Hacia una labor conjunta en un contexto de segunda lengua (inglés): una experiencia con estudiantes de tercero de primaria en torno a secuencias de patrones.

Luis Gabriel González Cantor

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Bogotá, julio de 2020

Hacia una labor conjunta en un contexto de segunda lengua (inglés): una experiencia con estudiantes de tercero de primaria en torno a secuencias de patrones.

Luis Gabriel González Cantor
20182184016

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática

Director
Rodolfo Vergel Causado, Ph. D.

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Bogotá, julio de 2020

DEDICATORIA

A mis padres por ser mi bastón, la voz de apoyo y mis consejeros en todos los momentos de mi vida, a quienes les debo que hoy día sea profe de matemáticas.

A mi hermana, quien siempre ha sido un ejemplo de lucha a partir de las adversidades de la vida.

A mi sobrina que la amo con todo mi corazón.

AGRADECIMIENTOS

Al profe Rodolfo Vergel, por aceptar el reto y darme a conocer esta interesante teoría, por su tiempo, dedicación, apoyo y constantes palabras de ánimo para continuar en el proceso de escritura y lectura.

A la profesora Martha Vidal, por enseñarme a disfrutar esta hermosa profesión, por enseñarme a disfrutar del arte, "que es algo delicioso", infinitas gracias.

Al Liceo de Colombia Bilingüe, a la rectora Carolina Correa, al vicerrector Óscar Correa y a la jefe de ciclo de primaria Elisa Sierra, por permitirme aplicar las tareas y la teoría con los estudiantes, cuando parecía imposible desarrollar la tesis en el contexto deseado.

A los estudiantes del grado 3A, "my dear students", por su compromiso, apoyo y constante trabajo en cada una de las sesiones desarrolladas.

A los padres del grado 3A del liceo, los cuales con la mayor amabilidad me colaboraron para poder aplicar las tareas con sus hijos.

A los profesores de la Maestría por sus observaciones, aportes y constantes reflexiones en los seminarios y sesiones extras desarrolladas.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN **1**

CAPÍTULO 1
LA INVESTIGACIÓN **4**

1.1 ANTECEDENTES 4

1.2 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA 8

1.3 OBJETIVOS 12

1.3.1 OBJETIVO GENERAL 12

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO **13**

2.1 ALGUNOS ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN 13

2.2 SER, ACTIVIDAD HUMANA Y SUBJETIVIDAD 14

2.3 LA ÉTICA EN EL AULA DE CLASE 20

2.4 LENGUAJE Y SEGUNDA LENGUA 23

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA **25**

3.1 FASE DE PILOTAJE 25

3.2 DISEÑO Y JUSTIFICACIÓN DE TAREAS 29

3.2.1 Instrumentos. *32*

3.2.1.1 Carrots crop 32

3.2.1.2 Eggs 33

3.2.1.3 Hay array 34

3.3 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN 35

3.4 DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES DE TRABAJO 37

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS MULTIMODAL **40**

4.1.3 Algunas formas de Colaboración humana *52*

4.1.3.1 Sesión 1, momento 1 52

4.1.3.2 Sesión 1, momento 2 53

4.1.3.3 Sesión 1 momento 3 53

4.1.3.4 *Sesión 1, momento 4* 54

4.1.3.5 *Sesión 1, momento 5* 54

4.1.3.6 *Sesión 3 momento 1* 54

4.1.4 El producto como ayudante a la producción de subjetividades *57*

4.1.4 Intento de labor conjunta en la virtualidad *66*

4.1.5 Algunas formas de colaboración humana y formas de producción en la virtualidad *70*

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES **76**

5.1 FORMAS DE PRODUCCIÓN DE SABERES 76

5.1.1 La forma de acceso a los recursos y al control de los medios de producción. *77*

5.1.1.1 *Discusión entre pequeños grupos y/o estudiante y profesor.* 77

5.1.1.2 *Justificación de las respuestas*. 78

5.1.1.3 *Reflexión sobre los productos.* 79

5.1.2 La redistribución de la fuerza de trabajo de los individuos en los diferentes procesos de trabajo. *79*

5.1.2.1 Estudiante-estudiante. 80

5.1.2.2 Profesor-estudiantes o profesor-estudiante. 80

5.1.2.3 Grupo general. 80

5.1.3 La determinación de la forma social de la circulación y de la redistribución de los productos del trabajo individual y colectivo. *81*

5.1.3.1 Reconstrucción de productos. 81

5.2 FORMAS DE INTERACCIÓN Y COLABORACIÓN HUMANA 82

5.2.1 Dirigirse al otro. *82*

5.2.1 Respuesta a las preguntas. *83*

5.2.3 Actuación estudiante-estudiante, estudiantes-profesor *83*

5.2.4 Responsabilidad *84*

5.2.4.1 Responsabilidad del profesor. 84

5.2.4.2 Responsabilidad del estudiante 85

5.2.5 Compromiso hacia los demás. *85*

5.2.5.1 Esfuerzo. 85

5.2.5.2 Afinidad. 86

5.2.5.3 Respeto hacia las ideas del otro. 86

5.2.6 Cuidado del otro. *86*

5.2.6.1 Empatía. 87

5.2.6.2 Consideración. 87

5.3 UN ACERCAMIENTO A LA HIPÓTESIS DE SAPIR-WHORF 88

5.3.1 Acertamiento a la hipótesis en los estudiantes *88*

5.3.1 Acertamiento a la hipótesis en el profesor *91*

5.4 OBSERVACIONES FINALES 92

5.3.1 El tiempo. *93*

5.3.2 La videoconferencia y sus plataformas. *93*

5.3.3 El vocabulario de la segunda lengua. *94*

BIBLIOGRAFÍA **96**

Tabla de Imágenes

Imagen 1 Explicación del sistema dialéctico ser-actividad-subjetividad (Radford, 2017; p. 144) *17*

Imagen 2 Diseño metodológico (Pantano, 2014; p. 26) *26*

Imagen 3 La actividad Θ y algunos de sus 'momentos' (Radford, 2017a; p. 125) *28*

Imagen 4 Secuencia de patrones tarea 1 ..... *41*

Imagen 5 Martín Inexpresivo *43*

Imagen 6 Martín angustiado *43*

Imagen 7 Martín feliz *43*

Imagen 8 Tomás y el profesor trabajando juntos *48*

Imagen 9 Tomás y el profesor trabajando juntos *48*

Imagen 10 Tomás señala con su dedo la relación existente entre las variables *50*

Imagen 11 Relación entre variable dependiente e independiente en el producto de Tomás *51*

Imagen 12 Secuencia de patrones tarea 1 ..... *58*

Imagen 13 Secuencia de patrones tarea 2 ..... *58*

Imagen 14 Primer producto de María José (tarea 1) *60*

Imagen 15 Segundo producto de María José (tarea 1) *60*

Imagen 16 Primer producto de María José *62*

Imagen 17 Segundo producto de María José *62*

Imagen 18 Primer producto de Katalina *64*

Imagen 19 Segundo producto de Katalina *64*

Imagen 20 Secuencia de patrones (Tarea 3) *67*

Imagen 21 Valentina mostrando su producto a través de su cámara en la plataforma Microsoft Teams *67*

Imagen 22 Producto de Valentina (Tarea 3) *69*

Imagen 23 Respuestas sobre la segunda pregunta de la tercer tarea. *71*

Imagen 24 Producto de Felipe *89*

Imagen 25 Producto de Isabella *89*

Imagen 26 Producto de María Paz *90*

INTRODUCCIÓN

Este documento presenta el trabajo del docente e investigador, junto con sus estudiantes, por hacer emerger una labor conjunta en el aula trabajando tareas de secuencias de patrones en el contexto de segunda lengua, desde las que surgieron esfuerzos vividos, tensiones, alegrías e incertidumbres dentro del desarrollo de esta investigación, la cual está inscrita dentro de la TO planteada por el profesor Luis Radford en cada uno de los documentos que se presentan. De igual manera, de los que no se presentan, pero también pertenecen a la TO.

