USO DEL SOFTWARE CARMETAL PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE DERIVADA AL RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN

LAURA BUSTOS GUTIÉRREZ

JENNY KATHERINE VÁSQUEZ DE ALBA

DIRECTOR:

DR. MARTÍN ACOSTA G.

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2016

USO DEL SOFTWARE CARMETAL PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE DERIVADA AL RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Trabajo de profundización para optar al título de Magister en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Por Laura Bustos Gutiérrez y Jenny Katherine Vásquez De Alba.
Director: Dr. Martín Acosta G.

Agradecemos a Dios por darnos la vida y hacer posible la realización de este trabajo, permitiéndonos culminar esta etapa profesional.

A nuestras familias por apoyarnos en cada decisión y motivarnos constantemente para alcanzar nuestros anhelos.

A nuestro director por brindarnos su apoyo y conocimientos para la ejecución del trabajo realizado.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza del cálculo diferencial se presentan dificultades de aprendizaje; una de las causas radica en querer enseñar definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la formalización. A raíz de esto, se propone un trabajo de profundización que va enfocado al diseño de situaciones adidácticas desde la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), que aporten al currículo de matemáticas mediante una posible incorporación de la geometría para la enseñanza de la noción de derivada, que podrá ser utilizada en la resolución de problemas de optimización sin acudir a expresiones o definiciones formales.

Para orientar la propuesta se toma la metodología de Ingeniería Didáctica abordando únicamente las fases de análisis preliminares y concepción y análisis a priori, puesto que no se realizará implementación, sólo se llevará a cabo el diseño de situaciones adidácticas. Las situaciones diseñadas serán desarrolladas en el software CaRMetal[1], el cual no se toma como un tipo de motivación, sino como una herramienta que permite al estudiante resolver problemas de matemáticas. La pregunta que orienta esta propuesta es: ¿cómo utilizar el software CaRMetal para potenciar el aprendizaje del método de la derivada para la resolución de problemas de optimización?

De esta manera, el objeto de profundización es diseñar un conjunto de situaciones adidácticas que contribuyan a la construcción de sentido de las estrategias de resolución de problemas de optimización, a partir de la interpretación geométrica de las mismas, aprovechando el potencial de un software matemático.

[1] CaRMetal es un software libre de Geometría Dinámica, ofrece un enfoque basado en el concepto de manipulación directa. En:Carmetal.org

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La presente propuesta se ubica en el campo de la didáctica de las matemáticas, en la didáctica del cálculo. El cálculo diferencial e integral contiene elementos que son necesarios para resolver problemas donde se incorporen ideas como el *"cambio y la variación, la variación instantánea, los procesos infinitos y las situaciones límite"* (Cantoral, 1993. p.4), lo cual puede ser aplicable en las ciencias y las ingenierías. Por lo tanto, es un área importante en el currículo de matemáticas tanto en secundaria como en la universidad.

> El cálculo diferencial e integral constituye materia obligada, en el currículo de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso en carreras del área de ciencias sociales. Sin embargo, los reportes de fallas en el aprendizaje del cálculo son frecuentes y por ende este es uno de los problemas que más preocupa a la comunidad educativa. (ANUIES, 2002, citado en Cuevas &Pluvinage, 2009, p.45).

Conceptos como función, límite y derivada tienen fundamentos geométricos; muchos de los procedimientos del cálculo necesitan una interpretación geométrica, como se muestra en el estudio de Cantoral (1993): *"los problemas que dieron origen al cálculo se pueden encontrar desde la antigüedad clásica en aquellos de cuadratura, curvaturas (…) y las ya famosas paradojas sobre el infinito"* (p.2). Sin embargo, la fundamentación formal de dichos conceptos y procedimientos se realizó principalmente desde la aritmética y el álgebra. Acosta, Camargo, Castiblanco &Urquina (2004) afirman:

> Durante muchos siglos la geometría se constituyó en la base de toda ciencia, pero ante la necesidad de superar los obstáculos de la percepción y de la intuición para dar un fundamento exclusivamente racional a la ciencia, perdió su papel protagónico para cederlo al análisis y al álgebra. (p.8)

La tendencia a enseñar los conceptos de cálculo desde su definición formal genera dificultades, ya que se pierde la relación de los conceptos con su epistemología. Un claro ejemplo de estas dificultades se ve en la noción de límite: *"las dificultades en torno al límite son de muy diferente índole y van desde las dificultades propias de la definición (cuantificadores, notación, múltiples representaciones, entre otras) hasta dificultades relacionadas con el lenguaje del límite (como tendencia o aproximación)"* (Claros, 2010:4).

Lara (1997) plantea que:

> A pesar de las dificultades inherentes al concepto de límite, la enseñanza del mismo, tradicionalmente se ha realizado dentro de un sistema semiótico de representación algebraico que muy poco o nada ha contribuido a mejorar el entendimiento de la noción de límite. Este método de enseñanza basado en el manejo algebraico de límite, está profundamente enraizado en la mente de quienes tienen la tarea de enseñarlo. (p. 135)

Identificamos entonces dos causas de dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial: un excesivo énfasis en la definición formal de los conceptos y una marginalización de las ideas geométricas que dieron origen a los métodos de solución de problemas de cálculo. El interés de este trabajo es buscar alternativas de enseñanza de algunos temas de cálculo, basándose en las ideas geométricas que permiten construir el sentido de las estrategias de resolución de problemas, aprovechando el potencial de un software matemático.

En efecto, diversas investigaciones han mostrado evidencias de que el software matemático puede contribuir a mejorar los procesos de comprensión de conceptos matemáticos complejos y el aprendizaje de los mismos. Santos (2007) ha encontrado en sus investigaciones que: *"el uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema, que les permitan identificar relaciones matemáticas."* (p.35).

En síntesis, este trabajo de profundización se propone diseñar actividades de enseñanza alrededor de las nociones de derivada y límite aprovechando el potencial del software matemático. Más concretamente, se escogen los problemas de optimización ya que son un tipo de problemas que resuelve el cálculo y además tienen aplicaciones geométricas. Se utiliza el software CaRMetal que permite trabajar representaciones geométricas y algebraicas, y que además tiene la ventaja de ser gratuito y funcionar en distintos sistemas operativos. Se utiliza la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como teoría de referencia para el diseño y análisis.

1.1. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo dar sentido a las estrategias de resolución de problemas de optimización por medio de la noción de derivada, favoreciendo la interpretación geométrica de las mismas utilizando el potencial del software CaRMetal?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar un conjunto de situaciones adidácticas que aprovechen el potencial del software CaRMetal, para dar sentido a las estrategias de resolución de problemas de optimización por medio de la noción de derivada, favoreciendo la interpretación geométrica de las mismas.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar el método expuesto en los libros de cálculo para la solución de problemas de optimización identificando el rol de la geometría en su comprensión y justificación.

- Identificar las posibles dificultades epistemológicas, didácticas y cognitivas que enfrentan los estudiantes cuando trabajan en la solución de problemas de optimización.

- Determinar las posibles acciones de los estudiantes al resolver problemas en CaRMetal y las correspondientes retroacciones del software, para identificar si el estudiante está en capacidad de validar o invalidar sus acciones.

- Formular tareas relacionadas con la solución de problemas de optimización que lleven a los estudiantes a interactuar con el software CaRMetal y de esta manera construir conocimientos relativos a las estrategias de solución de problemas del cálculo.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este apartado se presenta la TSD como el principal referente teórico que orienta esta propuesta. Para dar cuenta de los objetivos es necesario activar un dispositivo metodológico: la Ingeniería Didáctica, desde un nivel de micro ingeniería donde se abordan las fases I (Análisis preliminares) y II (Concepción y análisis a priori).

2.1. TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

La TSD es el referente principal en esta propuesta por dos razones: 1) porque permite identificar con claridad el rol del software matemático en el proceso de enseñanza aprendizaje y 2) porque busca la construcción con sentido de los conocimientos matemáticos, que es un interés principal de este trabajo. La TSD define el sentido de un conocimiento como su carácter idóneo en tanto herramienta para la resolución de un problema. La construcción con sentido de un conocimiento incluye entonces la comprensión del problema, la posibilidad de utilizar diferentes estrategias para resolverlo y la posibilidad de evaluar esas diferentes estrategias, su alcance y sus limitaciones, de manera que la estrategia óptima sea el conocimiento matemático.

En referencia a la primera razón de elegir la TSD, Acosta (2010), afirma que ésta teoría contribuye a examinar el rol de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, al mismo tiempo que sirve de guía para el diseño de secuencias de enseñanza. El propósito de este autor es plantear cómo esta teoría provee de un modelo de aprendizaje en el que el software puede considerarse como un medio adecuado para que la interacción entre los alumnos y dicho medio produzca aprendizaje.

En esta investigación el software CaRMetal será el medio con el cual el estudiante irá a interactuar, validando a través de éste sus estrategias matemáticas e invalidando las no matemáticas. Para Brousseau (1986), el *medio* se puede definir desde la teoría como una entidad que el profesor adapta con el propósito de obtener los objetivos de aprendizaje. Las retroacciones que da el medio son esenciales para que se dé un aprendizaje. El *sujeto* produce conocimiento a través de la adaptación a un medio resistente con el que interactúa. Según Acosta, Monroy & Rueda (2010) el aprendizaje por adaptación se puede interpretar como:

> El sujeto tiene una intención (una necesidad, un objetivo) y para alcanzarla realiza una acción sobre el medio. El medio reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroacción). El sujeto interpreta esta retroacción para poder validar o invalidar su acción; es decir, para decidir si alcanzó o no lo que se proponía. Si la acción que realizó el sujeto no alcanza lo que él quería, entonces la validación es negativa, y el sujeto modifica su acción para poder alcanzar lo que se propone. Si la acción sí alcanzó lo que el sujeto quería, la validación es positiva y el sujeto refuerza dicha acción. (p.175)

Por lo anterior, el aprendizaje por adaptación es el que se produce por interacción entre un sujeto y un medio; en dicho aprendizaje no interviene el profesor. El estudiante aprende adaptándose a un medio que debe ser exterior, debe ser material, no debe tener ninguna intención de enseñanza, debe reaccionar e imponer restricciones a la acción.

Además del aprendizaje por adaptación, se tienen en cuenta dos elementos de esta teoría que son el proceso de devolución y el de validación. Según Brousseau (2007) La devolución "*es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de esta transferencia*" (p. 87). La validación se entiende como el proceso donde *"el alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración*" (p. 23).

Al implementar esta teoría es importante distinguir entre situaciones adidácticas y didácticas. Para establecer la diferencia entre estos dos tipos de situaciones referenciamos a Acosta et al. (2010) quienes establecen que:

> Una situación es didáctica cuando un individuo (profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (alumno) un saber matemático dado (…) una situación es adidáctica cuando se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema. Como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno (…) La situación a-didáctica sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica, que es una situación normal de clase. (p. 176)

Para estos investigadores, al interior de la situación didáctica se encuentran las situaciones adidácticas empleadas por el profesor para que los estudiantes construyan un conocimiento. Partiendo de esa aclaración, Acosta et al. (2010) consideran que la función principal del profesor es la de preparar la situación adidáctica, y su intervención durante la misma debe encaminarse a hacerle tomar conciencia al alumno de las acciones que puede realizar y de las retroacciones del medio, pidiéndole que sea él mismo quien decida si resolvió o no el problema (validación).

En síntesis, la TSD de Brousseau (1986) ayuda a precisar el problema que se va a estudiar y diseñar herramientas de intervención. Las ideas principales que van a ser tenidas en cuenta en este trabajo son: El aprendizaje por adaptación, la relación entre situación didáctica y situación adidáctica, el papel del medio y los procesos de validación y devolución.

Además de los conceptos teóricos de la TSD, asumimos un principio epistemológico general de la didáctica de las matemáticas, enunciado por Bachelard (1938) y asumido por Brousseau (1986): *"todo conocimiento es respuesta a una pregunta"*. Por lo tanto, es necesario presentar el conocimiento como respuesta a una necesidad sentida por el estudiante. Esto implica no presentar el conocimiento antes del problema al que da solución y dar a los estudiantes la posibilidad de experimentar sus propias estrategias de solución.

En resumen, la TSD busca:

1) Tratar de construir el sentido del conocimiento geométrico que se quiere enseñar, contextualizándolo en una situación problema a la cual responde ese conocimiento.
2) El software es el medio con el cual el estudiante interactúa. Por lo tanto, debe permitir la utilización de estrategias espontáneas (no matemáticas) y las retroacciones que ofrece deben posibilitar la invalidación de dichas estrategias, creando conciencia de la necesidad de una estrategia matemática. Igualmente, las retroacciones del software deben validar las estrategias matemáticas que corresponden al conocimiento que se desea enseñar.

2.2. INGENIERÍA DIDÁCTICA

La metodología que se ajusta al diseño de situaciones adidácticas es la Ingeniería Didáctica dado que es una metodología para el diseño y análisis de secuencias de clase. Según Artigue (1995) esta metodología se caracteriza por las realizaciones didácticas en el aula (concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza), por el registro de estudio en el cual se ubica y por la validación interna de los análisis. La Ingeniería Didáctica comprende las siguientes fases:

> *Análisis preliminares:* Pueden ser de carácter epistemológico, de la enseñanza tradicional, de las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes, del campo de restricciones. Todo esto se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. *Concepción y análisis a priori:* El investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones (…) es decir, la organización de una secuencia o de una fase. *Experimentación, análisis a posteriori y evaluación:* Se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la fase de experimentación. (...) En la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (Artigue, 1995, pp.38-48)

Cabe aclarar que en esta propuesta sólo se llevan a cabo las dos primeras fases: análisis preliminares y concepción y análisis a *priori*.

2.2.1. ANÁLISIS PRELIMINARES

En este apartado se dan a conocer los análisis didáctico, epistemológico y cognitivo, que son la base para el diseño de las actividades, pues identifican el origen de las nociones que se van a abordar, su sentido, sus características y las dificultades que pueden tener los estudiantes al trabajar con ellas.

2.2.1.1. Análisis didáctico

Para analizar los procesos de enseñanza relativos a la solución de problemas de optimización que se utilizan en el sistema educativo colombiano, se revisaron diez libros de cálculo de la biblioteca del Colegio San José de Calasanz, examinando la exposición del método de cálculo de máximos y mínimos.

Se identificaron tres falencias en la manera de exponer dicho método: 1) No hay referencia a los significados geométricos de los objetos matemáticos implicados en el método, 2) ausencia de una intención de explicar o justificar el método y 3) una exposición del método como una serie de pasos a seguir. De los diez textos que se revisaron, solo uno de ellos intenta dar explicación geométrica del método, los demás se enfocan en las definiciones formales o en exponer unos criterios a partir de pasos o reglas sin ningún intento de darle sentido al método.

Agrupamos estos textos según sus características en común; los tres primeros libros se enfocan en las definiciones formales, los tres siguientes presentan un método que se basa en pasos que no son justificados, otro grupo de textos presentan unos pasos, pero en esta ocasión se observa una intención por justificar su método y en el último fue un texto donde se presentan justificaciones de las manipulaciones algebraicas desde lo geométrico.

2.2.1.1.1. Libros enfocados en definiciones formales

En este grupo se encuentran los textos: **Matemática 2000-11** de Gordillo, Plazas & Villegas (1992), **Matemáticas Aplicadas y Conexiones** de Minton & Smith (2001) y **Conexiones matemáticas 11** de Restrepo (2006). En ellos se presentan apartados de aplicaciones de la derivada, donde se exponen definiciones como recta tangente, recta normal, crecimiento y decrecimiento de una función, concavidad de una función, puntos de inflexión, puntos críticos y se muestran ejemplos de cómo calcular estos puntos críticos. Por ejemplo, en **Matemática 2000-11**, se presenta una definición de punto máximo o mínimo, basada en expresiones formales de las cuales no se explicita ningún significado:

> **Máximo:** Es el tope más alto que puede alcanzar una curva cóncava hacia abajo. Si $f'(x)= 0$ y si $f''(x_0) < 0$, se dice que x_0 es un máximo (…) **Mínimo:** Un mínimo es el tope más bajo que alcanza una curva cóncava hacia arriba. Si $f'(x) = 0$ y si $f''(x_0) > 0$, se dice que x_0 es un mínimo (p.193)

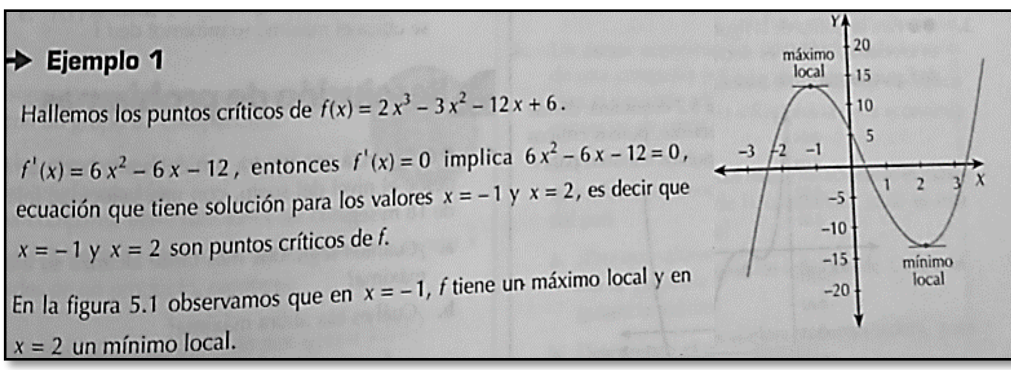
En **Matemáticas Aplicadas y Conexiones**, se aclara que se estudiarán estas nociones (hallar puntos máximos y mínimos) desde el punto de vista matemático. Presentan la prueba o el criterio de la segunda derivada, donde se utiliza un lenguaje matemático formal y las justificaciones del método se dejan como trabajo extra-clase para el estudiante como se puede observar en la figura 1. La resolución de problemas se da a partir de unas "Guías" que son en otras palabras pasos sobre el método algebraico para hallar puntos máximos o mínimos.

Prueba o criterio de la segunda derivada	Supón que f es continua en el intervalo (a, b) y $f'(c) = 0$ para algún número $c \in (a, b)$. i. Si $f''(c) < 0$, entonces, $f(c)$ es un máximo local y ii. Si $f''(C) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo local.

Se deja como ejercicio la demostración formal de este teorema. Cuando apliques el teorema.

Figura 1. Método para probar máximos y mínimos

Así mismo, en **Conexiones matemáticas 11** se presenta una unidad sobre aplicaciones de la derivada, iniciando con el tema de máximos y mínimos donde se mencionan definiciones de valor máximo y valor mínimo de una función. Se dan ejemplos de cómo calcular un máximo o mínimo local de una función a partir de *"la prueba de la primera derivada para clasificar puntos críticos"*. Un ejemplo para hallar los puntos críticos de una función se puede ver en la figura 2.



Ejemplo 1

Hallemos los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, entonces $f'(x) = 0$ implica $6x^2 - 6x - 12 = 0$, ecuación que tiene solución para los valores $x = -1$ y $x = 2$, es decir que $x = -1$ y $x = 2$ son puntos críticos de f.

En la figura 5.1 observamos que en $x = -1$, f tiene un máximo local y en $x = 2$ un mínimo local.

Figura 2. Ejemplo para hallar puntos críticos de una función mediante la derivada

En el anterior ejemplo se parte de la ecuación de una función cúbica y se solicita hallar los puntos críticos, los intervalos de crecimientos y decrecimiento, los intervalos de concavidad y los valores máximos y mínimos. Aunque hay una representación geométrica de la definición de máximo y mínimo a partir de una curva de una función cúbica, no se presenta la explicación de por qué la derivada de la función se debe igualar a cero; es decir, no hay una conexión entre lo algebraico y lo geométrico.

En los tres textos mencionados, se presentan ejercicios para hallar los puntos críticos de una función a partir de la derivada, se sugiere hacer uso de los criterios de la primera y segunda derivada para determinar si se está hallando un punto máximo o un punto mínimo. Estos libros se enfocan en las definiciones formales para hallar puntos máximos o mínimos de funciones.

2.2.1.1.2. Libros basados en pasos o reglas para hallar máximos o mínimos

En el segundo grupo de libros se encuentran **Introducción al cálculo** de Chávez, Romero, Salgado & Torres (2004), **Cálculo I de una variable** de Larson y Edwards (2010) y **Cálculo de una variable** de Thomas (2010). En estos libros se describen unos pasos o reglas para resolver un problema de optimización.

Por ejemplo, en **Introducción al cálculo** se muestra que para resolver un problema de optimización es necesario *"traducir los enunciados al lenguaje matemático, introduciendo fórmulas, funciones y ecuaciones"*, mencionan además, unas reglas para resolver problemas de optimización como se muestra en la figura 3.

Reglas para resolver problemas de optimización

1° Leer cuidadosamente el problema para determinar los datos y las variables.

2° Escribir la expresión algebraica de la función teniendo en cuenta los datos.

3° Si la función depende de más de una variable, se deben buscar relaciones entre estas variables para dejar que la función dada dependa de una sola variable.

4° Hallar los números críticos de la función obtenida y determinar cuáles son máximos y cuáles son mínimos.

5° Verificar si algún valor extremo de la función se alcanza en alguno de los extremos del dominio.

Figura 3. Reglas para resolver problemas de optimización

Las anteriores reglas describen los pasos sugeridos para resolver un problema de optimización, que consisten en determinar la expresión algebraica en términos de una sola variable y hallar los puntos máximos o mínimos. Estos son pasos procedimentales enfocados en lo algebraico, pero no se muestran relaciones geométricas de este método.

De igual forma en los libros **Cálculo I de una variable** y **Cálculo de una variable**, se presentan cinco pasos para la resolución de problemas aplicados a la optimización como se muestra en la figura 4.

Resolución de problemas aplicados a la optimización

1. *Lea el problema.* Lea el problema hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que debe optimizarse?
2. *Elabore un dibujo*. Anote el nombre de cada parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introduzca variables.* Elabore una lista de las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraicas; luego, identifique la variable desconocida.
4. *Escriba una ecuación para la cantidad desconocida.* Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto tal vez requiera mucha manipulación algebraica.
5. *Pruebe los puntos críticos y los extremos del intervalo en el dominio de la incógnita.* Utilice lo que conoce acerca de la forma de la gráfica de la función. Con base en la primera y la segunda derivadas identifique y clasifique los puntos críticos de la función.

Figura 4. Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización

Con los anteriores pasos se observa un método procedimental que conduce a introducir una ecuación para derivarla, graficarla y ubicar los puntos máximos o mínimos, pero no se proporciona una justificación de por qué en este método se emplea la primera y segunda derivada para resolver problemas de optimización y no se hace referencia a conceptos geométricos para justificar el método.

En este grupo de textos se observa una característica común que se ve reflejada en las reglas o pasos que se deben aplicar para resolver problemas de optimización. Esto proporciona un método procedimental donde el estudiante debe realizar manipulaciones algebraicas o técnicas de cálculo de derivadas sin ninguna conexión geométrica.

2.2.1.1.3. Libros basados en pasos para resolver problemas de optimización justificados desde definiciones formales

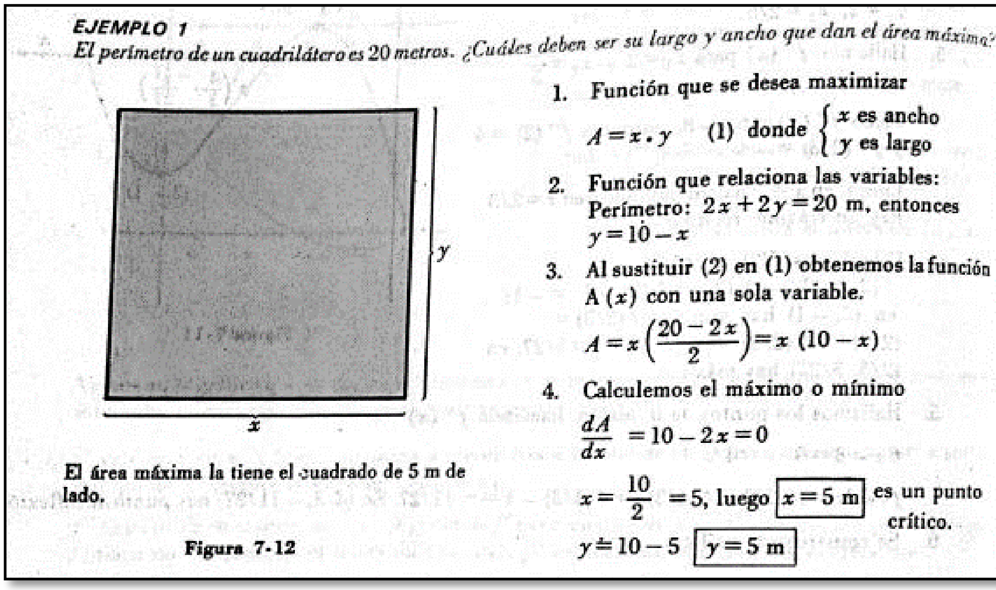
En el siguiente grupo de libros se encuentra **Matemática Progresiva** de Bedoya y Londoño (1992), **SUPERMAT Matemáticas 11** de Ortiz (2000) y **Cálculo diferencial e integral** de Gardner & Thompson (2013). En estos textos también se presenta unos pasos para resolver problemas de optimización, pero a diferencia de los anteriores, se intenta dar una justificación desde las definiciones formales.

Por ejemplo, en **Matemática Progresiva**, los autores inician el capítulo de optimización con la definición matemática de máximo relativo y mínimo relativo. En el momento de abordar el concepto de valores extremos o valores críticos se hace una relación entre el concepto formal de valor crítico de una función y su representación geométrica (figura 5); no obstante, esta relación se menciona solamente en este apartado y no se vuelve a abordar en la solución de problemas de optimización.

> **6.4 VALORES EXTREMOS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS**
>
> **En la observación tres del numeral anterior mencionamos a los valores extremos o valores críticos de una función f como aquellos valores del dominio de la función para los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$. En estos valores las rectas tangentes a las curvas son horizontales y, salvo casos especiales, sirven como puntos de transición entre el ascenso y descenso o viceversa de las curvas que representen a las funciones definidas por las ecuaciones. En estos puntos de transición definiremos los extremos relativos o absolutos de funciones continuas.**

Figura 5. Definición de valores extremos desde lo geométrico

En la resolución de problemas de optimización, se presentan cuatro pasos que se deben seguir para resolver las situaciones que más adelante se proponen en el libro como se muestra en el ejemplo de la figura 6.



EJEMPLO 1

El perímetro de un cuadrilátero es 20 metros. ¿Cuáles deben ser su largo y ancho que dan el área máxima?

1. Función que se desea maximizar
$A = x \cdot y$ (1) donde $\begin{cases} x \text{ es ancho} \\ y \text{ es largo} \end{cases}$
2. Función que relaciona las variables:
Perímetro: $2x + 2y = 20$ m, entonces
$y = 10 - x$
3. Al sustituir (2) en (1) obtenemos la función A (x) con una sola variable.
$A = x\left(\frac{20 - 2x}{2}\right) = x\ (10 - x)$
4. Calculemos el máximo o mínimo
$\frac{dA}{dx} = 10 - 2x = 0$
$x = \frac{10}{2} = 5$, luego $\boxed{x = 5 \text{ m}}$ es un punto crítico.
$y = 10 - 5$ $\boxed{y = 5 \text{ m}}$

El área máxima la tiene el cuadrado de 5 m de lado.

