2 \\
&\quad \left(\frac{1}{w}\right)_y E_3 + \left(\frac{1}{w}\right) \nabla_{E_2} E_3 + \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right) \nabla_{E_3} E_3 \\
&= \left[\frac{1-(f_y-\frac{x}{2})^2}{2w} - \left(\frac{(f_x+y/2)}{w}\right)_y \right] E_1 + \left[\frac{(f_y-\frac{x}{2})f_x+\frac{y}{2}}{2w} - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right)_y \right] E_2 \\
&\quad + \left[\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{2w}\right) + \left(\frac{1}{w}\right)_y \right] E_3
\end{aligned}$$

En conclusión los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned}L &= \frac{f_{xx} + (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2})}{w} \\M &= \frac{f_{xy} + 1/2(f_y - \frac{x}{2})^2 - 1/2(f_x + \frac{y}{2})^2}{w} \\N &= \frac{f_{yy} - (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2})}{w}\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Geometría en H_3

En el siguiente capítulo se darán algunos resultados geométricos sobre el espacio H_3 , empezando por la descripción de geodésicas.

SECCIÓN 3.1

Geodésicas

Eligiendo las bases e_1, e_2 de V y e_3 de U entonces para $x \in V$ y $a \in U$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$a = x_3 e_3$$

Como los campos coordenados se expresaron como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = e_1 - \frac{1}{2}x_2 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = e_2 + \frac{1}{2}x_1 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = e_3 \end{cases}$$

Luego, una curva $t \rightarrow \gamma(t) \in H_3$ estará descrita por funciones vectoriales $t \rightarrow x(t) \in V$ y $t \rightarrow a(t) \in U$, considerando además que \exp es un difeomorfismo global, podemos reescribir $\gamma(t) = \exp(x(t) + a(t))$, el cual tiene por vector tangente a

$$\frac{d\gamma}{dt} = (x_1)' \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2)' \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3)' \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Reemplazando se tiene

$$\frac{d\gamma}{dt} = (x_1)' e_1 + (x_2)' e_2 + \frac{1}{2} (x_1(x_2)' - x_1(x_3) + 2(x_3)') e_3.$$

Ya que γ es una geodésica si y solo si

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

Reemplazando

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \left(x_1'' + \frac{1}{2} (x_1(x_2)'')^2 - (x_1(x_2)(x_2)' + 2x_2'x_3') \right) e_1 + \left(x_2'' - \frac{1}{2} (x_1(x_1'x_2' - x_1'^2x_2 + 2x_1'x_3')) \right) e_2 + \frac{1}{2} (x_1x_2'' - x_1''x_2 + 2x_3'') e_3.$$

En consecuencia, $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ si y solo si

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_1x_2'^2}{2} - \frac{x_1'x_2'x_2}{2} + x_2'x_3' = 0 \\ x_2 - \frac{x_1x_1'x_2'}{2} + \frac{x_1'^2x_2}{2} + x_1'x_3' = 0 \\ x_1 - \frac{x_1x_2'}{2} - \frac{x_1x_2}{2} = 0 \end{cases}$$

Lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} (x_1x_2' - x_1'x_2) = x_1x_2'' - x_1''x_2$$

y de la tercera ecuación

$$x_3'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{x_1x_2'}{2} - \frac{x_1x_2}{2} \right)$$

derivando

$$x_3' = \frac{-1}{2} (x_1x_2' - x_1'x_2) + C.$$

para C una constante. Suponiendo que las geodésicas pasen por el origen es decir $x_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ resulta $C = 0$ y de esta manera

$$x_3' = \frac{-1}{2} (x_1x_2' - x_1'x_2)$$

luego $x_1 - x_2'(-x_3' + x_3') = 0$ con lo cual $x_1'' = 0$, es decir $x_1(t) = x_1'(0)t$, del mismo modo $x_2(t) = x_2'(0)t$. Así mismo $x_3' = 0$ lo cual implica que $x_3 = C_3$, al evaluar en $t = 0$ resulta $C_3 = 0$ y en consecuencia $x_3(t) = 0$. La solución del sistema es

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1'(0)t \\ x_2(t) = x_2'(0)t \\ x_3(t) = 0 \end{cases}$$

que son rectas contenidas en el plano x_1x_2 . Si $x'(0) = x_2'(0) = 0$ y $x_3' \neq 0$, haciendo $t = 0$ resulta $C = x_3'(0)$, por lo tanto

$$x_3' = \frac{-1}{2} (x_1x_2') + x_3'(0)$$

Luego el sistema queda

$$\begin{cases} x_1'' + x_3'(0)x_2' = 0 \\ x_2'' - x_3'(0)x_1' = 0. \end{cases}$$

