



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

# LA HERRADURA DE SMALE Y EL SISTEMA TERNARIO

Brayhan Esthig Fajardo Ovalle

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Matemáticas, Facultad de Ciencia y Educación  
Bogotá, Colombia  
2019

# LA HERRADURA DE SMALE Y EL SISTEMA TERNARIO

Brayhan Esthig Fajardo Ovalle

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:  
**Matemático**

Director:  
Carlos Orlando Ochoa Castillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Facultad de Ciencia y Educación  
Bogotá, Colombia



”Las matemáticas puras son, en su forma,  
la poesía de las ideas lógicas.”  
**Albert Einstein**

# Agradecimientos

Gracias a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas que me abrió las puertas me recibió como en un segundo hogar; que no fue solo un lugar donde pude adquirir conocimiento sino que me permitió crecer como ser humano, conocer personas espléndidas que procuraron siempre mi bien personal y de formación académica.

Quiero extender un agradecimiento a todos los profesores que influyeron en mi formación académica, en especial al profesor Carlos Orlando Ochoa Castillo, quien fue más que un director de este trabajo de grado. A quien considero un ser de una calidad humana excepcional, atento y a disposición, siempre con su grata amabilidad e historias que instigan a ir mas allá de solo oirlas y reflexionar; también aprendí que una persona vale más por su humanidad y humildad que por lo que posee.

Gracias a mi familia, mis padres y hermana, quienes siempre tuvieron fe en mí. Con su apoyo, confianza y paciencia, fueron pilares fundamentales que me permitieron cumplir el sueño de poder culminar mis estudios en esta gran institución, mi amada Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

# Introducción

La teoría de los sistemas dinámicos discretos estudia el comportamiento de las iteraciones de una función continua  $f$  y muestra una evolución a partir de variaciones en las condiciones iniciales.

La herradura de Smale exhibe el comportamiento caótico del oscilador de Van Der Pol, que simplemente demuestra la estabilidad estructural del oscilador. Aquí se entiende el caos a través de la definición de [Devaney]: la función debe tener una órbita densa, puntos periódicos densos y sensibilidad a las condiciones iniciales.

Se busca exhibir un problema bidimensional para la función que genera la herradura de Smale, el cual se resuelve utilizando una función de almacenamiento unidimensional. También se estudia la dinámica simbólica que surge naturalmente del uso de la representación ternaria de números (Ver [2]).

# Indice de figuras

3.1.	La función tienda en el intervalo $[0,1]$ . . . . .	16
3.2.	Asignación de intervalos en $[0,1]$ bajo $T, T^2, T^3$ . . . . .	17
4.1.	La herradura de Smale actuando bajo el cuadrado unidad . . . . .	25
5.1.	Efecto de $\overline{H} : (x, y) \rightarrow (X, Y)$ en los dígitos . . . . .	29
5.2.	Iteración de 4 tiras verticales . . . . .	29
5.3.	Efecto de $\overline{H}^2 : (x, y) \mapsto (X, Y)$ en los dígitos . . . . .	30
5.4.	Efecto de $\overline{H}^3 : (x, y) \mapsto (X, Y)$ en los dígitos . . . . .	31

# Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vi
Lista de figuras	vii
<b>1.</b>	<b>10</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	10
1.2. Justificación . . . . .	10
1.3. Objetivos . . . . .	11
1.3.1. Objetivo General . . . . .	11
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	11
<b>2. Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1. Sistema dinámico . . . . .	12
2.2. Evolución discreta . . . . .	13
2.3. Punto fijo . . . . .	13
2.4. Punto periódico . . . . .	13
2.5. Órbita periódica . . . . .	13
2.6. Topológicamente transitivo . . . . .	14
2.7. Dependencia sensible . . . . .	14
2.8. Función caótica . . . . .	14
2.9. Conjunto de Cantor . . . . .	14
2.9.1. Construcción geométrica . . . . .	15
<b>3. Una función tienda <math>T</math></b>	<b>16</b>
3.1. Dinámica de $T$ y sistema ternario . . . . .	17
3.2. $\overline{T}$ y el caos . . . . .	21
<b>4. La Herradura</b>	<b>24</b>
4.1. Herradura de Smale . . . . .	24



<b>5. Motivación geométrica</b>	<b>28</b>
5.1. Primera iteración . . . . .	28
5.2. Segunda iteración . . . . .	29
5.3. Tercera iteración . . . . .	30
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>

# Capítulo 1

## 1.1. Planteamiento del problema

¿Es posible generalizar la función herradura  $H(x, y)$  para obtener una expresión análoga para las iteraciones de la función herradura?

## 1.2. Justificación

En 1967 el matemático *Smale Steven*, creó en Brasil *La herradura de Smale*, la cual tomó como objeto de estudio las funciones caóticas vinculando la dinámica simbólica y generando una variedad importante de sistemas dinámicos.

Así mismo, se evidencia la existencia de un conjunto de Cantor en la función continua  $T$ , la cual es una función restringida de  $\Lambda$  en  $\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es un subconjunto del intervalo  $[0, 1]$ .