Figura 7-12

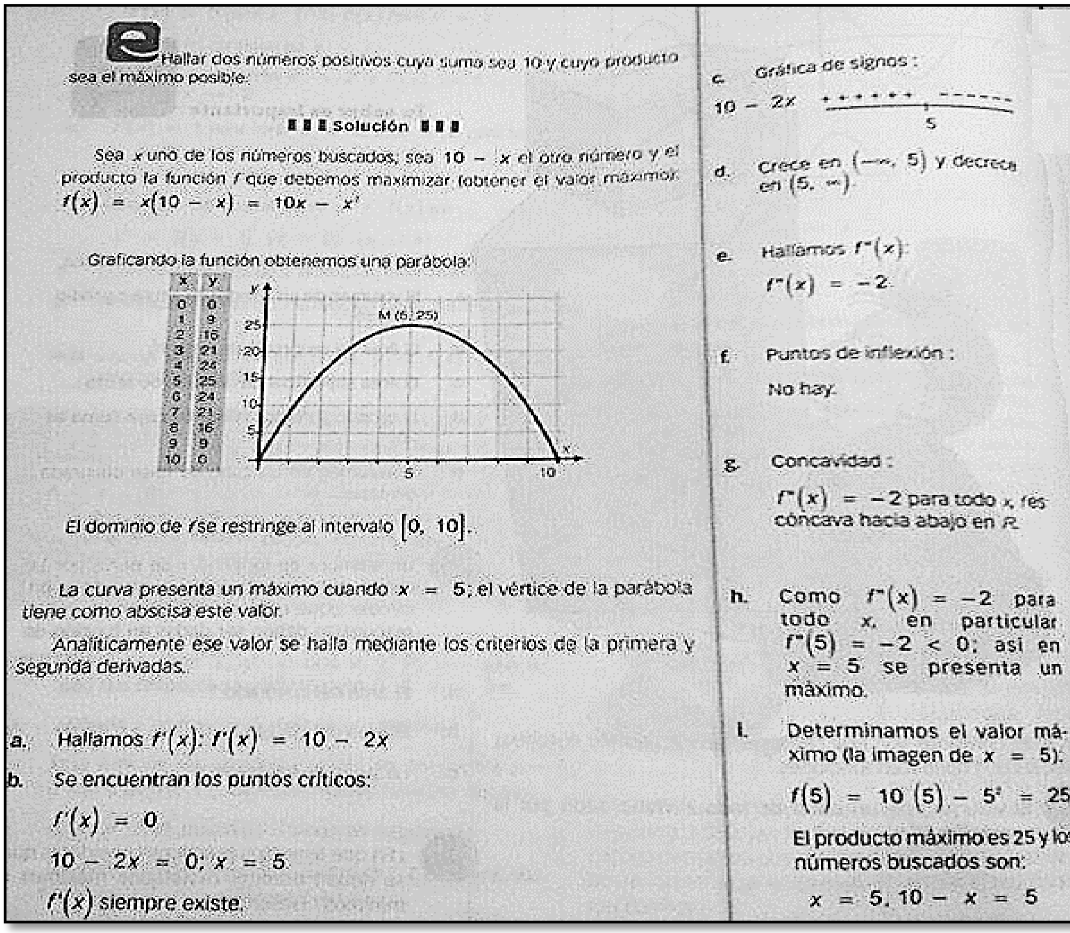
Figura 6. Solución de un problema de optimización aplicando 4 pasos

En este ejemplo se puede observar la aplicación de un método para resolver problemas de optimización basado en cuatro pasos que no son justificados desde lo geométrico y no se explica un por qué y un para qué se usa la derivada al calcular un punto máximo o mínimo.

De igual manera en **SUPERMAT Matemáticas 11**, se presenta una unidad de aplicaciones de la derivada donde se manejan “cuatro ideas claves”:

> 1) El trazado de gráficas: *“la primera y la segunda derivada de una función permiten encontrar los puntos críticos de la función”*. 2) Máximos y mínimos: *“se les llama valores extremos de una función y se encuentran cuando la derivada de la función es cero”*.3) Crecimiento y decrecimiento: *“estos intervalos se obtienen igualando la primera derivada a cero y realizando una tabla de signos”*.4)Puntos de inflexión: *“si la función es continua se obtienen igualando la segunda derivada a cero. Si la segunda derivada es positiva, la gráfica es cóncava hacia arriba y en un punto determinado hay un mínimo; si la segunda derivada es negativa, la gráfica es cóncava hacia abajo y en un punto hay un máximo”.(p.80)*

En la figura 7 se muestra como por medio del trazado de gráficas se puede tomar información para resolver el problema usando nueve pasos en los cuales se aplican los criterios de la primera y segunda derivada para hallar el valor máximo o mínimo.



Hallar dos números positivos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea el máximo posible.

Solución

Sea x uno de los números buscados; sea $10 - x$ el otro número y el producto la función f que debemos maximizar (obtener el valor máximo):

$f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Graficando la función obtenemos una parábola:

x	y
0	0
1	9
2	16
3	21
4	24
5	25
6	24
7	21
8	16
9	9
10	0

El dominio de f se restringe al intervalo $[0, 10]$.

La curva presenta un máximo cuando $x = 5$; el vértice de la parábola tiene como abscisa este valor.

Analíticamente ese valor se halla mediante los criterios de la primera y segunda derivadas.

a. Hallamos $f'(x)$: $f'(x) = 10 - 2x$

b. Se encuentran los puntos críticos:

$f'(x) = 0$

$10 - 2x = 0;\ x = 5$

$f'(x)$ siempre existe.

c. Gráfica de signos:

$10 - 2x$ + + + + + + | - - - - - - (5)

d. Crece en $(-\infty, 5)$ y decrece en $(5, \infty)$.

e. Hallamos $f''(x)$:

$f''(x) = -2$

f. Puntos de inflexión:

No hay.

g. Concavidad:

$f''(x) = -2$ para todo x, f es cóncava hacia abajo en R.

h. Como $f''(x) = -2$ para todo x, en particular $f''(5) = -2 < 0$; así en $x = 5$ se presenta un máximo.

i. Determinamos el valor máximo (la imagen de $x = 5$):

$f(5) = 10(5) - 5^2 = 25$

El producto máximo es 25 y los números buscados son:

$x = 5,\ 10 - x = 5$

Figura 7. Ejemplo de solución de un problema de optimización, aplicando nueve pasos

Del texto se puede observar que hay un método que se basa en el trazado de gráficas a partir de nueve pasos; sin embargo, no se explican las relaciones entre las manipulaciones algebraicas y sus significados geométricos; además se resuelve el problema en el primer y segundo paso.

Por su parte; en el **Cálculo diferencial e integral**, se presenta un capítulo de máximos y mínimos, con cuestionamientos de por qué hay que igualar la derivada a cero y despejar x; no obstante, aunque se da un capitulo anterior sobre significado geométrico de la derivada con el uso del software GeoGebra, se terminan resolviendo problemas de optimización desde un método basado en pasos como tomar la ecuación, derivarla e igualarla a cero. Lo anterior se ve en el siguiente apartado del texto sobre resolución de problemas de máximos y mínimos.

> Cuando se te presente una ecuación y desees calcular el valor de *x* que hará de *y* su valor mínimo (o máximo), *primero obtén la derivada*; después de haberlo hecho escribe su *dy/dx* como *igual a cero* y luego obtén el valor de *x*. Inserta este valor de *x* en la ecuación original y entonces obtendrás el valor requerido de *y*. Este proceso recibe comúnmente el nombre de *igualar a cero*. (p.101)

[15] Esto es quedarse corto. La búsqueda de valores extremos (máximos y mínimos) de una función es uno de los aspectos más bellos y útiles del cálculo diferencial. ¡Sólo hay que igualar la derivada a cero y despejar *x*! ¡Como por arte de magia! (MG)

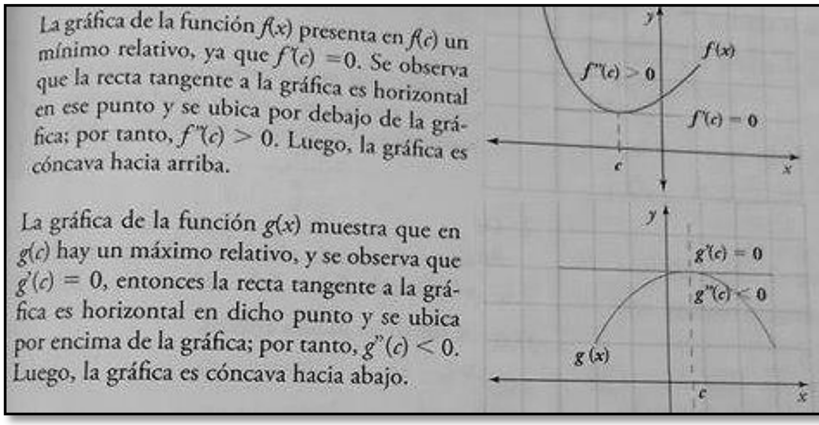
Figura 8. Explicación del método para hallar máximos y mínimos (p.106)

En la figura 8, se ve una intención por justificar un método para resolver problemas de optimización; sin embargo, esta explicación no es coherente ni desde las manipulaciones algebraicas ni desde las representaciones geométricas.

2.2.1.1.4. Libro con justificaciones geométricas y algebraicas para hallar máximos y mínimos

Dentro del grupo de textos revisados, solamente **Los caminos del saber Matemáticas 11**de Joya (2013), presenta un método para hallar máximos y mínimos donde se justifican las manipulaciones algebraicas desde lo geométrico. Al presentar el criterio de la segunda derivada, el autor menciona que cuando se está hallando un máximo o mínimo relativo de una función por medio de la derivada, ésta se debe igualar a cero.

Esto relacionándolo con la representación geométrica es equivalente a decir que cuando se muestra que la recta tangente a la gráfica es horizontal en ese punto se está determinando un punto máximo o un punto mínimo como se ve en la figura 9.

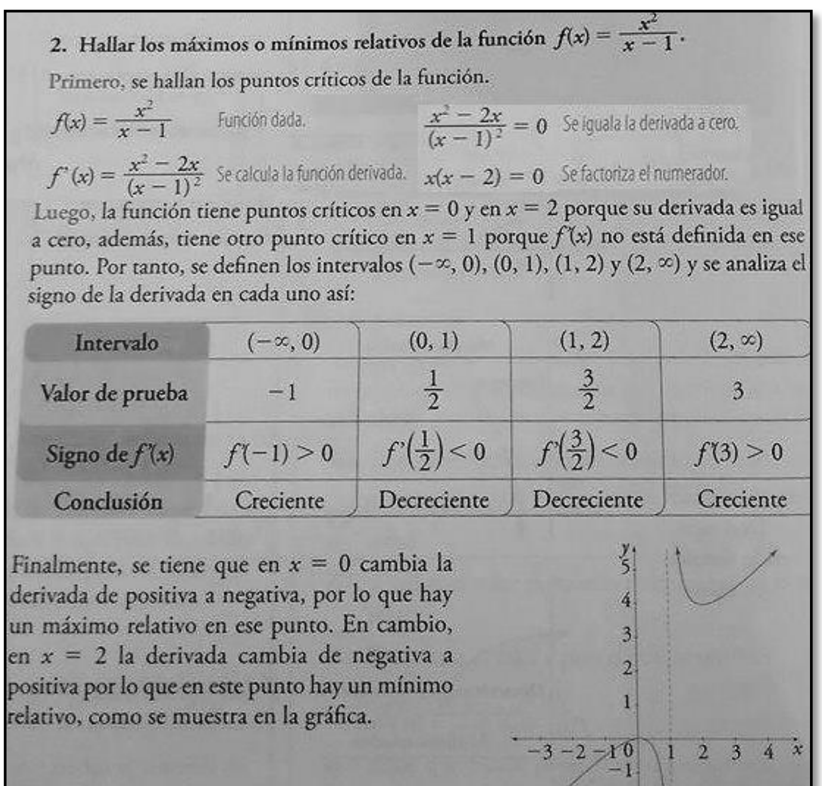


La gráfica de la función $f(x)$ presenta en $f(c)$ un mínimo relativo, ya que $f'(c) = 0$. Se observa que la recta tangente a la gráfica es horizontal en ese punto y se ubica por debajo de la gráfica; por tanto, $f''(c) > 0$. Luego, la gráfica es cóncava hacia arriba.

La gráfica de la función $g(x)$ muestra que en $g(c)$ hay un máximo relativo, y se observa que $g'(c) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica es horizontal en dicho punto y se ubica por encima de la gráfica; por tanto, $g''(c) < 0$. Luego, la gráfica es cóncava hacia abajo.

Figura 9. Explicación geométrica del criterio de la segunda derivada

Aunque se menciona esta relación de lo algebraico con lo geométrico, se propone un procedimiento basado en cuatro pasos para resolver problemas de optimización. Por ejemplo, en el momento en que se está hallando un punto máximo o mínimo de una función se le pide al estudiante igualar la derivada a cero y factorizar el denominador, pero no se explica por qué se debe hacer este último paso como se muestra en la figura 10.



2. Hallar los máximos o mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Primero, se hallan los puntos críticos de la función.

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ Función dada.

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ Se calcula la función derivada.

$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$ Se iguala la derivada a cero.

$x(x-2) = 0$ Se factoriza el numerador.

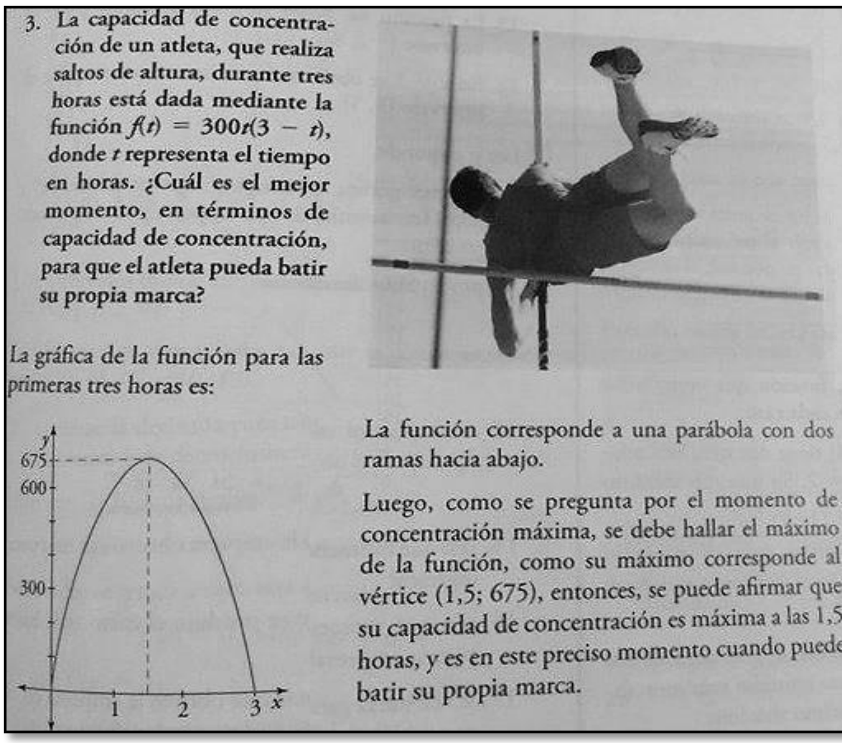
Luego, la función tiene puntos críticos en $x = 0$ y en $x = 2$ porque su derivada es igual a cero, además, tiene otro punto crítico en $x = 1$ porque $f'(x)$ no está definida en ese punto. Por tanto, se definen los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$ y se analiza el signo de la derivada en cada uno así:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Finalmente, se tiene que en $x = 0$ cambia la derivada de positiva a negativa, por lo que hay un máximo relativo en ese punto. En cambio, en $x = 2$ la derivada cambia de negativa a positiva por lo que en este punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la gráfica.

Figura 10. Ejemplo de cómo hallar máximos y mínimos utilizando cuatro pasos

A su vez, se muestra un apartado denominado *"análisis gráfico"* en el cual se afirma que el método utilizado hasta el momento para trazar la gráfica de una función consistía en localizar algunos puntos en el plano cartesiano y luego trazar la curva. Según el autor, este proceso produce algunas imprecisiones al momento de realizar las curvas, por lo que, en esta unidad, hacen uso de la derivada para realizar el trazo más preciso de algunas gráficas, para ello muestran cómo hallar máximos y mínimos, cómo determinar en qué intervalos la función es creciente o decreciente y en qué intervalos la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. En la figura 11 se presenta el análisis de la gráfica de un problema de optimización.



3. La capacidad de concentración de un atleta, que realiza saltos de altura, durante tres horas está dada mediante la función $f(t) = 300t(3 - t)$, donde t representa el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de capacidad de concentración, para que el atleta pueda batir su propia marca?

La gráfica de la función para las primeras tres horas es:

La función corresponde a una parábola con dos ramas hacia abajo.

Luego, como se pregunta por el momento de concentración máxima, se debe hallar el máximo de la función, como su máximo corresponde al vértice (1,5; 675), entonces, se puede afirmar que su capacidad de concentración es máxima a las 1,5 horas, y es en este preciso momento cuando puede batir su propia marca.

Figura 11. Análisis gráfico de un problema de optimización.

En el anterior problema de optimización se puede observar que a partir de un análisis gráfico se llega a la solución del problema, sin necesidad de hallar la derivada de la función ya que se tiene en cuenta el vértice de la parábola.

En este libro, se indica que *"no existe un procedimiento general para la solución de problemas de optimización"*; sin embargo, proponen uno que puede ser de utilidad. Este procedimiento consiste en:

> Primero, trazar un esquema y se rotulan o escriben las cantidades proporcionales o requeridas; segundo, se escribe una expresión algebraica para la función, luego, utilizando relaciones entre las variables del problema, se expresa dicha función en términos de una sola variable; después, se hallan los números críticos de la función obtenida y se determinan los máximos y los mínimos mediante el uso de la primera y la segunda derivada; finalmente, se verifican los resultados y se escribe la respuesta según las preguntas planteadas. (p.94)

En síntesis, nueve de los textos escolares consultados presentan una exposición sistemática del método para hallar máximos y mínimos con ejemplos de su aplicación y con pasos a seguir, pero no se explica cuál es el sentido de ese método, un por qué y para qué de cada paso; por el contrario, se hace referencia a definiciones formales de la derivada presentando una estructura que gira en torno a las manipulaciones algebraicas, más que a la construcción de significado de las nociones geométricas usadas para resolver un problema de optimización; tan sólo uno de los diez textos presenta justificaciones del método para hallar máximos y mínimos haciendo un contraste de lo algebraico con lo geométrico.

A diferencia de lo encontrado en los libros de texto, nuestras actividades buscan construir un sentido del método de maximización, para lo cual es necesario basarnos en las ideas geométricas que están a la base en la resolución de los problemas de optimización. Por ejemplo igualar la derivada a cero equivale a encontrar los puntos de la función en los que la tangente es horizontal. Por otra parte, pensamos que es necesario plantear el problema antes de dar la solución y dejar que el alumno experimente sus propias estrategias para llegar a la conclusión de sus límites.

2.2.1.2. Análisis epistemológico

Al realizar un recorrido histórico para encontrar la historia de la derivación, se encuentra que la idea de derivación surgió por el trabajo con tres problemas: el primero consistía en calcular el ángulo entre dos curvas, el segundo en encontrar máximos y mínimos de una curva y el tercero que tenía que ver con el cálculo de la velocidad y aceleración. En este análisis epistemológico nos centraremos en el segundo problema: hallar máximos y mínimos de una curva, cuya solución resulta de trazar una recta tangente a la curva que sea paralela al eje de las abscisas.

2.2.1.2.1. Método para hallar máximos y mínimos

Buscando el origen del método de máximos y mínimos, encontramos que los primeros trabajos son desarrollados por Fermat y Kepler; no obstante, Fermat inicia su análisis a partir de los trabajos realizados por Apolonio sobre lugares geométricos.

Según Boyer (1986), *"Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales en las secciones cónicas" (p.203)* es así como Apolonio estudia las distancias mínimas o máximas con el trazado de rectas normales.

Por su parte, Kepler al resolver este tipo de problemas (máximos y mínimos) demostró calculando volúmenes para dimensiones específicas, que el cubo es el más grande de los paralelepípedos rectos inscritos en una esfera.

> Kepler tuvo que diseñar cubas de vino de manera que tuvieran la máxima capacidad, además encontró que el paralelepípedo de base cuadrada y volumen máximo inscrito en una esfera es el cubo (…) Al acercarse al valor máximo para un cambio fijo en las dimensiones, el volumen crece cada vez más lentamente. La lectura actual de este hecho es que la derivada se anula en un máximo relativo. Fermat parece que da un método de hallar extremos por medio de lo que él denomina "pseudo-igualdades". Afirma que en un punto se alcanza un máximo si para un incremento infinitesimal de la variable la función no varía. (Muños & Román, 1999, p.5)

Es a Fermat a quien se le atribuye el primer método para hallar máximos y mínimos y aunque no disponía del concepto de límite, Boyer (1986) señala que sigue un camino paralelo al que podemos ver hoy en los libros de cálculo, reconoce que la única diferencia es que hoy se emplea el símbolo de $\boldsymbol{h}$ o $\boldsymbol{\Delta x}$ en vez de la **E** que empleaba Fermat en el incremento de la variable. De acuerdo con Boyer (1986):

> Fermat comparaba el valor de f(x) en un cierto punto con el valor de f(x+E) en un punto próximo; en general estos dos valores serán claramente distintos, pero en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva "lisa", la diferencia será casi imperceptible, por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a valores máximos o mínimos de la función, Fermat iguala f(x) a f(x+E), teniendo en cuenta que estos valores, aunque no son exactamente iguales, son "casi iguales". Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los dos puntos, más cerca estará dicha pseudo-igualdad de ser una verdadera ecuación; (…) divide todo por E, hace E=0. El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica. (p.440)

Por lo anterior se menciona a Fermat como el precursor de un método general para la determinación de máximos y mínimos. Bessot, D. et al. (1999), hacen la siguiente interpretación del método de Fermat: *"El fundamento del método de Fermat – más allá de su apariencia algorítmica- consiste en esto: cuando la ordenada llega a un extremo, hay, de cada lado de esta, otras dos ordenadas cercanas que son iguales entre ellas". (p.123)*

En términos geométricos, toda recta paralela al eje de las abscisas corta la curva en dos puntos; cuando estos dos puntos están infinitamente cercanos su ordenada es el extremo de la curva (y la recta será tangente a la curva). Por lo tanto, podemos afirmar que el método de Fermat es equivalente a calcular la abscisa del punto de la curva cuya tangente es paralela al eje de las abscisas.

El método que aparece en los libros de texto, que consiste en calcular la función derivada e igualarla a cero es precisamente una solución del problema de calcular la abscisa de un punto de la curva cuya tangente sea paralela al eje de las abscisas. Al calcular la función derivada se obtienen las pendientes de las rectas tangentes en todos los puntos de la curva, y al igualar la derivada a cero se encuentran los puntos cuyas tangentes son paralelas al eje de las abscisas.

Para comprender geométricamente el método de la maximización utilizando la derivada es necesario comprender qué es una curva, qué es una función y que para calcular la altura de una curva hay que encontrar una recta tangente que sea paralela al eje de las abscisas.

Epistemológicamente hay varias dificultades para comprender y aplicar el método de maximización; una de ellas es comprender las definiciones de límite y de derivada. En esta investigación proponemos unas alternativas geométricas al uso de la derivada y el límite, para ello utilizaremos el concepto de lugar geométrico para no utilizar la definición formal de derivada ni la de límite. De esta forma, llegamos a identificar que vamos a trabajar en dos problemas diferentes:

I. Identificar que para calcular la altura de una curva es necesario encontrar los puntos donde la tangente es horizontal o paralela al eje de las abscisas.
II. Tomar conciencia de que no es posible calcular directamente la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto, y comprender el uso de funciones como lugares geométricos para hacer ese cálculo (sin utilizar el concepto de límite).

2.2.1.2.2. Lugares geométricos en la historia

En su libro Lugares Geométricos, Del Rio (1996), realiza un breve tratado de los lugares geométricos siguiendo el desarrollo histórico de la matemática. Para ello menciona los tres problemas griegos clásicos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo) como punto de partida en el descubrimiento de las secciones cónicas como lugares geométricos que permiten resolver esos problemas.

Entre los matemáticos que estudiaron estos problemas, se encuentra Arquímedes. En su libro *Sobre las espirales*, descubre la espiral como lugar geométrico para resolver el problema de la trisección del ángulo:

> Esta curva se define como el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del origen de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su origen. Por esta razón, también se llama espiral uniforme.

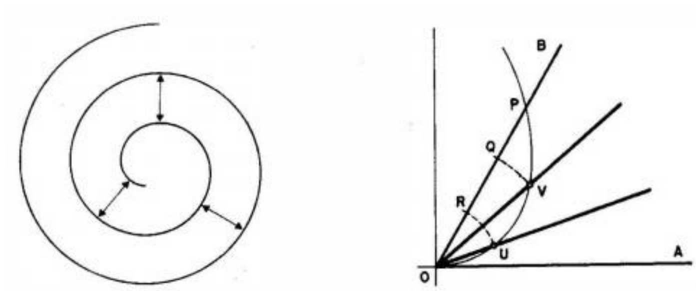


Figura 12. Espiral de Arquímedes como lugar geométrico para resolver el problema de la trisección de un ángulo (Del Río, 1996, p. 19)

> Para trisecar el ángulo AOB (figura 12) dibujamos la espiral con el origen en O y semirrecta OA. Sea P el punto donde la espiral corta por vez primera al lado OB del ángulo. Dividimos el segmento OP en tres partes iguales por medio de los puntos O y R. Trazamos las circunferencias con centro en O y radios OR y OQ respectivamente. Cortan a la espiral en los puntos U y V. Las semirrectas OU y OV dividen al ángulo AOB en tres ángulos iguales. (Del Río, 1996, p. 19)

El anterior es un claro ejemplo de la utilización de un lugar geométrico para resolver un problema: Se construye el lugar geométrico y se busca la intersección con otros objetos.

Paralelamente, Apolonio estudia en su obra *Lugares planos,* lugares geométricos rectilíneos o circulares. En el libro II aparecen dos importantes lugares geométricos:

1) Lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante(es una recta perpendicular a la que determinan los dos puntos).
2) Lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es una constante distinta de la unidad (es una circunferencia). (Del Rio, 1996, p.21)

Otro matemático que utilizó los lugares geométricos para resolver problemas, fue Descartes (1596-1650) quien encontró métodos geométricos en la resolución del famoso problema de Pappus sobre la determinación del lugar de las cuatro rectas:

> Dadas cuatro rectas de un plano, r, s, t y u, (figura 13) hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de los segmentos PA Y PB trazados con un ángulo fijo a las rectas r y s es proporcional al producto de los segmentos PC y PD trazados a t y u con el mismo ángulo (…) Descartes se plantea la generalización del problema para más de cuatro rectas, caso que Pappus había sido incapaz de resolver. Descubre que para cinco o seis rectas el lugar geométrico es una cúbica, para siete u ocho es una cuártica y así sucesivamente. (Del Río, 1996, p.39)

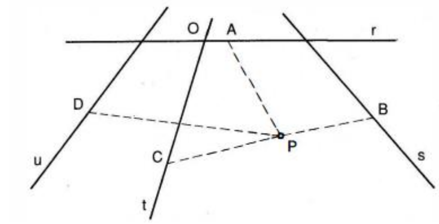


Figura 13. Problema de Pappus (Del Río, 1996, p. 38)

Fermat por su parte, al intentar reconstruir los Lugares planos de Apolonio, descubre el principio fundamental de la geometría analítica: "*Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva"* (Boyer; 1986, 437).

En todos estos ejemplos históricos vemos como los matemáticos usaban lugares geométricos intersectándolos con otros objetos para resolver problemas. Igualmente, los matemáticos se dedicaron a estudiar los lugares geométricos en sí mismos.

2.2.1.2.3. La función como lugar geométrico

Una función es un tipo particular de lugar geométrico, ya que es la trayectoria de un punto en el que al variar la abscisa, varía la ordenada. Una función es un lugar geométrico que expresa la variación de una cantidad, por lo tanto es la relación entre la abscisa y la ordenada (del punto que describe el lugar geométrico) como cantidades.