En el primer capítulo de este documento se presentan investigaciones desarrolladas en diferentes momentos, que permitieron que emergiera esta tesis, investigaciones que no son tan comunes (contexto de segunda lengua) en educación matemática. Adicional a ello, se encuentra la delimitación del problema a partir de la teoría de la objetivación propuesta por Radford (2020b), lo cual permitió que se produjera la pregunta de investigación: *¿Qué características emergen de una actividad matemática, en el contexto de una segunda lengua (inglés), en grado tercero de primaria en torno a tareas sobre secuencias de patrones que se aproxime a una labor conjunta entre estudiantes y profesor?* Con sus respectivos objetivos, los cuales permitirán que se lleve a cabo el proceso de investigación.

En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico que sustenta el presente documento, en el cual se hace referencia a algunos conceptos de educación vistos desde de la TO, la actividad humana y la subjetividad; luego de ello se presenta la ética, entendida para la TO como la forma de relación: la forma de la relación al otro. (Radford

2020b), para luego de ello hacer un recorrido sobre el lenguaje y la lengua, ya que es importante identificar la lengua materna y la segunda lengua, las cuales permitirán ubicar a la población con la que se está trabajando, ya que más que un proceso de bilingüismo se está trabajando un proceso de enseñanza-aprendizaje en segunda lengua (inglés).

En el tercer capítulo se encuentra todo lo relacionado a la metodología de investigación según lo que plantea Radford (2010), con algunas modificaciones realizadas por Pantano (2014) de acuerdo a la necesidad de explicitar los procesos en el aula, iniciando por el diseño de las tareas (se propusieron tres), cada una de ellas sobre secuencias de patrones. Posterior a ello se plantea la implementación de las tareas, las cuales tuvieron algunas modificaciones de acuerdo a la situación de confinamiento, producto del COVID-19. Luego se presenta la recolección de los datos, a partir de videos, notas de campo y los escritos de los estudiantes. Por último, se plantea la interpretación de los datos que se recolectaron durante cada una de las sesiones de clase.

En el capítulo cuatro se presenta una serie de secciones que dan a conocer diferentes momentos vivenciados en el aula de clase al trabajar las tres tareas sobre las secuencias de patrones, haciendo diferentes énfasis en cada una de ellas. Por ejemplo, en la primera se centra la atención en la interacción entre el profesor, Alejandro y Martín, y cómo estos se coproducen como *subjetividades* que están en constante reflexión. Posterior a ello, se dan a conocer algunas formas de *colaboración humana* que emergieron dentro de la interacción con los estudiantes. En la siguiente sección se reflexiona sobre el producto de los estudiantes, el cual puede servir como facilitador de las producciones de subjetividades, haciendo el análisis específico entre un producto inicial por parte de los estudiantes y el

segundo producto y haciendo la relación entre los mismos y que permitió el primero con respecto a toda la producción de los estudiantes.

En las siguientes secciones se presenta el análisis realizado dentro del contexto surgido por la situación de pandemia, ya que para este momento el Gobierno Nacional les indicó a los colegios, tanto públicos como privados, el confinamiento. Esto con el fin de salvaguardar la vida de cada una de las personas que desarrollan procesos en el entorno educativo. Se analizaron las formas de colaboración humana y formas de producción, además del intento de labor conjunta y cómo todo este análisis permitió identificar algunos factores de alienación en el aula.

En el capítulo final se presentan la respuesta a la pregunta de investigación (de acuerdo a lo vivenciado), las notas de campo, la interacción del investigador con los estudiantes y de sus productos. Adicional a ello, se caracterizan algunas formas de colaboración humana y formas de producción del saber que surgieron en la presencialidad y virtualidad para, de esta manera, concluir el trabajo de investigación planteado desde sus inicios.

Capítulo 1

La Investigación

En este capítulo se presenta los diferentes referentes teóricos que antecedieron a la investigación y cómo estos ayudan a justificar el trabajo que se está desarrollando dentro del documento, trabajos de álgebra temprana (*early algebra*) y otros autores que hablan sobre el bilingüismo trabajado en diferentes lenguas maternas y segunda lengua, por ejemplo, el español y catalán, el español y el inglés. Así mismo, se presenta las preguntas de investigación con sus respectivos objetivos, los cuales darán un horizonte hacia el trabajo que se debe desarrollar.

1.1 Antecedentes

El bilingüismo en educación matemática (Civil y Planas, 2010) y el álgebra temprana (Vergel 2010, 2014) han sido temáticas inmersas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las que la sociedad actual se ha visto en la obligación de desarrollar para poder ofrecer una educación con nuevos horizontes y suplir sus necesidades, adicional a ello, para poder contribuir en el desarrollo de una comunidad específica. En Colombia, por ejemplo, se hablan más de 68 lenguas, entre las cuales 65 son lenguas amerindias, dos criollas y el castellano europeo (Landaburu, 2004-2005). A este tipo de bilingüismo, lenguas indígenas y todo su desarrollo educativo es a lo que muchos autores denominan etnoeducación (Aguirre, 1999; D'Ambrosio, 1985; Gerdes, 1989; Houghton, 1996; Rojas, 1999; entre otros). Esto ha conllevado a que en Colombia se desarrolle el bilingüismo, como lo menciona la

Constitución Política de 1991 “El castellano es el idioma oficial de Colombia. Las lenguas y dialectos de los grupos étnicos son también oficiales en sus territorios. La enseñanza que se imparta en las comunidades con tradiciones lingüísticas propias será bilingüe”.

Se han desarrollado diferentes investigaciones acerca del bilingüismo y de estrategias para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la segunda lengua (de Mejía, 1998; Truscott, Ordoñez, & Fonseca, 2006; Díaz, 2014; entre otras) y el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la segunda lengua (Rodriguez, 2015; Civil y Planas, 2010). Adicional a ello, se ha presentado el cambio curricular para la enseñanza de álgebra temprana o early-algebra (Vergel, 2010, 2014, 2015; Radford 2016, 2017, 2019, 2020a; entre otros).

