Sumabilidad de Cesàro

John Jairo Barajas Moreno

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2016

SUMABILIDAD DE CESÀRO

JOHN JAIRO BARAJAS MORENO

Trabajo de grado

Trabajo Dirigido por:

Milton Lesmes

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2016

Dedicado a mi familia .

Agradecimientos

Quiero agradecer a los profesores del proyecto curricular de matemáticas que han sido parte fundamental en mi proceso de formación,en especial al profesor Milton Lesmes que me acompaño en el desarrollo de este trabajo .

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Sucesiones 1

1.2. Series 3

1.3. Problemas con series divergentes 4

1.4. Problemas con integrales divergentes 5

1.5. Metodos de Sumabilidad 6

1.5.1. Propiedades deseables de un método de sumabilidad 6

2. Desarrollo **7**

2.1. Sumabilidad de Cesàro 7

2.2. Sumabilidad de Abel 12

2.3. Series Cesàro n sumables 15

3. Conclusiones **19**

Referencias 20

Introducción

Desde 1696 cuando Jacobo Bernoulli formulo por primera vez esta paradoja "$1-1+1-1... = \frac{1}{2}$".Esta paradoja toma un papel importante debido a que si asociamos convenientemente la serie nos queda "$(1-1)+(1-1)... = \frac{1}{2}$z no se podía entender como la suma de ceros puede dar un valor distinto de cero de aquí el interés que genero.

En 1713 Leibniz presenta su postura acerca de lo planteado anteriormente mostrándose a favor, el argumento que uso fue un método netamente probabilista en que afirmaba que al hacer las sumas parciales nos queda:

$$1$$
$$1-1=0$$
$$1-1+1=1$$
$$1-1+1-1=0$$
$$\vdots$$

y así como el limite es 1 si sumo un número par de términos y 0 si sumo un numero impar de términos, con lo cual Leibniz afirmaba que la suma de esa serie era la media entre eso dos números, es decir :

$$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

.

En 1771 esta vez Daniel Bernoulligeneralizó lo dicho por Leibniz para cualquier serie alternante donde la sucesión de sumas parciales fuese periódica. Por ejemplo: la serie 1-1+0+1-1+0...donde su sucesión de sumas parciales es 1,0,0,1,0,0... luego la suma de esta serie viene dada por :

$$\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}$$

El presente trabajo es un estudio sobre el tratamiento de este tipo de series divergentes principalmente con el método de sumabilidad de Cesàro, En el primer capitulo hacemos algunas definiciones importantes para el desarrollo posterior . En el siguiente capitulo definimos el criterio de sumabilidad de Cesàro y abel y terminamos con una conclusión sobre porque usar el método de Cesàro.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sucesiones

Definición 1.1. *Una sucesión de números reales es una función que tiene dominio todos los números naturales y rango los números reales. vamos a denotar a la sucesión p como (p_n) donde $p(1) = p_1$, $p(2) = p_2$, $p(3) = p_3 \cdots$.*

Definición 1.2. *Una sucesión de números reales (p_n),se dice que converge hacia un punto p donde p es un número real si :para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n > N$*

$$| P - p_n | < \epsilon$$

y escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

Si p_n no converge a ningún numero real p se dice que diverge.

Teorema 1.1. Sean (s_n) y (t_n) sucesiones reales y convergentes tal que: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ y c un número real.Entonces

- $\lim_{n\to\infty} s_n + t_n = s + t$
- $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs.$
- $\lim_{n\to\infty} t_n s_n = ts$

Demostración 1.1.

- Dado $\epsilon > 0$ existen dos números naturales N_1 y N_2 tales que:

  $n \geq N_1$ implica

  $$\left| s_n - s < \frac{\epsilon}{2} \right|$$

  y $n \geq N_2$ implica

  $$\left| t_n - t < \frac{\epsilon}{2} \right|$$

  Si $N = máx(N_1, N_2)$ y $n \geq N$ entonces:

  $$|\,(s_n) + (t_n) - (s + t)\,| \leq |\, s_n - s\,| + | \leq |\, t_n - s\,| < \epsilon$$

  luego:

  $$\lim_{n \to \infty} s_n + t_n = s + t$$

- Dado $\epsilon > 0$ existen un número natural N tal que:

  $n \geq N$ implica

  $$|\, s_n - s\,| < \frac{\epsilon}{|\, c\,|}$$

  $$= |\, c\,|\,|s_n - s\,| < \epsilon$$

  $$= |\, cs_n - cs\,| < \epsilon$$

- Utilizaremos la identidad

  $$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s)$$

  dado $\epsilon > 0$ existen dos enteros N_1 y N_2 tales que:

  $n \geq N_1$ implica

  $$\left| s_n - s\,| < \sqrt{\epsilon} \right.$$

  y $n \geq N_2$ implica

  $$\left| t_n - t\,| < \sqrt{\epsilon} \right.$$

  Si $N = máx(N_1, N_2)$ y $n \geq N$ entonces:

$$|\,(s_n - s)(t_n - t)\,| < \epsilon$$

de modo que:

$$\lim_{n\to\infty}(s_n t_n - st) = 0$$

Definición 1.3. *Dada una sucesión* (p_n)*, consideremos otra sucesión* (n_k) *de numeros naturales, de modo que* $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ *la sucesión* (p_{n_k}) *se llama subsucesión de* (p_n)

1.2. Series

Definición 1.4. *Dada una sucesión* (a_n) *definimos una nueva sucesión* (s_n) *(que la llamaremos la sucesión de las sumas parciales de* a_n*) de la siguiente forma:*

$$(s_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Definición 1.5. *Dada una sucesión* (a_n) *definimos una serie infinita como:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots$$

Definición 1.6. *Una serie infinita de números reales* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*,se dice que converge hacia un punto p donde p es un número real si:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = p$$

donde (s_n) *es la sucesión de sumas parciales.*

1.3. Problemas con series divergentes

Vamos a empezar asignándole valores a algunas series divergentes unicamente con manipulaciones algebraicas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Suponemos que la serie converge a un número real R .

luego:

$$\begin{aligned}
R &= 1-1+1\cdots \\
1-R &= 1-(1-1+1\cdots) \\
1-R &= 1-1+1\cdots \\
1-R &= R \\
1 &= 2R \\
R &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ahora hacemos lo mismo con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$, suponemos que la serie converge a un nuḿero real S

$$S = 1+2+3+4+\cdots$$

$$\begin{aligned}
-3S &= (1-4)(1+2+3+4+\cdots) \\
&= (1+2+3+4\cdots)-(4+8+12+16\cdots) \\
&= (1+3+5+\cdots)+(2+4+6+8+\cdots)-(4+8+12+16+\cdots) \\
&= (1+3+5+\cdots)+((2-4)+(4-8)+(6-12)+(8-16)\cdots) \\
&= (1+3+5+\cdots)+(-2-4-6-8)\cdots) \\
&= 1-(2-3+4-5+6\cdots)+R-R \\
&= 1-R-(2-3+4-5+6\cdots)+R \\
&= 1-R-(2-3+4-5+6\cdots)+(1-1+1-1\cdots) \\
&= 1-R+(-2+3-4+5-6\cdots)+(1-1+1-1\cdots) \\
&= 1-R+(-1+2-3+4-5+6\cdots) \\
&= 1-R-(1-2+3-4+5-6\cdots) \\
&= 1-R-(-3S) \\
-6S &= 1-\frac{1}{2} \\
S &= \frac{-1}{12}
\end{aligned}$$

1.4. Problemas con integrales divergentes

Ahora lo que vamos a hacer es asignarle valores a integrales divergentes pero con un método conocido como el valor principal de cauchy.

Definición 1.7. *Sea f una función real continua a trozos en todo intervalo $[a,b]$.se define el valor principal de Cauchy de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ como:*

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

Teorema 1.2. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Demostración 1.2. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces: $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ tambien son convergentes luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} f(x)dx\\ &= \lim_{t\to\infty}(\int_{-t}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{t} f(x)dx)\\ &= \lim_{t\to\infty}(\int_{-t}^{t} f(x)dx = VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

La importancia del valor principal de Cauchy es que a algunas integrales divergentes nos permite asignarles un número.