Para la comprensión del concepto de función y de gráfica de una función es necesario mencionar la concepción de gráfica de función como lugar geométrico en el que hay una dependencia numérica (como se aborda en esta investigación). Se retoman las siguientes definiciones de lugar geométrico del libro Geometría analítica, del profesor Lehmann, C. (1989):

> *Definición 1.* El conjunto de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación, se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, su *lugar geométrico* (…) tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

Definición 2. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

Definición 3. Se llama ecuación de un *lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma *(x, y) =0* Cuyas soluciones reales para valores correspondientes de *x* y *y* son todas las coordenadas de aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico. (pp. 33- 51)

Dentro del recorrido histórico que se realizó a los lugares geométricos, encontramos que se asociaron las *ecuaciones* y los *lugares geométricos* representados por ellas con el concepto de función. Para Descartes una ecuación era una representación algebraica de un lugar geométrico y de esta manera desarrolló la geometría analítica como uso de las expresiones algebraicas para resolver problemas de geometría. Así mismo, Fermat dejó clara su idea de que *"la ecuación es la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico" (Del Rio, 1996 p.40)*.

Respecto al término "función" Sastre, Rey & Boubée (2008) mencionan que fue Leibniz el primer matemático en emplearla, refiriéndose a ésta como: *"Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada". (p. 147)*

Para Newton *"las "funciones eran magnitudes geométricas asociadas a curvas o al movimiento de un cuerpo material (de ahí las funciones del tiempo)" (Muñoz y Román, 1999, p.14)* de esta forma las funciones se empiezan a concebir como magnitudes que están estrechamente relacionadas con las curvas. Así mismo, en Farfán & García (2005) encontramos que Jakob y Bernoulli estudian el cálculo de Leibniz mostrando el poder de las gráficas de las funciones como una herramienta para la resolución de problemas físicos.

En síntesis, las funciones como lugares geométricos fueron trabajadas por diferentes matemáticos quienes las concebían como ecuaciones o expresiones analíticas las cuales formaban curvas con las que se podía encontrar la solución de un problema.

2.2.1.2.4. Ejemplo del uso de un Lugar Geométrico para la resolución de un problema

En esta investigación, se ve el lugar geométrico como la congelación de un movimiento. El poder de los lugares geométricos radica en que brindan información sobre muchos puntos. El lugar geométrico surge del movimiento de un punto, es decir su trayectoria; pero cuando se ve ese lugar geométrico como una curva quieta, se obtiene información sobre todos los momentos del movimiento.

A continuación se ejemplifica el uso del Lugar Geométrico para resolver el problema: *"Dadas tres rectas paralelas, construir un triángulo equilátero que tenga sus vértices en esas tres rectas".*

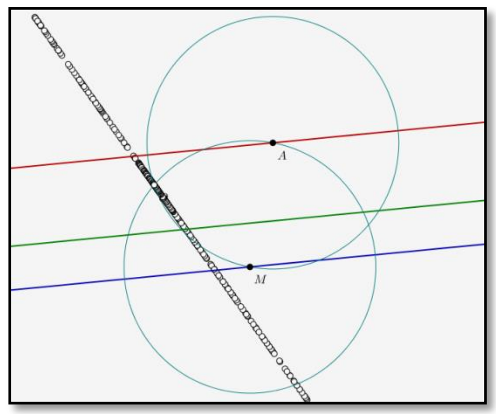


Figura 14. Traza del punto O

I. Se determina un punto A en la recta roja y un punto M sobre la recta azul como se muestra en la figura 14.

II. A partir de esos dos puntos se construye un triángulo equilátero utilizando dos circunferencias y su intersección O.

III. Como en el problema se pide construir un triángulo equilátero cuyos vértices se encuentren en cada una de las rectas paralelas, se debe buscar que el punto O quede sobre la paralela verde. Si se activa la herramienta traza de ese punto O, se observa la huella que va dejando el punto O cuando se mueve el punto M, como se muestra en la figura 14.

IV. El punto buscado es la intersección de esa huella con la recta verde. En la pantalla puede identificarse que el Lugar Geométrico de O cuando se mueve M, tiene la forma de una línea recta.

V. Si se construye la recta que corresponde al lugar geométrico de O y su intersección (C) con la recta verde, se puede utilizar ese punto C para construir el triángulo equilátero ABC, que tendrá sus tres vértices sobre las rectas paralelas. Se traza la recta CA y con la herramienta compás se traslada la distancia CA hasta la paralela azul obteniendo AC=AB=CB como se muestra en la figura 15.

Podemos verificar que se cumple una primera condición y es que el punto C está ubicado en la recta paralela color verde y que todos los puntos que forman la recta que pasa por OC cumplen la condición de describir el movimiento del punto O. Por lo tanto, se ha construido el triángulo equilátero ABC cuyos vértices se encuentran en cada una de las rectas paralelas y esto fue posible gracias al lugar geométrico del punto O cuando se movía el punto M.

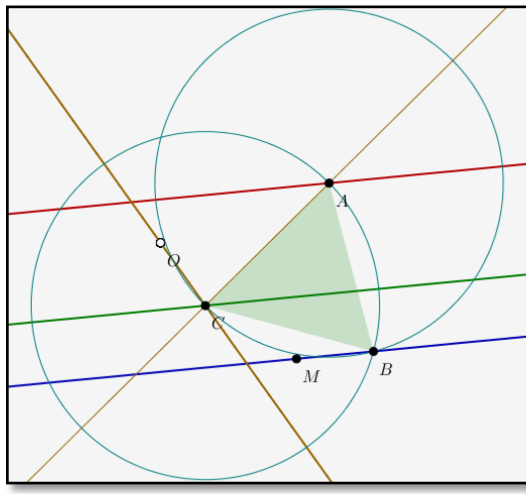


Figura 15. Uso de un lugar geométrico para resolver un problema

Este análisis epistemológico nos aporta en el diseño de las actividades, al permitirnos identificar la interpretación geométrica del método de la derivada para hallar puntos máximos y mínimos, así como las relaciones entre la noción de curva o gráfica de una función y el concepto de lugar geométrico. Por una parte se hace necesario introducir la curva de una función que modela el problema a optimizar, para utilizarla en la determinación del máximo. Determinar el máximo de una función equivale a medir la altura de su gráfica. Por otra parte, es necesario plantear actividades que relacionen la tarea de medir la altura de una curva con la tarea de encontrar los puntos de la curva en los que la tangente es horizontal.

Además, es posible representar la derivada como un lugar geométrico, sin necesidad de trabajar una definición formal o una representación algebraica. Si se construye el lugar de los puntos cuyas coordenadas representan la relación que existe entre la abscisa de un punto de la función y la pendiente de la tangente en ese punto, puede encontrarse la intersección de este lugar con el eje de las abscisas, lo cual equivale a encontrar los ceros de la función derivada.

2.2.1.3. Análisis cognitivo

En este apartado buscamos identificar las dificultades cognitivas que pueden enfrentar los estudiantes al trabajar en la solución de problemas de optimización utilizando las nociones geométricas que están a la base del método de la derivada y proponer estrategias para superar esas dificultades.

Desde la revisión histórico-epistemológica consideramos que el método de la derivada para hallar máximos y mínimos consiste en encontrar los puntos de la gráfica de la función en los cuales la recta tangente es horizontal. El método de Fermat busca precisamente garantizar la tangencia de una recta horizontal a la curva de una función y es un artilugio numérico para garantizar esa tangencia.

Para trabajar sobre el sentido del método basándonos en los significados geométricos, es necesario seguir dos líneas de razonamiento: una para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto y otra para encontrar el punto máximo o mínimo de una curva conociendo las pendientes de las rectas tangentes.

2.2.1.3.1. Línea de razonamiento para encontrar el punto máximo o mínimo de una curva

La estrategia de calcular la derivada de la función e igualarla a cero para encontrar los puntos máximos o mínimos de una función equivale a encontrar todas las pendientes de las rectas tangentes a la curva de la función e identificar aquellas tangentes que son horizontales. Por lo tanto, la estrategia geométrica necesita partir de la curva de una función; comprender que para medir la altura de esa curva es necesario encontrar una recta tangente a la curva que sea horizontal y para determinar esa recta es necesario considerar todas las rectas tangentes a esa curva y concebir una manera de identificar los puntos de la curva en los que esas tangentes son horizontales.

Para seguir esta línea de razonamiento se necesita calcular la ecuación de una función y trazar su gráfica; después de obtener la gráfica (curva) de la función que modela el problema, es necesario poder trazar la recta tangente a la curva que sea paralela al eje de las abscisas y de esta manera calcular la altura de la curva.

Como ya lo mencionamos, una estrategia que permite determinar esa recta tangente horizontal, consiste en considerar todas las rectas tangentes y determinar aquellas que son horizontales. Podemos entonces utilizar el lugar geométrico que representa todas las pendientes de todas las rectas tangentes y determinar el punto de corte de ese lugar geométrico con el eje de las abscisas, puesto que en esos puntos la pendiente de la recta tangente es cero.

Para poder utilizar este procedimiento se necesita construir una recta tangente a una curva en un punto y calcular su pendiente; cuando se tienen ambas, se debe construir la gráfica de la función que a cada abscisa le asigna la pendiente de la recta tangente; esa gráfica es un lugar geométrico. En este orden de ideas, el problema será buscar el lugar geométrico que muestre todas las pendientes de todas las rectas tangentes, construirlo y encontrar el corte con el eje de las abscisas.

Al desarrollar esta línea de razonamiento identificamos tres grandes dificultades: la primera al momento de calcular la ecuación que modela el problema y las otras dos al construir una recta tangente a una curva en un punto y calcular su pendiente:

1) Establecer una fórmula en términos de una sola variable es una tarea parcial que genera una dificultad de tipo procedimental ya que para los estudiantes puede ser difícil entender la necesidad de expresar cálculos en función de una sola variable.

2) Construir la recta tangente a una curva exige al estudiante hacer un razonamiento geométrico complejo, lo que consume tiempo y puede llevar a distraerlo de la línea de razonamiento; es decir, a olvidar para qué necesita trazar la recta tangente. Una posibilidad de evitar esta dificultad es construir una macro del software que construya la recta tangente a una curva en un punto. De esta manera, el estudiante puede concentrarse en el uso de esa recta tangente sin necesidad de preocuparse por la construcción.

3) Determinar (la forma del) lugar geométrico que representa las pendientes de todas las rectas tangentes a una curva. Si la función original es una parábola, el lugar geométrico será una línea recta que puede construirse usando las herramientas del software; pero si es una función cúbica entonces el lugar geométrico será una parábola y ahí se presenta la dificultad de cómo construir la gráfica de una parábola a partir de algunos puntos, esta dificultad se puede evitar con una macro.

2.2.1.3.2. Línea de razonamiento para calcular la pendiente de una recta tangente

Para encontrar la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto, la estrategia matemática consiste en calcular el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por ese punto cuando la distancia de los dos puntos de intersección tiende a cero.

Una estrategia geométrica que da sentido a esta línea de razonamiento y evita utilizar el cálculo de un límite consiste en crear la gráfica de una función(lugar geométrico) que relaciona la pendiente de la recta secante que pasa por un punto fijo con la diferencia de las abscisas de los dos puntos de intersección y encontrar el punto de corte de esa gráfica con el eje de las ordenadas, ya que en ese punto la diferencia entre las abscisas de los puntos de intersección es nula y por lo tanto la recta es tangente.

En esta línea de razonamiento se identifican tres dificultades: la primera relacionada con la construcción del lugar geométrico (curva), la segunda con el cálculo de la pendiente de una recta secante a la curva y la tercera que tiene que ver con la construcción de la recta tangente dada la pendiente y un punto.

1) Esta es la misma dificultad que se presentó en la primera línea de razonamiento en el numeral tres y se soluciona con la construcción de una macro que cree una parábola a partir de tres puntos.

2) Resolver el problema de calcular la pendiente de una recta secante a la curva. Aquí el estudiante se puede distraer de la línea de razonamiento dado que es una tarea compleja (porque implica entender que la pendiente es el cociente de dos diferencias), convirtiéndose esto en un problema parcial que se puede evitar a partir del diseño de una macro la cual permita conocer la pendiente de una recta a partir de un punto dado que pase por la recta.

3) Verificar si la pendiente hallada es la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la curva; esto puede generar otra dificultad de tipo procedimental, dado que es posible que el estudiante no conozca cómo construir una recta conociendo su pendiente y un punto de la recta. Una forma de superar esta dificultad, es aplicando una estrategia de tipo procedimental propuesta por el profesor, que consiste en determinar un punto de la recta haciendo que la diferencia de las abscisas de los dos puntos de la recta sea igual a la unidad:

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{\boldsymbol{Pendiente}}{\boldsymbol{1}}$$

Con este análisis cognitivo podemos concluir que el uso de macros (construcción de una recta tangente, una parábola dados tres puntos, entre otros) y la construcción de lugares geométricos, permitirá que los estudiantes superen las dificultades descritas en las líneas de razonamiento. Por otro lado, la separación de estas líneas de razonamiento es necesaria para el diseño de las actividades, pues se le da un sentido a la estrategia que se le quiere proponer al estudiante para la resolución de problemas de optimización.

2.2.2. FASE II. DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI

En esta ingeniería se proponen al estudiante dos problemas de optimización y su modelación en el SGD (Software de Geometría Dinámica), para que en la interacción con ese modelo virtual le sea posible invalidar las estrategias espontáneas de su parte, con el fin de explicitar la necesidad de una estrategia matemática. Dicha estrategia matemática no se expone en su totalidad al estudiante, sino que el profesor sugiere algunas acciones que el estudiante podrá realizar y a partir de las retroacciones del software encontrará las siguientes acciones que le permitirán resolver el problema. Además, se propone una actividad con objetos e instrumentos físicos con el propósito de darle sentido a la estrategia matemática de encontrar una tangente horizontal para determinar el punto máximo de una curva.

El funcionamiento adidáctico de las actividades está centrado en la posibilidad que tiene el estudiante de proponer sus propias estrategias y ponerlas a prueba en el modelo virtual o con los objetos e instrumentos físicos. Aunque la interacción con el software permitirá invalidar todas las estrategias no matemáticas, es posible que el estudiante no esté en la capacidad de aprovechar todo el potencial del software para comprobar sus estrategias; por lo tanto, el profesor le propondrá (cuando sea necesario) las acciones de verificación con el software que conducen a la validación o invalidación de las estrategias propuestas.

Igualmente, el funcionamiento adidáctico radica en la posibilidad de construcción conjunta (profesor/estudiante) de la estrategia de solución; esta construcción es conjunta, pues el profesor propone unas acciones iniciales, y gracias a las retroacciones del software el alumno puede proponer las acciones subsiguientes que conducen a la solución.

Se tiene como hipótesis que de esta manera la estrategia adquiere sentido para el estudiante, pues comprende no solo la utilidad de las acciones, sino el por qué y el para qué de cada una de ellas.

Los problemas propuestos son: el problema del hexágono, donde se pide la maximización de un área (correspondiente a una función cuadrática) y el problema de la caja, donde se pide la maximización de un volumen (correspondiente a una función cúbica). Para cada problema se diseñaron cuatro actividades cuyos objetivos describimos a continuación:

Primera Actividad: Planteamiento del problema, exploración del modelo, invalidación de estrategias perceptivas, introducción de una función y su gráfica como herramienta para determinar el máximo.

Segunda Actividad: Determinación de condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible.

Tercera Actividad: Aplicación de la estrategia de medición de la actividad 2, a la determinación de la altura máxima de la gráfica de la función. Utilización de la derivada como lugar geométrico.

Cuarta Actividad: Trabajo sobre la noción de límite y el cálculo de la pendiente de una recta tangente utilizando lugares geométricos, como complemento de la tercera actividad.

La secuencia de trabajo en los dos problemas es similar, así que presentaremos únicamente el análisis a priori de las cuatro actividades del primer problema. El segundo problema está previsto para invalidar una posible estrategia de solución basada en la simetría de las parábolas, o como una forma de comenzar la generalización de la estrategia matemática propuesta por el profesor. En el anexo 1 está la descripción sucinta de la secuencia para el problema de la caja, con sus figuras y macros correspondientes.

A continuación se presenta la secuencia de actividades para el problema del hexágono, donde se explicitan las tareas propuestas a los estudiantes, las posibles estrategias espontáneas de los mismos, y las intervenciones del profesor para proponer maneras de verificación utilizando el software, o estrategias matemáticas nuevas para los estudiantes.

2.2.2.1. Primera Actividad

EL PROBLEMA DEL HEXAGONO

Enunciado: Se desea construir un hexágono en forma de “L” como se muestra en la figura 16, con las siguientes condiciones: un lado debe tener como longitud 1 metro, los dos lados adyacentes a éste deben ser uno el doble del otro y el perímetro debe ser 20 metros. ¿Qué medidas deben tener los lados del hexágono para que su área sea la mayor posible?

Los estudiantes tienen acceso a un archivo en CaRMetal, en donde se encuentra el modelo dinámico del problema (ver anexo 2). Allí mismo se muestra el valor del perímetro y el valor del área del hexágono (figura 16). Al desplazar el vértice **B** sobre el eje *x* varía la longitud de los lados y el área del hexágono, manteniéndose el valor del perímetro.

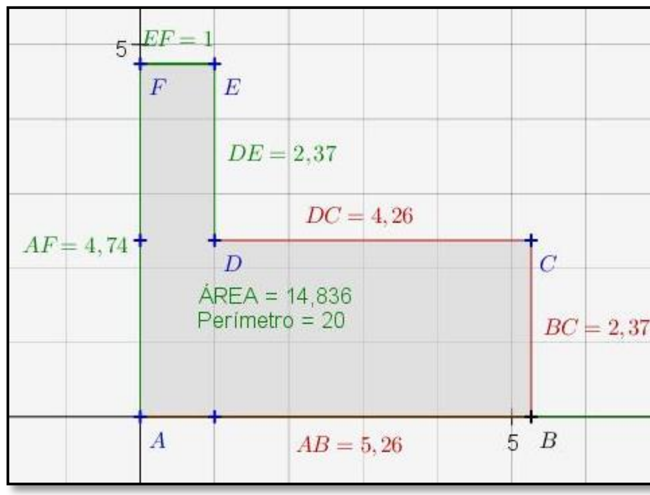


Figura 16. Modelo en CaRMetal que representa la situación del hexágono, junto con los valores de perímetro y área.

Exploración previa para la familiarización con el modelo

Se le sugiere al estudiante que verifique si el modelo cumple con las condiciones del problema. Al intentar arrastrar todos los vértices, la retroacción del medio le permite darse cuenta que el único que tiene la posibilidad de arrastre es el vértice **B**; además puede reconocer que las medidas de los segmentos varían, pero el perímetro permanece constante. Igualmente, se espera que el estudiante observe una variación de la longitud de los lados del hexágono y del valor del área cuando arrastra el punto **B**.

Tarea 1. Encontrar el área máxima del hexágono utilizando el modelo

El propósito de esta tarea es que el estudiante proponga estrategias perceptivas para encontrar el área máxima del hexágono y llegue a invalidar esas estrategias.

Estrategia perceptiva del estudiante

Es posible que el estudiante mueva el punto **B** hasta que el número correspondiente al área sea perceptivamente el más grande y diga que ese valor es el área máxima del hexágono. Como el estudiante no tiene cómo invalidar su estrategia, el profesor debe intervenir.

Intervención del profesor para proponer acciones de verificación con el software

El profesor propone aumentar los decimales del área mostrada (utilizando la herramienta *Precisión numérica/ fórmulas*) y hacer zoom para agrandar la figura. Al desplazar nuevamente el punto **B**, el estudiante debe encontrar valores del área mayores al encontrado inicialmente. Además, debe notar que en varias posiciones del vértice **B** se obtiene la misma área.

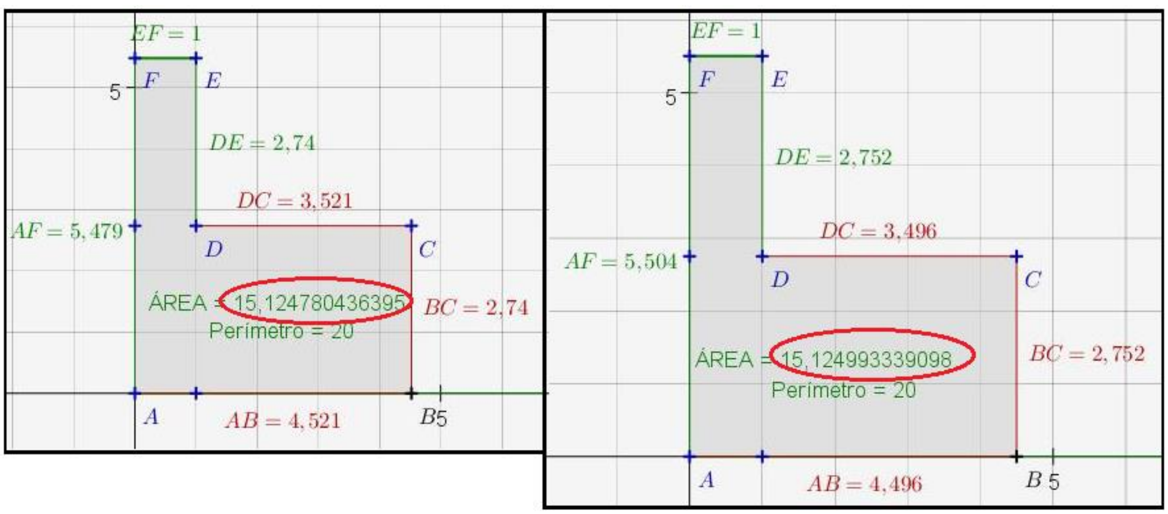


Figura 17. Invalidación de la estrategia perceptiva utilizando zoom y precisión numérica

En la figura 17 se ve cómo la estrategia perceptiva usada por el estudiante queda invalidada al encontrar un valor mayor después de hacer zoom y arrastrar el vértice **B**.

Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática

La estrategia matemática que propondrá el profesor consiste en utilizar la gráfica de la función que relaciona la longitud del segmento $\overline{AB}$ con el área del hexágono, para lo cual se seguirán las siguientes etapas:

Etapa 1. Observación del movimiento de un punto P que relacione la longitud de un lado del hexágono con el área. En esta etapa se resalta la dependencia funcional de los dos valores, representada por la posición de un punto en el sistema de coordenadas.

***Etapa 2. Utilizar* la *traza para observar las distintas posiciones del punto P*.** En esta etapa se genera la idea de gráfica como representación simultánea de muchos puntos.

Etapa 3.Construir la gráfica de la función con el fin de tener un objeto geométrico sobre el cual se puede intervenir (por ejemplo, colocando un punto sobre él).

Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo. En esta primera actividad sólo se busca remplazar la observación de los valores numéricos del área por la observación de la curva de la función, llegando a invalidar las estrategias perceptivas para determinar el punto máximo.

DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA MATEMÁTICA PROPUESTA POR EL PROFESOR

Etapa 1. Observación del movimiento de un punto P que relacione la longitud de un lado del hexágono con el área

El profesor enseña al estudiante otra forma de hacer visible la variación del área con respecto a la variación del lado $\overline{AB}$: construir un punto **P**[2]que tenga la misma abscisa de **B**, y cuya ordenada corresponda al área de la figura.

Se espera que el estudiante recuerde que la abscisa del punto **B** representa la longitud del segmento $\overline{AB}$**.** Se pide al estudiante que arrastre el punto **B** para que se dé cuenta que la altura de dicho punto representa el área del hexágono. De esta manera, se está reemplazando la observación del número-área por la posición del punto **P**; entre más alto esté el punto **P,** más grande es el área.

[2]CaRMetal permite definir la posición de un punto a partir de sus coordenadas. Para el caso del punto **P**, su abscisa es x (B) (notación CaRMetal para la abscisa de **B)** que representa la longitud del lado $\overline{AB}$ del hexágono y su ordenada es **E25** (nombre de la fórmula CaRMetal utilizada para calcular el área del hexágono). El hecho de que CaRMetal incluya el símbolo ***x*** como parte de la notación de la abscisa de un punto podría generar confusión en el estudiante, para quien ***x*** representa una variable en una ecuación. Es posible evitar este conflicto semiótico utilizando una macro que calcule la abscisa de un punto.
(Ver macro ***abscisapunto*** en anexo 1)

En esta etapa el estudiante puede encontrarle sentido a la estrategia propuesta por el profesor, al deducir que la ordenada del punto construido corresponde al área del hexágono cuando $\overline{AB}$ varía, o al concluir que "entre más alto esté el punto **P** más grande es el área".

Etapa 2. Utilizar la traza para observar las distintas posiciones del punto P

Se espera que el estudiante exprese la necesidad de saber con precisión si una posición determinada de **P** es más alta que otra.

El profesor le enseña al estudiante a activar la traza del punto **P** y le pide que arrastre el punto **B** (figura 18).

Se espera que el estudiante vea que la traza muestra las diferentes posiciones que tiene el punto **P**; es decir, la traza muestra la variación del área respecto a la longitud del lado del hexágono y permite decidir si una posición es más alta que otra.

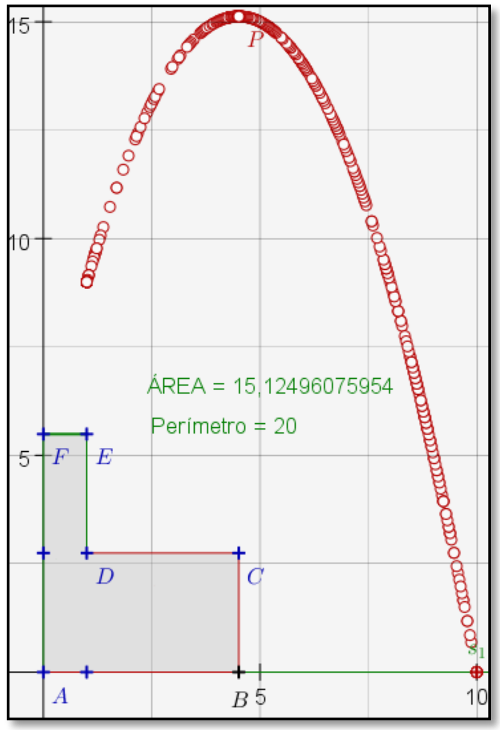


Figura 18. Traza del punto P

En esta etapa el estudiante puede identificar que la traza tiene forma de parábola y que existe un punto cuya ordena es la mayor de todas (por lo tanto, representa el área máxima); además, puede reconocer las ventajas de la traza al tener la posibilidad de ver en un solo vistazo varias áreas.

<u>*Estrategia del estudiante*</u>

El estudiante puede intentar colocar un punto sobre la traza, pero al hacer zoom para verificar, la traza desaparece. También puede mover el punto **B** para tratar de que el punto **P** quede en la posición más alta de la traza; nuevamente, al hacer zoom la traza desaparece impidiendo reconocer perceptivamente si el punto **P** es el más alto.

Etapa 3. Construir la gráfica de la función

Al mostrar la traza del punto **P** el estudiante puede identificar visualmente la posición que corresponde al área máxima, pero no puede utilizar la traza para determinar con precisión dicho punto, pues la traza desaparece al hacer zoom. Surge entonces la necesidad de tener un objeto geométrico que represente las posiciones del punto **P**, que no se borre y sobre el cual sea posible construir. El profesor propone la herramienta *gráfica de función* como respuesta a esa necesidad, explicando que para obtener la gráfica de las posiciones de **P**, es necesario determinar la expresión algebraica que permite calcular el área del hexágono a partir del valor de $\overline{\boldsymbol{AB}}$.

Tarea 2. Determinar la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función

El estudiante debe determinar la expresión algebraica del área del hexágono en función de $\overline{\boldsymbol{AB}}$ con el fin de escribir esa fórmula en el software para obtener la gráfica. Es importante aclarar que esta tarea es difícil para el estudiante, porque implica comprender que se necesita una expresión con una sola variable y por tanto saber qué es una variable, pues se está suponiendo una familiaridad con el concepto de función.