Entonces $x_1(t) = x_2(t) = 0$, resulta $x_3 = x_3(0)t$ y la solución es

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \\ x_3(t) = x_3'(0)t. \end{cases}$$

una recta vertical.¹ Por ultimo si $x'(0) \neq 0, x_2'(0) \neq 0$ y $x_3' \neq 0$ se obtiene

$$x_3'(t) = \frac{-1}{2}(x_1x_2' - x_1'x_2) + x_3'$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_1'' + x_3''(0)x_2' = 0 \\ x_2'' + x_3'(0)x_1' = 0. \end{cases}$$

Al integrar

$$\begin{cases} x_1' + x_3'(0)x_2 = x_1'(0) \\ x_2' + x_3'(0)x_1 = x_2'(0). \end{cases}$$

La solución

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2'(0)}{x_3'(0)} \text{Cos}(x_3'(0)t) + \frac{x_1'(0)}{x_3'(0)} \text{Sin}(x_3'(0)t) - \frac{x_2'(0)}{x_3'(0)} \\ x_2 = \frac{x_1'(0)}{x_3'(0)} \text{Cos}(x_3'(0)t) + \frac{x_2'(0)}{x_3'(0)} \text{Sin}(x_3'(0)t) - \frac{x_1'(0)}{x_3'(0)}. \end{cases}$$

Notemos que

$$\left(x_1 + \frac{x_1'(0)}{x_3'(0)}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_2'(0)}{x_3'(0)}\right)^2 = \left(\frac{x_1'(0)}{x_3'(0)}\right)^2 + \left(\frac{x_2'(0)}{x_3'(0)}\right)^2 = \frac{(x_1'(0))^2 + (x_2'(0))^2}{x_3'^2}$$

Las geodésicas que pasan por el origen son espirales alrededor del cilindro de radio $\sqrt{\frac{(x_1'(0))^2 + (x_2'(0))^2}{(x_3')^2}}$ y centro $\left(\frac{-(x_1'(0))}{(x_3'(0))}, \frac{-(x_2'(0))}{(x_3'(0))}\right)$. Para ello observe la figura (3.1).²

¹Edson Sampaio. A aplicacao de gauss de superficies m´?nimas no espacio de heisenberg. 2012. p. 46

²Richard Quispe Rivas. El grupo de heisenberg tridimensional . VII, No.2. p.3

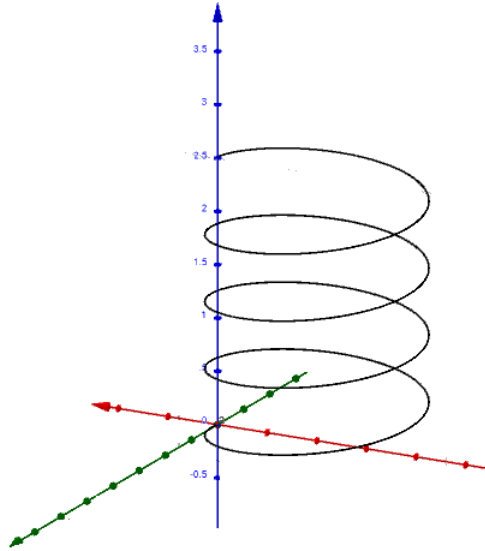


Figura 3.1: Geodésicas en el grupo de Heisenberg

SECCIÓN 3.2

Subvariedades Riemannianas

Suponga que (\tilde{M}, g) es una variedad Riemanniana de dimensión m , M es una variedad de dimensión n e $i : M \rightarrow \tilde{M}$ es una inmersión. Si M está dada por una métrica Riemanniana inducida $g = i^* \tilde{g}$, entonces recibe el nombre de inmersión isométrica o encaje isométrico si i es un encaje. Además si i es inyectiva entonces M es subvariedad de \tilde{M} . En todos los casos anteriores \tilde{M} es una variedad ambiente. En cada punto $p \in M$, el ambiente espacio tangente $T_p \tilde{M}$ se puede ver como $T_p \tilde{M} = T_p M \oplus N_p M$ donde $N_p M := (T_p M)^\perp$ es el espacio normal en p con respecto al producto punto \tilde{g} sobre $T_p \tilde{M}$ como en la siguiente imagen. El conjunto

$$NM := \bigcup_{p \in M} N_p M$$

es llamado el fibrado normal de M .

SECCIÓN 3.3

Segunda forma fundamental

Si X, Y son campos de vectores diferenciables en M , se puede extender los campos de vectores sobre \tilde{M} , aplicando el operador derivada covariante ambiente $\tilde{\nabla}$ y entonces la descomposición en los puntos de M , son

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

Definimos la segunda forma fundamental de M la función II de $\chi(M) \times \chi(M)$ a $N(M)$ dado por

$$II(X, Y) := \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^\perp$$

donde X y Y son arbitrariamente extendidos a \tilde{M} . Como π^\perp son aplicaciones diferenciables a secciones diferenciables, $II(X, Y)$ es una sección diferenciable de NM .