Ejemplo 1.1. Sea $\int_{-\infty}^{\infty} x^n dx$ con n un número natural impar esta integral no esta definida pero si usamos el valor principal de Cauchy nos queda:

$$\begin{aligned}VP\int_{-\infty}^{\infty} x^n dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} x^n dx\\ &= \lim_{t\to\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})\,|_{-t}^{t}\end{aligned}$$

Como dijimos que n era un numero natural impar $n+1$ es un numero par luego $n+1 = 2k$ con k que pertenece a los naturales:

$$
\begin{aligned}
VP\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,dx &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x^{2k}}{2k}\right)\Big|_{-t}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x^{2k}}{2k}\right)_{-t}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{2k}}{2k}\right)-\left(\frac{(-t)^{2k}}{2k}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{2k}}{2k}\right)-\left(\frac{(t)^{2k}}{2k}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} 0 = 0
\end{aligned}
$$

por tanto le asignamos el valor de 0 a un conjunto de integrales que no conocíamos su valor.

1.5. Metodos de Sumabilidad

Definición 1.8. *Un método de sumabilidad es una función f que le asigna un valor a una sucesión.*

1.5.1. Propiedades deseables de un método de sumabilidad

- Regularidad:

  sea la sucesión de números reales a_n si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ entonces $f(a_n) = A$.

- Linealidad:

  si $f(a_n) = A$ y $f(b_n) = B$ entonces $f(a_n + b_n) = A + B$

si un método de sumabilidad cumple las dos propiedades anteriores lo vamos a considerar un método de sumabilidad útil.

Ahora todo método de sumabilidad útil sera de gran importancia para nosotros ya que a las me va permitir asignarle valores a series divergentes pero a las convergentes me le va asignar los mismos valores.

Capítulo 2

Desarrollo

2.1. Sumabilidad de Cesàro

Definición 2.1. *Sea a_n una sucesion de números reales, (s_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum(a_n)$, se dice que la sucesión a_n es Cesàro 1 sumable si:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(s_n)}{n+1} \tag{2.1}$$

existe.

Ejemplo 2.1. Sea

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} \tag{2.2}$$

$$(a_0) = 1, \quad (a_1) = \frac{1}{2}, \quad (a_2) = \frac{1}{4},$$

$(\mathrm{a}_3) = \frac{1}{8}, \ldots$

(s_n) nos queda:

$$(s_0) = 1, \quad (s_1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad (s_2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \quad (s_3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \ldots$$

Sea

$$(l_n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(s_n)}{n+1}$$

nos queda definida de la siguiente forma:

$$(l_0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(l_1) = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$(l_2) = \frac{1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{3} = \frac{17}{12}$$

$$(l_3) = \frac{1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}}{4} = \frac{49}{32}$$

$$\vdots$$

luego la formula general de esta sucesión viene dada por:

$$(l_n) = \frac{n2^{n+1}+1}{2^n(n+1)}$$

ahora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n2^{n+1}+1}{2^n(n+1)} = 2$$

por tanto la sucesión a_n es Cesàro 1 sumable.

Teorema 2.1. Si la serie numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

es convergente a un número A entonces la sucesión $a_n$es Cesàro 1 sumable.

Demostración 2.1. Dado un ϵ arbitrario como $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k)$ es convergente existe un numero natural N_1 tal que

$$\|A - s_M\| < \frac{\epsilon}{2}$$

con $N_1 < M$, donde A es el limite de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k)$ y (s_k) es la sucesión de las sumas parciales de la misma serie. Por propiedad arquimediana para los números reales dado $\sum_{k=0}^{N_1-1}\|A - s_k\|$ y $\frac{\epsilon}{2}$ existe un numero natural que llamaremos O tal que:

$$\sum_{k=0}^{N_1-1}\|A - s_k\| < \frac{O*\epsilon}{2}$$

Luego

$$\frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} \|A - s_k\|}{O} < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $N = sup\{O, N_1\}$ luego también se cumple que

$$\frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} \|A - s_k\|}{N+1} < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.3}$$