Dentro de los trabajos que se han desarrollado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en una segunda lengua han permitido evidenciar la necesidad de profundizar en estos procesos de la educación matemática. Por ejemplo, Civil y Planas (2010) llevan a cabo su investigación sobre las matemáticas y el bilingüismo: Civil desde Arizona y Planas desde Barcelona. En ambas situaciones todo surge a partir de la migración de las familias a dichos lugares, y la diversidad de lenguas que se trabajan en el aula de clase, por ejemplo, en Arizona se hace el énfasis del inglés y el español, y en Barcelona el español y catalán.

Así mismo, Radford ha desarrollado diversas investigaciones sobre la Teoría de la Objetivación (TO), en las que realiza definiciones de la enseñanza, aprendizaje y cada uno de los componentes de la educación, centrándose en la importancia de las formas de comunicación. Dentro de las investigaciones desarrolladas, Radford (1999) afirma: “los

signos que un individuo utiliza cuando resuelve un problema no son pues, en nuestra perspectiva, accesorios a través de los cuales el pensamiento interno se manifiesta en el mundo exterior, sino el pensamiento mismo materializado" (p. 32).

Dentro de la TO se desarrolla la idea de labor a partir del materialismo dialéctico hegeliano, donde se centra la atención en la relación que hay entre el sujeto y el ser, y se tiene en cuenta que la labor conjunta va más allá de la satisfacción de las necesidades humanas, "es una *forma social de acción conjunta* que incluye nociones de expresión del sujeto que labora (…). Es a través de la labor o trabajo que los individuos se desarrollan y se transforman continuamente" (Radford, 2014, p. 137).

Otras investigaciones que se han desarrollado específicamente en la labor conjunta dentro de la TO son las investigaciones que han desarrollado León y Lasprilla (2018) "la presencia de la ética en la educación matemática no debería ser extraña" (p. 2), ya que como se menciona en el marco teórico, la ética se desarrolla en diferentes entornos y no como una asignatura a enseñar. Y la propuesta por Radford y Lasprilla (2020), quienes mencionan a la ética comunitaria como aspecto importante que se desarrolla en la clase de matemáticas, "toda relación entre dos (o más personas) implica ya una manera de posicionarse y de dirigirse al otro. Y este posicionamiento relacional es la substancia de la ética" (p. 113).

Es entre el docente y el estudiante que se da la ética comunitaria, la cual está inmersa en la labor conjunta. Radford (2014) menciona que de la interacción de los sujetos se debe dar la importación de asumir el compromiso de trabajar en equipo, "lo que implica participación sostenida y profunda en las actividades y debates del aula (p. 140).

Dentro de dicha labor conjunta se ponen en juego medios semióticos y procesos de objetivación. Pantano (2014) menciona que los procesos de objetivación “son mediatizados por el cuerpo, los gestos, el lenguaje, los signos y los gestos” (p. 18), los cuales aparecen en la educación matemática dentro de su investigación en el trabajo con tareas de tipo aditivo; ahora los medios semióticos de objetivación son los recursos que utiliza el estudiante para evidenciar su encuentro con el saber. Dentro de su investigación, Pantano (2014) menciona que algunos de ellos, que se hacen evidentes, “son: los movimientos gestuales, el dibujo, las fórmulas matemáticas y el lenguaje verbal” (p. 11).

1.2 Delimitación del problema

Desde tiempos inmemorables el hombre ha sentido la necesidad de comunicarse con las demás personas que lo rodean. En consecuencia de ello, ha logrado el desarrollo de formas de comunicación, formas de interacción y de comercialización. Dichas formas pueden darse por medio del lenguaje, la semiótica, entre otros. Como menciona D'Amore (2017):

> El lenguaje, semiótica o cualquier otro desarrollo de carácter expresivo, son señales, son actividades del ser humano que está implicado a manifestar sus propias acciones, sobre la base de las exigencias de la sociedad y de la cultura en la cual vive. (p. 30)

La comunicación, anteriormente mencionada, se puede dar en diferentes ámbitos como: el aula de clase, el trabajo, el hogar, etc., en diferentes momentos de interacción de la sociedad. Así mismo, estas formas de comunicación se pueden dar en distintas lenguas, algunas comunes, entre los que se están comunicando, ya sea en lengua materna o en una segunda lengua, a lo cual se ha denominado bilingüismo, Navarro (2010) hace la diferencia entre lengua materna y segunda lengua mencionando que la primera se adquiere cuando los sujetos son niños, mientras que la segunda lengua se puede aprender de niños o en edad adulta. El bilingüismo ha sido diferenciado por la lengua que el pueblo adquiere a partir de sus necesidades de comunicación, como por ejemplo la necesidad de comunicarse con los habitantes de otras ciudades o países a partir de la migración, y la que pueden aprender las personas con mayor poder adquisitivo pueden lograr. De Mejía (1998) menciona que hay textos que hacen la distinción entre *folk bilingualism* y *elistist bilingüalism*. El primero es el que las tribus utilizan o se ven en la obligación de aprender

para poder sobrevivir y el segundo es el privilegio en el cual la clase media y alta se han visto privilegiadas para adquirir la segunda o tercera lengua.

A partir de las anteriores investigaciones mencionadas, la importancia de trabajar el álgebra temprana como cambio curricular tiene que ver "con la creación de oportunidades para integrar y cultivar hábitos de pensamiento que presten atención a las estructuras fundamentales de las matemáticas" (Kaput, 1999; citado por Vergel, 2010, p. 3). Así mismo, Vergel (2010) habla sobre la necesidad y pertinencia de continuar con la profundización en el trabajo de creación y gestión de tareas a desarrollar en el aula que potencien y fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad, lo cual promoverá un aprendizaje con comprensión y significado. Esto facilitará el estudio formal del álgebra en los grados superiores de la educación secundaria y universitaria.

Hay diferentes formas de interactuar en el aula, Radford (2020a) menciona que en la enseñanza tradicional la interacción se reduce a una comunicación de tipo transmisor-receptor. Lo cual produce una alienación del estudiante hacia la actividad y hacia sus compañeros, dichos tipos de alienación planteados por Marx (Sossa, 2010) son los que no permite que el sujeto interactúe y trabaje, consigo mismo y con otros, lo que hace que no se produzca la relación de alteridad entre los sujetos, esta relación es fundamental, ya que a partir de la misma los sujetos despiertan su conciencia a partir de la conciencia del otro (Batjín 1979/2009, citado por Vergel, 2014).

A partir de lo anterior se identifica la importancia de hacer emerger una labor conjunta entre estudiantes y profesor, Radford (2020a) hace referencia a la actividad como

Tätigkeit/deyatel'nost, la cual hace referencia a "una forma social de esfuerzo mediante la cual los sujetos producen medios de subsistencia mientas se producen a sí mismo como seres humanos" (p. 23). Es a partir de dicha actividad en tanto que labor conjunta, que permitirá que los estudiantes y profesor no se alienen de la actividad, con el otro o del producto, sino que permitirá que se dé la relación de alteridad y a partir de este proceso se produzcan subjetividades, Radford (2020b) define subjetividad como "un sujeto concreto, cultural y sensible cuya especificidad resulta desde el hecho de que está continua y reflexivamente afectado".