Lema 3.1 La segunda forma fundamental es

- (a) Independiente de las extensiones de X y Y .
- (b) Bilineal sobre C^∞ .
- (c) Simétrica en X y Y .

Demostración 3.1 Probemos primero la simetría de II esta se tienen porque la conexión $\tilde{\nabla}$ es simétrica. Sea X y Y extendidos arbitrariamente en M . Entonces

$$II(X, Y) - II(Y, X) = \left(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X \right) = [X, Y]^\perp$$

Como X y Y son tangentes a M en todos los puntos de M , esto es un corchete de Lie. Entonces $[X, Y]^\perp = 0$ esto es II es simétrico. Como $\tilde{\nabla}_X Y|_p$ solo depende de X_p , $II(X, Y)$ es independiente de la extensión escogida para X , y que $II(X, Y)$ es lineal sobre $C^{infy}(M)$ en X , por la simetría se dice lo mismo de Y .

Teorema 3.1 (La fórmula de Gauss) Si X, Y son campos de vectores diferenciables en M extendidos arbitrariamente a \tilde{M} , la siguiente fórmula se tiene en M :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Demostración 3.2 Como la descomposición y la definición de la segunda forma fundamental solo resta demostrar que $\left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^T = \nabla_X Y$ en todos los puntos de M . Definamos una función $\nabla^T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ por

$$\nabla_X^T Y := \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^T,$$

donde X, Y son extendida arbitrariamente en \tilde{M} . Si se demuestra que \tilde{g} es simétrica con g , la unicidad de la conexión Riemanniana sobre M demuestra que $\nabla^T = \nabla$.

Mostremos que ∇^T es simétrica,

$$\begin{aligned} \nabla_X^T Y - \nabla_Y^T X &= \left(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X \right)^T \\ &= [X, Y]^T = [X, Y]. \end{aligned}$$

Para probar que son compatibles con g , sea $X, Y, Z \in \chi(M)$ extendido arbitrariamente sobre \tilde{M} . Usando la compatibilidad de $\tilde{\nabla}$ con \tilde{g} y evaluando los puntos de M ,

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle \\ &= \langle (\nabla_X Y)^T, Z \rangle + \langle Y, (\tilde{\nabla}_X Z)^T \rangle \\ &= \langle \nabla_X^T Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X^T Z \rangle. \end{aligned}$$

Entonces ∇^T es compatible con g , entonces $\nabla^T = \nabla$.

Lema 3.2 (La ecuación de Weingarten) Suponga X, Y campos vectoriales diferenciables en M y $N \in N(M)$. Cuando X, Y, N son extendidos arbitrariamente a \tilde{M} , la siguiente ecuación se tiene en los puntos de M :

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = - \langle N, II(X, Y) \rangle.$$

Demostración 3.3 Como $\langle N, Y \rangle$ se elimina sobre M y X es tangente a M ,

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle N, Y \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + II(X, Y) \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, II(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

SECCIÓN 3.4

Hipersuperficies en espacios euclidianos

Se denota la métrica usual como \bar{g} . En cada punto de M existe exactamente dos vectores normales. Si M es orientable se puede dar un único normal. El resultante campo de vectores N es una sección diferenciable de NM .

Dado un vector normal N , se puede reemplazar el segundo valor forma fundamental II por algun escalar forma. La segunda forma fundamental h es simétrica y 2-tensor sobre M definido por

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N \rangle.$$

Como N es un vector que genera NM en cada punto, es equivalente a

$$II(X, Y) = h(X, Y)N.$$

Donde el signo de h depende del vector normal escogido, pero h es independiente de la elección. Un índice s de h se puede pensar como un campo de endomorfismos de TM llamado el shape operador de M . Es caracterizado por

$$\langle X, sY \rangle = h(X, Y), \quad \text{para todo } X, Y \in \chi(M)$$

. Como h es simétrica s es endomorfismo autoadjunto de TM esto es

$$\langle sX, Y \rangle = \langle X, sY \rangle, \quad \text{para todo } X, Y \in \chi(M)$$

El signo de s depende de la elección de N . En términos de campos tensoriales h y S , podemos reescribir la formula de Gauss para hipersuperficies

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N.$$

La ecuación de Weingarten puede escribirse

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -h(X, Y) = -\langle sX, Y \rangle.$$

Como $\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = \frac{1}{2} \bar{\nabla}_X |N|^2 = 0$, entonces $\bar{\nabla}_X N$ es tangente a M , entonces es equivalente a la ecuación para hipersuperficies Euclidianas

$$\bar{\nabla}_X N = -sX.$$

3

SECCIÓN 3.5

Superficies orientables

Dos sistemas de coordenadas $(x_i), (y_i)$ en R^n se dicen consistentemente orientadas o simplemente **consistentes** si el Jacobiano del cambio de parámetro

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

es positivo.