Ahora $\|A - s_M\| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $N_! < M$ entonces

$$\sum_{k=N_1}^{N} \|A - s_k\| < \sum_{k=N_1}^{N} \frac{\epsilon}{2}$$

dividiendo a ambos lados por N+1

$$\frac{\sum_{k=N_1}^{N} \|A - s_k\|}{N+1} < \frac{\sum_{k=N_1}^{N+1} \frac{\epsilon}{2}}{N+1}$$

como $\sum_{k=N_1}^{N} \frac{\epsilon}{2} = [N - (N_1 - 1)] * \frac{\epsilon}{2}$

$$\frac{\sum_{k=N_1}^{N} \|A - s_k\|}{N+1} < \frac{[N - (N_1 - 1)]\frac{\epsilon}{2}}{N+1}$$

podemos decir que $\frac{[N-(N_1-1)]}{N+1} \leq 1$ por ende $\frac{[N-(N_1-1)]\frac{\epsilon}{2}}{N+1} < \frac{\epsilon}{2}$ y nos queda que:

$$\frac{\sum_{k=N_1}^{N} \|A - s_k\|}{N+1} < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.4}$$

y ahora sumando (1.4) y (1.5) nos queda

$$\frac{\sum_{k=0}^{N} \|A - s_k\|}{N+1} < \epsilon$$

NOTA: Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ la serie asociada a las sucesion a_n si esta serie es convergente entonces a_n es Cesàro 1 sumable pero el reciproco no necesariamente se cumple como vemos a continuación .

Ejemplo 2.2. Vamos a considerar la sucesión $a_n = (-1)^n$ y su serie

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^n$$

vamos a estudiar la convergencia de a_n sea s_n la sucesión de las sumas parciales,s_n queda definida de la siguiente forma:

$$s_n = 1 \text{ si n es par o cero}$$

$$s_n = 0 \text{ si n es impar}$$

luego si definimos dos subsucesiones

$$a_n = s_{2n}$$
$$b_n = s_{2n+1}$$

entonces :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

luego (s_n) tiene dos subsucesiones con limites diferentes por tanto la serie $\sum_{k=0}^{N} (-1)^n$ es divergente Ahora vamos a mostrara que es a_n Cesàro 1 sumable sea:

$$(l_n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_n)}{n+1}$$

$$(l_0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(l_1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(l_2) = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(l_3) = \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(l_4) = \frac{1+0+1+0+1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\vdots$$

la formula general viene dada por:

$$(l_n) = \frac{1}{2} \text{ si n es impar}$$

$$(l_n) = \frac{n+2}{2(n+1)} \text{ si n es par o cero}$$

converge a $\frac{1}{2}$

Teorema 2.2. El metodo de sumabilidad de Cèsaro-1 es un método de sumabilidad útil.

Demostración 2.2. Para que sea un método de sumabilidad útil debe ser regular y lineal,

- La regularidad quedo demostrada en el teorema (1.2).
- Linealidad

  sean a_n y b_n dos sucesiones reales Cesàro-1 sumables y sean s_{an} y s_{bn} las sucesiones de sus sumas parciales respectivamente entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{an}}{n+1} = A$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{bn}}{n+1} = B$$

ahora sea $c_n = a_n + b_n$ y sea $s_{cn} = s_{an} + s_{bn}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{cn}}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{an} + s_{bn}}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{an} + \sum_{n=0}^{\infty} s_{bn}}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{an}}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{bn}}{n+1} \\
&= A + B
\end{aligned}$$

2.2. Sumabilidad de Abel

Dada la serie $\sum(\mathrm{a}_n)$,definimos una función $A(x)$ con variable real x dada por la serie de potencias:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

donde $x \in (-1, 1)$

se dice que la serie $\sum(\mathrm{a}_n)$ es Abel-sumable y su suma es el numero real A si:

$$\lim_{x \to 1^-} A(x) = A$$

en cualquier otro caso se dice que la serie $\sum(a_n)$ no es Abel-sumable.