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General

Estudiar el artículo [2] *Smale's Horseshoe Map Via Ternary Numbers* de Banks J. and Dragan V.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Valorar los elementos teóricos que intervienen en el artículo *Smale's Horseshoe Map Via Ternary Numbers*.
2. Mostrar la dinámica de la función  $\bar{T}$  y el sistema ternario.
3. Identificar el comportamiento geométrico de la función herradura.

## Capítulo 2

# Preliminares

A continuación se presentan algunos conceptos básicos de la topología y sistemas dinámicos que son utilizados en el desarrollo del presente trabajo.

### 2.1. Sistema dinámico

Un sistema dinámico es una terna  $(E, G, f)$  donde  $E$  es un espacio de fases,  $G$  es un semigrupo de escalares o conjunto de tiempo y  $f$  es el flujo del sistema; la función  $f$  es una aplicación de  $G \times E$  en  $E$ , con las siguientes propiedades:

- $f$  es una aplicación continua
- $f(0, x) = x$  para todo  $x \in E$
- $f(t, f(s, x)) = f(t + s, x)$  para todo  $t, s \in G$  y todo  $x \in E$

Si  $G$  es un subconjunto de los números enteros, se tiene un sistema dinámico discreto.

## 2.2. Evolución discreta

Un sistema dinámico de evolución discreta surge al iterar funciones que para posteriores estudios, admiten derivada. Es decir, si  $R$  es una función diferenciable se define la  $n$ -ésima iterada de  $R$  como:

$$R^n(z) = (R \circ R \circ R \dots \circ R)(z).$$

## 2.3. Punto fijo

Sea  $J$  un conjunto y una función  $f : J \rightarrow J$ , el punto  $x \in J$  es un punto fijo para  $f$  si  $f(x) = x$  (ver [3]).

## 2.4. Punto periódico

Sea  $J$  un conjunto y una función  $f : J \rightarrow J$ , el punto  $x$  es un punto periódico de periodo  $n$  si  $f^n(x) = x$  (ver [3]).

## 2.5. Órbita periódica

El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una órbita periódica (Ver [3]).

En gran parte del trabajo se estudian las funciones continuas definidas en el intervalo  $[0, 1]$ ; este intervalo tiene la topología inducida de la topología usual en  $\mathbb{R}$ .

## 2.6. Topológicamente transitivo

Sea  $J$  un espacio métrico y  $f$  una función continua  $f : J \rightarrow J$ ; se dice que  $f$  es topológicamente transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos  $U, V \subset J$  existe  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$  (ver [3]).

## 2.7. Dependencia sensible

Sea  $J$  un espacio métrico; la función continua  $f : J \rightarrow J$  tiene dependencia sensible bajo las condiciones iniciales si existe  $\delta > 0$  tal que para algún  $x \in J$  y alguna vecindad  $N$  de  $x$  existe  $y \in N$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$  (ver [3]).

## 2.8. Función caótica

Este concepto se toma de [3]; Sea  $J$  un espacio métrico, una función continua  $f : J \rightarrow J$ , se dice caótica en  $J$  si

- a. El conjunto de puntos periódicos es denso.
- b. Existe una órbita densa.
- c. Hay dependencia sensible bajo condiciones iniciales.

## 2.9. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor (ver [11]), fue propuesto por George Cantor en 1883 [11]. Se exhiben aquí, dos formas de obtener o construir el conjunto de Cantor, una geométrica y la otra por expansión ternaria.

### 2.9.1. Construcción geométrica

Tome el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ; se divide en partes iguales y se elimina el tercio del medio, es decir quitándole el intervalo  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Luego se elimina de los dos segmentos restantes sus respectivos tercios. Es decir, se obtienen los conjuntos,

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right];$$

se continua así sucesivamente y se obtiene una sucesión de conjuntos compactos  $C_k$  tales que

1.  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \dots$
2.  $C_k$  es la unión de  $2^k$  intervalos, cada uno de longitud  $\frac{1}{3^k}$ .

Por lo cual, el conjunto de Cantor es

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

donde

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j^k \quad \text{con} \quad I_j^k = \left[\frac{j}{3^k}, \frac{j+1}{3^k}\right], \quad j \leq k.$$

## Capítulo 3

# Una función tienda $T$

Sea la función tienda, definida como  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; tomando

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

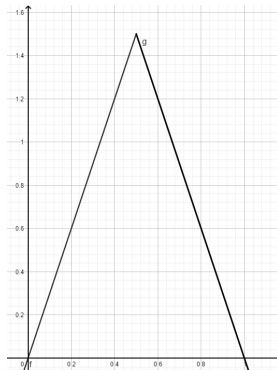


Figura 3.1: La función tienda en el intervalo  $[0,1]$

Se estudia la dinámica de la función tienda  $T$  en el conjunto  $[0, 1]$  dado que las iteraciones mediante  $T$  permanecen en  $[0, 1]$ . En el caso del conjunto  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ , los puntos  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  al iterarlos mediante la función tienda  $T$  se aproximan a  $-\infty$ .



### 3.1. Dinámica de $T$ y sistema ternario

Se estudia la dinámica de la función tienda  $T$  en el conjunto  $\Lambda$ , el cual es un conjunto que consta de todos los puntos  $x$  cuyas iteraciones permanecen en el intervalo  $[0, 1]$ .