Definición 3.1 Una k -superficie regular se dice **orientable** si posee una estructura diferenciable tal que para cualquier par de parametrizaciones $(U, x), (V, y)$ en donde $x(U) \cap y(V) = W \neq \emptyset$, los sistemas de coordenadas asociados $(x_i), (y_i)$ son consistentes, es decir, la función de cambio de coordenadas

$$y^{-1} \circ x : x^{-1}(W) \rightarrow y^{-1}(W)$$

tal que $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (y_1, \dots, y_k)$ se verifica que

$$\det d(y^{-1} \circ x) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} > 0$$

³John M. Lee. *Riemannian manifolds*. University of Washington Department of Mathematics. 1997.

en cada punto $x^{-1}(W)$.

Dos estructuras diferenciables tal que cualquier parametrización de la primera estructura se relaciona por un determinante jacobiano negativo con cualquier parametrización de la otra se dice que tienen orientación opuesta para la superficie. Una estructura consistentemente orientada se puede obtener de un atlas con orientación opuesta cambiando el signo de una coordenada en particular, por ejemplo, cambiando el signo en la primera coordenada en cada sistema de coordenadas o tomando una permutación impar en cada sistema. Ejemplos de superficies que se pueden cubrir mediante solo una carta y por tanto orientables son \mathbb{R}^k , con $k = 1, 2, \dots, n$ subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^k , Orientable, la imagen de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k .

SECCIÓN 3.6

Mapeo de Gauss

Si $V \subset S$ es un conjunto abierto en S y $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable la cual asocia a cada $Q \in V$ un vector normal unitario en q , decimos que N es un campo diferenciable de vectores unitarios normales sobre V

Definición 3.2 Sea S una hipersuperficie orientable de un grupo de Lie G de dimensión n , dotado con una métrica invariante a izquierda. Una función

$$\gamma : S \rightarrow S^{n-1} = \{v \in \mathfrak{g}; |v| = 1\},$$

donde $\gamma(p) = dL_{p^{-1}} \circ \eta(p)$, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de G y η un campo de vectores normal unitario de S , es llamada una función de Gauss de S .

Observemos que $d\gamma(T_p S) \subset T_{\gamma(p)} S = \{\gamma(p)\}^\perp = dL_{p^{-1}}(T_p S)$ para todo $p \in S$. En efecto, por la definición de diferencial $d\gamma(T_p S) \subset T_{\gamma(p)} S$ y $T_p S = \{\eta(p)\}^\perp$, como $T_{\gamma(p)} S = dL_{p^{-1}}(T_p S)$. Una aplicación normal de Gauss en una superficie regular S en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 es una función $\gamma : S \rightarrow S^2$ que hace corresponder a cada punto su normal unitaria. Es decir, sea $p \in S$, $N(p)$ la normal unitaria a S en el punto p y $L_{-p}(q) = q - p$ la traslación en \mathbb{R}^3 , entonces $\gamma(p) = dL_{-p}(N(p))$. El diferencial de esta aplicación define la segunda forma fundamental de esta superficie en \mathbb{R}^3 . El siguiente teorema generaliza la situación anterior para hipersuperficies dentro de un grupo de Lie cualquiera.

Teorema 3.2 Sea S una hipersuperficie orientable del grupo de Lie G , entonces

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = - (A_\eta(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v))$$

donde $v \in T_p S$, A_η es la función de Weingarten de S y $\alpha_{\bar{\eta}} = \nabla_v \bar{\eta}$ donde η es un campo invariante a izquierda tal que $\eta(p) = \bar{\eta}(p)$.

Demostración 3.4 Sea $p \in S$ y $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$ tal que $X_n = \eta(p)$. Definamos E_1, \dots, E_n las traslaciones a izquierda de X_1, \dots, X_n . Observe que en este caso, tenemos $\bar{\eta} = E_n$. Dado que $q \in S$, podemos escribir $\eta(q) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i(q)$, donde $\alpha_j(p) = 0$ para $j = 1, \dots, n-1$ y $\alpha_n(p) = 1$. Por tanto

$$\gamma(q) = dL_{q^{-1}} \circ \eta(q) = dL_q^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \right) (q) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q) E_i(e).$$

Por tanto para $v \in T_p S$ tenemos

$$d\gamma_p(v) = v \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i(e) \right) = \sum_{i=1}^n v(\alpha_i) E_i(e).$$

Luego,

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = dL_p \left(\sum_{i=1}^n v(\alpha_i) E_i(e) \right) = \sum_{i=1}^n v(\alpha_i) E_i(p)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_v \eta|_p &= \nabla_v \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \right) |_p \\ &= \sum_{i=1}^n v(\alpha_i) E_i(p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \nabla_v E_i |_p \\ &= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \nabla_v E_n |_p \\ &= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v). \end{aligned}$$

En el caso particular de las superficies de H_3 se puede expresar de manera explícita a los operadores $dL_p \circ d\gamma_p$ y $\alpha_{\bar{\eta}}$ cuando la superficie es el gráfico de una función f . Parametrizando esta superficie como

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

donde $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ tenemos la base del espacio tangente $T_p S$ asociado. En el caso en que $S \in \mathbb{H}_3$ es un gráfico de una función diferenciable f , podemos obtener una expresión de los operadores $dL_p \circ d\gamma_p$ y $\alpha_{\bar{\eta}}$.