<u>Estrategia del estudiante para calcular el área del hexágono</u>

Es posible que el estudiante divida el hexágono en dos rectángulos: **ABCG** y **DEFG** y calcule el área de cada rectángulo como se muestra en la figura 19. Puede que el estudiante no considere las relaciones entre los lados y se conforme con sumar el área de los dos rectángulos:

ÁREA =($\overline{\boldsymbol{AB}}$*$\overline{\boldsymbol{BC}}$)+ ($\overline{\boldsymbol{FE}}$*$\overline{\boldsymbol{GF}}$)

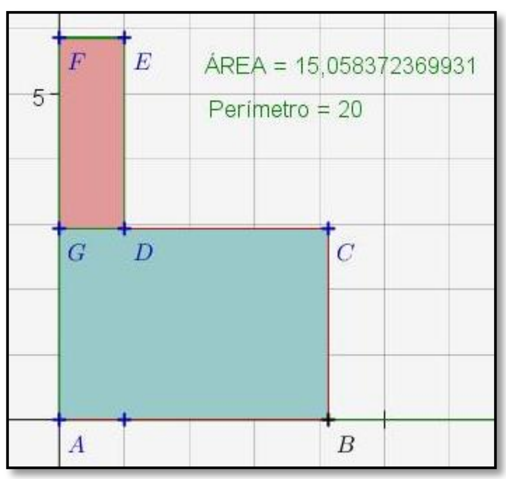


Figura 19. Calculo del área del hexágono dividiendo el hexágono en dos rectángulos.

Si el estudiante ha olvidado las condiciones del problema, el profesor debe intervenir recordando la relación entre los lados: $\overline{FE}$=1, $\overline{AF}$=2$\overline{BC}$, $\overline{DC}$=$\overline{AB}$-$\overline{FE}$=$\overline{AB}$-1, $\overline{BC}$=$\overline{GF}$. Teniendo en cuenta estas relaciones, el estudiante puede modificar su expresión de la siguiente manera:

ÁREA = ($\overline{AB}$*$\overline{GF}$) + (1*$\overline{GF}$)

ÁREA = ($\overline{AB}$*$\overline{GF}$) +$\overline{GF}$

Esta última expresión tiene dos variables, por lo cual es necesario que el profesor vuelva a intervenir recordando el hecho que el perímetro es constante e igual a 20cm. El estudiante puede simbolizar este hecho de la siguiente manera: **20= (**2$\overline{AB}$+4$\overline{GF}$)

Y utilizar esta expresión para encontrar una forma de expresar $\overline{GF}$ en función de$\overline{AB}$

$$2\overline{AB} + 4\overline{GF} = 20$$

$$\overline{GF} = \frac{20 - 2\overline{AB}}{4}$$

$$\overline{GF} = \frac{10 - \overline{AB}}{2}$$

ÁREA = ($\overline{AB}$*$\overline{GF}$) +$\overline{GF}$

$$\text{ÁREA} = \left(\overline{AB} * \frac{10-\overline{AB}}{2}\right) + \frac{10-\overline{AB}}{2}$$

$$\text{ÁREA} = \frac{9 * \overline{AB} - \overline{AB}^2 + 10}{2}$$

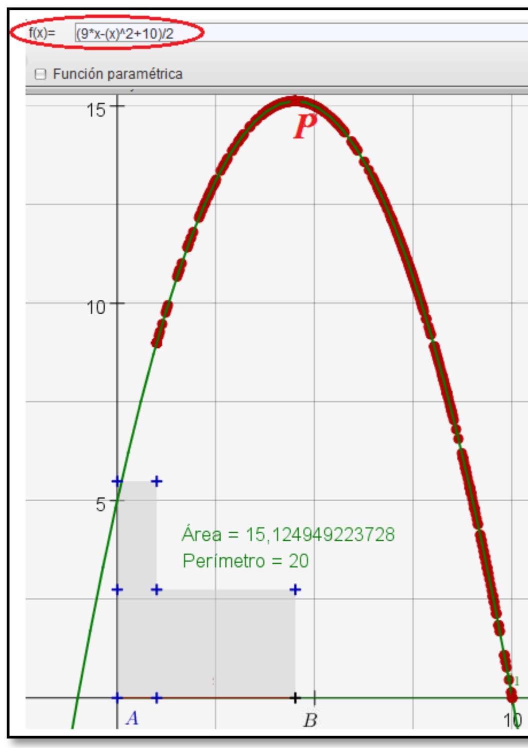


Figura 20. Gráfica de la función que modela la relación de la longitud de un lado del hexágono con su área.

Cuando el estudiante haya encontrado la expresión para calcular el área del hexágono en función de $\overline{AB}$, el profesor enseña al estudiante la herramienta *graficar una función.* Le explica que como la abscisa del punto **B** (distancia que existe de **A** hasta **B**) es la magnitud que varía, entonces se debe simbolizar con la letra ***x***[3].Así, la función que representa el área del hexágono con perímetro 20 centímetros es: F1**:**(9**x*−(*x*) ^2+10)/2

Una vez obtenida la gráfica de la función (ver figura 20), el profesor debe plantear preguntas como: ¿Por qué la traza no describe toda la gráfica? ¿Qué pasa si se toma un punto sobre la gráfica en un cuadrante diferente al primero?, ¿Por qué $\overline{\boldsymbol{AB}}$ no puede ser más pequeño que 1?, ¿Puede el área ser negativa?, ¿Puede el hexágono tener un lado negativo? Con estas preguntas se busca que el estudiante diferencie la gráfica de la función del dominio de validez del problema. La gráfica representa un conjunto de datos (área, magnitudes) pero no todos estos datos cumplen las condiciones de la situación problema.
Se espera que el estudiante diferencie la función del modelo que representa el problema; es decir, que reconozca que el punto **B** solo se desplaza dentro del dominio de validez del modelo, mientras que la función muestra otras posiciones que no hacen parte de las condiciones del problema.

Con esta tarea el estudiante puede encontrarle sentido a la estrategia propuesta por el profesor (construir la gráfica de la función a partir de una ecuación), al verificar que la ecuación encontrada genera la gráfica que modela el problema ya que ésta pasa por la huella que deja el punto **P**.

Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo

En esta etapa se espera que el estudiante utilice estrategias perceptivas para ubicar un punto en la parte "más alta" de la gráfica; si encuentra el punto más alto, encuentra el área máxima. No obstante, se busca que invalide esas estrategias perceptivas para justificar la construcción de la estrategia matemática que propondrá el profesor.

Estrategia perceptiva del estudiante

El estudiante puede ubicar un punto **E** sobre la curva[4]y arrastrar ese punto hasta la posición más alta.

[3] Esta exigencia es impuesta por el software, no es una restricción matemática.

Intervención del profesor para proponer acciones de verificación

El profesor propone al estudiante utilizar las coordenadas del punto **E**, aumentar el número de decimales y hacer zoom para verificar con mayor precisión esa estrategia. Al hacer zoom y mover el punto **E**, el estudiante podrá encontrar posiciones del punto **E** más altas que la posición encontrada inicialmente y de esta manera, se invalida su estrategia perceptiva (figura 21).

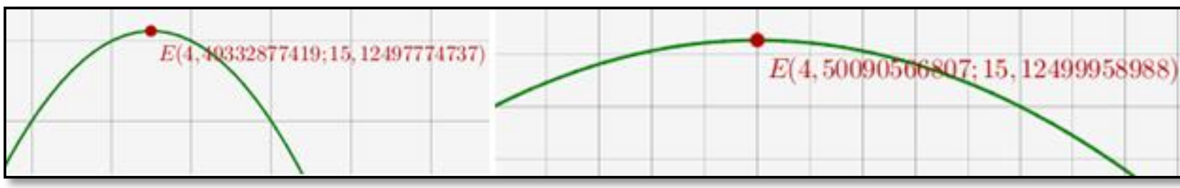


Figura 21. Zoom en el punto E

Estrategia matemática del estudiante para determinar el punto máximo de la curva

Si el estudiante reconoce que la gráfica de la función tiene forma de parábola y recuerda que las parábolas tienen un eje de simetría, es posible que determine las intersecciones de la curva con el eje ***x*** y halle el punto medio entre estos dos puntos de intersección para encontrar la abscisa del punto máximo.

Al usar la macro ***Puntosobrelacurva*** el estudiante halla el punto máximo **V** de la parábola como se muestra en la figura 22.

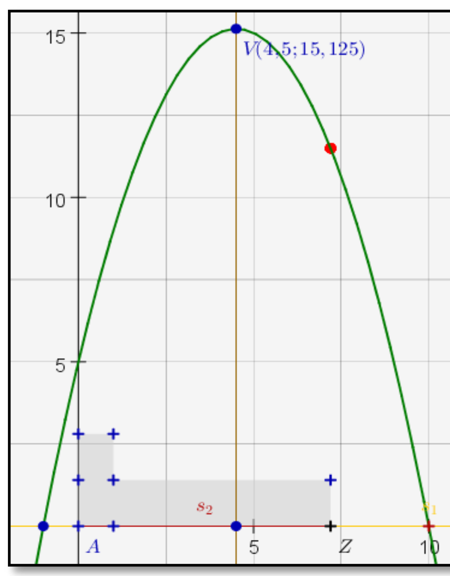


Figura 22. Punto máximo V

---

[4]CaRMetal permite construir un punto sobre la gráfica de una función. Sin embargo, la ordenada de ese punto no corresponde exactamente al valor de la función correspondiente a la abscisa. Para evitar esta inconsistencia utilizamos una macro que construye un punto de la función a partir de un punto en el eje de las abscisas. (ver macro ***puntosobrelacurva*** anexo 4)

Para validar esta estrategia, el estudiante puede hacer zoom y observar todos los decimales de las coordenadas del punto, verificando que **V** es el punto máximo de la parábola. No todos los estudiantes conocen la propiedad de simetría de la parábola, por lo que es posible que esta estrategia no aparezca.

Si el estudiante propone la estrategia de simetría para calcular el punto máximo de la curva, el profesor le planteará *el problema de la caja* (ver anexos 3 y 4), donde esta estrategia no funciona, ya que la función que modela el problema es una función cúbica que no tiene un eje de simetría.

Si el estudiante no propone la estrategia de simetría, después de invalidar la estrategia perceptiva para determinar el máximo, el profesor le propone la *segunda actividad* en la que se comienza a construir una estrategia matemática para determinar el punto máximo de una curva.

2.2.2.2. Segunda Actividad

MEDICIÓN DE LA ALTURA DE DIFERENTES OBJETOS

El objetivo de esta actividad es que el estudiante construya el sentido geométrico del procedimiento de calcular la función derivada de una función e igualarla a cero, pues equivale a encontrar una recta horizontal tangente a la curva.

Con esta actividad se busca que el estudiante concluya que para determinar la altura de un objeto cuando dicha altura es inaccesible, es necesario colocar una regla paralela al piso, que toque al objeto en su parte más alta y medir la altura de esa regla con respecto al piso.

Tarea. Medir la altura de un balón, un sombrero y un paraguas, con la mayor precisión posible.

Para iniciar la actividad se les entrega a los estudiantes una regla no graduada, dos niveles y una escuadra graduada, un balón, un sombrero y un paraguas (objetos cuya altura es inaccesible directamente) como se muestra en la figura 23.

Figura 23. Objetos físicos de la actividad

Cabe señalar que esta tarea está diseñada para realizarse en grupos de máximo cuatro estudiantes y cada grupo debe tener los mismos objetos e instrumentos de medición. Para abordar la actividad es posible que los estudiantes planteen algunas de las siguientes estrategias:

<u>*Estrategia 1.*</u> El estudiante ubica a un lado del objeto la regla graduada para medir su altura y determinar visualmente la medida como se ve en la figura 24. Se espera que el estudiante invalide dicha acción comparando la medida obtenida con la de sus compañeros, notando que la estrategia no le permite encontrar un valor preciso, ya que por una parte la inclinación de la regla puede dar lugar a medidas diferentes, y por otra la estimación visual de la medida varía según el punto de vista.

Figura 24. Estrategia para medir el objeto inclinando la regla

<u>*Estrategia 2.*</u> El estudiante coloca la regla no graduada encima del objeto y la escuadra al lado del objeto (figura 25). La regla que se ubica encima del objeto le permite leer la altura en la escuadra. Se espera que los estudiantes comparen los valores obtenidos y se pregunten por las diferencias entre ellos, concluyendo que puede haber diferentes inclinaciones de la regla que producen diferentes medidas.

Figura 25. Estrategia para medir el objeto utilizando las dos reglas

Si el estudiante no invalida su estrategia, es necesario que el profesor intervenga mostrando posiciones donde la regla no graduada no está en posición horizontal o la regla graduada no es perpendicular al piso, y por lo tanto se producen mediciones diferentes.

<u>*Estrategia 3.*</u> Para garantizar que la regla que está al lado del objeto se encuentra perpendicular al piso, el estudiante ubica la escuadra contra una pared y ubica el objeto al lado de ésta (figura 26). Esta estrategia no garantiza que la regla no graduada que establece la altura se encuentre paralela al piso. El profesor debe intervenir para hacer notar que diferentes inclinaciones de la regla producen diferentes medidas. El estudiante debe concluir que la regla no graduada debe tocar al objeto y ser paralela al piso.

Figura 26. Estrategia para medir el objeto ubicando la regla graduada en la pared

<u>*Estrategia 4.*</u> El estudiante coloca un nivel encima de la regla no graduada (figura 27) para garantizar la horizontalidad y ubica la escuadra contra la pared para garantizar la perpendicularidad con el piso.

De esta manera transfiere con la regla no graduada la medida del objeto. Si esta estrategia no aparece de manera espontánea el profesor debe sugerirla.

Figura 27. Uso del nivel para validar horizontalidad de la regla no graduada

<u>*Estrategia 5.*</u> El estudiante utiliza los dos niveles; ubica uno de los niveles en la regla no graduada para garantizar horizontalidad y el otro al lado de la escuadra para garantizar la verticalidad.

Al igual que con la estrategia anterior el estudiante transfiere la medida del objeto a partir de la regla no graduada que está tocando al objeto en la parte más alta como se muestra en la figura 28.

Figura 28. Uso de los dos niveles para garantizar horizontalidad y perpendicularidad de las reglas

Esta actividad debe conducir a una puesta en común con todos los grupos de trabajo, donde se concluye que, si se quiere medir la altura de un objeto sólido de manera precisa, se debe colocar una regla que toque al objeto en su parte más alta, que sea paralela al piso y otra regla que sea perpendicular al piso, que sirve para medir la altura de la primera regla, y por lo tanto la altura del objeto.

2.2.2.3. Tercera Actividad

APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA DE MEDICIÓN DE LA ACTIVIDAD 2, EN LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DEL HEXÁGONO

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes transfieran la estrategia de medición de la altura de un objeto a la medición de la altura de la gráfica de la función para determinar el punto máximo. Se espera así dotar de sentido la estrategia de calcular la derivada (para garantizar la tangencia) e igualarla a cero (para garantizar la horizontalidad).

Tarea. Trazar una recta tangente a la curva de la función cuadrática que sea paralela al eje de las abscisas.

El profesor les pide a los estudiantes que retomen el problema de encontrar el área máxima del hexágono, intentando adaptar la estrategia de medición desarrollada en la *segunda actividad*. Se espera que los estudiantes afirmen que es necesario trazar una recta horizontal que sea tangente a la curva.

1ª Estrategia perceptiva del estudiante

El estudiante puede construir una recta paralela al eje de las abscisas que pasa por un punto **L** sobre la curva. Al arrastrar el punto **L**, el estudiante intenta que la recta esté en la parte más alta de la curva como se muestra en la figura 29.

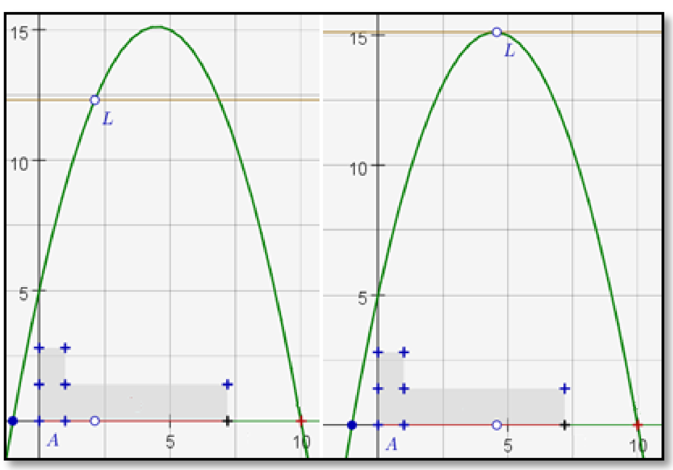


Figura 29. Recta paralela al eje *x* que pasa por el punto L

Intervención del profesor para proponer acciones de verificación con el software

Como la estrategia del estudiante garantiza la horizontalidad de la recta pero no garantiza la tangencia, el profesor le propone verificar si la recta obtenida es tangente a la curva, utilizando la herramienta *Intersección* y el *Zoom*. En la figura 30 pueden verse los efectos de estas dos herramientas.

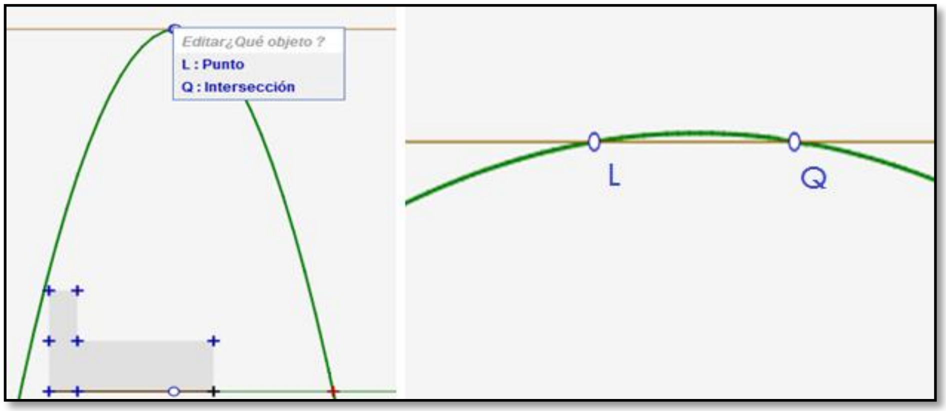


Figura 30. Formas de verificar que la recta no es tangente

Una vez invalidada la estrategia anterior, el estudiante deberá aceptar que la recta horizontal que le permite medir la altura de la curva debe ser tangente a la curva[5], de lo contrario existirán puntos más altos de la curva.

Intervención del profesor para enseñar una herramienta del software

Para trazar una recta tangente a la curva, el profesor le sugiere al estudiante usar la macro ***Tangentealacurva***. Esta macro construye la recta tangente a la curva en un punto[6].

Para verificar que dicha recta es tangente a la curva en el punto **K**, el estudiante puede construir la intersección entre la recta y la curva; de esta manera comprueba que la recta solamente toca a la curva en el punto **K.**

2ª Estrategia perceptiva del estudiante

El estudiante utiliza la macro ***Tangentealacurva*** para construir una recta tangente y arrastra esa recta tangente hasta que parezca horizontal.

[5] Se utiliza aquí la noción de recta tangente como recta que 'toca', es decir que tiene un único punto de intersección y es 'exterior' a la curva. Sabemos que esta noción es problemática y necesita precisiones matemáticas, pero no entraremos a tratarlas aquí.
6 Si se quiere utilizar las coordenadas del punto sobre la curva, se hace necesario construirlo con la macro ***puntosobrelacurva***(ver nota 3)

Intervención del profesor para proponer acciones de verificación

1) El profesor propone usar la macro ***PendienteRecta*** para verificar si la pendiente de la recta tangente que pasa por **K** es cero.
2) El profesor propone utilizar el *Test de paralelismo* para comprobar si la recta tangente que pasa por el punto **K** es paralela al eje de las abscisas. En la figura 31 pueden verse los resultados de aplicar estas dos estrategias de verificación.

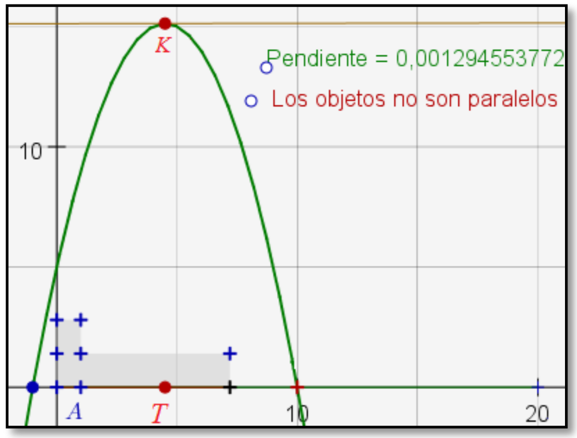


Figura 31. Formas para invalidar la estrategia de horizontalidad de la recta tangente.

El estudiante ha invalidado sus dos estrategias perceptivas por medio de las retroacciones del software, dándose cuenta que necesita una forma de garantizar que la recta construida sea tangente a la curva y paralela al eje de las abscisas.

Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática

Las estrategias perceptivas anteriormente descritas lograban garantizar o bien que la recta es horizontal o que es tangente, pero no podían garantizar las dos condiciones simultáneamente; por lo tanto, el profesor interviene para proponerle al estudiante una estrategia matemática donde se logren ambas condiciones. Esta estrategia consiste en calcular las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva y encontrar los puntos en los que esa pendiente es cero.

Aquí el profesor debe convencer a los estudiantes de que para resolver un problema particular se puede pasar por la resolución de un problema general; en este caso, para encontrar un punto de la curva cuya recta tangente tenga pendiente cero, se calculan todas las pendientes de todas las rectas tangentes y se utiliza la representación gráfica de ese conjunto de valores para determinar los puntos en los que la pendiente es cero.

El profesor propone construir un punto **R** que relacione la abscisa del punto **K** sobre la curva, con la pendiente de la tangente que pasa por **K**[7]. Recuerda que la abscisa de un punto sobre la curva representa la longitud del lado $\overline{AB}$ del hexágono.

La traza de **R** representa el conjunto de todos los puntos que relacionan la abscisa con la pendiente de la recta tangente, como se muestra en la figura 32.

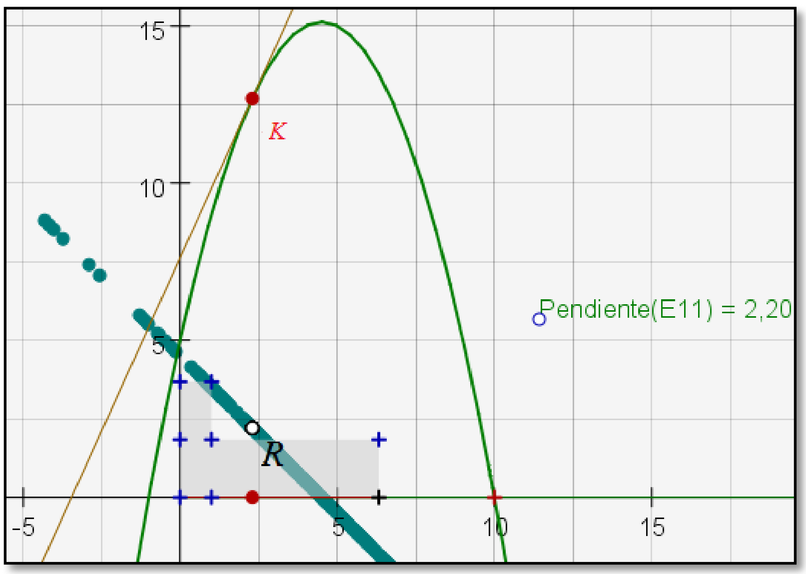


Figura 32. Traza del punto R que representa la pendiente de todas las tangentes.

El estudiante debe deducir que la traza del punto **R** muestra las pendientes de las rectas tangentes a la curva; por lo tanto, debe concluir que cuando la traza corta al eje x se encuentra el punto de la curva cuya abscisa tiene como pendiente 0.

[7]**R** puede construirse utilizando las coordenadas (*x*(K)), E11) donde **E11** es la pendiente de la tangente que pasa por **K** (ver nota 5)
Al tratar de utilizar la notación del software se pueden generar dificultades en el manejo de diferentes registros semióticos: conversión entre los registros gráfico, geométrico, algebraico y de lengua natural. Una de estas, es la notación del programa para escribir una expresión en el campo de *gráfica de una función*. Esta dificultad se enfrenta al escribir la variable como "***x***" para que el programa la pueda reconocer. Otra dificultad de este tipo se puede presentar cuando el estudiante tiene que determinar la abscisa de un punto, ya que en la notación del software la letra "***x***" además de usarse como variable, también se usa para indicar la abscisa de un punto. Para evitar este conflicto semiótico se diseñó la macro ***Abscisa punto*** la cual permite conocer la abscisa de un punto sobre el plano. Esta macro es construida si el estudiante llega a presentar como dificultad reconocer en la escritura del software que *x (P1)* se está considerando como el valor de la abscisa del punto **P1** (ver anexo 4).

Como la traza de un punto **R** no permite determinar su intersección con otro objeto geométrico, el estudiante debe construir la recta que corresponde a ese lugar geométrico. El profesor le propone construir un punto **S**[8] con las mismas características del punto **R** y así poder construir la recta que representa todas las pendientes de las rectas tangentes, como se muestra en la figura 33.

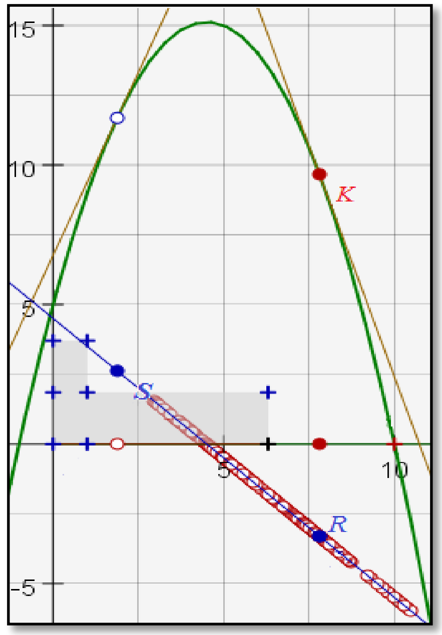


Figura 33. Lugar geométrico de las pendientes de todas las rectas tangentes a la curva

El estudiante debería deducir que si construye el punto de intersección **H** entre la recta construida y el eje ***x***, dicho punto tiene ordenada cero.

Por lo tanto, la recta tangente a la curva por el punto que tiene esa abscisa (punto **I**) tendrá como pendiente 0 como se muestra en la figura 34. El profesor le propone utilizar las herramientas de verificación que se utilizaron anteriormente: macro ***PendienteRecta*** y *Test de paralelismo* para que pueda corroborar si la recta construida es tangente a la curva y su pendiente es cero; es decir, que ha construido una recta horizontal, paralela al eje de las abscisas.

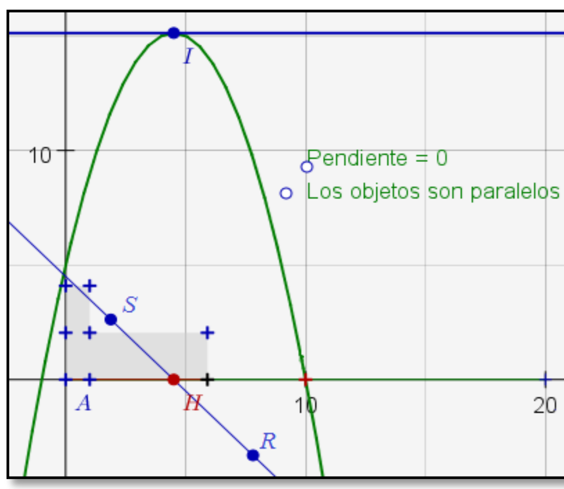


Figura 34. Recta tangente que pasa por I con pendiente igual a 0.

[8] Para construir **S**:1) Se determina un punto sobre la curva. 2) Se traza una recta tangente a ese punto determinado. 3) Se calcula la pendiente de la recta tangente 3) Se construye el punto **S** con abscisa igual al punto determinado sobre la curva y con ordenada igual a la pendiente de la recta tangente que pasa por dicho punto.