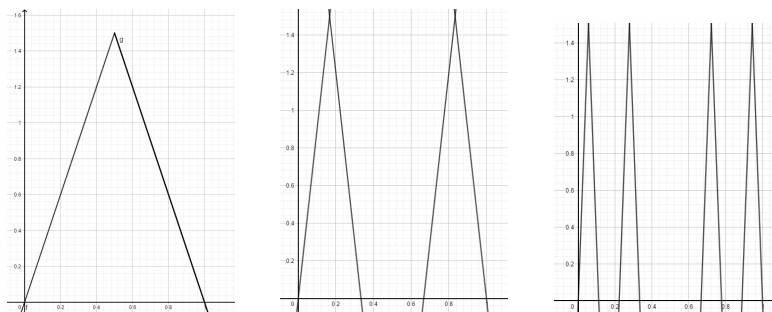


Figura 3.2: Asignación de intervalos en  $[0,1]$  bajo  $T, T^2, T^3$ .

La Figura anterior, sugiere la manera de obtener el conjunto  $\Lambda$ , que es como sigue.

Primero se elimina el tercio medio de  $[0, 1]$ , luego se elimina el tercio medio de los intervalos que quedan de la primera iteración, es decir, se suprime el tercio medio de  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$  y así sucesivamente. Esta es la construcción clásica del conjunto de Cantor.

Por otro lado el conjunto de Cantor se caracteriza por estar compuesto de los números en el intervalo  $[0, 1]$ , cuyas expansiones ternarias demandan los dígitos 0, 1 y 2. Ahora se eligen las representaciones que contienen solo 0 y 2, pues estas son las que admiten iteración, así seguir dentro del intervalo  $[0, 1]$ .

Sea  $x = 0.x_1x_2x_3\dots$  un número ternario de Cantor, se define la notación  $\bar{x}_i = 2 - x_i$ , la cual al multiplicarla por 3 desplaza  $x$  un dígito a la izquierda; de manera equivalente al dividir por 3, se desplaza la coma un dígito a la derecha y se obtiene  $3 = 2,222\dots_3$ .

En efecto,  $3 = 2,222\dots_3$  es un ternario, puesto que

$$\begin{aligned}
 2,222\dots_3 &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{3}{2} \right) \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Así, se define la función  $\bar{T} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ , como sigue:

$$\bar{T}(x) = \begin{cases} x_1.x_2x_3x_4\dots & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \bar{x}_1.\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\dots & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Note que por la definición de  $\bar{x}_i$  se obtiene  $\bar{1} = 1$ ,  $\bar{0} = 2$  y  $\bar{2} = 0$ . Por tanto,  $\bar{T}(x) \notin [0, 1]$  si  $x_1 = 1$ ; en consecuencia se obtiene:

$$\bar{T}(x) = \begin{cases} 0.x_2x_3x_4\dots & \text{si } x_1 = 0 \\ 0.\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\dots & \text{si } x_1 = 2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Por lo tanto  $\bar{T}(x) \in [0, 1]$  si y solamente si  $x_1 = 0$  o  $x_1 = 2$ .

**Lema 1** Para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{T}^i(x) \in [0, 1]$  si y solamente si  $x_i = 0$  o  $x_i = 2$ .

Prueba.

El resultado para  $n = 1$  es trivial por (3.1). Se supone que se satisface el teorema para  $n \geq 1$ , por lo tanto,

$$\bar{T}^{n+1}(x) = \bar{T}(\bar{T}^n(x))$$

$$= \begin{cases} \bar{T}(0.x_{n+1}x_{n+2}\dots) & \text{si } x_n = 0 \\ \bar{T}(0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2}\dots) & \text{si } x_n = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.x_{n+2}x_{n+3}\dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+2} = 0) \text{ o } (x_n = 2, x_{n+1} = 0) \\ 0.\bar{x}_{n+2}\bar{x}_{n+3}\dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+2} = 2) \text{ o } (x_n = 2, x_{n+1} = 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.x_{n+2}x_{n+3}\dots & \text{si } x_{n+1} = 0 \\ 0.\bar{x}_{n+2}\bar{x}_{n+3}\dots & \text{si } x_{n+1} = 2. \end{cases}$$

Así, el resultado se sigue por inducción matemática.

El siguiente Teorema nos permite estudiar el comportamiento de  $\bar{T}$  en el conjunto  $\Lambda$ .

**Teorema 3.1.1**

$$\bar{T}^n(0.x_1x_2\dots) = \begin{cases} 0.x_{n+1}x_{n+2}\dots & \text{si } x_n = 0 \\ 0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2}\dots & \text{si } x_n = 2 \end{cases}$$

Prueba

El resultado para  $n = 1$  es trivial por (3.1). Se supone que se satisface el teorema para  $n \geq 1$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{T}^{n+1}(0.x_1x_2\dots) &= \bar{T}(\bar{T}^n(0.x_1x_2\dots)) \\ &= \begin{cases} \bar{T}(0.x_{n+1}x_{n+2}\dots) & \text{si } x_n = 0 \\ \bar{T}(0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2}\dots) & \text{si } x_n = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.x_{n+2}x_{n+3}\dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+2} = 0) \text{ o } (x_n = 2, x_{n+1} = 0) \\ 0.\bar{x}_{n+2}\bar{x}_{n+3}\dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+2} = 2) \text{ o } (x_n = 2, x_{n+1} = 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.x_{n+2}x_{n+3}\dots & \text{si } x_{n+1} = 0 \\ 0.\bar{x}_{n+2}\bar{x}_{n+3}\dots & \text{si } x_{n+1} = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue por inducción matemática.