En efecto, sea X una parametrización y $Y : S^2 \rightarrow \bar{\Omega}$ es una proyección ortogonal en el plano xy , tenemos una representación de γ las parametrizaciones están dadas por

$$\bar{\gamma}(x, y) = Y \circ \gamma \circ X(x, y) = \left(- \left(\frac{f_x + y/2}{w} \right), - \left(\frac{f_y + x/2}{w} \right) \right), \quad (x, y) \in \Omega$$

La matriz que representa $dL_p \circ d\gamma_p$ de la base $\{X_x, X_y\}$ es

$$dL_p \circ d\gamma_p = \begin{pmatrix} - \left(\frac{f_x + y/2}{w} \right)_x & - \left(\frac{f_x + y/2}{w} \right)_y \\ - \left(\frac{f_y + x/2}{w} \right)_x & - \left(\frac{f_y + x/2}{w} \right)_y \end{pmatrix}$$

Luego

$$\det(dL_p \circ d\gamma_p) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + 1/4}{w^4}$$

Sabemos que una matriz de A_η está dada por

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \frac{LG-MF}{F^2-EG} & \frac{MG-NF}{F^2-EG} \\ \frac{ME-LF}{F^2-EG} & \frac{NE-MF}{F^2-EG} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_x+y/2}{w} \right)_x - \frac{1}{2w}(f_x+y/2)(f_y - \frac{x}{2}) & \left(\frac{f_x+y/2}{w} \right)_y + \frac{1}{2w}(1 - (f_y - x/2)^2) \\ \left(\frac{f_y-x/2}{w} \right)_x + \frac{1}{2w}((f_x+y/2)^2 - 1) & \left(\frac{f_y-x/2}{w} \right)_y - \frac{1}{2w}(f_x+y/2)(f_y - \frac{x}{2}) \end{pmatrix}$$

Por último $\alpha_{\bar{\eta}}$ esta dado por

$$\alpha_{\bar{\eta}} = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} -(f_x+y/2)(f_y - \frac{x}{2}) & (1 - (f_y - x/2)^2) \\ (f_x+y/2)^2 - 1 & (f_x+y/2)(f_y - \frac{x}{2}) \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3 Sea S una hipersuperficie de un grupo de Lie G . Si $p \in S$ es un punto tal que $d\gamma \equiv 0$ entonces $dL_{p^{-1}}(T_pS)$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} de codimensión 1.

Demostración 3.5 Si $p \in S$ es tal que $d\gamma_p \equiv 0$, por el teorema anterior tenemos que $\alpha_{\bar{\eta}} = -A_\eta$ en p y como A_η es un operador simétrico, luego está en $\alpha_{\bar{\eta}}$.

Sea $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ una base ortonormal de T_pS y $E_i = dL_{p^{-1}}(X_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $E = \gamma(p)$. Siendo

$$\alpha_{\bar{\eta}} = (\langle \nabla_{E_i} E, E_j \rangle), \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

una matriz de $\alpha_{\bar{\eta}}$ tenemos que

$$\langle \nabla_{E_i} E, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_j} E, E_i \rangle \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

ya que $\alpha_{\bar{\eta}}$ es un operador simétrico. La derivada covariante está dada por

$$\langle E_j, \nabla_{E_i} E \rangle = \frac{-1}{2} (\langle [E, E_i], E_j \rangle + \langle [E, E_j], E_i \rangle + \langle [E_i, E_j], E \rangle)$$

Entonces

$$\langle [E_i, E_j], E \rangle = 0 \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

esto es, $[E_i, E_j] \in dL_{p^{-1}}(T_pS) = \text{span}\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$. Esto muestra que si $V, W \in dL_{p^{-1}}(T_pS)$ entonces $[V, W] \in dL_{p^{-1}}(T_pS)$ y por tanto $dL_p^{-1}(T_pS)$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} con dimensión $n-1$.

Definición 3.3 Una superficie $S \subset H_3$ se dice una superficie vertical en el punto $p \in S$ si $\frac{\partial}{\partial z}|_p \in T_p S$. S se dice vertical si es vertical en todos sus puntos.

Proposición 3.1 Sea S una superficie en \mathbb{H}_3

- (a) Si S es un gráfico entonces S no es vertical en ninguno de sus puntos.
- (b) S es una superficie vertical si y solamente si S es localmente de la forma $(t, a(t), s)$, $(t, s) \in \Omega$ a menos que sea una isometria, donde Ω es un abierto conexo de \mathbb{R}^2 .