Dentro de la interacción que se da en el aula de clase permite expresar ideas, expresarse como sujeto que permite inscribirse en el mundo y expresarse como subjetividad. Todo esto se da a partir de las *formas de colaboración humana*, las cuales Radford (2020a) ha mencionado como la naturaleza de la interacción. Dentro de dicha interacción y junto a las formas de colaboración humana emerge lo que la TO denomina como *formas de producción de saberes* y a partir de estas los sujetos movilizan el saber que no es de ellos. Las formas de colaboración humana y las formas de producción de saberes son los ejes que se dan en el *trabajo hombro a hombro* haciendo producir la *labor conjunta*. Todo lo anteriormente descrito permite que los sujetos satisfagan sus necesidades (Radford 2020a). y es en la interacción entre transmisor-receptor que se desarrolla en la enseñanza tradicional lo que no permite que se desarrolle una labor conjunta, por tal motivo se evidencia la importancia de hacer emerger la labor conjunta entre estudiantes y profesor y qué formas de colaboración humana y formas de producción de saberes ayuda a hacer emerger la labor conjunta y que ninguna de estas sea alienante.

Dentro de la interacción ya mencionada, se pueden evidenciar las formas de colaboración humana y las formas de producción de saberes que permitirán de cierta manera que la labor conjunta emerja en el aula de clase. Más sin embargo se presentan algunos interrogantes con respecto al trabajo y la interacción en una segunda lengua. Un ejemplo sobre el trabajo en diferentes lenguas se presenta a partir de la *hipótesis de Sapir-Whorf*, quienes menciona que es a partir del lenguaje, el cual es un producto social, este configura la forma en que los sujetos aprehenden el mundo que les rodea (Parra, 1988). Dentro de dicha aprehensión se puede presentar el comportamiento, la formas de responder y dirigirse al otro, a partir de lo anterior se presenta la necesidad de indagar sobre si ¿las formas de interactuar, y las demás formas de actuar se ven afectadas de acuerda a la lengua en la que trabajan los sujetos? Aunque es una pregunta muy amplia sería interesante identificar dicha hipótesis en el aprendizaje de las matemáticas en segunda lengua. Así mismo se pueden presentar interrogantes como ¿la segunda lengua puede llegar a ser un factor alienante con respecto al intento de hacer emerger una labor conjunta en la clase de matemáticas? O también ¿Qué puede emerger en el trabajo de segunda lengua en el intento de hacer emerger una labor conjunta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?

Es a partir de lo anteriormente descrito y centrado que la parte teórica-práctica desde la teoría cultural de la objetivación se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características emergen de una actividad matemática, en el contexto de una segunda lengua (inglés), en grado tercero de primaria en torno a tareas sobre secuencias de patrones que se aproxime a una labor conjunta entre estudiantes y profesor?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Describir las características que emergen en una actividad matemática en el contexto de una segunda lengua (inglés), en grado tercero de primaria en torno a tareas sobre secuencias de patrones que se aproximen a una labor conjunta entre estudiantes y profesor.

1.3.2 Objetivos Específicos

En el marco de una actividad matemática en el contexto de una segunda lengua (inglés), en grado tercero en torno a tareas sobre secuencias de patrones:

- Describir los modos de producción de saberes asociados a secuencias de patrones.
- Describir las formas de interacción y colaboración humana que se materializan entre los estudiantes y profesor.

Capítulo 2

Marco Teórico

Esta investigación se ubica en el paradigma de investigación cualitativa en educación matemática, más exactamente, en los estudios de naturaleza descriptiva y reflexiva, ya que como menciona Cotán (2016), este tipo de investigación se caracteriza por el desplazamiento que se hace al contexto natural donde ocurren las situaciones, donde viven las personas y donde se recogen dichas situaciones que se desean analizar. Así mismo, Bodgan y Biklen (1992) mencionan algunas características de las investigaciones de tipo cualitativo, las cuales son: la captación de los datos desde el ambiente natural, la tendencia de los investigadores a centrar su atención más en los procesos que en los productos y la obtención de los resultados como son fuente fundamental para la sección de la descripción de la investigación que se está desarrollando. Desde este enfoque se desarrolla una descripción del problema didáctico, siendo en este caso particular, la labor conjunta entre estudiante y profesor al trabajar tareas sobre secuencias con patrones figurales con una población de estudiantes de grado tercero.

2.1 Algunos elementos de la teoría de la objetivación

Algunas de las investigaciones en educación matemática de siglo XXI sugieren el trabajo sobre la TO, entre ellas están la realizada por León y Lasprilla (2018), Radford (1999, 2010, 2014, 2015, 2016, 2017a, 2017b, 2018a, 2018b, 2020a, 2020b), Radford y Roth (2011), Radford y Lasprilla (2019), Pantano (2014), Vergel (2010, 2014, 2015), entre otras, las cuales se desarrollan elementos sobre TO, y está inspirada en el

materialismo dialéctico y en la escuela del pensamiento de Vygotsky. Dicha teoría plantea el siguiente objetivo sobre la educación matemática:

> El objetivo de la educación matemática reside en un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento. (Radford 2020a, p. 16)

A continuación, se presenta un esbozo, ideas, ejemplos y definiciones sobre el ser, la actividad y subjetividad vistos desde la TO.

2.2 Ser, Actividad humana y Subjetividad

Los individuos están interactuando constantemente en la sociedad y cultura en la cual se han inscrito. Radford (2020a) menciona que un tipo de interacción es la que se da en la enseñanza tradicional, la cual es de tipo transmisor-receptor, la cual resulta ser muy pobre ya que uno habla y el otro oye obedientemente, esta y otras formas de relacionarse con otros individuos y presentarse al mundo constituyen las formas históricamente codificadas que definen la categoría del ser, la cual en la TO, es una categoría general, cultural y ontológica (Radford, 2017b). Es a partir de esta categoría general que se puede concebir las formas culturales en las que el individuo está y vive en el mundo, y es a partir de la cultura en la que los sujetos se encuentran en esta, encuentro mediado por sus “formas de estar y vivir en el mundo, formas de concebirse y que nos conciban; formas de posicionar y que nos posicionen; formas del yo y la alteridad” (Radford, 2017b, p. 143).

Centrado la atención en el entorno escolar, donde los sujetos interactúan en el aula de clase (estudiantes y profesor), los cuales permiten que se desarrolle el proceso de enseñanza-aprendizaje, el proceso de aprendizaje consiste en el encuentro de los sujetos con el saber, como lo menciona Radford (2017a): "El aprendizaje es el encuentro con el saber y su transformación subjetiva es algo que aparece a la conciencia, esta transformación es lo que llamo objetivación" (p. 118). Las actividades de enseñanza y aprendizaje no son actividades separadas, una desarrollada por el docente y la otra por el estudiante, sino que es una actividad única en el sentido en el que ambos se expresan inseparables, ya que juntos se producen y coproducen (León y Lasprilla, 2018). Es importante aclarar que dentro de la labor conjunta ambos sujetos, tanto el docente como el estudiante, deben ser sujetos activos, ya que si el estudiante es el único sujeto activo se estaría recayendo en el constructivismo. Ahora, si es el docente el sujeto activo se recae en la enseñanza tradicional. A partir de este análisis es que emerge la labor conjunta donde ambos están continuamente activos (Radford, 2020a). Por medio de la interacción entre dichos sujetos se da lo que Radford (2017b) definen como *labor conjunta* o actividad.