El estudiante revisa las coordenadas del punto **I**, identificando que el área máxima del hexágono (redondeada a tres decimales) es **15,125** ya que si se aumenta el número de cifras decimales se obtiene una aproximación como por ejemplo: 15, 124989999.

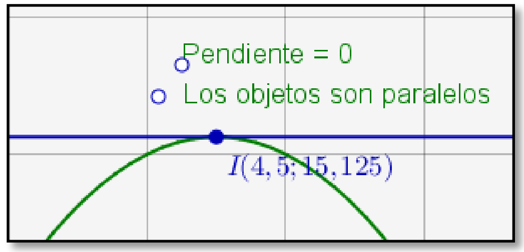


Figura 35. Área máxima del hexágono

El estudiante valida este resultado, usando el *Test de paralelismo* y calculando la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **I**, como se muestra en la figura 35. Se espera que concluya que sus estrategias perceptivas no le permitieron resolver el problema ya que fueron invalidadas con las retroacciones del software y que la estrategia matemática propuesta por el profesor sí resolvió el problema.

2.2.2.4. Cuarta Actividad

NOCIÓN DE LÍMITE USANDO LUGARES GEOMÉTRICOS

El propósito de esta actividad es introducir una estrategia matemática para construir una recta tangente a una curva en un punto. En esta actividad se aborda la noción de límite mostrando la imposibilidad de calcular directamente la pendiente de la recta tangente y se introduce la estrategia matemática de cálculo del límite por medio de un lugar geométrico[9].

El profesor recuerda que para resolver el problema del hexágono fue necesario construir rectas tangentes a la curva de la función que modela el problema y calcular sus pendientes para poder determinar los puntos de la curva cuyas tangentes son horizontales. Para construir las rectas tangentes y calcular sus pendientes se utilizaron macros. Propone entonces el problema de construir una recta tangente a la curva en un punto y calcular su pendiente sin utilizar esas macros.

[9] Inicialmente esta actividad estaba prevista para realizarse antes de la actividad tres, pues para dicha actividad se necesita construir una recta tangente a la curva. Sin embargo, consideramos que la carga cognitiva requerida para guardar en memoria el problema original es demasiado alta y por lo tanto decidimos pasar directamente a la solución del problema proponiendo una macro para trazar la recta tangente a la curva.

Se le presenta al estudiante un archivo en CaRMetal con la gráfica de la función que modela el problema del hexágono y dos puntos **E** y **J** sobre la curva[10].

Tarea. Hacer que la recta EJ sea tangente a la curva que modela el problema

El propósito de esta tarea es que el estudiante intente lograr que la recta **EJ** corte a la curva en un solo punto. La estrategia perceptiva que consiste en llevar el punto **J** sobre **E** se verá invalidada por las retroacciones del software, generando la necesidad de una estrategia matemática que será introducida por el profesor.

<u>*Estrategia perceptiva del estudiante*</u>

El estudiante arrastra el punto **J** hasta que quede superpuesto con **E** buscando que la recta secante pase a ser una recta tangente. Se espera que el estudiante invalide esta estrategia, al observar que cuando **J** está sobre **E,** la recta secante desaparece como se muestra en la figura 36.

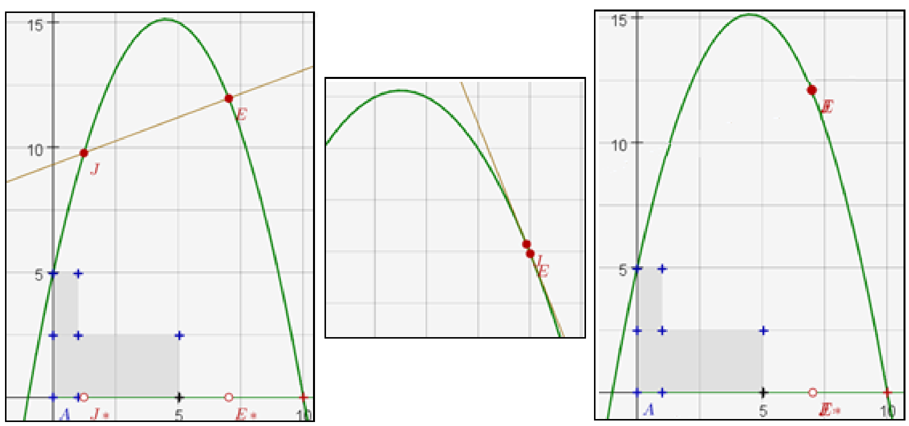


Figura 36. Punto J superpuesto en E

<u>*Intervención del profesor para proponer acciones de validación*</u>

Como el estudiante necesita encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **E**, pero se encuentra con la dificultad que esta desaparece cuando **J** y **E** están superpuestos, el profesor le propone calcular la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por **J** y **E** usando la macro ***PendienteRecta***, para identificar si es posible calcular así el valor de la pendiente de la recta cuando se vuelve tangente.

[10] Los puntos **J** y **E** no pueden arrastrase directamente, sino que dependen de los puntos J* y E* que representan sus abscisas (ver nota 3)

El estudiante invalida esta estrategia al observar que cuando los puntos coinciden, la macro no arroja ningún valor para la pendiente (ver figura 37).

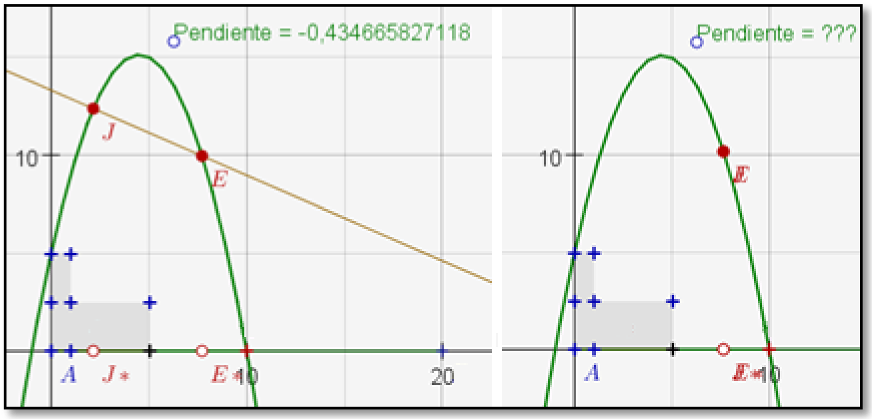


Figura 37. Calculo de la pendiente de la recta secante y de la recta tangente a la curva

El profesor le sugiere al estudiante calcular (de forma aritmética) la pendiente de la recta **JE** cuando **J** es igual a **E**. Se espera que el estudiante pueda concluir que esto no funciona porque queda un cero en el denominador a partir de la fórmula aritmética para hallar la pendiente de una recta:

$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; asumiendo que cuando **J** está sobre **E** tienen las mismas coordenadas:

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y(E) - y(J)}}{\boldsymbol{x(E) - x(J)}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

El estudiante concluye que no es posible conocer la pendiente de la recta dado que su valor es indeterminado.

<u>*Intervención del profesor para la construcción de una estrategia matemática*</u>

Como el estudiante se dio cuenta que no es posible calcular de manera directa la pendiente de una recta tangente, el profesor le explica que una forma de encontrar este valor consiste en calcular la pendiente de todas las rectas secantes que pasan por el punto **E**; es decir, aplicar la estrategia de generalización y así poder encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva a partir de la construcción del *lugar geométrico* que representa todas las pendientes de las rectas secantes.

El profesor propone al estudiante construir un punto **M** que tenga como abscisa la diferencia de las abscisas de los puntos **E** y **J,** y como ordenada la pendiente de la recta secante **JE**[11]. Luego le pide que mueva el punto **J** dejando fijo el punto **E** y que explique el movimiento del punto **M**. Se espera que el estudiante diga que cuando **J** se mueve sobre la curva, la pendiente va variando y por lo tanto la ordenada de **M** también varía; que reconozca que a medida que **J** se acerca a **E** la abscisa de **M** se acerca a cero, que cuando **M** está por encima del eje ***x*** la pendiente de la recta **JE** es positiva y cuando **M** está por debajo del eje ***x*** la pendiente es negativa; a su vez, que pueda deducir que cuando **J = E**, el punto **M** está sobre el eje ***y***.

El profesor le propone activar la traza del punto **M** para obtener información visual de todas las pendientes de la recta secante. El estudiante activa la traza del punto **M** y mueve el punto **J** obteniendo la huella que va dejando el punto (forma de línea recta) como se muestra en la figura 38.

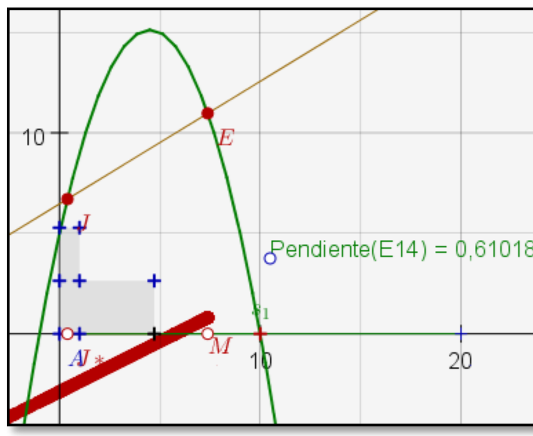


Figura 38. Traza del punto M que representa la pendiente de todas las secantes que pasan por el punto E.

Luego de construir el punto **M** y activar la traza, el estudiante observa el movimiento del punto y contesta las siguientes preguntas hechas por el profesor: ¿cómo está caracterizado el punto **M**? ¿En qué posición del punto **M** la recta **JE** es tangente a la curva? ¿Para qué posición del punto **M**, el punto **J** queda sobre el punto **E**? Se espera que el estudiante concluya que cuando el punto **M** tiene abscisa 0, es decir cuando el punto **J** esta superpuesto en **E,** la ordenada de **M** es la pendiente de la recta tangente.

[11]Abscisa de **M**: x(**E**)– x(**J**) y Ordenada de **M**: **E14**. Siendo **E14** la pendiente de la recta secante **JE**.

La intersección de la traza del punto **M** con el eje ***y*** es el valor de la pendiente buscada. Como no es posible construir la intersección de una traza con un objeto geométrico, el estudiante debe construir la recta que describe la traza del punto **M**[12] y la intersección **Q** entre esa recta y el eje ***y*** como se muestra en la figura 39.

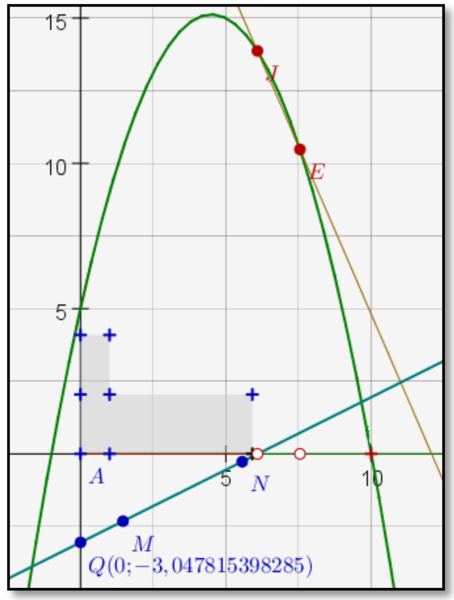


Figura 39. Lugar geométrico pendiente de todas las secantes

Se espera que el estudiante concluya que la ordenada del punto **Q** es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto **E.**

El profesor le propone al estudiante que construya una recta que pase por **E** y que tenga como pendiente la ordenada de **Q** y verifique si esa recta es tangente a la curva. Para ello, se necesita determinar un segundo punto de la recta tangente que tenga como pendiente la ordenada del punto **Q.** Para trazar la recta tangente que pase por el punto **E** conociendo su pendiente, el profesor interviene sugiriendo al estudiante ubicar otro punto de la recta tangente teniendo como estrategia que la diferencia de las abscisas entre los dos puntos de la recta sea igual a la unidad.

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{\boldsymbol{Pendiente}}{\boldsymbol{1}}$$

El estudiante debe tomar la ordenada del punto **Q.** Esta ordenada representa la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto fijo **E**. Hay que construir un punto **E'** que cumpla la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y(E') - y(E)}}{\boldsymbol{x(E') - x(E)}} = \frac{\boldsymbol{y(Q)}}{\boldsymbol{1}}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{y(E') - y(E) = y(Q)}$ y $\boldsymbol{x(E') - x(E) = 1}$

Entonces $y(E') = y(Q) + y(E) \quad x(E') = 1 + x(E)$

[12]Para lo cual es necesario construir otra recta secante **J'E** y construir un punto **N** de abscisa x(**E**)-x(**J'**) y ordenada la pendiente de **J´E**

Posteriormente, se traslada la distancia del origen (0,0) a **Q** hasta el punto **E** y se traza una perpendicular al eje ***x*** desde el punto **E** y se marca el punto de intersección **W** entre la perpendicular y la circunferencia; seguido a esto, el estudiante desde el punto **W** construye una circunferencia con radio igual a la unidad y traza una perpendicular al eje ***y*** como se muestra en la figura 40.

Luego construye el punto **E'** de intersección entre la perpendicular al eje ***y*** que pasa por el punto **W** y la circunferencia de radio 1 que tiene como centro **W**.

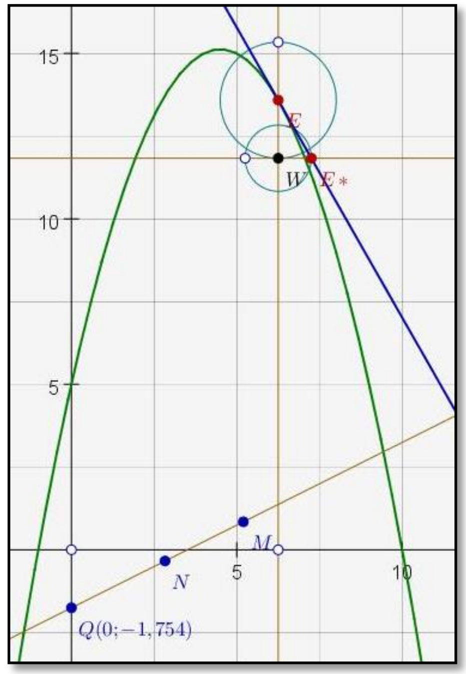


Figura 40. Traslado de la distancia de la pendiente sobre el punto fijo E

De esta manera la recta que se traza del punto **E** al punto **E'** representa la recta tangente a la función cuadrática que pasa por el punto **E**. El estudiante puede validar esta construcción con la herramienta *Intersección*, entre la gráfica de la función y la recta que pasa por los puntos **E** y **E'** y verificar mediante el zoom que el único punto de intersección con la curva es el punto **E** (figura 41)

Con esta actividad se espera que el estudiante concluya que no es posible calcular la pendiente de la recta tangente directamente, pero sí es posible utilizando el lugar geométrico que representa las pendientes de todas las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia.

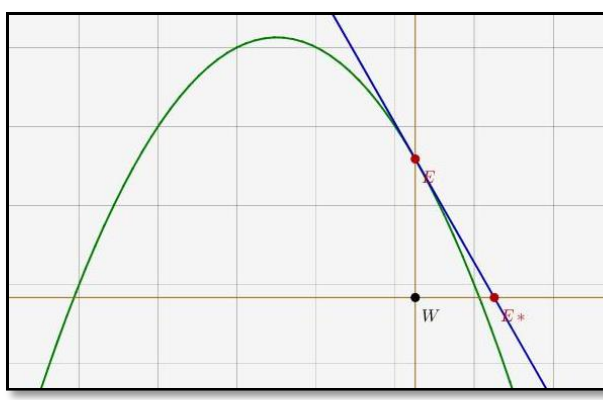


Figura 41. Recta tangente a la gráfica de una función cuadrática por el punto E

2.3. PILOTAJE

Se realizó un pilotaje para controlar la pertinencia del análisis a priori; es decir, verificar en un número reducido de sujetos si las estrategias previstas surgen espontáneamente y si no aparecen gran número de estrategias que no estaban previstas.

Realizamos esta prueba piloto con cinco estudiantes: uno de primer semestre de la carrera de matemáticas de la Universidad Nacional y cuatro de grado undécimo del Colegio San José de Calasanz (Suba - Rincón).

El pilotaje con el estudiante de primer semestre de matemáticas se realizó el 28 de marzo y 1 de abril de 2015 (6 horas) y con los cuatro estudiantes de undécimo los días 17, 20 y 21 de abril de 2015(9 horas).Cada estudiante tenía a su disposición un computador. Para referirnos al estudiante de primer semestre utilizaremos la convención EU (estudiante universitario) y para referirnos a los estudiantes de grado undécimo utilizaremos la convención EC (estudiantes de colegio) seguida de un número cuando sea necesario diferenciarlos individualmente.

2.3.1. PRIMERA ACTIVIDAD

Cada estudiante recibió un documento impreso con el enunciado del problema y un dibujo del hexágono (ver anexo 1), además se les entregó un archivo de CaRMetal con el modelo del problema.

Exploración previa para la familiarización con el modelo

En general los cinco estudiantes arrastraron los vértices del hexágono, constataron que el único que se movía era el vértice **B** y aunque las longitudes de los lados cambiaban, se mantenía fijo el perímetro. Esto era lo que se había previsto en el análisis a priori.

Tarea 1.Encontrar el área máxima del hexágono utilizando el modelo

El profesor preguntó: *¿Cuál es el valor del área máxima del hexágono?* Los cinco estudiantes, al mover el punto **B** mencionaron que el valor correspondiente al área máxima era *15,12*. El profesor intervino proponiendo aumentar el número de decimales del valor del área, hacer zoom y mover el punto **B**.

EU dijo: *"15,12 antes era una aproximación, no se asegura porque tendría que probarlo"*; indicó que el software está aproximando, pero que esa posición no necesariamente corresponde al área máxima.

EC enunciaron los valores que fueron encontrando, por ejemplo: *15,1249*; *15,12495; 15,124999*. Los estudiantes encontraron valores diferentes, pero no establecieron cuál era el máximo.

Etapa 1.Observación del movimiento de un punto P que relacione la longitud de un lado del hexágono con el área

En el análisis a priori estaba previsto que los estudiantes observaran el movimiento del punto **P** antes de activar la traza, pero el profesor omitió este paso.

Etapa 2.Utilizarla traza para observar las distintas posiciones del punto P

Luego de construir el punto **P**, activar su traza y mover el punto **B**, EU mencionó que la huella del punto **P** *"tiene forma de parábola"*, mientras que EC inicialmente solo reconocieron que la opción traza muestra el rastro del punto y solo después de mover varias veces el punto **B**, comentaron: *"es como una parábola"*. EC y EU intentaron utilizar la traza para determinar la posición del punto máximo:

EU construyó una recta que pasara por un punto sobre la traza y otro punto sobre el eje de las ordenadas intentando que esta recta estuviera en posición horizontal. Le preguntó al profesor: *¿se puede construir la traza más delgada?*, el profesor le enseñó el *aspecto* de la traza, cómo se podía volver más gruesa o más delgada, cómo cambiar el color y el tipo de punto que se quería ver (figura 42).

Aparentemente el estudiante buscaba trazar una recta tangente y el grosor de los puntos de la traza no le permitieron apreciar la tangencia.

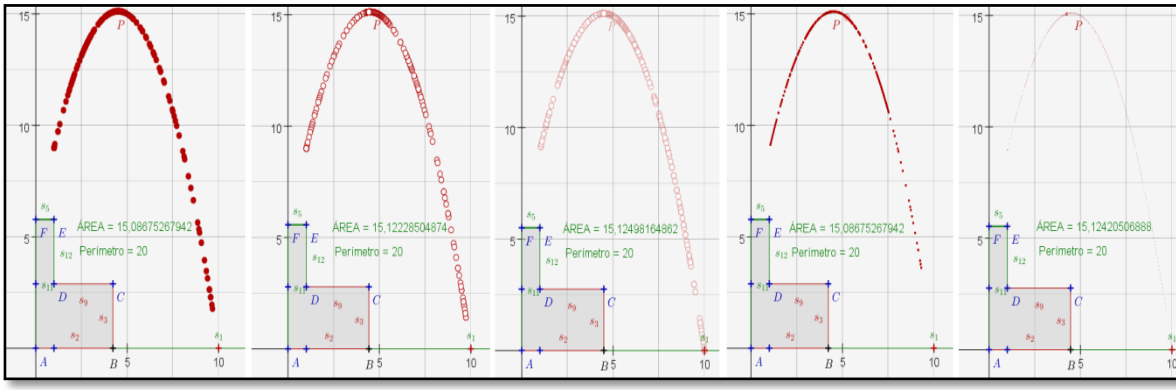


Figura 42. Modificación en el aspecto de la traza

EU modificó el tamaño del punto para lograr una traza más delgada como se muestra en la figura 42. Construyó una recta y buscó que se encontrara en posición horizontal, movió la pantalla y la traza desapareció, encontrando así una de las desventajas que estaba prevista en el análisis a priori. En la figura 43 se muestra que la recta trazada por el estudiante no es completamente horizontal.

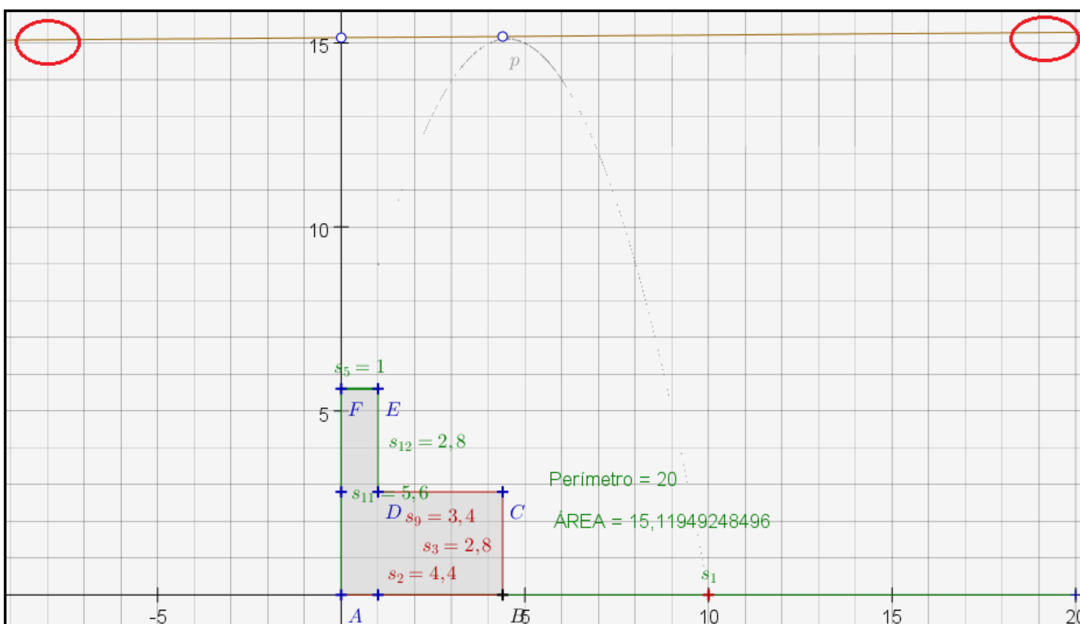


Figura 43. Construcción realizada por el estudiante para hallar el punto máximo de la traza.

EU manifestó que necesitaba *construir una recta horizontal que pase por el punto más alto de la traza para poder medir la altura con el eje "y"*; sin embargo, al hacer zoom observó que la recta no quedó totalmente horizontal y que la curva desapareció; lo que lo llevó a preguntar *¿es posible hacer algo para que no desaparezca?* El profesor le sugirió buscar la ecuación que modela el problema. El estudiante reconoció las ventajas de la traza; sin embargo, manifestó que necesita una imagen que no desaparezca, pasando así a la siguiente etapa prevista en el análisis a priori.

Por su parte EC1 observó los valores que se acercan al área máxima utilizando la herramienta que permite modificar la cantidad de cifras decimales del área, obteniendo valores como: *15,12*; *15,124*; *15,1249*; *15,2499* y concluyó que estos valores se aproximan a *15,125;* expresó que ese es el valor del área máxima del hexágono y que se encuentra en la parte más alta de la curva.

Para verificar que ese valor está en la parte más alta, decidió construir un nuevo punto el cual nombró como ***AREA MAXIMA***[13] y activó la traza de dicho punto; al observar su huella mencionó que la traza del punto ***AREA MAXIMA***, toca a la curva en su parte más alta y por lo tanto ese valor es el área máxima del hexágono (figura 44).

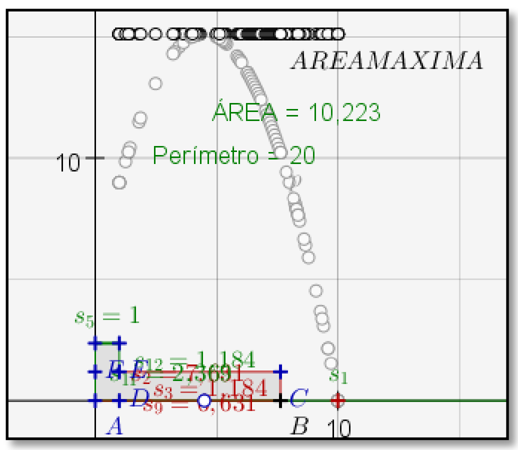


Figura 44. Punto máximo por aproximación

Al parecer EC1 se ha convencido que su estrategia es válida para resolver el problema; no obstante, sus compañeros al observar su estrategia lo cuestionan planteando: EC2*"hay que hacer una fórmula para probar que ese punto es el máximo",* EC3*"la traza del punto que se llama PUNTO MÁXIMO está tocando como a muchos puntos de la traza de la curva" (ver figura 45)*

[13]Punto con abscisa igual a la abscisa de **B** y ordenada *15,125*

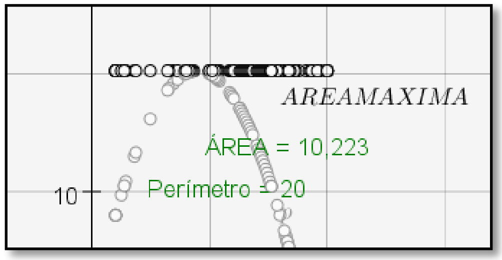


Figura 45. Estrategia de aproximación para determinar el área máxima

Como se tenía previsto en el análisis a priori, las desventajas de la traza hacen que los estudiantes piensen en plantear una nueva estrategia donde la traza no desaparezca o donde se cree una fórmula que modele el problema.

Etapa 3. Construir la gráfica de la función a partir de una ecuación

Tanto EU como EC iniciaron un proceso algebraico para encontrar la ecuación que modela el problema.

Tarea 2. Determinar la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función

EC realizaron procedimientos algebraicos para establecer la ecuación que modela el problema del hexágono. Consideraron dos rectángulos para calcular el área de cada uno y sumarlos no teniendo en cuenta el perímetro fijo como se tenía previsto en el análisis a priori.

En la figura 46 se observa que, al aplicar su estrategia no tuvieron en cuenta que el perímetro es fijo, por lo cual su fórmula final tiene más de una variable. EC1 empezó a establecer relaciones entre los segmentos llegando a expresar el área a partir de:

$$S_2 * S_{12} + S_{12} * 1$$

EC2 estableció que $Area = x * y + 1 * y$, por su parte EC3 indicó que $Area = 2y + x^2$.