Demostración 3.6 (a) Si $S = G(f)$ y X una parametrización asociada a una función f y dado que

$$\begin{aligned} X_x &= E_1 + f_1 E_3 \\ X_y &= E_2 + f_2 E_3. \end{aligned}$$

Suponga que existe un punto $p \in S$ tal que S es vertical en p , entonces existe $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$E_3 = aX_x + bX_y.$$

Luego

$$E_3 = aE_1 + bE_2 + (af_1 + bf_2)E_3.$$

Por tanto $a = b = 0$ y $(af_1 + bf_2) = 1$ lo que es una contradicción.

- (b) Si S es parametrizada por $X(t, s) = (t, a(t), s)$, entonces S es vertical pues $X_s = E_3$. Recíprocamente si S es una superficie vertical, entonces por el item anterior S no es localmente un gráfico. Por teorema es localmente de la forma $G_1(f)$ en $G_2(f)$. Si S es localmente de la forma $G_1(f)$ y el lema garantiza que una función $\psi : \mathbb{H}_3 \rightarrow \mathbb{H}_3$ dada por $\psi(x, y, z) = (y, -x, z)$ es una isometria, tomando $\theta = \pi$. Luego si $(f(t, s), t, s) \in S$ entonces $\psi(f(t, s), t, s) = (t, -f(t, s), s) \in G_2(g)$ donde $g = -f$. Sigue que $G_1(f)$ es isométrico a $G_2(g)$. Por tanto S es localmente de la forma $G_2(f)$ y luego tenemos que $X(t, s) = (t, f(t, s), s)$ y una parametrización para S ,

$$\begin{aligned} X_t &= (1, f_t, 0) \\ &= E_1 + f_t E_2 + \left(\frac{f}{2} - \frac{t f_t}{2}\right) E_3 \\ X_s &= (0, f_s, 1) \\ &= f_s E_2 + \left(1 - \frac{t f_s}{2}\right) E_3. \end{aligned}$$

Como S es vertical, para todo $p \in S$ existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} E_3 &= aX_t + bX_s \\ &= aE_1 + (af_t + bf_s)E_2 + \left[a\left(\frac{f}{2} - \frac{t f_t}{2}\right) + b\left(1 - \frac{t f_s}{2}\right)\right]E_3. \end{aligned}$$

Luego $a = 0$, $af_t + bf_s = 0$ y $a(\frac{f}{2} - \frac{tf_t}{2}) + b(1 - \frac{tf_s}{2}) = 1$ y consecuentemente $f_s \equiv 0$ y $b = 1$, luego f no depende de s .

Proposición 3.2 Sea S una superficie en H_3 . Entonces para todo punto $p \in S$ tenemos que S es vertical en p , localmente en p un gráfico de una función diferenciable f .

Demostración 3.7 Sea $p \in S$. Si S es localmente un gráfico en p , no hay nada que hacer. Suponga que S es localmente de la forma $G_1(f)$. Luego, $X(t, s) = (f(t, s), t, s)$ es una parametrización para $G_1(f)$ tal que

$$\begin{aligned} X_t &= (f_t, 1, 0) \\ &= f_t E_1 + E_2 + (\frac{tf_t}{2} - \frac{f}{2}) E_3 \\ X_s &= (f_s, 0, 1) \\ &= f_s E_1 + E_2 + (1 + \frac{tf_s}{2}) E_3 \end{aligned}$$

Entonces para $p = (f(t_0, s_0), t_0, s_0)$ tenemos que $E_3(p) \in T_p S$ sii $f_s(t_0, s_0) = 0$. Por tanto si S no es vertical en p , entonces $f_s(t_0, s_0) \neq 0$. Definiendo $F(t, x, s) = f(t, s) - x$ tenemos que si $x_0 = f(t_0, s_0)$ entonces $F_s(t_0, x_0, s_0) = f_s(t_0, s_0) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe una función diferenciable g definida en un abierto B tal que $F(t, x, g(x, t)) = 0$ en B y por tanto $f(t, g(x, t)) = x$ para todo $(x, t) \in B$, de aquí se $(x, t) \in B$ y si $s = g(x, t)$ tenemos

$$(f(t, s), t, s) = ((f(t, g(x, t)), t, s)) = (x, txg(x, t))$$

Por tanto S es localmente un gráfico de g , análogamente si es localmente de la forma $G_2(f)$.

Teorema 3.4 Los planos verticales son las únicas superficies conexas en \mathbb{H}_3 con la propiedad que su aplicación de Gauss es constante.