### 3.2. $\bar{T}$ y el caos

El siguiente resultado, muestra que el caos aparece en ambientes aparentemente sencillos y de manera particular se evidencia en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Teorema 3.2.1**  $\bar{T}$  es caótica

Prueba

Siguiendo a [3], se verifica que la función  $\bar{T}$  satisface lo siguiente:

- El conjunto de puntos periódicos es denso.
- Existe una órbita densa.
- Hay dependencia sensible bajo condiciones iniciales.

a. Un punto  $x \in \Lambda$  de período  $n$  es un punto el cual satisface la ecuación  $\bar{T}^n(x) = x$ . En ternario, por el Lema 1, se tiene:

$$0.x_1x_2x_3\dots = \begin{cases} 0.x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\dots & \text{si } x_n = 0 \\ 0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2}\bar{x}_{n+3}\dots & \text{si } x_n = 2 \end{cases}$$

Así los puntos de periodo  $n$  son de la forma

$$x = 0.x_1x_2x_3\dots x_{n-1}0 \quad (3.2)$$

o

$$x = 0.\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\dots\bar{x}_{n-1}}_2\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\dots\bar{x}_{n-1}0 \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) indica que el bloque de dígitos puede repetirse indefinidamente. Para mostrar que el conjunto de puntos periódicos es denso en  $\Lambda$ , se elige un ternario  $p = 0.p_1p_2p_3\dots \in \Lambda$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y tome  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $3^{-k} < \epsilon$ ; se toma un punto periódico (cualquiera)

$$x = 0.\underbrace{p_1 p_2 p_3 \dots p_k}_k 0$$

por lo tanto

$$|x - p| \leq 3^{-k} < \epsilon.$$

b. Sea  $x = 0.A_1 A_2 A_3 \dots$ , donde cada  $A_k$  es un bloque de combinaciones de dígitos 0's y 2's de longitud  $k$ , por ejemplo,

$$A_2 = 000\ 002\ 020\ 022.$$

Ahora, sea  $p = 0.p_1 p_2 p_3 \dots \in \Lambda$ . Sea  $\epsilon > 0$  y tome  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $3^{-k} < \epsilon$ .

La sucesión finita de dígitos  $0.p_1 p_2 p_3 \dots p_k$  ocurre en el bloque  $A_k$ . Debe recordarse que en  $a.$ , un punto  $x \in \Lambda$  de período  $n$  es un punto el cual satisface la ecuación  $\overline{T}^n(x) = x$ ; así suponga que la sucesión empieza en el  $m$ -ésimo dígito de  $p$ , así que  $p_m = 0$ , por el *Lema 1*

$$T^m(x) = 0.p_1 p_2 p_3 \dots p_k \dots$$

así en  $T^m - p$  los primeros  $k$  dígitos son 0, por lo cual  $|T^m - p| \leq 3^{-k}$ . Es decir, la órbita de  $x$  es densa.

c. Sea  $\delta = 1$ , considere  $x \in \Lambda$  y  $\epsilon > 0$ , por la propiedad arquimediana existe  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ , ahora se elige un punto  $y \neq x$ , tal que  $d(x, y) < \frac{1}{3^n}$ .

Esto significa que los primeros  $n + 1$  términos de  $x$  e  $y$  son los mismos; como  $x \neq y$  existe  $k > n$  tal que  $x_k \neq y_k$ , considere ahora los puntos  $T^k(x)$  y  $T^k(y)$ .

El primer término  $T^k(x)$  es  $x_k$  y el primer término de  $T^k(y)$  es  $y_k \neq x_k$ , por lo tanto la distancia entre estos dos puntos es:

$$\begin{aligned} d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_{i+k} - y_{i+k}|}{2^i} \\ &\geq \frac{|x_k - y_k|}{3^0} \\ &= 1 = \delta \end{aligned}$$

Por lo cual, se obtiene

$$d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \geq \delta$$

Así, en  $\bar{T}$  hay dependencia sensible bajo condiciones iniciales.

Por lo tanto,  $\bar{T}$  es caótica.

## Capítulo 4

# La Herradura

### 4.1. Herradura de Smale

Se estudia la dinámica de la función  $H$  en el conjunto  $\Gamma$  el cual consta de todos los puntos  $(x, y)$  cuyas iteraciones, tanto hacia adelante como hacia atrás, permanecen en el cuadrado unidad.

Al elegir el origen de estudio de la dinámica en la esquina inferior izquierda y realizar las iteraciones se obtiene la siguiente fórmula de  $H$  para cualquier  $(x, y) \in \Gamma$ .