Es importante aclarar que la actividad se puede ver de dos formas. La primera, como lo ha denominado Radford (2018b) la actividad como *TÄTIGKEIT/DEYATEL'NOST'* (Tätigkeit de alemán y Deyatel'nost' del ruso), la cual es una actividad humana, sensual y práctica que hace posible el aprendizaje; en dicha actividad se producen los procesos de objetivación y subjetivación, actividad que es considerada como social, cultural e histórica. Esta actividad es el equivalente a los hechos y sujetos de los individuos, lo cual es un sistema

dinámico orientado a la satisfacción de las necesidades de los seres vivos naturales; seres que sienten, sufren y satisfacen sus necesidades en objetos fuera de sí. En el aula de clase se puede hablar de necesidades como interactuar y producir con los compañeros y el profesor; necesidades como encontrarse con el objeto matemático y de esta manera movilizar el saber, etc. Esta es la actividad que Radford (2017b, 2018b) denomina como labor conjunta. La segunda forma de ver la actividad es sencillamente estar ocupado en algo, una actividad que no tiene un objeto de ser ni de trabajar o, en otras palabras, que no ayuda a que los sujetos se produzcan en la sociedad que se encuentran inscritos Raford (2018b) la denominada como AKTIVITÄT/ AKTIV'NOST' (Aktivität del alemán y Aktiv'nost' del ruso).

Dentro del aula de clase se produce todo lo anteriormente descrito, pero también se debe tener en cuenta que no solo emerge el objeto matemático, sino que también la actividad produce subjetividades. En palabras de Radford (2018a): "El aprendizaje de las matemáticas implica emociones y afecto en maneras que nos afectan profundamente como seres humanos, por eso las aulas no solo producen saberes, sino también subjetividades" (p. 9).

La subjetividad que se produce en el aula de clase debe ser entendida como la *actualización* o *materialización* siempre en curso del *ser*, siempre en curso de un sujeto que es único, concreto y la especificidad del sujeto resulta de su reflexión, de lo que siente y de cómo actúa, lo cual es un proyecto de vida que es constante, el cual es inacabado e inacabable (Radford 2017b, 2020b). Dicha materialización o actualización se da en la actividad humana anteriormente descrita, actividad en la que los sujetos se producen a sí mismos con y a través de otros y esto se da de acuerdo a las posibilidades y limitaciones que ofrece la cultura

(Radford, 2017b, 2020b). En el siguiente esquema se presenta cómo la categoría del ser se instancia o materializa como subjetividad a partir de la actividad humana, en el aula de clase se puede hacer explícito en como los sujetos que son subjetividades (Radford, 2020b) a partir de la actividad en la que trabajan juntos, materializan sus ideas y se materializan así mismo en tanto que se reconocen y son reconocidos en la actividad, dicho proceso se vuelve a repetir infinitamente (Imagen 1), ya que es un proceso interminable dado que las subjetividades continua y reflexivamente afectados (Radford 2020b).

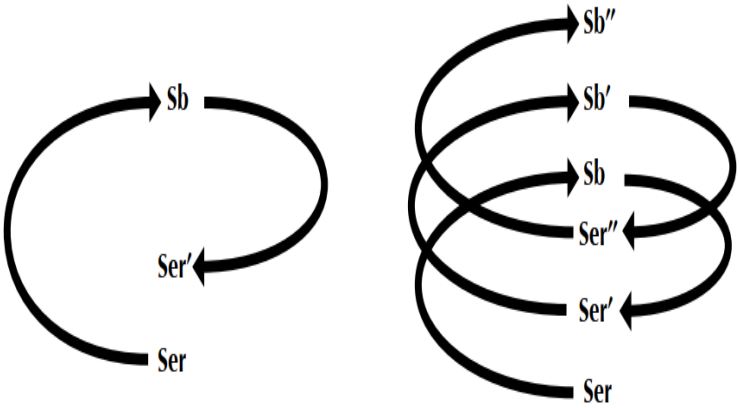


Imagen 1 Explicación del sistema dialéctico ser-actividad-subjetividad (Radford, 2017; p. 144)

La actividad como labor conjunta es el eje fundamental de esta investigación, ya que se pretende indagar sobre lo que emerge de esta interacción entre los sujetos que desarrollarán las sesiones de clase. Radford y Roth (2011) incluyen una palabra en la teoría de la objetivación para poder definir la interacción que desarrollan docente y estudiante, la cual es *togethering*. Esta palabra no existe en el inglés, sino que ellos la plantean como la correlación entre el adverbio “together” y el sufijo “ing”, como idea de una acción para lograr llegar a la conclusión de hacer o trabajar juntos. “Togethering supone que no hay línea de

demarcación entre el estudiante y el docente" (Radford, 2017b), aunque es necesario aclarar que el docente no está al mismo nivel que el estudiante con respecto a la familiarización con los saberes matemáticos.

La actividad, como lo mencionan Radford y Roth (2011) y Radford (2016), es una forma social de esfuerzo conjunto que incluye la expresión personal, desarrollo intelectual y social y el placer estético, lo cual es un proceso en un sistema de relaciones interpersonales que hace la naturaleza social de los seres humanos. Dentro de la educación matemática, la actividad es una invitación a considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de acuerdo a la forma en la que los estudiantes y profesores participan en la sesión de clase. Dentro de dicha participación es importante tener en cuenta los modos sensuales que los sujetos utilizan para traer ideas y producir significados matemáticos; dichos modos semióticos incluyen actividad perceptual, gestos, acciones kinestésicas, postura, lenguaje y el uso de artefactos, símbolos, gráficas y diagramas (Radford, 2016).

Para que la actividad tenga sentido, Leont'ev (1978, citado por Radford 2016), sugiere que la actividad cuente con una estructura básica, la cual debe tener un objeto y un motivo, los cuales son los ejes que mantienen a la actividad en constante movimiento. Los individuos descomponen el objeto en una secuencia de objetivos que se asocian a las acciones (Radford, 2016). Esto se puede evidenciar en el aula de clase cuando el objeto de la actividad se hace presente en los objetivos de cada sesión, de cada acción, de cada pregunta y cada momento en el que los sujetos interactúan en la actividad matemática.

Marx en *Introducción a la crítica de la economía política*, (citado por Radford, 2014) menciona qué labor puede desarrollar dos grandes categorías como lo son:

los *modos de producción*, la cual tiene que ver con la manera en la que los individuos producen; y las *relaciones de producción*, la cual tiene que ver con las formas históricas y culturales, a través de las que se ha desarrollado la interacción humana.

2.2.1 Formas de colaboración humana

Dentro de la actividad se tienen en cuenta las relaciones de producción, llamadas así por Marx, las cuales según Radford (2014) tienen que ver con las formas de colaboración humana que mediatizan las interacciones entre los individuos inmersos en la actividad. Estas formas de colaboración humana están enmarcadas dentro de la ética comunitaria, y son definidas como la responsabilidad, el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro (Radford 2017b).