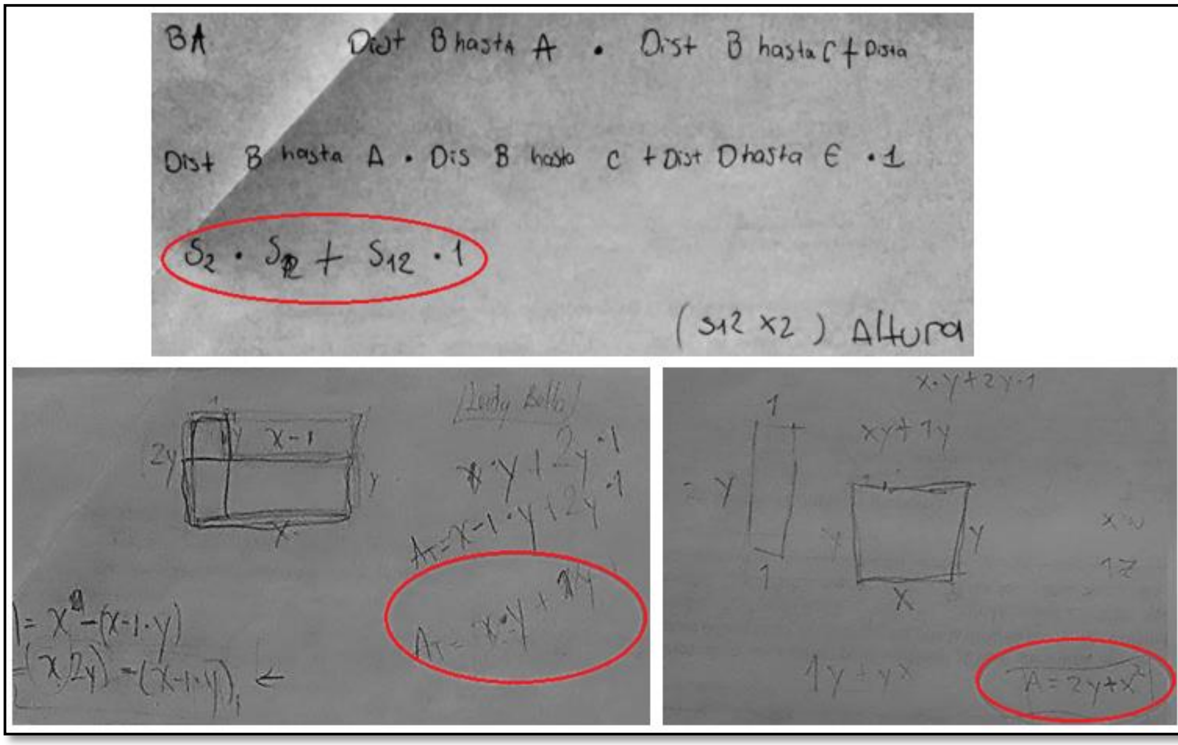


Figura 46. Estrategia de dividir el hexágono en dos rectángulos

Como EC no tuvieron en cuenta el perímetro, el profesor intervino recordando las condiciones iniciales del problema: "*un lado debe tener como longitud 1 metro, los dos lados adyacentes a éste deben ser uno el doble del otro y el perímetro debe ser 20 metros".* Y preguntó: *¿Qué medidas deben tener los lados del hexágono para que su área sea la mayor posible? (…) Si el perímetro es fijo, ¿cómo se debe expresar? (…) Si en el perímetro se tienen dos variables, ¿cómo se puede determinar el valor de una en términos de la otra?*

EC decidieron trabajar juntos para determinar la ecuación; escribieron el valor del perímetro en términos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, despejando $\boldsymbol{x}$ para reemplazar en la expresión inicial del área del hexágono obteniendo: $Área: 3x - 2x^2 + 5$; al graficar esta función, se puede observar en la figura 47 que EC encontraron una expresión cuya gráfica no corresponde con la huella del punto que describe el área del hexágono cuando $\overline{\boldsymbol{AB}}$ varía.

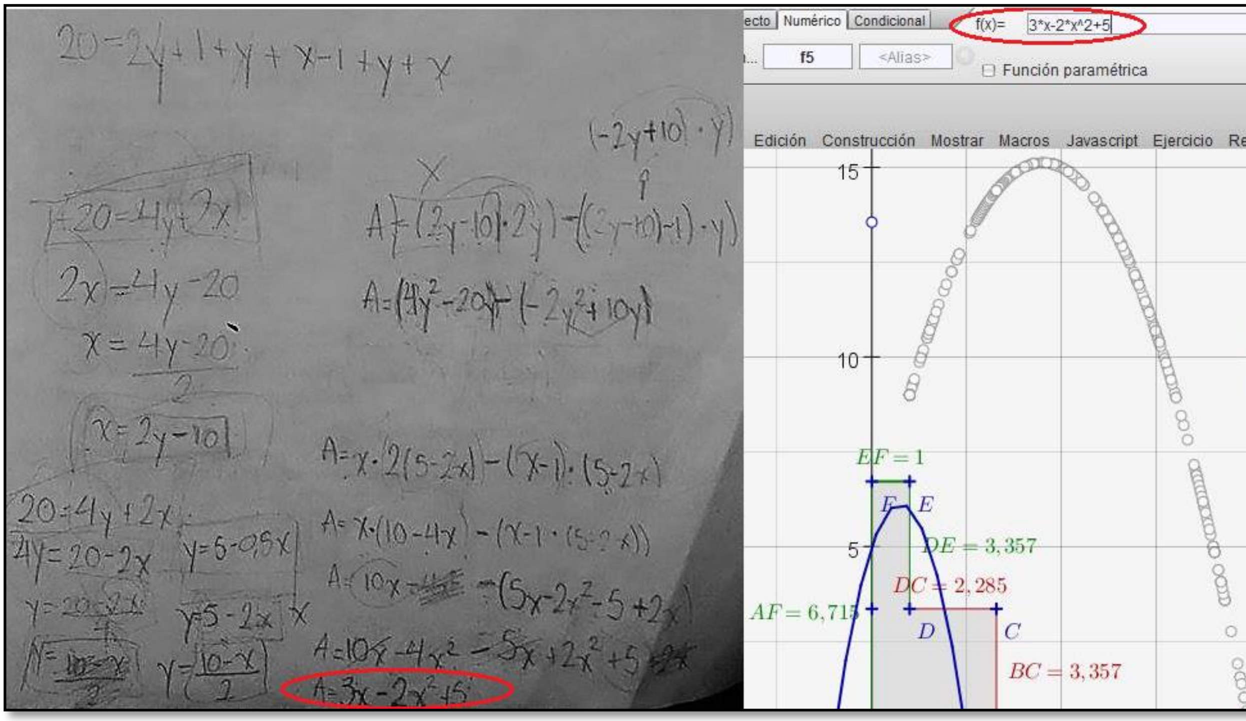


Figura 47. Procedimientos algebraicos de EC2 y su verificación en CaRMetal

Por su parte, EU inicialmente mencionó que la función que modela el problema es: $AREA = 2p^2 + p$. Indicando que ***p*** representa la longitud del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$. Al ingresar la función en CaRMetal, se puede notar en la figura 48 que no coincide con la traza del punto ***p.***

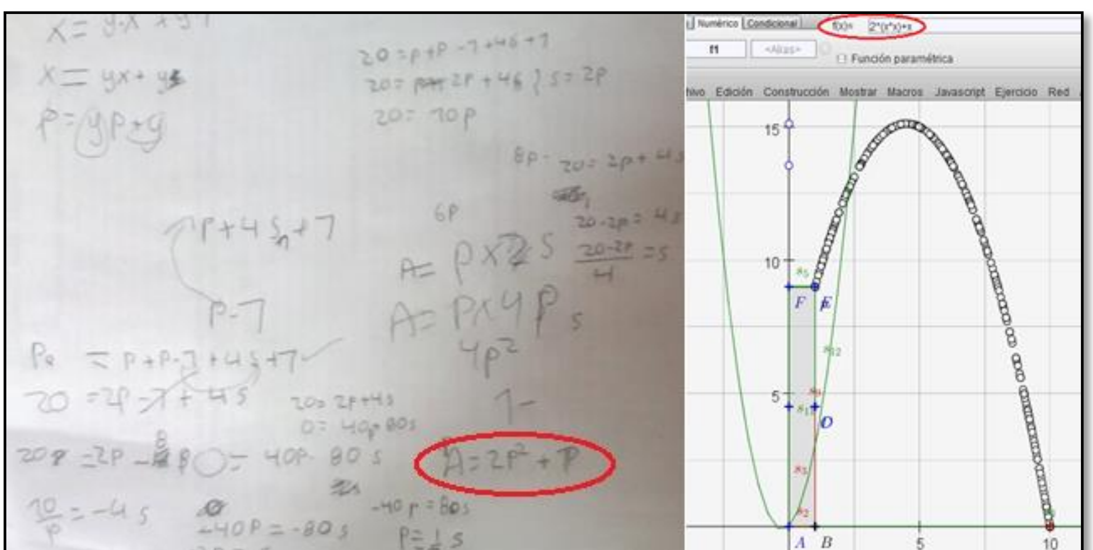


Figura 48. Proceso algebraico inicial.

Al revisar sus procedimientos, EU realizó unas correcciones y dio a conocer una nueva función: $A = -\frac{1}{2}p^2 + 5p + p$; sin embargo, al graficarla en el software observó nuevamente que la gráfica no coincidía con la huella que deja el punto ***P***. EU reconoció que presentaba inconsistencias en sus cálculos, por lo tanto, volvió a revisarlos encontrando una nueva ecuación (figura 49).

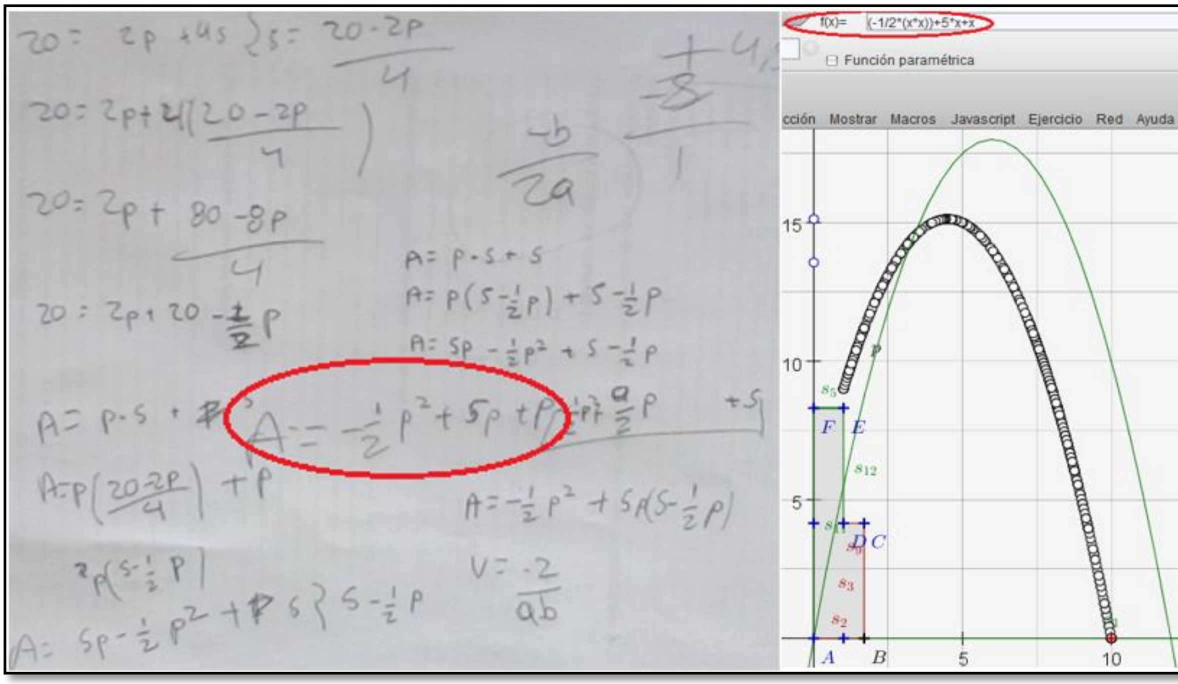


Figura 49. Uso de la herramienta *grafica de funciones* para verificar la expresión algebraica encontrada

Durante la aplicación del pilotaje se observó que tanto EC como EU estuvieron pendientes de la traza del punto que describe el área del hexágono cuando $\overline{\boldsymbol{AB}}$ varía, para corroborar sus procedimientos algebraicos, lo que les permitió darse cuenta que las ecuaciones que proponían no correspondían a la huella del punto ***P.***

$$A = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{9}{2}p + 5$$

Cuando EU ingresó esta última expresión indicó que la gráfica de esta función coincide con la traza del punto ***P*** y comentó *"¡ah, claro! no pueden existir áreas negativas"* (ver figura 50). De esta forma se puede inferir que el estudiante reconoció el dominio de validez con el que se está trabajando el problema.

Las pruebas de ensayo error realizadas por EC y EU, mostraron que los estudiantes realizaron acciones previstas en el análisis a priori, esto se vio claramente cuando EC inicialmente dividieron el hexágono en dos polígonos para sumarlos y obtener el área total del hexágono, posteriormente, al buscar una expresión que modelara el problema, obtuvieron una expresión de más de una variable, puesto que no tenían en cuenta las condiciones iniciales del problema.

Finalmente todos los estudiantes utilizaron la traza para compararla con la gráfica de la expresión obtenida y la diferencia de las dos (gráfica y huella) les permitió invalidar sus procedimientos, esta última estrategia no estaba prevista en análisis a priori.

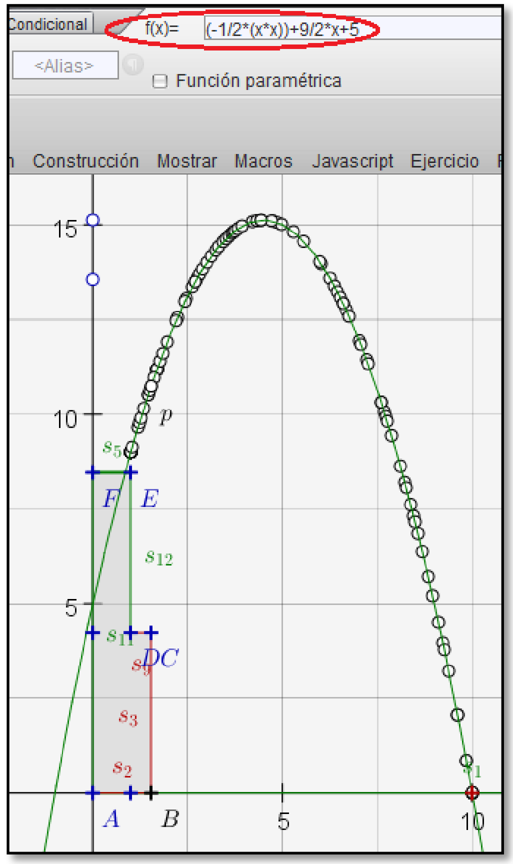


Figura 50. Gráfica de la función que modela el problema

En síntesis, los cinco estudiantes realizaron procedimientos algebraicos que verificaron constantemente por medio de la herramienta *gráfica de una función.* Esta forma de validación no se tenía prevista en el análisis a priori; sin embargo, fue una estrategia que favoreció el desarrollo de la ***Etapa 3.***

Así, la herramienta *traza* fue una estrategia clave para que los estudiantes validaran la expresión obtenida, dado que al observar que la función encontrada no coincidía con la huella dejada por el punto, volvieron a revisar sus cálculos algebraicos obteniendo finalmente la ecuación que modela el problema del hexágono.

En esta etapa se tenía como hipótesis que los estudiantes iban a presentar dificultades con el lenguaje del programa y posiblemente el tener que escribir la expresión encontrada en el campo de *gráfica de una función* no iba a ser fácil; sin embargo, lo encontrado en el pilotaje mostró que con la intervención del profesor para explicar cómo funciona la notación del software, los estudiantes identificaron con facilidad que en lugar de escribir la variable con la que venían trabajando se debía escribir ***x*** como se muestra en la figura 51.

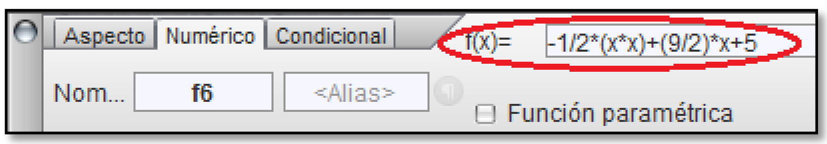


Figura 51. Expresión del área

Etapa 4. Utilizar la gráfica de la función para determinar el punto máximo

En esta etapa EC colocaron un punto sobre la gráfica, lo movieron a la parte más alta de la curva y decidieron que ese era el máximo. El profesor les sugirió mostrar las coordenadas de ese punto para identificar el valor de la ordenada que correspondía al área máxima del hexágono, aumentar la cantidad de decimales en las coordenadas del punto para verificar de manera más precisa el valor y hacer zoom para observar si la ubicación de ese punto está en la parte más alta de la curva (figura 52).

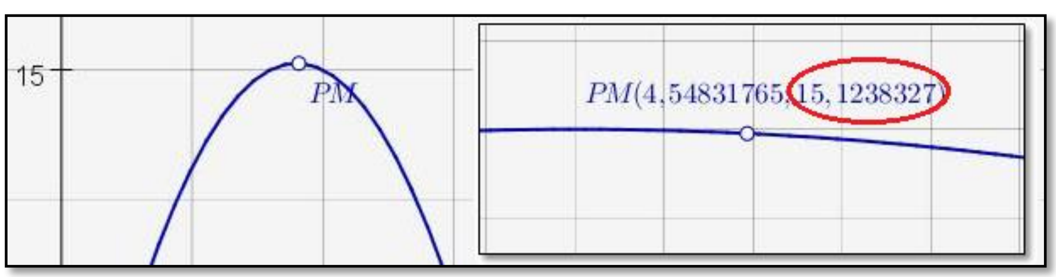


Figura 52.Verificación de la estrategia aumentando los decimales y haciendo zoom

Se puede inferir que las acciones que sugirió el profesor permitieron al estudiante invalidar sus estrategias perceptivas ya que al hacer zoom se puede observar que el punto no está ubicado en la parte más alta de la curva.

De igual forma, EC2 pudo invalidar su estrategia de colocar un punto que de manera perceptiva estuviera en la parte más alta de la curva, ya que al hacer zoom dicho punto no está sobre la curva como se muestra en la figura53.

Figura 53.Invalidación de estrategia perceptiva- Punto fuera de la curva

Como se invalidaron las estrategias perceptivas y no se encontró una estrategia valida, el profesor propuso pasar a la actividad dos para intentar responder a la pregunta: ¿cómo determinar el punto más alto de una curva?

2.3.2. SEGUNDA ACTIVIDAD

EU utilizó los dos niveles y la regla no graduada para medir la altura del balón. Con los niveles se observó que EU estaba garantizando de manera implícita la perpendicularidad con el piso; además buscó que la regla no graduada (con la que transfirió la medida) se encontrara de manera horizontal; sin embargo, al realizar dicha acción no garantizó que la regla no graduada tocara al objeto, ya que tuvo dificultad para colocar la regla entre los dos niveles, como se muestra en la figura 54.

Figura 54. Medición del balón usando los dos niveles.

Al cambiar de estrategia EU indicó que la regla que establece la altura debe estar perpendicular con la mesa; no obstante, su estrategia no aseguró la horizontalidad de la regla no graduada, dado que ésta podía estar inclinada (ver figura 55). El estudiante llegó a esta conclusión luego que interviniera una persona externa quien le indicó que se notaba que la regla estaba inclinada.

Figura 55. Medición de la altura del balón, teniendo en cuenta que la regla graduada este de manera perpendicular con la mesa.

A partir de las anteriores estrategias EU concluyó: *"para medir la altura exacta de un objeto se debe garantizar una recta que toque al objeto en su máximo punto, y que la recta sea totalmente horizontal y observar donde la regla corta con la escuadra" (figura 56).*

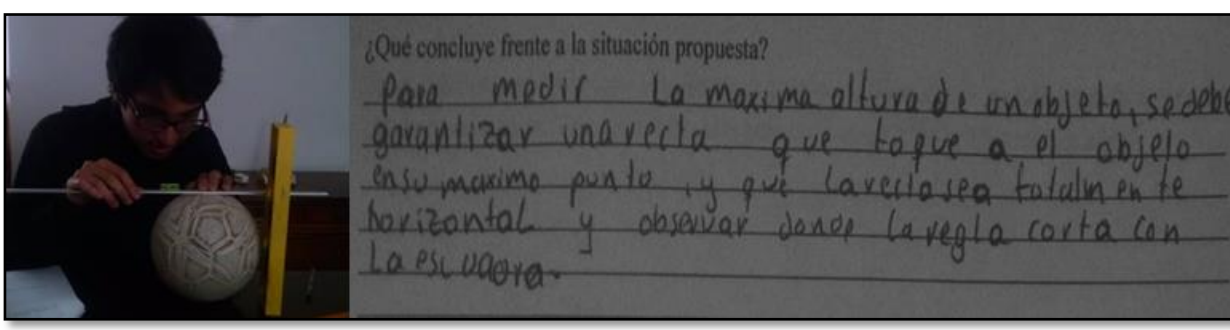


Figura 56. Medición del balón cumpliendo perpendicularidad y tangencia.

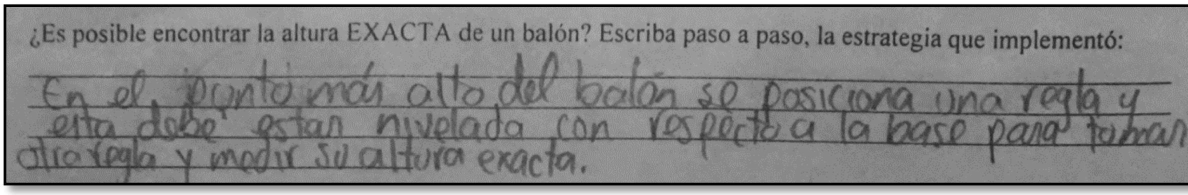
Por su parte, EC1 ubicó la regla graduada a un lado del objeto, e intentó establecer con la regla no graduada la altura el balón; sin embargo, EC2 invalidó esta estrategia mostrándole que ambas reglas no se encontraban niveladas y que se podían encontrar diferentes alturas (figura 57).

Figura 57. Medición del balón sin hacer uso de los niveles.

EC utilizando el nivel aseguraron que la regla que estaba sobre el objeto se encontrara paralela al piso y tocara el objeto, pero no tuvieron en cuenta que la regla que permitía establecer la medida exacta de la altura del balón debía ser perpendicular al piso (figura 58). EC tomaron conciencia de esto al observar que cada uno tenía una medida diferente y esto se debía a la inclinación de la regla graduada.

Figura 58. Medición de la altura del balón, teniendo en cuenta que el nivel se encuentre de manera horizontal y tangente al objeto.

EC concluyeron que para medir la altura exacta de un objeto es necesario que la regla graduada esté perpendicular al piso y que la regla no graduada toque al objeto y esté horizontal (ver figura 59).


¿Es posible encontrar la altura EXACTA de un balón? Escriba paso a paso, la estrategia que implementó:

En el punto más alto del balón se posiciona una regla y esta debe estar nivelada con respecto a la base para tomar otra regla y medir su altura exacta.

Figura 59. Conclusión de un estudiante de grado undécimo

Los cinco estudiantes tuvieron en cuenta sus conclusiones y las utilizaron para encontrar la altura de la sombrilla y el sombrero (ver figuras 60, 61 y 62).

Figura 60. Medición de la sombrilla utilizando los dos criterios para calcular la altura máxima de un objeto

Figura 61. Medición de la altura de la sombrilla por parte de los estudiantes de grado undécimo

Figura 62. Medición de la altura del sombrero y conclusión de la actividad

Las acciones realizadas por los estudiantes en esta actividad fueron acordes a lo indicado en el análisis a priori. Los estudiantes al finalizar la actividad establecieron las siguientes condiciones para calcular la altura de un objeto:

1) La regla graduada debe estar perpendicular al piso.
2) La regla que está tocando al objeto debe ser paralela al piso.
3) Se debe garantizar que la regla toque al objeto en su punto más alto.

2.3.3. TERCERA ACTIVIDAD

Tarea. Trazar una recta tangente a la curva de la función cuadrática que sea paralela al eje de las abscisas

EC1 mencionó que la parábola es simétrica y preguntó si era posible *"hallar el punto medio entre la intersección de la curva con el eje x*" (figura 63)

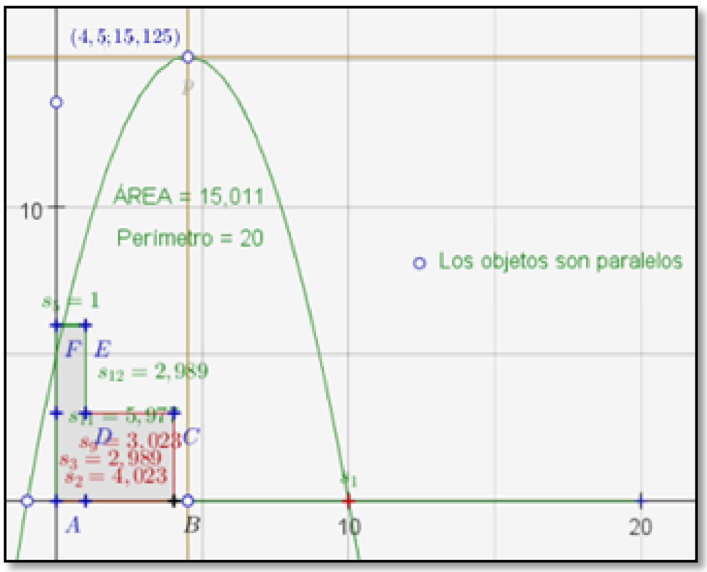


Figura 63. Estrategia de eje de simetría para calcular el punto máximo de la curva.

Al encontrar el punto medio, trazar una recta perpendicular al eje *x* por ese punto, hacer intersección de la curva con la recta perpendicular y al construir una recta perpendicular al eje *y* por el punto ***P*** encontró el punto máximo y compartió dicha estrategia con sus compañeros.

Una de las formas para verificar la estrategia de EC1 fue observando que la recta solamente tocaba a la curva en el punto ***P***; esta forma de verificación se dio a partir de la intervención del profesor donde le sugirió usar la herramienta *intersección* entre la curva y la recta que pasa por el punto y verificar que dicha recta solo cortaba a la curva en un punto; así mismo, utilizó la herramienta *Test* para confirmar que la recta que pasa por ese punto máximo es paralela al eje de las abscisas.

Esta estrategia de la simetría de la parábola se tenía prevista en el análisis a priori en la etapa 4; sin embargo, EC la realizaron luego de pasar por la actividad dos. Las condiciones establecidas en esa actividad les permitieron verificar que esta estrategia es correcta ya que genera la solución del problema.

En cuanto a EU, retomó la estrategia realizada en la etapa 4 en donde construyó una recta que pasara por un punto ***P*** sobre la curva, buscando que dicha recta en algún momento quedara "balanceada"; es decir, que cumpliera con las condiciones que se establecieron en la actividad de las alturas de los objetos:

1) La regla graduada debe estar perpendicular al piso.
2) La regla que está tocando al objeto debe ser paralela al piso.
3) Se debe garantizar que la regla toque al objeto en su punto más alto.

La segunda y tercera condición llevó a introducir la noción de recta tangente, puesto que EU comentó *"necesito construir una recta que esté balanceada y que sea tangente a la curva"*. Por lo anterior, el profesor le sugirió a EU utilizar la macro ***Tangentealacurva****;* EU construyó la recta tangente por el punto ***P*** utilizando la macro y al mover el punto **B,** intentó que esa recta tangente fuera paralela al eje ***x***.

El profesor le presentó la herramienta *Test* que le permitió confirmar si dicha recta estaba o no siendo paralela al eje ***x***, además le enseñó la macro ***PendienteRecta*** para verificar si la recta tenía una pendiente igual a cero. EU empezó a mover la recta tangente hasta que el *Test* determinara el paralelismo; sin embargo, comentó que de esa manera nunca podría lograrlo; por lo tanto, decidió calcular el vértice de la parábola.

Por lo observado en los cálculos de EU, se puede inferir que tuvo en cuenta la ecuación estándar de una parábola: $y = ax2 + bx + c$, y de ella la expresión $-\frac{b}{2a}$ la cuál le dio la coordenada en x correspondiente al vértice de la parábola como se muestra en la figura 64.