Sea la función herradura,  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Lambda \times \Lambda$ , definida como

$$H(x, y) = \begin{cases} \left( 3x, \frac{1}{3}y \right) & \text{si } x \in \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \\ \left( 3 - 3x, 1 - \frac{1}{3}y \right) & \text{si } x \in \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \end{cases}$$

No se proporciona una fórmula para los valores  $(x, y) \in H$  que estén fuera del cuadrado unidad, puesto que estos valores, al realizarse una o más iteraciones, estarán fuera del cuadrado de  $[0, 1] \times [0, 1]$ , el cual es el objeto de estudio delimitado. Dado que al iterarse  $H$   $n$ -veces, estas permanecerán fuera del cuadrado unidad, como lo que se busca es exhibir el comportamiento de la función herradura en el cuadrado unidad los valores  $(x, y) \notin H$  no será objeto de estudio de la dinámica de la función herradura.



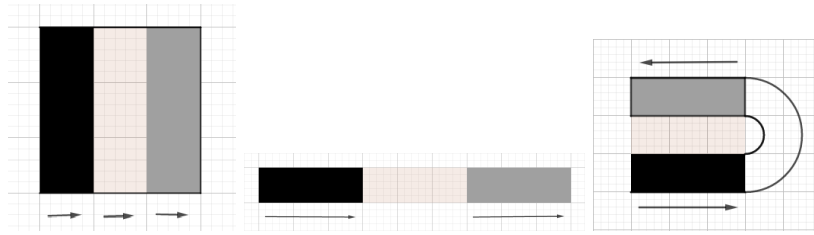


Figura 4.1: La herradura de Smale actuando bajo el cuadrado unidad

La primera componente de  $H(x, y)$  es la función tienda  $T(x)$ . Así, se usa la fórmula anterior para encontrar la función inversa de  $H$ , la cual se encuentra por medio de  $H^{-1}(x, y)$ . Ésta coincide con la segunda componente  $T(y)$ , por lo cual  $H(x, y) = (T(x), T(y))$ .

Por tanto es necesario que para que dicha iteración en  $H(x, y)$  permanezca en el cuadrado unidad, la expansión ternaria de  $x$  e  $y$  contenga solo 0 y 2 de la representación de Cantor, con ello evitar que las iteraciones de  $H(x, y)$  tiendan a  $-\infty$ .

Lo anterior puede darse por hecho, puesto que la primera componente de  $H(x, y)$  está determinada por la función tienda  $T$ , entonces su dominio es  $[0, 1] \times [0, 1]$ , dado que el interés es exhibir el comportamiento de  $H(x, y)$  en el cuadrado unidad. Además el rango de  $H(x, y)$  está determinado por  $\Lambda \times \Lambda$ . Dado que al tomar un elemento  $(x, y)$  en dicho dominio, este punto es iterado mediante la función  $H(x, y)$  la cual tiene como rango  $\Lambda \times \Lambda$ , con ello se trabaja en un conjunto que admite la representación de Cantor.

Además como se explicó previamente en el *Teorema 1* si está contenida en 1 en la expansión ternaria de Cantor, entonces  $H(x) \notin [0, 1] \times [0, 1]$ . Por lo que el conjunto  $\Gamma$  de todos los puntos cuyas iteraciones hacia adelante y hacia atrás (Función inversa) permanecen en el cuadrado de la unidad es  $\Lambda \times \Lambda$

Sea  $y = 0.y_1y_2\dots_3$ , como la división entre 3 de  $y$  desplaza  $y$  un dígito a la derecha, además se tiene que  $1 = 0,222\dots_3$  un elemento del conjunto de Cantor.  
 En efecto,  $1 = 0,222\dots_3$  es un elemento del conjunto de Cantor, puesto que

$$\begin{aligned}
 0,222\dots_3 &= 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^0} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{3^0} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^0} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{1}{2} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Así,  $\bar{H} : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda \times \Lambda$ , donde:

$$\bar{H}(x, y) = \begin{cases} (0.x_2x_3x_4\dots, 0.0y_1y_2\dots) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ (0.\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\dots, 0.2\bar{y}_1\bar{y}_2\dots) & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Ya que  $x_1 = 0$  si  $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$  y  $x_1 = 2$  si  $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , así se puede escribir

$$\bar{H}(x, y) = \begin{cases} (0.x_2x_3x_4\dots, 0.0y_1y_2\dots) & \text{si } x = 0 \\ (0.\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\dots, 0.2\bar{y}_1\bar{y}_2\dots) & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

El objetivo es generalizar la expresión 4.1 para obtener una fórmula análoga para las iteraciones de  $H(x, y)$ .

## Capítulo 5

# Motivación geométrica

Se busca mostrar una generalización de la expresión 4.1 la cual proviene de la descripción geométrica de la Función Herradura. Usando una visión geométrica, se evidencian las primeras tres iteraciones para sugerir una expresión general para  $\overline{H}^n(x, y)$ , la cual posteriormente se muestra usando la inducción matemática.

### 5.1. Primera iteración

La Figura 4.1 muestra la asignación de  $\overline{H}(x, y)$  a las dos franjas verticales sombreadas, las cuales tienen un ancho de  $\frac{1}{3}$  a las franjas horizontales de altura  $\frac{1}{3}$ . Además, la Figura 5.1 muestra que en la expresión 4.1, el primer dígito de la segunda componente de  $\overline{H}(x, y)$  es  $x_1$ .