2.2.2 Modos de producción de saberes

Los sujetos son reconocidos como sujetos históricos y sociales, debido a la interacción y el trabajo con el otro. A partir de este proceso es que los seres humanos producen para satisfacer sus necesidades. En palabras de Radford (2016), los seres humanos son seres de necesidades; algunas de ellas son: la supervivencia, el arte, la espiritualidad, el intelecto; las cuales fueron creadas por y en la sociedad para satisfacer necesidades en objetos que están fuera de ellos; es allí donde los seres humanos se comprometen en el mundo, lo que los seres humanos producen para lograr satisfacer sus necesidades se da por medio de la inscripción del sujeto en el mundo social y la producción de su existencia. Es este proceso lo que se conoce como actividad.

En la interacción de los individuos en la sociedad se produce lo que ha sido denominado las relaciones o modos de producción. Las relaciones se han establecido desde tiempos inmemorables. En el presente se hace referencia a la relación entre el estudiante y el docente y sus maneras de interacción. Godelier (2010, citado por Radford 2014) menciona que las relaciones ya mencionadas se dividen en tres funciones:

(1) La forma de acceso a los recursos y al control de los medios de producción.

(2) La redistribución de la fuerza de trabajo de los individuos en los diferentes procesos de trabajo.

(3) La determinación de la forma social de la circulación y de la redistribución de los productos del trabajo individual y colectivo (p. 144).

Las formas de producción de saberes son promovidas a partir de los esfuerzos colectivos que desarrollan los sujetos en la historia y la cultura. En el caso específico de la educación, se evidencia en el profesor y los estudiantes al trabajar juntos con el propósito de alcanzar niveles profundos de conceptualización matemática (Radford, 2020a).

2.3 La ética en el aula de clase

En la educación, más específicamente el currículo, la ética ha sido tratada como una asignatura adicional, en la cual se presentan algunos contenidos, los cuales hacen referencia a los valores que debemos desarrollar como seres humanos. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2015) plantea la asignatura “Educación ética y valores humanos”, con sus lineamientos, estándares y temáticas correspondientes para que se desarrollen en el aula. Para la TO, la ética es una serie de procesos y sentimientos que surgen

en la interacción entre dos o más sujetos en el aula de clase. Radford (2020a) menciona que la ética está en todo modelo, todo acto de aprendizaje, reposa y moviliza una ética, es por ejemplo, en la enseñanza tradicional donde se moviliza la ética de la obediencia, ya que el estudiante asume y obedece lo que el profesor indica.

La ética se moviliza dentro de la actividad en la TO como una deontología. En otras palabras, la ética no se concibe como una teoría basada en reglas y principios morales que deben seguirse, sino que más bien se concibe como la relación fluida, personal y cultural de la responsabilidad que se da entre dos o más sujetos (Radford, 2020a). La ética comunitaria, denominada así en la TO, se centra "en la responsabilidad, en el compromiso hacia los demás y el cuidado de otro, estos tres vectores vienen a configurar la estructura esencia de la subjetividad" (Radford 2020a, p. 35).

Es de aclarar que la TO no está creando esto de la ética en el aula de clase, sino que en cada teoría de enseñanza-aprendizaje hay una ética, por ejemplo, Radford (2020a) ilustra la ética en el modelo tradicional y en el modelo constructivista. En el modelo tradicional hay una ética de la obediencia, donde el docente es quien posee el conocimiento, lo da a conocer a sus estudiantes y estos lo reciben como sujetos alienados. Otro ejemplo es el caso del modelo constructivista, en el que se evidencia la ética de la autonomía, recayendo de esta manera en el estudiante la responsabilidad de asumir su conocimiento (responder los problemas que plantea el profesor). Dado esto, es responsabilidad del profesor el abstenerse de dar ideas, respuestas y/o sugerencias que puedan interferir en la autonomía del estudiante.

Una de las categorías que se presenta en la ética comunitaria, como se mencionó anteriormente, es la *responsabilidad*, la cual es definida por Radford (2020a) como la relación que se establece con el otro.

> La responsabilidad aparece aquí como unión, nexo, vinculación, conexión y enlace con el prójimo, que se expresa en la *respuesta* (*answerability*) que hacemos al *llamado* del otro, llamado que proviene no necesariamente de una formulación lingüística o semiótica, sino de la mera *presencia* de lo que no somos nosotros mismos. (p. 35)

La siguiente categoría planteada dentro de la ética comunitaria es el *compromiso hacia los demás*, es vista como el hacer todo lo posible por parte de los sujetos de dar cumplimiento a lo que se ha planteado, es la aplicación y promesa de hacer todo lo posible porque se lleve a cabo la labor conjunta en el desarrollo de "una obra común" o, en otras palabras, lo que profesores y estudiantes producen juntos en el aula de clase, trabajando juntos *hombro con hombro* (Radford 2020a).

Así mismo, en la ética comunitaria se encuentra el *cuidado del otro*. Esta no es un acto de condescendencia o un acto paternal hacia las personas con la que se están interactuando, lo que podría entenderse como ocuparse de alguien. Más bien, es como menciona Radford (2020a) "una forma de estar-con-otro, la práctica del cuidado del otro va a reposar en la constitución de las sensibilidades o capacidades humanas". Marx (1988, citado por Radford 2020a), menciona la sensibilidad, la atención y el reconocimiento del otro y sus necesidades, la importancia que en el aula, tanto el estudiante como el docente, evidencien que no están solos desarrollando la actividad. Así mismo, esta categoría evidencia la

posibilidad de vernos en el otro, reconocer nuestra vulnerabilidad en la vulnerabilidad del otro. De igual manera, el autor menciona que es necesario trabajar con el otro, desarrollar el pensamiento y colaborar con el otro.

2.4 Lenguaje y segunda lengua

El lenguaje es un sistema de signos mediante el cual el hombre se comunica con las demás personas que lo rodean en su ambiente social y cultural, tal como lo menciona Saphir (Citado por Parra, 1988) “El lenguaje es un complejo de símbolos que reflejan todo el ambiente físico o social en el que se coloca un grupo de hombres” (p. 9). Así mismo el autor hace mención del ambiente social el cual se constituye por medio de fuerzas de la sociedad que modela la vida y el pensamiento de cada individuo como lo son la religión, el arte, los ideales estéticos y las formas de organización política. Desde la TO se concibe el lenguaje como un medio de expresión, expresión referenciada como un fenómeno histórico que a la vez resulta ser subjetivo y cultural (Radford, 2018b).

La diferencia entre las lenguas por medio de las cuales se comunica el hombre, ya que no es una sola, “la lengua materna y las otras lenguas: es la primera que, en este contexto se aprenden las otras lenguas y que es posible pensar una gramática general o teoría general de lenguaje” (Radford, 2018b). Así mismo Navarro (2010) menciona que la lengua materna es aquella que es adquirida por los sujetos cuanto estos son aún niños, y la segunda lengua hace referencia a aquella que puede ser aprendida tanto en la niñez como en la edad adulta.