Demostración 3.8 Una superficie vertical puede ser parametrizada por

$$X(t, s) = (t, a(t), s), \quad (t, s) \in \Omega$$

donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^2 . La base asociada a esta parametrización es

$$\begin{aligned} X_t &= (1, a'(t), 0) \\ &= E_1 + a' E_2 + 1/2(a - ta') E_3 \\ X_s &= (0, 0, 1) \\ &= E_3 \end{aligned}$$

es un vector normal unitario expresado por $\eta = \frac{a'}{\sigma} E_1 - \frac{1}{\sigma} E_2$, donde $\sigma = \sqrt{1 + (a')^2}$. Obtenemos que η es constante si y solo si a' es constante y esto ocurre si y solo si a es una función afín.

Luego η es constante si y solo si S es un plano, pero como $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, se concluye que γ es constante si y solo si η es constante. Es decir los planos son las únicas superficies verticales poseen aplicación de Gauss constante.

Suponga que existe una superficie conexa S que no es vertical y por tanto no es un plano vertical y que sea una aplicación de Gauss constante. Entonces existe $p \in S$ tal que S no es vertical en p y por tanto es localmente en p un gráfico de una función diferenciable f . Como γ es constante, tenemos que $d\gamma \equiv 0$ en S y $dL_{p^{-1}}(T_p S)$ es una subálgebra de Lie en \mathfrak{h}_3 . Note que

$$\begin{aligned} [dL_{p^{-1}}(X_x), dL_{p^{-1}}(X_y)] &= dL_{p^{-1}}[X_x, X_y] \\ &= dL_{p^{-1}}[E_1 + (f_x + y/2)E_3, E_2 + (f_y - x/2)E_3] \\ &= dL_{p^{-1}}E_3 \\ &= e_3. \end{aligned}$$

Donde $e_3 \in dL_{p^{-1}}(T_p S)$ y por tanto existe $v \in T_p S$ tal que

$$dL_{p^{-1}}(v) = e_3$$

Si $v = aX_x + bX_y$, tenemos que

$$\begin{aligned} dL_{p^{-1}}(v) &= dL_{p^{-1}}(aX_x + bX_y) \\ &= dL_{p^{-1}}(aE_1 + bE_2 + (a(f_x + y/2) + b(f_y - x/2))E_3) \\ &= ae_1 + be_2 + (a(f_x + y/2) + b(f_y - x/2))e_3. \end{aligned}$$

Entonces $a = b = 0$ y esto es una contradicción dado que $e_3 \neq 0$.

SECCIÓN 3.7

Superficies minimales no parametrizadas

Considerense superficies tal que el grafo de una función $z = z(x, y)$ este sobre algún dominio de Ω de \mathbb{R}^2 , la superficies es descrita por

$$X(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Las funciones $z(x, y)$ deberán ser al menos de clase C^2 . Luego utilizando las abreviaciones siguientes

$$p = z_x, \quad q = z_{xx}, \quad r = z_{xy}, \quad s = z_{yy}, \quad t = z_{xy}$$

Entonces los coeficientes de las formas fundamentales son

$$\begin{aligned} E &= 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \\ W^2 &= 1 + p^2 + q^2, \quad N = (\varepsilon, \eta, \xi) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -p/\sqrt{1+p^2+q^2}, \eta = -q/\sqrt{1+p^2+q^2} \\ \xi &= 1/\sqrt{1+p^2+q^2}.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}L &= r/\sqrt{1+p^2+q^2}, M = s/\sqrt{1+p^2+q^2}, \\ N &= t/\sqrt{1+p^2+q^2}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}H &= \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)} \\ K &= \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.\end{aligned}$$

La ecuación $H = 0$ es equivalente a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

Esto se le conoce como ecuación de la superficie minimal. Esta es necesaria y suficiente para que una superficie $z = z(x, y)$ sea una superficie minimal. Ahora bien, sea el espacio de Heisenberg H_3 dotado con la métrica Riemanniana

$$ds_{H_3}^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2$$

podemos hallar por la misma vía la ecuación de superficie minimal.⁴ Por tanto si S esta en H representado por $X(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$. Entonces la superficie S es minimal si

$$\begin{aligned}&\equiv 0 \\ &\iff \left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2\left(f_y - \frac{x}{2}\right) \left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1 Como en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 los planos $f(x, y) = ax + by + c$ son gráficos mínimos en H_3 .

Lema 3.3 Las únicas superficies mínimas con aplicación de Gauss en 0 son los planos verticales

⁴Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*, volume 339. Springer edition, 1992. p. 80.

Demostración 3.9 Solo es necesario probar que son superficies mínimas, dado que los planos verticales son las únicas superficies conexas en H_3 donde la aplicación de Gauss es constante. Si P es un plano vertical entonces P puede ser parametrizado por

$$X(t, s) = (t, at + b, s) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Luego los coeficientes de la primera forma de P son

$$\begin{aligned} E &= 1 + a^2 + \frac{b^2}{4} \\ F &= \frac{b}{2} \\ G &= 1 \end{aligned}$$

y los coeficientes de la segunda forma en P son

$$\begin{aligned} L &= \frac{b(1 + a^2)}{2(\sqrt{1 + a^2})} \\ M &= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{2} \\ N &= 0. \end{aligned}$$

como

$$EN + GL - 2FM = \frac{b(1 + a^2)}{2\sqrt{1 + a^2}} - \frac{2b\sqrt{1 + a^2}}{4} = 0$$

por tanto $H \equiv 0$.