Ahora, sea  $X = 0.x_1x_2x_3\dots$  si  $x_1 = 0$  o  $x_1 = 2$ , entonces  $Y$ , será así:

$$X = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases} \longrightarrow Y = \begin{cases} 0,0\dots \\ 0,2\dots \end{cases} = 0.x_1\dots$$

El uso de la descripción geométrica de la función dada en la Figura 4.1 muestra dos veces que  $\overline{H}^2$  actúa sobre las franjas verticales como se indica en la Figura 5.1.

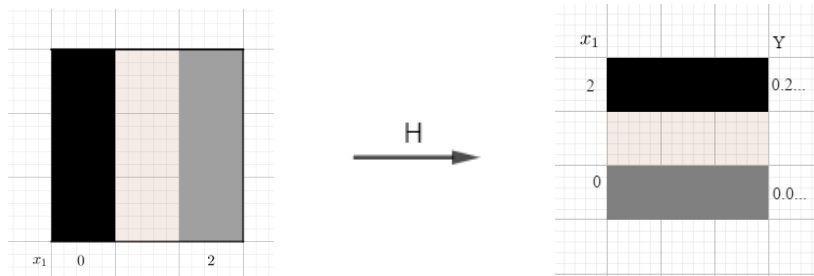


Figura 5.1: Efecto de  $\overline{H} : (x, y) \rightarrow (X, Y)$  en los dígitos

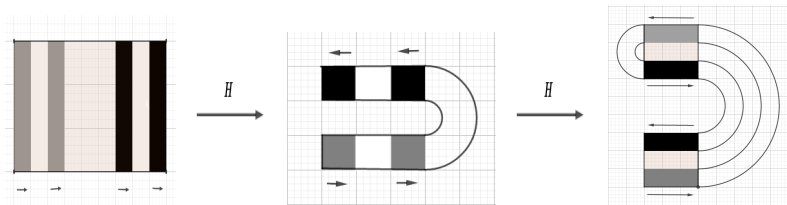


Figura 5.2: Iteración de 4 tiras verticales

Como se evidencia en la Figura 5.2, se utiliza función herradura actuando en 4 tiras verticales, e iterando 2 veces para obtener la Figura 5.2. Los puntos que se asignan fuera del cuadrado unidad son aquellos puntos que provienen de los tercios medios de las tiras verticales observadas en la Figura 5.1 y, por lo tanto, dichos puntos se suprimen.

Ahora se usa la geometría de la segunda iteración para obtener un diagrama para  $H^2$  análogo a la Figura 5.1 para  $\overline{H}$ .

## 5.2. Segunda iteración

Dada la Figura 5.2,  $\overline{H}^2$  asigna las cuatro franjas verticales las cuales tienen un ancho de  $\frac{1}{9}$  a franjas horizontales de altura  $\frac{1}{9}$ , dado que la función Herradura, deja invariante sus tamaños.

La Figura 5.3 muestra que el segundo dígito de la segunda componente de  $\overline{H}^2(x, y)$  es  $x_2$ , además sugiere cómo obtener dicho dígito a partir del dígito  $x_1$  conocido previamente.

De manera análoga a la primera iteración, sea  $X = 0.x_1x_2x_3 \dots$  si  $x_2 = 0$  o  $x_2 = 2$ , entonces  $Y$ , será así:

$$X = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow Y = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} = x_2$$

El primer dígito de  $Y$  es  $x_1$  si  $x_2 = 0$  pero  $\bar{x}_1$  si  $x_2 = 2$ .

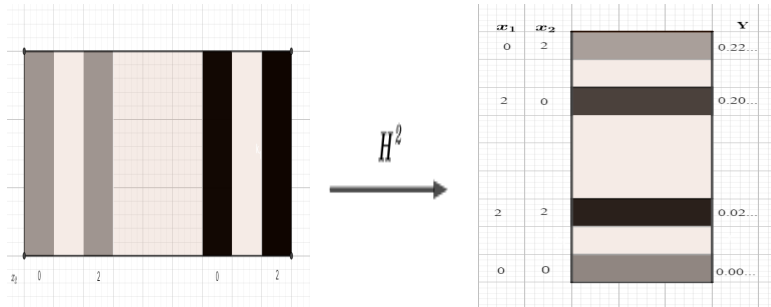


Figura 5.3: Efecto de  $\overline{H}^2 : (x, y) \mapsto (X, Y)$  en los dígitos

Por lo cual se está evidenciando un patrón general, el cual parece estar surgiendo aquí. Para aclarar dicho patrón, vease el efecto de  $\overline{H}^3$  en los dígitos.

### 5.3. Tercera iteración

Una vez más, se debe restringir la imagen de  $\overline{H}^3$  para que esta se encuentre en el cuadrado de la unidad, lo cual significa que se eliminan los tercios medios en las franjas verticales anteriores en el dominio de  $\overline{H}^2$ . Con lo anterior, se evidencia que habrán 8 tiras verticales en el dominio cada una con un ancho  $\frac{1}{27}$ , que bajo  $H^3$  serán asignadas a ocho tiras horizontales de altura  $\frac{1}{27}$ , puesto que la Función Herradura preserva sus distancias.

La Figura 5.4 muestra que el tercer dígito de la segunda componente de  $\overline{H}^3(x, y)$  es  $x_3$  y dicho dígito se puede obtener de los primeros dos dígitos de  $x_1$  y  $x_2$ .