Teorema 2.3. Toda serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Cesàro-sumable es Abel sumable y su suma es la misma

Demostración 2.3. Tenemos

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_{n+1} x^n \end{aligned}$$

$$A(x) = \frac{(1-x)^2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (n) \sigma_n x^n \tag{2.5}$$

por otra parte como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n) x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

tenemos que:

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n) x^n \sigma = \sigma x \tag{2.6}$$

de (1.6) y (1.7)

$$x(A(x)-\sigma) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(\sigma_n - \sigma) x^n \tag{2.7}$$

Supongamos ahora que la serie es Cesàro 1 -sumable entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un N natural talque: $|\sigma_n - \sigma| < \epsilon$ para todo $n > N$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}(1-x^2)|\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} n(\sigma_n-\sigma)x^n| &< \epsilon(1-x)^2 \sum_{n=N_3+1}^{\infty} nx^n \\ &< \epsilon(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\ &= \epsilon x < x\end{aligned}$$

de (1.7) tenemos

$$x(A(x)-\sigma) \leq (1-x)^2 \sum_{1}^{N_\epsilon} n(\sigma_n-\sigma)x^n + (1-x)^2 \sum_{N_{\epsilon+1}}^{\infty} n(\sigma_n-\sigma)x^n$$

$$x(A(x)-\sigma) \leq (1-x)^2 \sum_{1}^{N_\epsilon} n(\sigma_n-\sigma)x^n + \epsilon \tag{2.8}$$

pero como,

$$(1-x)^2 \sum_{1}^{N_\epsilon} n(\sigma_n-\sigma)x^n \to 0$$

cuando

$$x \to 1^-$$

entonces la desigualdad (1.8) nos garantiza que

$$\lim_{x\to 1^-} x(A(x)-\epsilon) = 0$$

osea

$$\lim_{x\to 1^-} A(x) = \epsilon$$

con lo cual la serie es sumable según Abel.

Teorema 2.4. El metodo de sumabilidad de Abel es un método de sumabilidad útil.

Demostración 2.4. Regularidad

Por teorema (1.2) si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente entonces la sucesión a_n es Cèsaro-1 sumable y por teorema (1.3), si es Cèsaro-1 sumable es Abel sumable entonces por transitividad si la serie asociada a una sucesion es convergente la sucesion es abel sumable.

- Linealidad

sean a_n y b_n dos sucesiones reales Abel sumables entonces:

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B$$

ahora sea $c_{=a_n+b_n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \\
&= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + b_n x^n \\
&= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&= A + B
\end{aligned}$$

2.3. Series Cesàro n sumables

Definición 2.2. *Sea* (s_n) *la sucesión de las sumas parciales de la serie* $\sum(a_n)$ *y sea* $l_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}(s_n)}{n+1}$*, se dice que la serie* $\sum(a_n)$ *es Cesàro 2 sumable si:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(l_n)}{n+1} \tag{2.9}$$

existe.

Vamos a mirar si la siguiente serie es Cesàro 1 sumable $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n$

$$(a_0) = 0, \quad (a_1) = 1, \quad (a_2) = -2, \quad (a_3) = 3, \ldots$$

(s_n) nos queda:

$$(s_0) = 0, \quad (s_1) = 1 = 1, \quad (s_2) = 1 - 2 = -1, \quad (s_3) = 1 - 2 + 3 = 2, \ldots$$

,

Sea

$$(l_n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(s_n)}{n+1}$$

nos queda definida de la siguiente forma:

$$(l_0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$(l_1) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(l_2) = \frac{1-1}{3} = 0$$

$$(l_3) = \frac{0+2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(l_4) = \frac{2-2}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\vdots$$

si n es impar

$$l_n = \frac{1}{2}$$

si n es par

$$l_n = 0$$

luego el límite cuando n tiende a infinito de l_n no existe, por tanto esta serie no es Cesàro 1 sumable.

ahora vamos a mirar si la serie es Cesàro 2 sumable para eso debemos ver si el siguiente límite existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(l_n)}{n+1}. \tag{2.10}$$

sea

$$m_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}(l_n)}{n+1}$$

,

entonces

$$m_0 = l_0 = 0$$

$$m_1 = l_0 + l_1 = 0 + \frac{1}{4}$$

$$m_2 = l_0 + l_1 + l_2 = \frac{1}{6}$$

$$m_3 = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 = \frac{1}{4}$$

$$m_4 = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = \frac{1}{5}$$

$$m_5 = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = \frac{1}{4}$$

$$m_6 = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = \frac{3}{14}$$

$$\vdots$$

ahora si n es impar

$$m_n = \frac{1}{4}$$

si n es par

$$m_n = \frac{n}{4(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(m_n)}{n+1} = \frac{1}{4}$$

Por tanto la serie es Cesàro 2 sumable

Teorema 2.5. Si una serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$$

es Cesàro 1 sumable entonces es Cesàro 2 sumable .