La comunicación en dos lenguas es lo que algunos autores han denominado como bilingüismo, Rojas, 2013) indica que el bilingüismo hace referencia a la habilidad de

una persona al usar dos lenguas en diferentes contextos y/o situaciones. Civil y Planas (2010) conciben a una persona bilingüe como aquella que domina una lengua y es capaz de producir construcciones con significado en una segunda lengua.

Dentro de la teoría de la objetivación, el lenguaje no se entiende como mediador, sino como parte de la actividad en la cual los individuos interactúan (Radford, 2020a). Radford (2018b) menciona que "es a través de las formas específicas de expresión o expresividad de un lenguaje dado que la actividad mental, intelectual y cognoscitiva es lo que es. Las formas de expresión varían en función de un lenguaje a otro" (p. 28). Es por esto que la cultura tiene gran influencia con respecto al lenguaje y la forma en que los sujetos aprehenden el mundo, esto es lo que aparece en la hipótesis de Sapir-Whorf cuando se plantean dos ideas:

1. EI lenguaje, que es un producto social, configura nuestra forma de aprehensión del mundo que nos rodea.
2. Considerando las diferencias entre los sistemas lingüísticos, que son reflejo de los distintos medios que crean esos sistemas, los hombres que piensan por medio de estos lenguajes aprehenden el mundo de formas distintas. (Parra, 1988, p. 12)

Capítulo 3

Metodología

En el presente capítulo se hace un esbozo de las fases pertinentes para desarrollar la metodología planteada a partir de la teoría de la objetivación y cómo estas posibilitarán el diseño y aplicación de las tareas, para posteriormente poder hacer el análisis en torno a toda la interacción aquí desarrollada, así mismo se presenta el diseño de las tareas que se proponen para los estudiantes.

3.1 Fase de pilotaje

Para la recolección y análisis de resultados sobre las tareas que se plantean, Radford (2010) plantea un ciclo (figura 1)[1], el cual permite identificar los pasos a seguir en este momento de la investigación, siendo el primer paso el diseño de tareas. Este paso es uno de los más importantes, ya que para plantearlo se debe tener un análisis de la población con la que se quiere trabajar. Son indispensables datos como edad de los estudiantes, grado de escolaridad en el que se encuentran, nivel de inglés que poseen o, en otras palabras, si el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha sido en inglés desde el inicio de su escolaridad hasta el momento de aplicar las tareas, que sería grado tercero. El segundo paso para desarrollar la metodología de investigación planteada es la implementación de tareas. Aquí es importante tomar en cuenta el sitio, el ambiente, la actividad o labor conjunta que se

[1] Es importante aclarar que el esquema que se presenta en la figura 1, ha sido modificado por Pantano (2014) en los puntos 3 y 4, ya que el original plantea interpretación de datos y generación de teoría y en el presente documento se plantea la recolección de datos en el paso 3 y análisis de los datos en el siguiente.

pretende evidenciar en el desarrollo de dichas tareas; cada una de estas, es planteada dentro de la investigación, inicialmente para trabajar de forma individual. A medida que se vayan generando dudas o se dé la necesidad de compartir ideas, se permitirá a los estudiantes que planteen sus ideas con los demás compañeros, con el fin de identificar cómo es la interacción entre los estudiantes.

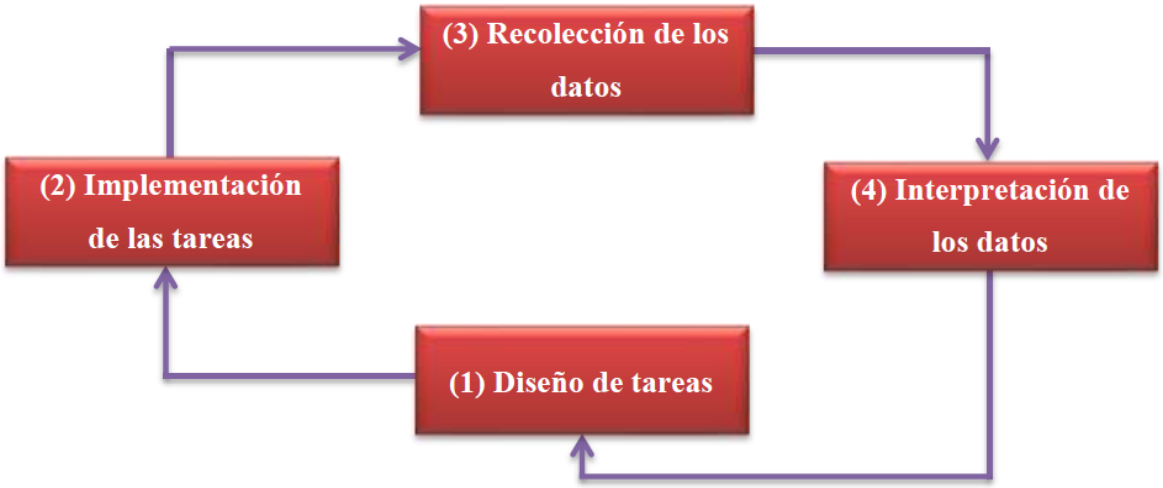


Imagen 2 Diseño metodológico (Pantano, 2014; p. 26)

El siguiente paso es la recolección de datos. En este momento es importante contar con diferentes recursos que permitan obtener al máximo la información que los estudiantes desarrollan durante la labor conjunta con el docente y el desarrollo de las tareas. Dichos recursos serán: guía desarrollada por el estudiante y cámaras de vídeo con el fin de recolectar toda la información que se desarrolla en la actividad. Por último, se realizará la interpretación de los datos obtenidos en los instrumentos utilizados en el desarrollo de las sesiones.

Dentro de la investigación se plantea el diseño y/o adecuación de algunos patrones, y aplicación de una serie de tareas, siendo la solución de las guias donde se plantean las tareas un instrumento de recolección de información. González (2006) define el instrumento como toda situación o recurso que permita la expresión del otro dentro del contexto de relación que caracteriza la investigación. De igual manera las tareas se pueden definir como instrumentos grupales, ya que, como indica el autor, son todos aquellos que implican una actividad colectiva y el desarrollo de dinámicas grupales a partir de la tarea.

Para el desarrollo de la actividad las tareas deben tener unas características específicas de acuerdo a Radford (2015), estas son el objeto de la actividad, la meta de la actividad y las tareas que se desarrollarán en la labor conjunta. La actividad se desarrolla cuatro momentos específicos (Radford 2017b), como lo son:

1. La presentación de la tarea por parte del docente: es aquí donde el docente da a conocer a los estudiantes la tarea y, de ser necesario, plantea preguntas guías para que los estudiantes procedan al desarrollo de la tarea.

2. El desarrollo de la tarea en pequeños grupos: en esta siguiente parte, el docente guía a los estudiantes para que se logre dar una discusión entre ellos y no se queden con concepciones únicas, como menciona Vergel (2014), “el yo no puede comprenderse íntegramente sin la presencia del otro, sin el discurso” (p.54).