Lema 3.4 Las únicas superficies mínimas verticales son los planos verticales

Demostración 3.10 Sea S una superficie vertical mínima en H_3 . Podemos entonces parametrizar S por $X(t, s) = (t, a(t), s)$ y como los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t \rangle = 1 + (a')^2 + \frac{1}{4}(a - ta')^2 \\ F &= \langle X_t, X_s \rangle = \frac{a - ta'}{2} \\ G &= \langle X_s, X_s \rangle = 1. \end{aligned}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental de S son

$$\begin{aligned} L &= \langle \nabla_{X_t} \eta, X_t \rangle = \frac{(a - ta')(1 + (a')^2) - 2a''}{2\sqrt{1 + (a')^2}} \\ M &= \langle \nabla_{X_t} \eta, X_s \rangle = \frac{\sqrt{1 + (a')^2}}{2} \\ N &= -\langle \nabla_{X_s} \eta, X_s \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como S es mínima, tenemos que $H \equiv 0$ es decir $EN + GL - 2FM \equiv 0$. Sustituyendo los valores de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental se tiene

$$\frac{1}{2}[(a - ta')(1 + (a')^2) - 2a''] (1 + (a')^2)^{-1/2} - 2 \frac{a - ta'}{2} \frac{1}{2} (1 + (a')^2)^{1/2} = 0$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación por $(1 + (a')^2)^{1/2}$ resulta $-2a'' = 0$ es decir $a'' = 0$, y S es un plano vertical. ⁵

⁵Edson Sampaio. A aplicacao de gauss de superficies m' nimas no espaco de heisenberg. 2012. p. 76.

CAPÍTULO 4

Conclusión

Como vimos el grupo de Heisenberg genera una métrica distinta a la métrica euclidiana considerada sobre \mathbb{R}^3 y en general sobre \mathbb{R}^n , y así deducir las formas fundamentales así como geodésicas, por último se habló de la segunda forma fundamental con miras a poder hablar de superficies minimales concluyendo que las únicas superficies mínimas verticales son los planos verticales y que las únicas superficies mínimas con aplicación de Gauss en 0 son los planos verticales, como se afirmaba en la introducción, esto es apenas una introducción a superficies minimales, algo interesante para continuar en dicho estudio sería ver el comportamiento de las superficies minimales que ofrecen resultados como los dados por [2] que caracteriza las superficies minimales de \mathbb{R}^n y donde la teoría de Heisenberg es un ejemplo, también es interesante las aplicaciones de las superficies minimales y en general el estudio de grupo de Heisenberg ya que da paso a problemas interesantes como lo es el problema isoperimétrico.

Bibliografía

- [1] Ahmed Azzi. *Surfaces minimales factorables dans l'espace de Heisenberg*. Faculte des sciences exactes et appliquees edition, 2014.
- [2] M. Bekkar. *Sur les metriques admettant les plans comme surfaces minimales*, volume 124. American mathematical society edition, 1996.
- [3] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scot D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, volume 259. Birkhauser edition, 2000.
- [4] Lawrence J. Corwin and Frederick P. Greenleaf. *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*. Cambridge university press edition, 1990.
- [5] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*, volume 339. Springer edition, 1992.
- [6] Manfredo P. Docarmo. *Geometria Riemanniana*. Livros tecnicos e cientificos editora s.a. edition, 1988.
- [7] Christian Figueroa. *Superficies en el grupo de Heisenberg*, volume XVII. Sección matemáticas departamento de ciencias edition, 2003.
- [8] Theodor Hangan. On the riemannian metrics which admit all hyperplanes as minimal hypersurfaces. *Journal of Geometry and Physics*, 18, 1996.
- [9] John M. Lee. Riemannian manifolds. University of Washington Department of Mathematics. 1997.
- [10] John M. Lee. An introduction to smooth manifolds. University of Washington Department of Mathematics. 2002.
- [11] William M. Boothby. *An introduction to differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic press inc. edition, 1975.
- [12] Richard Quispe Rivas. El grupo de heisenberg tridimensional h_3 . VII, No.2.

- [13] Richard Quispe Rivas. *El grupo de Heisenberg tridimensional*, volume VII. Revista de la facultad cc.mm. de la universidad nacional mayor de san marcos edition, 2004.
- [14] Edson Sampaio. A aplicacao de gauss de superficies mínimas no espacio de heisenberg. 2012.
- [15] Michael Spivak. *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or perish,inc. edition, 1999.
- [16] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable*, volume 124. American mathematical society edition, 1996.