De manera análoga a las iteraciones anteriores, sea  $X = 0.x_1x_2x_3\dots$  si  $x_3 = 0$  o  $x_3 = 2$ , entonces  $Y$ , será así:

$$X = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow Y = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} = x_3$$

Los primeros dos dígitos de  $Y$  son  $x_2x_1$  si  $x_3 = 0$  pero  $\overline{x_2 \cdot \overline{x_1}}$  si  $x_3 = 2$ .

Por lo tanto, para  $n = 1, 2, 3$ , se ha encontrado que los primeros  $n$  dígitos de  $Y$ , la cual es la segunda componente de  $\overline{H}(x, y)$ , se escribe en términos de los primeros  $n$  dígitos de  $X$ .

Estos resultados, junto con 4.1, motivan el siguiente Lema para las iteraciones de la Función Herradura.

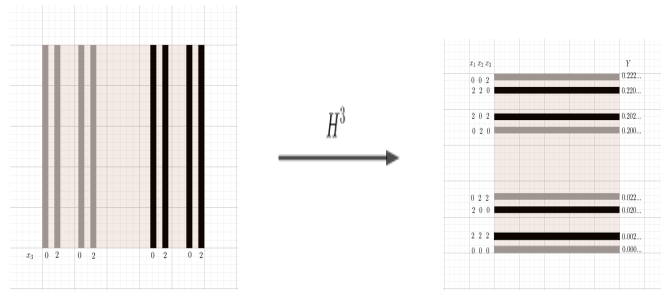


Figura 5.4: Efecto de  $\overline{H}^3 : (x, y) \mapsto (X, Y)$  en los dígitos

**Lema 2**

$$\overline{H}^n(x, y) = \begin{cases} (0.x_{n+1}x_{n+2} \dots, 0.x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_ny_1y_n) & \text{si } x_n = 0 \\ (0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2} \dots, 0.\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots \bar{x}_1\bar{x}_n\bar{y}_1\bar{y}_n) & \text{si } x_n = 2 \end{cases}$$

Prueba

La primera componente de  $\overline{H}(x, y)$  es la Función Tienda  $T$ , se obtiene así la fórmula que muestra la primera componente de  $\overline{H}(x, y)$  la cual es válida por Lema 1. Ahora se denota la segunda componente de  $\overline{H}^n(x, y)$  por  $S_n$  y así queda por demostrar que

$$S_n(0.x_1x_2x_3 \dots, 0.y_1y_2y_3 \dots) = \begin{cases} 0.x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_ny_1y_2 \dots & \text{si } x_n = 0 \\ 0.\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots \bar{x}_1x_n\bar{y}_1\bar{y}_2 \dots & \text{si } x_n = 2 \end{cases}$$

El resultado para  $n = 1$  se tiene por definición 4.1 de  $H$ . Se supone que se satisface el Lema para  $n \geq 1$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x, y) &= S(T^n(0.x_1x_2 \dots, S_n(0.x_1x_2x_3 \dots, 0.y_1y_2y_3 \dots))) \\ &= \begin{cases} S(0.x_{n+1}x_{n+2} \dots, 0.x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_ny_1y_2 \dots) & \text{si } x_n = 0 \\ S(0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2} \dots, 0.\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots \bar{x}_1x_n\bar{y}_1\bar{y}_2 \dots) & \text{si } x_n = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.x_{n+1}x_{n-1} \dots x_1x_ny_1 \dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+1} = 0) \\ 0.x_{n+1}\bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_1\bar{x}_n\bar{y}_1 \dots & \text{si } (x_n = 0, x_{n+1} = 2) \\ 0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_1x_n\bar{y}_1 \dots & \text{si } (x_n = 2, x_{n+1} = 2) \\ 0.\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n-1} \dots x_1\bar{x}_ny_1 \dots & \text{si } (x_n = 2, x_{n+1} = 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.x_nx_{n-1} \dots x_1x_{n+1}y_1 \dots & \text{si } x_{n+1} = 0 \\ 0.\bar{x}_n\bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_1\bar{x}_{n+1}\bar{y}_1 \dots & \text{si } x_{n+1} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue por inducción matemática.



El Lema 2 evidencia que la función herradura es una función caótica, esta se obtiene de forma análoga a lo presentada en el Capítulo 3: la función tienda es caótica. Además el siguiente resultado, muestra que el caos aparece en ambientes aparentemente sencillos y de manera particular se evidencia en el intervalo  $[0, 1] \times [0, 1]$  por medio de la función herradura

**Teorema 5.3.1** *H es caótica*

Prueba

Siguiendo a [3], se verifica que la función  $\overline{H}$  satisface:

- a. El conjunto de puntos periódicos es denso.
- b. Existe una órbita densa.
- c. Hay dependencia sensible bajo condiciones iniciales.