Demostración 2.5. debemos mostrar que:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{l_1 + l_2 + \cdots}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots}{N+1}$$

como $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$ es Cesàro 1 sumable afirmamos que $\lim_{n\to\infty} l_n$ existe (donde $l_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}(s_n)}{n+1}$) entonces para todo ϵ arbitrario existe un numero natural N tal que

$$\|L - l_M\| < \epsilon$$

con $N < M$,de aquí:]

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{l_1 + l_2 + \cdots}{N+1} &= \lim_{k\to\infty} \frac{l_1 + \cdots + l_N}{N+k} + \frac{l_{N+1} + \cdots + l_{N+k}}{N+k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{l_1 + \cdots + l_N}{N+k} + \lim_{k\to\infty} \frac{l_{N+1} + \cdots + l_{N+k}}{N+k} \\
&= 0 + \lim_{k\to\infty} \frac{l_{N+1} + \cdots + l_{N+k}}{N+k}
\end{aligned}$$

como

$$\|L - l_M\| < \epsilon$$

,

$$A - \epsilon = \lim_{k\to\infty} \frac{k(A-\epsilon)}{N+k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{l_{N+1} + \cdots + l_{N+k}}{N+k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{k(A+\epsilon)}{N+k} = L + \epsilon$$

Ahora sea $l_{j+1} = L - \sum_{n=1}^{j-1} a_n$

Definimos $t_N = \sum_{n_1}^{j-1} a_n$ entonces $t_N = s_{N+j}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{t_1 + t_2 \cdots}{N} &= \lim_{N\to\infty} \frac{s_{j+1} + s_{j+2} \cdots s_{j+N}}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N+j}{N} * \frac{s_1 + s_2 \cdots s_N}{N+j} - \frac{s_1 + s_2 \cdots s_j}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{s_1 + s_2 \cdots s_N}{N}
\end{aligned}$$

Teorema 2.6. Si una serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)$$

es Cesàro 1 sumable entonces es Cesàro n sumable .

Demostración 2.6. procedemos por inducción para n=2 y queda demostrado por teorema anterior.

suponemos que es cierto para $n = k$ luego usamos el teorema anterior usando como hipótesis en lugar de que es Cesàro 1 sumable que es Cesàro k sumable y queda demostrado para $n = k + 1$

Como vimos en el ejemplo de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ el reciproco es falso.

Capítulo 3

Conclusiones

Los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel son muy importantes en el sentido de que cualquier serie convergente es también sumable.

Al empezar el capítulo 1 calculamos algunos límites de series divergentes haciendo manipulaciones algebraicas, el inconveniente de estas es que le podemos asignar diferentes números a la misma serie por ejemplo a la serie $1-1+1-1\cdots$ le asignamos el numero $\frac{1}{2}$ pero haciendo una manipulación algebraica diferente.

Sea

$$\begin{aligned}
R &= 1-1+1-1+1-1+1-1\cdots \\
&= 1+1-1-1+1+1-1-1\cdots \\
&= 2-1-1+1+1-1-1\cdots \\
&= 2+1-1+1-1+1-1\cdots \\
&= 2+(1-(1-1+1-1+1\cdots)) \\
&= 2+1-(1-1+1-1+1\cdots)) \\
&= 3-(R) \\
2R &= 3 \\
R &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ahora nos dio un resultado distinto. Es decir le asignamos dos números diferentes, pero con los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel si una serie divergente le asignamos un valor este valor es único.

Bibliografía

[1] BRYDEN CAIS, *Divergent Series: why* $1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}$, University of Michigan, 2004.

[2] YU TAKEUCHI, *Funciones armónicas en el círculo*, Revista Integración, Departamento de Matemáticas UIS, Vol 4, 1986.

[3] GODFREY H. HARDY, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[4] WALTER RUDIN, *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, México, 1980.