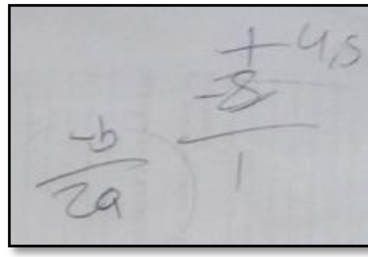


Figura 64.Calculo numérico del vértice de la parábola

EU construyó un punto con las siguientes características: su abscisa igual al vértice hallado y su ordenada igual a cero. Intentó colocar el punto **B** sobre el punto anteriormente construido y al lograrlo comprobó que el *test* le está mostrando que la recta tangente que pasa por el punto ***P*** es paralela al eje ***x*** y la pendiente de la recta es cero como se muestra en la figura 65.

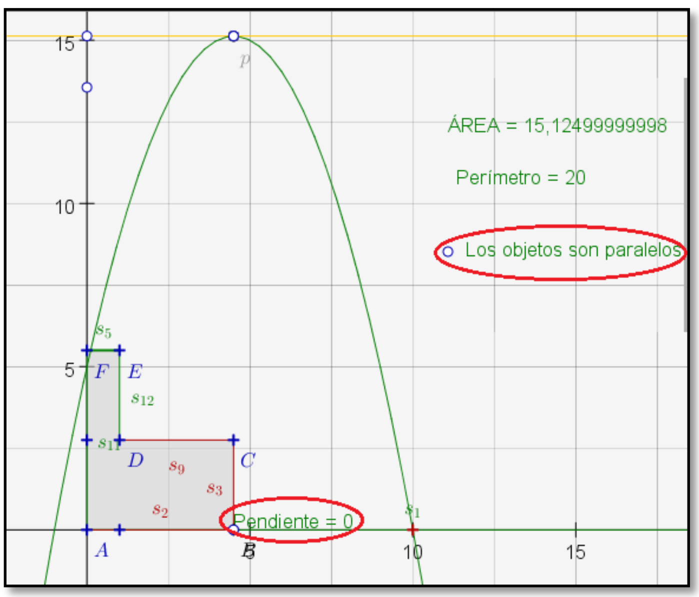


Figura 65. Estrategia vértice de la parábola para resolver el problema

En el análisis a priori no se tenía prevista esta estrategia implementada por EU, en la cual hace un cálculo del vértice de la parábola para obtener el punto más alto de la curva y así el área máxima del hexágono. Pero sí se tenía previsto que los estudiantes solucionaran el problema utilizando la simetría de la parábola, y se ideó plantearles un problema diferente donde esta estrategia no funciona. Por eso a continuación se presenta el trabajo de los estudiantes en el pilotaje de este nuevo problema.

2.3.4. PROBLEMA 2: "EL VOLUMEN MÁXIMO DE UNA CAJA SIN TAPA".

Exploración previa para la familiarización con el modelo

Tanto EC como EU identificaron cuál es el vértice del molde de la caja que se puede arrastrar y reconocieron que la construcción que modela el problema cumple con las condiciones expuestas en el enunciado ya que mencionan: *"en la lámina rectangular se ve que la altura y la base no cambian (...) lo único que cambia es el pedacito del cuadrado que se recorta para que quede el molde de la caja".* Esto se había previsto en el análisis a priori.

Tarea 1.Encontrar el volumen máximo de la caja utilizando el modelo

EU al leer el enunciado del problema mencionó: *"la gráfica de la función debe ser cúbica*". En esta ocasión no experimentó arrastrando el vértice ***A*** de la construcción para encontrar el volumen máximo, sino que buscó construir un punto que tenga como abscisa la abscisa del vértice ***A*** y como ordenada el volumen de la caja; al activar la traza del punto EU menciona: "*parece una parábola, pero con forma de bastón*" (figura 66).

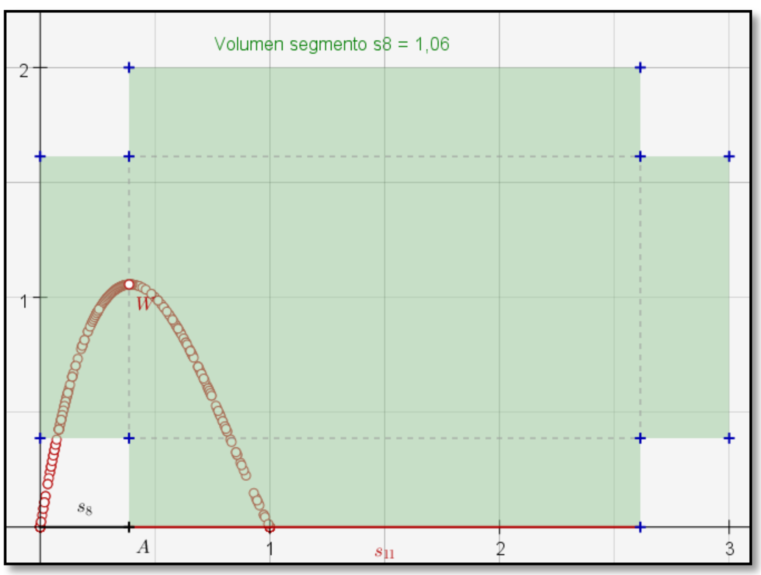


Figura 66. Traza del Punto W que relaciona un lado de la caja con el volumen

En cuanto a EC, se observó que pasaron rápidamente por la estrategia visual de encontrar el volumen máximo y al igual que EU construyeron un punto con las características anteriormente mencionadas. Al activar la traza y observar la forma, mencionaron: *"es una parábola igual al problema anterior (…) se resuelve igual que el problema del hexágono"*.

EC al ver que la traza corta al eje ***x*** en los puntos (0,0) y (1,0), decidieron emplear la estrategia usada en la actividad del hexágono para hallar el punto máximo de la curva. Al ubicar el punto medio, EC indicaron *"la parábola no es simétrica"* (figura 67).

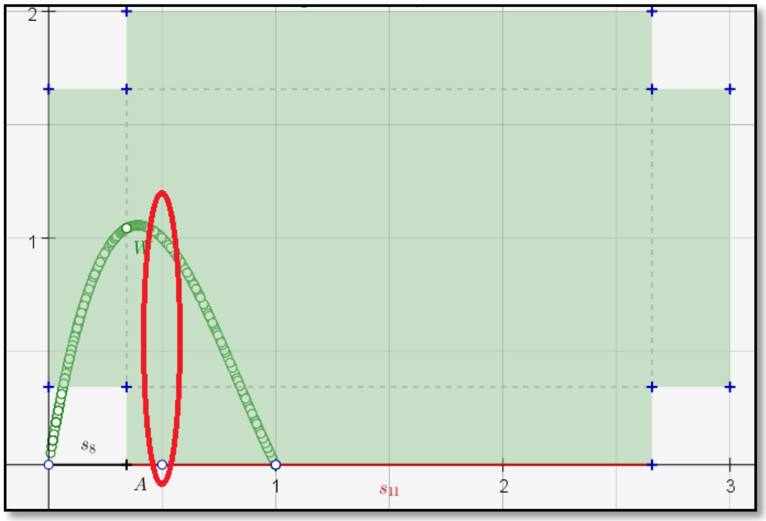


Figura 67. Invalidación de la estrategia del punto medio para hallar el punto máximo de la curva

Como se tenía previsto en el análisis a priori, los estudiantes utilizaron la estrategia de simetría que implementaron para resolver el problema del hexágono y efectivamente verificaron que esta estrategia no funcionaba para esta situación, puesto que al construir un punto y activar su traza, observaron que la huella no era simétrica.

Por su parte EC1 decidió mirar hacia donde se iban acercando los volúmenes mayores de la caja, retomando la estrategia que implementó en el problema del hexágono. Esta estrategia lo llevó a conjeturar que el volumen máximo es 1,06. Para verificar esta conjetura, EC1 construyó un punto con la abscisa del punto **A** y ordenada 1,06; sin embargo, el profesor cuestionó al estudiante haciéndole ver que la traza del punto que ha denominado ***"VOLUMEN MÁXIMO"*** al parecer tocaba varios puntos de la traza que describía la curva y por tanto no se estaría cumpliendo una de las condiciones para hallar el punto máximo (tangencia) (figura 68).

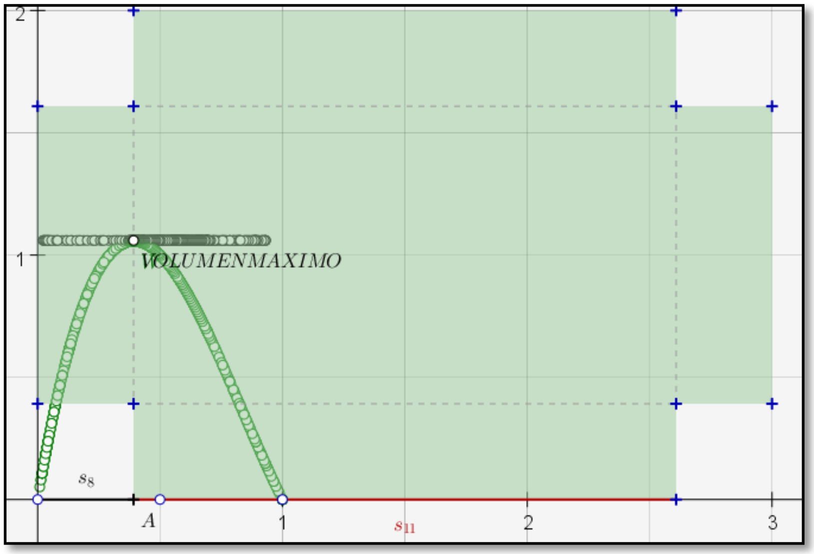


Figura 68. Estrategia de aproximación para calcular el volumen máximo de la caja

Tarea 2. Determinar la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función

Para determinar el volumen de la caja, tanto EC como EU no presentaron dificultades para hallar la ecuación que modela el problema. Al igual que en el problema del hexágono, las herramientas: *traza* y *gráfica de una función* permitieron validar o invalidar la expresión a la que llegaron los estudiantes (figura 69).

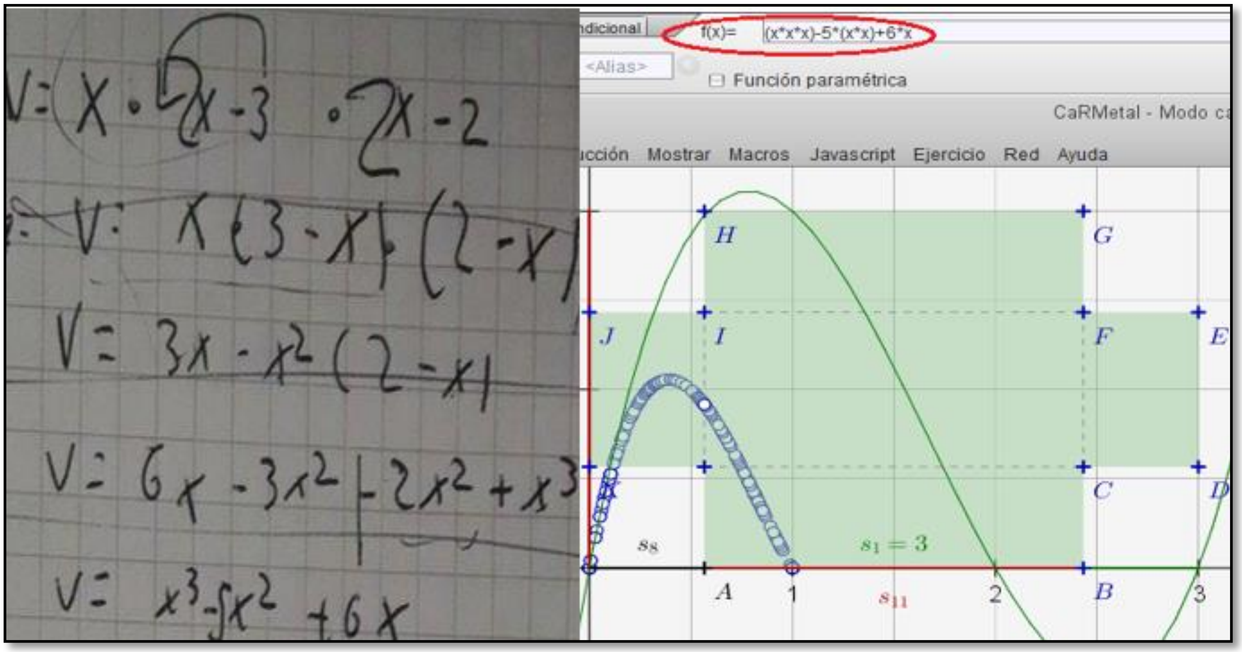


Figura 69. Invalidación de la expresión algebraica obtenida

EC comentaron en el momento de ver la gráfica de la función: *"ya no es una parábola"*, sin embargo, no recordaron el nombre con el que se identifica la curva que modela el volumen de la caja. EU reconoció que la función es cúbica (figura 70).

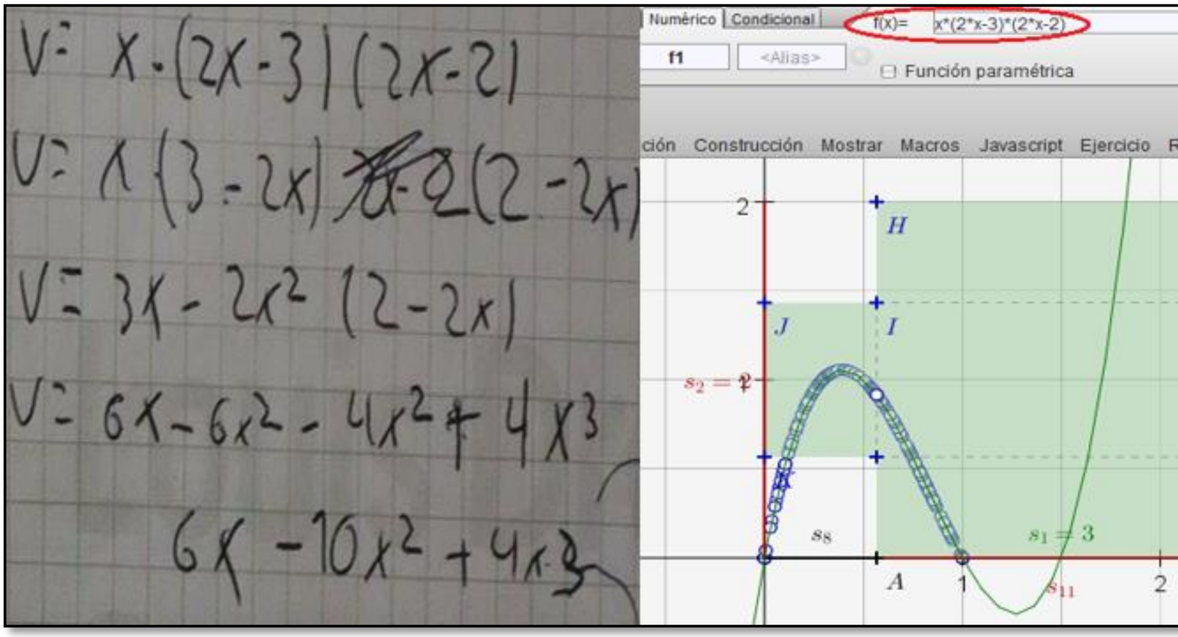


Figura 70. Validación de la expresión algebraica obtenida

Como se tenía previsto en el análisis a priori, los estudiantes no presentaron dificultades procedimentales para hallar la ecuación que modela el problema de la caja, ni tampoco para graficarla; corroboramos además que para ellos fue más fácil hallar esta ecuación que la del hexágono donde tomaron más tiempo.

Tarea 3.Trazar una recta tangente a la curva de la función cúbica que sea paralela al eje de las abscisas

A diferencia de EU quien ya reconocía qué es una recta tangente, EC manifestaron un desconocimiento frente a dicho término, asociándolo a la gráfica de la función trigonométrica tangente de un ángulo. Este desconocimiento se dio en el momento en que el estudiante necesitó aplicar las condiciones establecidas en la actividad 2: *La regla graduada debe estar perpendicular al piso, la regla que está tocando al objeto debe ser paralela al piso y se debe garantizar que la regla toque al objeto en su punto más alto.*

Al trazar una recta que tocara a la curva en la parte más alta, se observó que EC no estaban utilizando las macros ya que estaban nombradas con el término "tangente", lo que los llevó a utilizar la herramienta *recta*, la cual pasa por dos puntos en la curva; no logrando garantizar las condiciones que se habían establecido en la actividad de las alturas.

Por lo anterior, el profesor les sugirió consultar el término tangente. EC ingresaron dicha palabra en el buscador google y luego de una socialización con sus compañeros y profesor mencionaron: *"debemos construir una recta que toque a la curva en un solo punto".* Sin embargo, EC1 trazó una recta perpendicular al eje ***x*** y aseguró que esa recta era tangente porque corta a la curva en un solo punto. El profesor intervino aclarando: *"la recta debe tocar a la curva en un solo punto, pero no la debe cortar o atravesar".*

Aunque el profesor sugirió utilizar las macros, EC1 decidió retomar la estrategia de aproximación aplicada en el problema del hexágono. En esta tarea construyó un punto y lo llamó ***"volumen máximo"***, trazó una recta perpendicular al eje ***x*** por dicho punto y mencionó que la altura máxima de la curva era 1,06; para validar su estrategia, construyó una recta perpendicular al eje ***y*** por ese punto, afirmando que tocaba a la curva en un solo punto. El profesor le sugirió hacer zoom. EC1 observó que el punto denominado "***volumen máximo"*** no hacía parte de la curva y a su vez la recta horizontal no tocaba a la curva en ningún punto (figura 71).

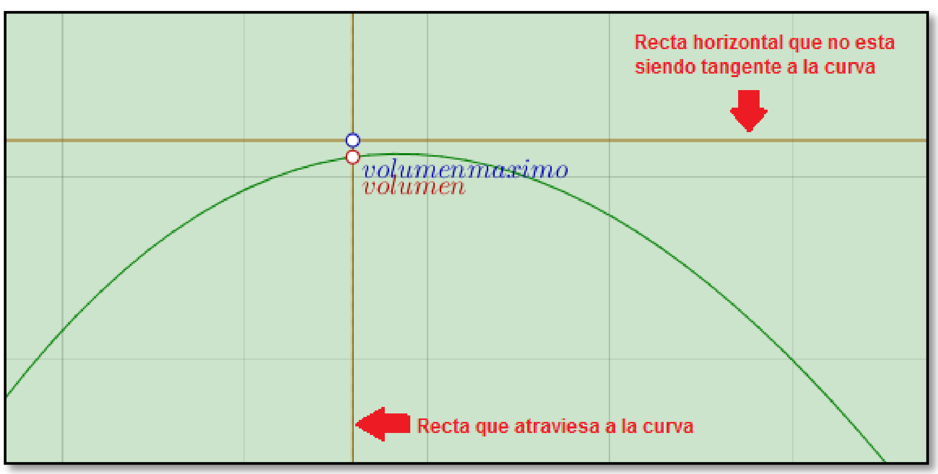


Figura 71. Invalidación de estrategia de aproximación a partir de una recta horizontal

El profesor sugirió a los estudiantes usar la macro ***TangenteCúbica***, para construir la recta que tocara a la curva en un punto. Para lograr que esta recta tangente fuera paralela al eje de las abscisas, EC y EU arrastraron el punto (sobre el eje de las abscisas) por donde pasaba la recta tangente y de manera visual buscaron que la recta estuviera horizontal.

En esta tarea los estudiantes usaron estrategias perceptivas para construir una recta tangente a la curva y las invalidaron por medio de las herramientas del software como se tenía previsto en al análisis a priori; además, el uso de la macro les permitió que no se quedaran resolviendo un problema parcial (construcción de una recta tangente a una curva), sino que, por el contrario, avanzaran en la resolución del problema principal.

Tarea 4. Determinar el punto máximo de la gráfica de la función cúbica

Para verificar que la recta tangente a la gráfica de la función fuera paralela al eje de las abscisas, EC1 usó el test *¿Rectas paralelas?* que había aprendido a usar en la actividad del hexágono. Luego mostró la pendiente de la recta tangente utilizando la macro ***PendienteRecta*** y continúo desplazando el punto intentando que esa pendiente fuera cero.

EC1 empezó a hacer zoom sobre la construcción de la gráfica de la función, moviendo el punto **P3** sobre el eje de las abscisas que le permitía arrastrar el punto de tangencia. Pasados 15 minutos EC1 logró ubicar el punto de tal manera que el *test* le confirmaba que la recta que pasa por dicho punto es paralela al eje ***x*** y que la pendiente de dicha recta era igual a cero (figura 72).

Esta estrategia no estaba prevista en el análisis a priori y no se pudo invalidar ya que el software mostraba con las herramientas de verificación que la pendiente de esa recta era cero y que dicha recta era paralela al eje de las abscisas; lo que la hacía una recta tangente, que era precisamente lo que se estaba buscando. Esta es una inconsistencia del medio que no permite invalidar esa estrategia perceptiva.

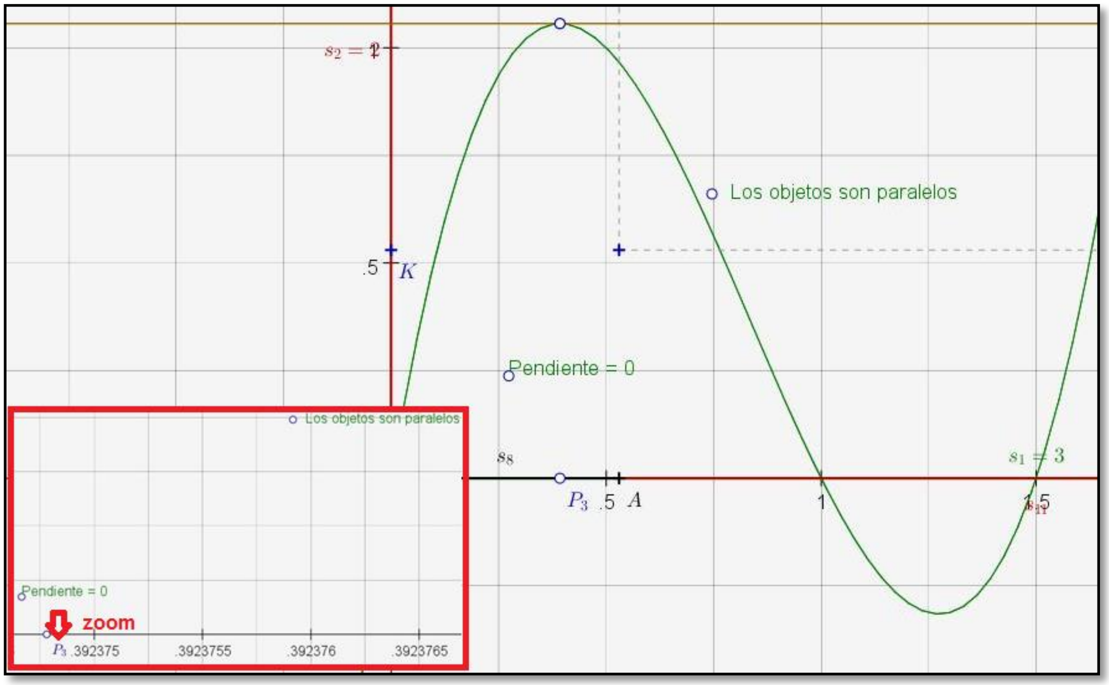
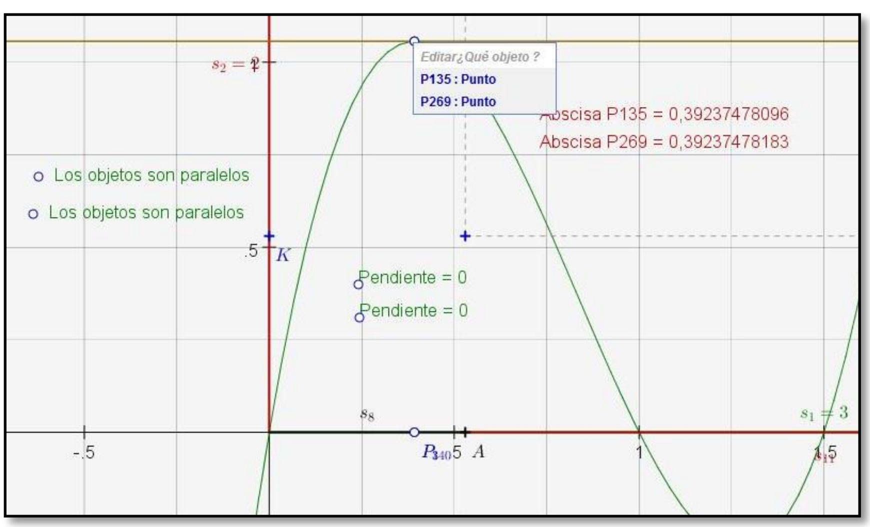


Figura 72. Uso de la herramienta zoom para calcular el punto máximo de la gráfica de la función[14]

[14]Decidimos (las investigadoras) hacer una exploración con el software (esta prueba no es parte de este pilotaje), para probar que el software lo que estaba realizando era una aproximación y no la solución exacta del problema. Encontramos que es posible hallar varios puntos sobre la curva con diferentes coordenadas pero que al parecer están cumpliendo con las condiciones para resolver un problema de alturas; es decir, se encuentran en la parte más alta de la curva y al trazar una recta tangente por dichos puntos, la recta es paralela al eje de las abscisas y su pendiente es cero, lo que genera una inconsistencia ya que solo se debe encontrar un único punto máximo.

Los puntos **P135** y **P269** de la imagen son un claro ejemplo donde se muestra que en el momento de aplicar el test y con la macro *PendienteRect*a se llega a que la recta tangente que pasa por dichos puntos es paralela al eje de las abscisas y su pendiente es cero; sin embargo, al observar las coordenadas, las abscisas son diferentes. De esta manera, encontramos que efectivamente hay errores en el software por lo que se recomienda a los diseñadores del software que la opción de *Zoom* tenga un límite de uso.



Los demás estudiantes abandonaron rápidamente la estrategia perceptiva, pues dijeron: *"nos podemos quedar mucho tiempo haciendo zoom y tal vez nunca logremos que la recta sea paralela"*.

El profesor les propuso la estrategia de generalización de un problema: mostrar la pendiente de todas las rectas tangentes que pasan por la curva y de esta manera identificar la o las rectas que tienen como pendiente cero, les enseñó a construir un punto cuya abscisa es la abscisa del punto de tangencia y cuya ordenada es la pendiente de la recta tangente y les pidió que activaran la traza del punto. Todos los estudiantes al observar la traza dijeron que era una parábola (figura 73).

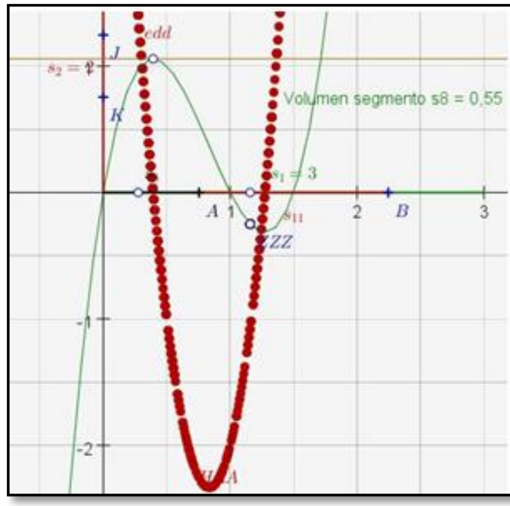


Figura 73.Traza del punto *edd* **que describe una parábola**

El profesor preguntó: *"¿dónde está la solución al problema a partir de la huella que deja el punto construido?"*. Tanto EU como EC señalaron con el dedo y dijeron que es la intersección de la traza con el eje ***x.***

Dado que los estudiantes reconocieron que no es posible hacer intersección de una traza con un objeto geométrico, el profesor les mostró la macro ***Parábola3ptos*** con la que podían construir la curva que describe la traza del punto a partir de tres puntos con las mismas características.