a. Como la acción de la Función Herradura  $\overline{H}$  en la primera coordenada es simplemente la función Tienda  $\overline{T}$ , cualquier punto periódico  $(x, y)$  de  $\overline{H}$  de período  $n$  debe poder ser expresado como en (3.2) o (3.3). Usando la fórmula para  $\overline{H}^n$  obtenida del Lema 2 entonces se obtiene  $y$ . Por lo tanto, las coordenadas de los puntos periódicos son de la forma

$$x = 0.\underbrace{x_1x_2\dots x_{n-1}}0 \quad , \quad y = 0.\underbrace{x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1}0$$

o

$$x = 0.\underbrace{x_1x_2\dots x_{n-1}2\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{n-1}}0 \quad , \quad y = 0.\underbrace{\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2}\dots\bar{x}_12x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1}0$$

La ecuación anterior indica que el bloque de dígitos puede repetirse indefinidamente. Para mostrar que el conjunto de puntos periódicos es denso en  $\Gamma$ , se elige un ternario  $p = 0.p_1p_2p_3\dots \in \Gamma$  y  $q = 0.q_1q_2q_3\dots \in \Gamma$  de aquí que  $(p, q) \in \Gamma$

Sea  $\epsilon > 0$  y tome  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $3^{-r+1} < \epsilon$ , se toma un punto periódico (cualquiera)

$$x = 0.\underbrace{p_1 p_2 \dots p_r q_r q_{r-1} \dots q_1}_0, \quad y = 0.\underbrace{q_1 q_2 \dots q_r p_r p_{r-1} \dots p_1}_0.$$

Por lo tanto el punto  $(x, y)$  tiene periodo  $n = 2r + 1$ . Dado que  $x$  concuerda con  $p$  a  $r$  en lugares ternarios y de la misma manera  $y$  con  $q$ , resulta entonces que,  $\|(x, y) - (p, q)\| \leq 3^{-r} \sqrt{2} < \epsilon$ .

b. Sea  $x = 0.B_2 B_4 B_6 \dots$ , donde cada  $B_{2n}$  es un bloque que contiene todas las combinaciones de dígitos 0's y 2's de longitud  $2n$  de la forma

$$p_1 p_2 \dots p_n 0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

por ejemplo,

$$B_2 = 000 \ 002 \ 200 \ 202.$$

Ahora, sea  $y \in \Lambda$  cualquiera y se elige un ternario  $p = 0.p_1 p_2 p_3 \dots \in \Gamma$  y  $q = 0.q_1 q_2 q_3 \dots \in \Gamma$  de aquí que  $(p, q) \in \Gamma$ .

Tomando  $k \in \mathbb{N}$ , hay un bloque de la forma  $q_k q_{k-1} \dots q_1 0 p_1 p_2 \dots p_k$  en  $x$ , donde el cero medio es el  $n$ -ésimo dígito de  $x$ . Por *Lema 2*, se tiene

$$H^n(x, y) = (0.p_1 p_2 \dots p_k \dots, \ 0.q_1 q_2 \dots q_k \dots)$$

y así

$$\|\overline{H}^n(x, y) - (p, q)\| \leq 3^{-k} \sqrt{2}$$

Es decir, la órbita de  $(x, y)$  es densa.

c. La dependencia sensible bajo condiciones iniciales puede demostrarse a partir de los primeros principios o utilizando el resultado de [1].

Por lo tanto  $\overline{H}$  es Caótica.

## Capítulo 6

# Conclusiones

1. Uno de los principales objetivos del estudio de la función tienda y la función herradura es evidenciar el caos de  $\bar{T}$  y  $H$ , además de estudiar el comportamiento dinámico de cada una de estas.
2. Se logró exhibir el comportamiento geométrico de la función herradura obtenido a partir de la dinámica sobre  $H$  y con ello presentar algunas gráficas asociadas a las iteraciones de  $H$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
3. La dinámica de la función tienda  $T$  y la función herradura  $H$ , se obtiene por medio de la clásica construcción del conjunto de tercios medios de Cantor.
4. El caos puede aparecer en ámbitos aparentemente sencillos y de manera particular en los conjuntos  $[0, 1]$  y  $[0, 1] \times [0, 1]$ , respectivamente en la función tienda y en la función herradura.

# Bibliografía

- [1] J. BANKS, J. BROOKS, KAREL REKTORYS, G. CAIRNS, G. DAVIS, AND P. STACEY, *On Devaney's definition of chaos*, *Amer. Math. Australia* (1992), pp. 332-334.
- [2] J. BANKS AND V. DRAGAN, *Smale's horseshoes map via ternary numbers*, SIAM (1994), pp. 265-271.
- [3] R. L. DEVANEY: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading MA, Boston (1989).
- [4] J. GUCKENHEIMER AND P. J. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, in *Applied Mathematical Sciences* 42, Springer-Verlag, New York (1983).
- [5] H. W. LORENZ, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, in *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 334, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [6] H-O. PEITGEN, H. JORGENS, D. SAUPE, E. MALETSKY, T. PERCIANTE, AND L. YUNKER, *Fractals for the Classroom: Strategic Activities 2*, Springer-Verlag, New York (1992).
- [7] R. VARGAS, *Aspectos dinámicos y topológicos de la herradura de Smale*, España (2011).
- [8] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, *Bull Amer Math Soc*, USA (1967), pp. 747-817.

- [9] S. SMALE , *On how I got started in dynamical systems, The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York (1980).
- [10] S. WIGGINS, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York (1990)
- [11] B. MANDELBROT, *La geometría fractal de la naturaleza 1*. Tusquets Editores S.A, España (1997)