En la construcción de esos tres puntos, EU mencionó que presentaba confusión frente a la estrategia que se le estaba planteando pues no concebía que fuera posible construir una parábola a partir de tres puntos. El profesor decidió volver a explicarle lo que se deseaba realizar, enfatizando en las características que deben tener los puntos que debe construir.

En cuanto a EC, éstos se motivaron al saber que existía una macro que les evitaría hallar la ecuación de la parábola que describe la traza. Los estudiantes construyeron la parábola, luego los dos puntos de intersección de la parábola con el eje ***x*** y finalmente aplicaron la macro ***Tangentealacurva*** a uno de esos puntos de intersección y verificaron que fuera paralela al eje de las abscisas y tuviera pendiente cero.

EC usaron las coordenadas del punto de tangencia para saber cuál era el valor del volumen máximo de la caja, observando el valor de la ordenada y aplicaron las condiciones establecidas en la actividad de las alturas al construir una recta tangente a la curva y paralela al eje de las abscisas (figura 74).

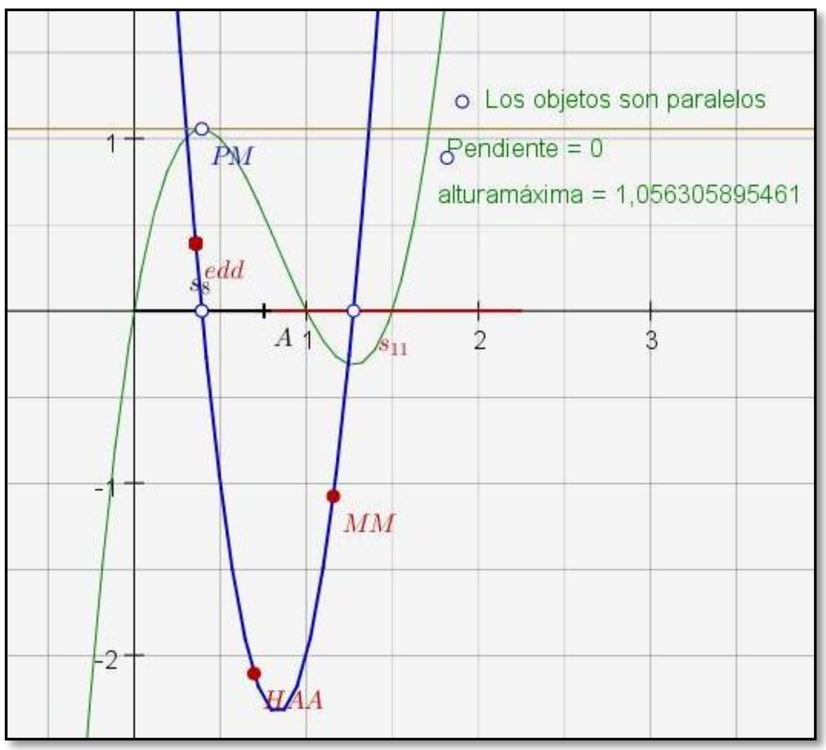


Figura 74. Punto máximo de la gráfica de la función cúbica mediante la estrategia de generalización

La estrategia de generalización propuesta en el análisis a priori permitió que los estudiantes llegaran a la solución del problema; no obstante, esta estrategia inicialmente fue confusa para EU quien tuvo una resistencia para aceptar que la macro ***Parábola3ptos*** funcionaba, ya que no concebía que se pudiera generar una parábola a partir de tres puntos, mientras que para EC fue muy práctico tener a su disposición la macro.

2.3.5. CUARTA ACTIVIDAD

Se les presentó a los estudiantes un archivo con la gráfica de la función que modela el problema del hexágono y se les pidió calcular la pendiente de una recta tangente sin utilizar la macro ***Tangentealacurva.*** Para dar inicio a esta actividad el profesor les sugiere trazar una recta secante a la curva a partir de dos puntos sobre la curva: Un punto **TE** móvil y un punto **P** fijo.

Tarea. Hacer que la recta secante sea tangente a la curva que modela el problema

En una intervención del profesor, este cuestionó a EC al preguntarles: *"¿En qué momento esta recta secante se vuelve tangente?"* El estudiante mencionó: *"Cuanto el punto TE este sobre el punto P y tenga como pendiente cero"*. En este momento EC aún estaba conservando los criterios para hallar el punto máximo de una curva y por tanto no está concibiendo la recta tangente como aquella recta que no necesariamente tiene que estar en una posición horizontal.

EC arrastraron el punto **TE** hacia el punto fijo **P** notando que, al colocar el punto móvil sobre el punto fijo, la recta secante desaparece. EC preguntaron si es posible calcular la pendiente de la recta secante, para poder llegar a entender por qué la recta secante desaparece al sobreponer los puntos (ver figura 75).

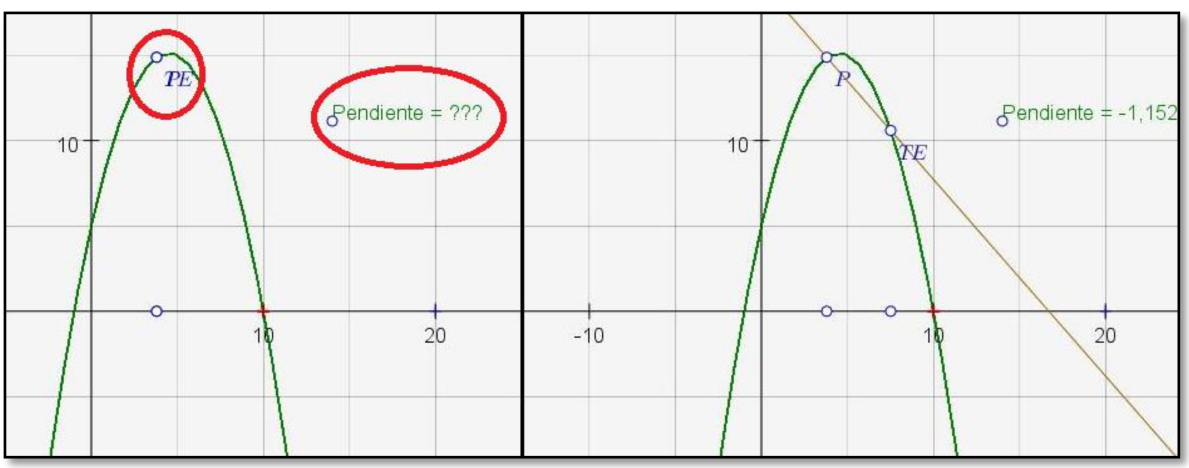


Figura 75.Estrategia de volver una recta secante como recta tangente a partir del arrastre de un punto móvil TE, hacia un punto fijo P

EC calcularon con la macro ***PendienteRecta*** la pendiente de la recta secante a partir del punto fijo **P** y arrastraron nuevamente el punto móvil **TE** sobre el punto fijo. En el momento en que están los puntos sobrepuestos, EC observaron que el software no generaba un valor para la pendiente. Frente a lo anterior, EC mencionaron que no entendían por qué el software no generaba un valor a la pendiente. Para poder dar respuesta a ello, el profesor les preguntó "*¿cómo se calcula la pendiente de una recta*?". EC mencionaron la siguiente formula:

$$\boldsymbol{Pendiente} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

EC1 comentó: *"como sería el mismo punto entonces quedaría cero sobre cero, o sea que no se puede calcular"*. El profesor propuso a EC buscar la solución del problema de manera general, mostrando la pendiente de todas las rectas secantes que pasaban por el punto fijo **P** y de esta manera identificar la pendiente de la recta cuando se vuelve tangente; es decir cuando el punto móvil **TE** está sobre el punto fijo **P**.

El profesor sugirió construir un punto **Ñ** que tuviera como abscisa *la diferencia de las abscisas del punto fijo P como el punto móvil TE* y como ordenada *la pendiente de la recta secante que pasa por el punto TE* y solicitó activar su traza.

EC construyeron un punto **Ñ** con las anteriores características y al mover el punto móvil **TE** identificaron que la traza del punto construido **Ñ**, describía una recta y señalaron que la solución del problema está cuando la traza corta al eje y, pues es en el momento en que **TE** esta sobre **P**. Dado que los estudiantes han observado en tareas anteriores que no es posible hacer intersección de un objeto geométrico con una traza, preguntan: *¿cómo se puede construir la recta azul?* (figura 76).

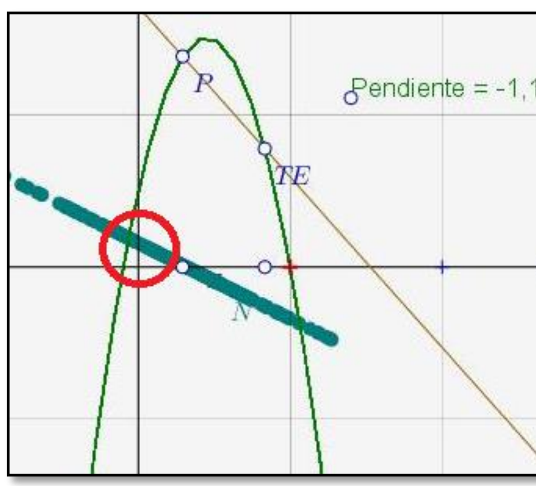


Figura 76.Traza del punto Ñ

El profesor preguntó a EC cuantos puntos se necesitan para poder trazar una recta, EC1 mencionaron que dos y el profesor preguntó: *"¿es posible construir otro punto que tenga las mismas características de Ñ?"* A partir de esta pregunta EC1 decidió construir otra recta secante que pasara por el punto fijo **P** y calculó su pendiente respeto al mismo punto fijo. Construido un punto **U** con las mismas características de **Ñ**, EC1 trazó la recta a partir de esos dos puntos y encontró la intersección con el eje ***y*** (figura 77).

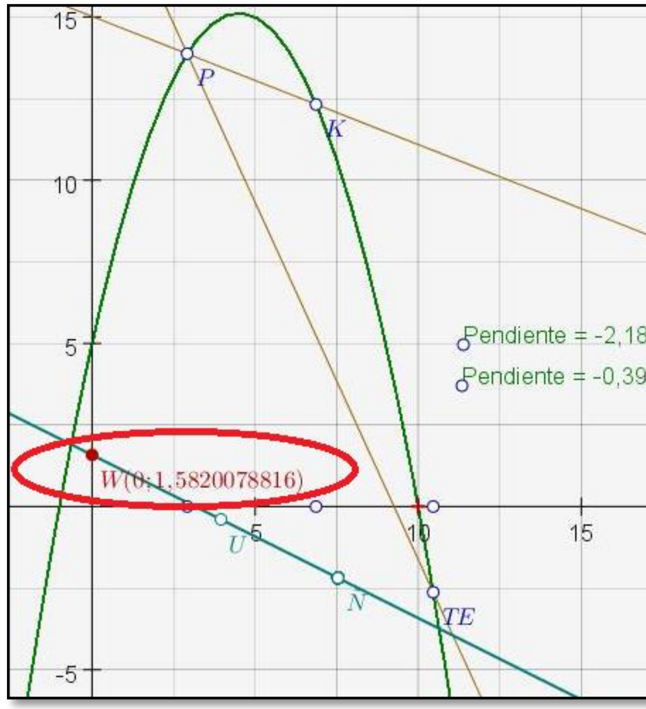


Figura 77. Pendiente de la recta tangente que pasa por el punto P

EC mostraron las coordenadas del punto de intersección **W** señalando que la ordenada de este punto es la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto **P**. Durante el pilotaje solamente se realizó esta parte de la actividad, puesto que desde el análisis a priori sólo se tenía previsto calcular la pendiente de la recta tangente a partir de un punto dado. No obstante, luego de realizar el pilotaje se ve necesario que el estudiante realice la construcción de la recta tangente a la curva conociendo un punto y la pendiente de la recta tangente, esto con el fin de probar que la pendiente hallada sí corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Como se tenía previsto en el análisis a priori los estudiantes concluyeron que no es posible calcular la pendiente de la recta tangente directamente, pero sí es posible utilizando el lugar geométrico que representa las pendientes de todas las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia.

3. CONCLUSIONES

Se diseñaron cuatro actividades a partir de dos problemas de optimización: el problema del hexágono, donde se pide la maximización de un área y el problema de la caja, donde se pide la maximización de un volumen. En la primera actividad se le plantea al estudiante el problema, se le entrega el modelo en CaRMetal y la interacción del estudiante con el software le permite invalidar las estrategias perceptivas; además se logra introducir la herramienta gráfica de una función para la determinación del punto máximo. Con la segunda actividad se logra que el estudiante determine las condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible, para darle sentido a la estrategia de medir la altura de una curva encontrando el punto en el que la tangente es horizontal. Con la tercera actividad, el estudiante aplica esas condiciones a la determinación de la altura máxima de la gráfica de la función y finalmente, con la cuarta actividad, se trabaja el cálculo de la pendiente de una recta tangente utilizando lugares geométricos, como complemento de la tercera actividad.

Con estas actividades se favorece la interpretación geométrica del método de la derivada para hallar puntos máximos y mínimos, permitiendo la construcción de sentido, pues se comprende el por qué y el para qué de cada uno de los pasos de ese método. Por ejemplo, la actividad dos permite comprender que para medir la altura de una curva es necesario encontrar una recta tangente a la curva que sea horizontal. En la actividad tres, el uso del lugar geométrico que representa la pendiente de todas las rectas tangentes permite la utilización de una representación gráfica de la derivada sin necesidad de dar una definición formal ni algebraica. Finalmente, la actividad cuatro utiliza nuevamente un lugar geométrico para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto sin necesidad de definir formalmente el concepto de límite y evitando los procedimientos algebraicos.

Una forma de tratar las dificultades que encuentran los estudiantes que reciben una enseñanza basada exclusivamente en definiciones formales y procedimientos mecánicos fue introducir la idea de función como método de generalización que consiste en encontrar todos los puntos que cumplen una determinada condición para luego identificar algunos puntos especiales dentro de ese conjunto. Esta manera de ver las funciones es muy cercana a la utilización de los lugares geométricos en la resolución de problemas geométricos, que según vimos en el análisis epistemológico es anterior y sirve de fundamento al desarrollo del concepto de función. Desafortunadamente el estudio de los lugares geométricos y su uso en la resolución de problemas ha desaparecido del currículo de matemáticas en casi todo el mundo. La disponibilidad de herramientas como la *traza* y el *lugar* en el software de geometría dinámica posibilitan su uso y su reintroducción en la enseñanza.

En síntesis, las actividades diseñadas permiten que el estudiante proponga sus propias estrategias de solución a los problemas y las ponga a prueba en CaRMetal o con los objetos e instrumentos físicos. La interacción con el medio permite invalidar todas las estrategias no matemáticas. En esta interacción emerge el aprendizaje por adaptación, el cual se constituye en un elemento esencial del objetivo de esta investigación, ya que al permitirle al estudiante decidir sobre la validez o invalidez de los procedimientos utilizados en la resolución de problemas, contribuye a la construcción de sentido del saber matemático y evita la imposición autoritaria del mismo.

Aunque el estudiante no esté en la capacidad de aprovechar todo el potencial del software para comprobar sus estrategias, el profesor puede proponerle acciones de verificación con el software que conduzcan a la validación o invalidación de las estrategias propuestas. De esta manera, la disponibilidad del software y sus distintas retroacciones garantizan la posibilidad de hacer una devolución adecuada de los problemas, y permite la construcción conjunta (profesor/estudiante) de la estrategia de solución; esta construcción es conjunta, pues el profesor propone unas acciones iniciales, y gracias a las retroacciones del software el estudiante puede proponer las acciones subsiguientes que conducen a la solución.

Es necesario recordar que en este trabajo sólo se llevaron a cabo las dos primeras fases de la ingeniería didáctica: análisis preliminares y concepción y análisis a priori, dejando para después la realización de una experimentación y un análisis a posteriori. Se realizó un pilotaje para controlar la pertinencia del análisis a priori, verificando en un número reducido de sujetos las hipótesis sobre las posibles acciones de los estudiantes y el efecto de las retroacciones del medio. Este pilotaje confirmó las acciones previstas en el análisis a priori. Se presentaron algunas acciones que no estaban previstas, pero en general las retroacciones del medio permitieron aprendizajes por adaptación relacionados con los objetivos de enseñanza. Entre las acciones que no estaban previstas en el análisis a priori encontramos:

- El cálculo del vértice de la parábola como estrategia para dar solución al problema del hexágono.
- La observación constante de la *traza* de un punto, con la gráfica de una función como estrategia para validarlos cálculos algebraicos y obtener la gráfica de la función que coincida con la huella dejada por el punto.
- El uso de la herramienta *zoom* sobre la construcción de la gráfica de la función al ubicar un punto de tal manera que el *test* le confirmaba que la recta que pasa por dicho punto es paralela al eje ***x*** y que la pendiente de dicha recta es igual a cero. Esta estrategia es perceptiva y las retroacciones del software no permitieron invalidarla.

Encontramos además en el pilotaje, que el profesor intervino de manera indirecta por medio de las restricciones y potencialidades de CaRMetal (medio), logrando un proceso de devolución que buscaba que los estudiantes comprendieran el problema y tomaran conciencia de las posibilidades de validación; de esta forma, el profesor enseñó unas estrategias matemáticas que le exigían al estudiante resolver unos problemas parciales.

En cuanto a nuestros referentes teóricos, cabe señalar que la TSD nos permitió identificar el rol del software en el diseño de las actividades. Ya no interpretamos trivialmente la tecnología como simple motivador o amplificador de las acciones del estudiante, sino como el medio con el cual el sujeto interactúa, brindándole la posibilidad de experimentar sus propias estrategias para ponerlas a prueba, invalidar las estrategias no matemáticas y validar las estrategias matemáticas. Además, el software es una herramienta poderosa para llevar a cabo la devolución, ya que le posibilita al profesor proponer acciones de verificación que le permiten al alumno corregir el proceso de resolución de problemas sin recibir un juicio autoritario por parte del profesor.

De esta manera, el uso del software CaRMetal, fue pertinente para el desarrollo de tres de las actividades; no viéndose como un instrumento de innovación y motivación, sino como un medio que produce aprendizaje. Entre sus ventajas se encuentran la posibilidad de arrastre de las figuras para verificar sus propiedades, la observación de la traza de un punto indicando su lugar geométrico, la utilización de macros donde se resumen varios pasos de una construcción, entre otros.

Finalmente, es importante mencionar las restricciones de este trabajo ya que proponemos unas actividades para calcular máximos y mínimos en funciones cuadráticas o cúbicas, pero no llegamos a la generalización con otras funciones; por ejemplo, para funciones periódicas o de grado mayor a tres, la construcción geométrica se torna más compleja, por lo que se recomienda trabajar con los estudiantes este método hasta funciones cúbicas y para las demás funciones se sugiere pasar a la estrategia del cálculo numérico de la derivada.

Cabe aclarar que con estas actividades no se trabaja la formalización de los conceptos de límite o derivada, no se llega a una definición formal pues se ha encontrado en los análisis preliminares que la formalización de estos conceptos puede llevar a un obstáculo didáctico. No trabajamos la derivada ni el límite desde un punto de vista algebraico, pero esto no quiere decir que no se pueda realizar; ya que se podría considerar una prolongación de la secuencia de actividades por medio de un proceso intuitivo que lleve a encontrar reglas algebraicas para calcular la derivada a partir de varios ejercicios donde los estudiantes comparen ecuaciones de una función con la ecuación de la función derivada y de esta manera puedan llegar a formular reglas numéricas en funciones polinómicas.

Finalmente, recordamos la necesidad de realizar una experimentación amplia de estas actividades para poder realizar un análisis a posteriori cuidadoso con el fin de validar la ingeniería.

4. REFLEXIONES

Esta investigación transformó nuestra forma de concebir las nociones que queríamos enseñar, la forma de percibir el uso del software y los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. A lo largo de estos dos años entendimos que para profundizar en un conocimiento matemático debemos apropiarnos de éste, reconociendo su epistemología, sus implicaciones didácticas y cognitivas.

Al estudiar la TSD cambiamos la forma en que estábamos percibiendo la tecnología, pues no se trata de "un juguete para entretener a los estudiantes" o un tipo de motivación para resolver problemas de cálculo; se trata de un medio que le proporciona al estudiante las herramientas necesarias para construir un conocimiento. Cuando el sujeto interactúa con el software recibe retroacciones que le permiten decidir si sus estrategias son válidas o no, produciéndose así un aprendizaje por adaptación.

Con el diseño de las actividades, los objetos matemáticos que se abordaron (límite, derivada) pudieron dejar de verse como algo abstracto y poco comprensible, ya que al trabajar desde la geometría se podía entender el sentido de estas nociones sin recurrir a definiciones formales. Es así como esta investigación nos aporta en el cambio de planeación de las clases de matemáticas, al incorporar no solo la geometría para darle sentido a las nociones a enseñar, sino también los medios que propicien un aprendizaje como el software de geometría dinámica.

Durante nuestra formación identificamos vacíos conceptuales: podíamos entender el problema, pero no lográbamos dar cuenta de cómo enseñar y justificar nociones de cálculo. Por ejemplo, no sabíamos responder a la pregunta: *¿Por qué cuando buscamos un punto máximo o un punto mínimo se debe derivar dos veces y se debe igualar a cero?* Usualmente los profesores tendemos a responder que así se debe proceder porque es la forma como se presenta en los textos o porque es una fórmula que ya está establecida para aplicarla y resolver el problema. Ahora nosotras hemos tomado conciencia de que esas preguntas no se pueden responder con un argumento de autoridad, sino que deben tenerse argumentos racionales que ayuden a comprender el sentido del conocimiento teórico.

En algunos momentos tuvimos resistencia para reconocer las dificultades que teníamos, no aceptábamos que existían vacíos en la justificación de algunos de nuestros procesos matemáticos. Aunque contábamos con un estudio previo en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, no lográbamos relacionar conceptos geométricos con algunas definiciones de cálculo; por ejemplo, podíamos resolver problemas de optimización desde lo algebraico, pero no podíamos explicar el por qué de cada uno de los pasos, como el hecho de igualar la derivada a cero. Trabajar desde la geometría contribuyó a darle sentido a las nociones de cálculo implícitas en los problemas, abandonando la idea de memorizar fórmulas. Un aprendizaje que obtuvimos es que si no podemos dar explicación de un por qué y para qué de lo que se está enseñando, no lograremos que nuestros estudiantes lleguen al “saber” que deseamos que aprendan.

Con esta maestría vemos un gran aporte a nuestra formación como docentes y es precisamente el poder guiar el proceso de nuestros estudiantes teniendo en cuenta que para enseñar un objeto matemático, es necesario reconocer los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos que se encuentran implícitos en éste y brindarles un medio que les genere aprendizajes; dicho medio puede ser tecnológico.

BIBLIOGRÁFIA

Acosta, M., Camargo L., Castiblanco, A. & Urquina, H. (2004): Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Edición Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. ISBN: 958 - 97413 - 4 – 7. Bogotá, D.C., Colombia

Acosta, M. (2005): Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. Educación Matemática, Grupo Santillana, vol. 17, núm. 3, pp. 121-140, México. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517307.pdf

Acosta, M, (2010): Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En: Colombia. Ponencia: Libro: Memorias del décimo primer encuentro colombiano de Matemática Educativa, Grupo de Editorial Gaia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Acosta, M., Monroy, L. &Rueda, K. (2010): Situaciones adidácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 173–189. Universidad Industrial de Santander, Grupo EDUMAT, Escuela de Matemáticas, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.

Artigue, M. (1995): Ingeniería Didáctica. En M. Artigue (ed.) *Ingeniería Didáctica En Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, pp. 33-60 Cap. 4. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. Bogotá.

Bachelard, G. (1938). La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo (Vigesimosexta ed.). (J. Babini, Trad.) Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Bedoya y Londoño. (1992). *Matemática Progresiva.* Editorial Norma. Colombia.

Bessot, D. et al. (1999). Aux origines du calcul infinitésimal. Comprendre les mathématiques para les textes historiques. Cercled' histoire des sciences. IREM de basse-Normandie. Ellipses.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Brousseau G. (1986).Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7/2. pp. 33-115.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Editorial libros del zorzal. p.87

Camargo, L., & Guzmán, A. (2005). Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: Relaciones entre la pendiente y la razón. Bogotá: Editorial Magisterio

Cantoral, R. (1993): Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. Publicaciones Centroamericanas Cinvestav. ISBN 9977-64-769-0. México. Recuperado de http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf

Cardona, R. (2012). Una propuesta para la enseñanza de la derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo. (Trabajo de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia

Chávez, Romero, Salgado & Torres. (2004). *Introducción al cálculo*. Editorial Santillana. Colombia

Claros, F. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada. España.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento dellamatemática. La Matemática e la sua Didattica, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socio epistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano (pp. 265-286). D.F. México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Corredor, L. (2011). Geometría dinámica y lugares geométricos. Trabajo de grado. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá D.C. Disponible en http://www.konradlorenz.edu.co/images/investigaciones/matematicas/geometria_dinamica_luis_Fernando.pdf

Cuevas, C. &Pluvinage, F. (2009): Cálculo y Tecnología. El Cálculo y su Enseñanza. DME-Cinvestav-IPN & IREM de Strasbourg México – Francia. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf

Del Rio, José. (1996): Lugares geométricos. Cónicas. Capítulo 1: Breve tratado de los lugares geométricos siguiendo el desarrollo histórico de la matemática. Editorial Síntesis, ISBN 84-7738-230-1; pp.11-53.

Farfán & García (205). El concepto de función. Un breve recorrido epistemológico. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, volumen 18, pp. 489-494. México. Disponible en http://www.pucrs.br/famat/viali/orientacao/leituras/artigos/ALME18.pdf

Garder, Martín& Thompson, Silvanus. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial McGraw Hill. México.

Gordillo, Plazas, &Villegas. (1992). *Matemática 2000-11*. Editorial Voluntad. Colombia.

Joya Anneris. (2013). *Los caminos del saber Matemáticas 11*. Editorial Santillana. Bogotá

Lara, C. (1997). La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática, pp. 127-132, Sonora. Recuperado de http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/lara/lara.htm

Larson& Edwards. (2010).*Cálculo 1 de una variable*. Editorial McGraw Hill.México.

Lehmann, C. (1989). Geometría analítica. Editorial Limusa, S. A. de C. V. Balderas 95, México, D. F. Disponible en: https://archive.org/stream/GeometriaAnalitica/GeometriaAnaliticaLehmanEspaol#page/n67/mode/2up

Minton, Roland & Smith, Robert T. (2001).*Matemáticas Aplicaciones y conexiones 1*. Editorial McGraw Hill

Muñoz & Román. (1999). Origen y Desarrollo Histórico del Cálculo Infinitesimal. Ediciones UPC, Barcelona. ISBN 84-8301-360-6. Disponible en http://www-ma4.upc.edu/~nrr/docs/histci.pdf

Ortiz, Gustavo (2000). *SUPERMAT Matemáticas 11*. Editorial voluntad. Colombia.

Pineda, Carlos. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria. Trabajo de maestría en Enseñanza de la Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Disponible en http://www.bdigital.unal.edu.co/39569/1/01186769.2013.pdf

Restrepo, Mauricio. (2006). *Conexiones matemáticas 11*, Grupo editorial Norma, Bogotá.

Santos, L. (2007). *La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales.* XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Querétaro: Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. (8). pp. 35-54. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6949/6635

Sastre, P. Rey, G. y Boubée, C. (2008): El concepto de función a través de la historia. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN). 16, 141-156.

Tapia, F. (2002). Apuntes de historia de las matemáticas. Volumen 1, Nº1. Disponible en: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

Thomas, George. (2010), *Calculo una variable*. Décimo segunda edición. Pearson. México.