3. Discusiones entre profesor-estudiante: es en este momento donde el docente interviene con el fin de seguir generando las discusiones entre los grupos de estudiantes por

medio de preguntas, aclaraciones, entre otras acciones que permitan continuar con el propósito de la actividad.

4. Discusión en el grupo general: se pretende que este sea uno de los últimos ejercicios dentro de la actividad que se ha estado desarrollando, lo cual no quiere decir que sea la fase final, y que en este momento se habrá realizado precisiones de lo percibido por el docente. La serie de pasos se puede dar en cualquier orden, no estrictamente en el que se menciona, tal y como se evidencia en la imagen 3. Las flechas indican que el proceso se puede desarrollar de diversas maneras y se puede regresar a algún momento o paso de la actividad.

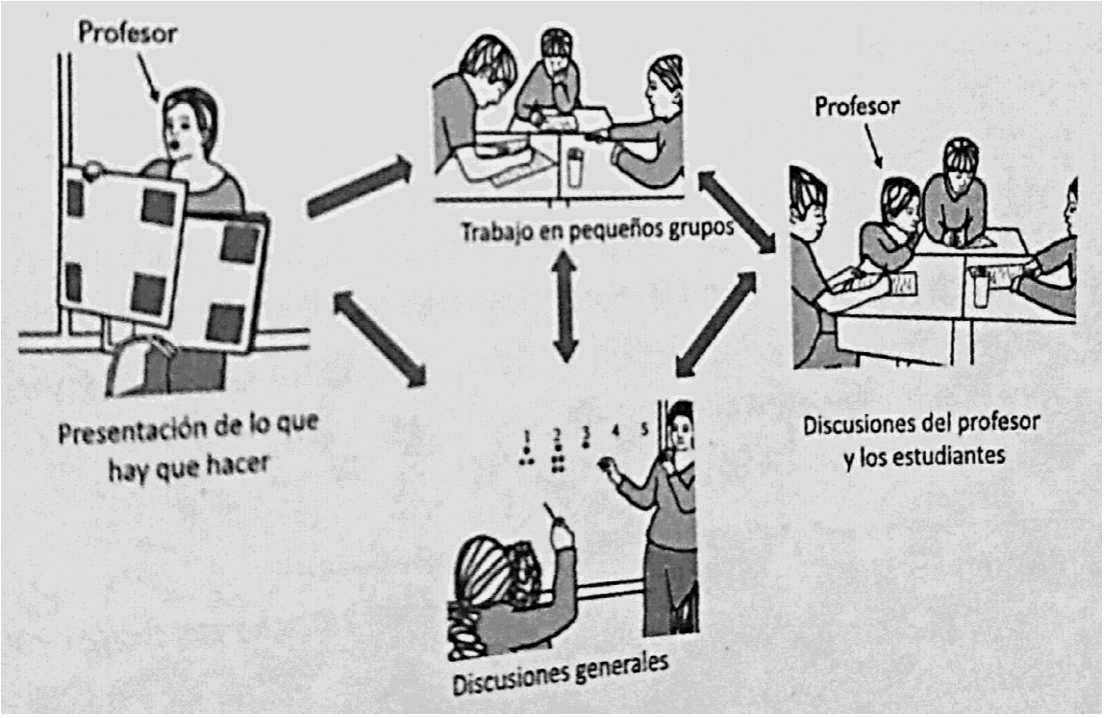


Imagen 3 La actividad Θ y algunos de sus ‘momentos’ (Radford, 2017a; p. 125)

Es importante aclarar que dichos momentos no necesariamente se deben desarrollar en el orden mencionado, sino que se pueda dar en un orden aleatorio de acuerdo a las situaciones y necesidades que se presenten en la actividad.

3.2 Diseño y justificación de tareas

A continuación, se presenta una propuesta de enseñanza de álgebra temprana por medio de secuencias de patrones figurales, partiendo desde lo que significa álgebra temprana. En palabras de Vergel (2014) refiere a:

> *El Álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas, lo que se ha denominado la propuesta de cambio curricular Early-Algebra. En términos generales esta expresión (que hemos traducido como "Álgebra Temprana")* (p. 15).

Entendiendo que no se trata de una enseñanza previa, antes de dar paso al trabajo en álgebra, sino que tiene que ver con una estructura matemática que se va construyendo dando significado a los objetos matemáticos. Dentro de las distintas investigaciones se encuentra como una de las tareas que potencian en desarrollo del álgebra temprana los patrones figurales (Vergel, 2014) argumenta lo siguiente:

> (...) c*uando los estudiantes participan en tareas sobre generalización de patrones; desde allí surgen relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de*

> *símbolos. Relaciones que se evidencian a través de los gestos, los movimientos corporales, etc. que realizan los estudiantes* (...) (p. 31).

En la misma vía, (Radford, 2017, p. 102) sugiere que, “Como muchos de mis colegas, en mi investigación en el salón de clase he utilizado la generalización de patrones para introducir a los estudiantes en el álgebra”. Es en estas definiciones que se logra evidenciar la importancia que tiene el álgebra temprana dentro del currículo escolar desde los primeros años de escolaridad.

Por otro lado, una vez propuesta la tarea se definen categorías de análisis desde Vergel (2015), las cuales denotará como tres estratos de pensamiento de la siguiente manera:

Pensamiento algebraico factual: en este estrato de pensamiento se expresan acciones concretas como lo es el trabajo a través de números y se realiza acciones como señalar con la mirada, el índice, realiza movimientos con objetos como el lápiz, y expresa palabras como “aquí”, señala y dice “más dos”. En otras palabras, el sujeto no enuncia, sino que expresa acciones concretas del conteo; para este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel que el autor menciona como el nivel de la enunciación, por lo tanto, la indeterminancia queda implícita.

Pensamiento algebraico contextual: cuando el sujeto se encuentra en este estrato, es capaz de hacer una descripción del término general, mencionando frases clave como: arriba quito uno, dos por l figura más uno, número de la figura más para la fila de arriba y número de la figura más dos para la de abajo. Sumar los lados para el total.

Pensamiento algebraico simbólico: en este estrato del pensamiento el sujeto ha pasado de lo específico a lo general y es a partir de ello que las frases claves se representan por medio de símbolos alfanuméricos como: n + (n - 1) o 2n-1.

Las tareas que se plantean con respecto al objeto matemático, patrones figurales, se sustentan a partir de los siguientes estándares propuestos por el MEN (2003):

Pensamiento variacional:

- Conoce las propiedades de una serie de razones iguales o proporciones.
- Encuentra un elemento desconocido en una proporción.

Pensamiento métrico y sistema de medidas:

- Deduce y aplica fórmulas para hallar la circunferencia y el área de un círculo.

Se pretende en el desarrollo de las tareas los procesos matemáticos:

- Resolución de problemas: formula problemas matemáticos en el contexto de otras disciplinas y los resuelve con los conocimientos y herramientas adquiridas.
- Comunicación Matemática: utiliza lenguaje, notación y símbolos matemáticos para representar, modelar y analizar alguna situación problemática.

Radford (2017b) plantea que toda actividad debe tener un objeto, el cual es identificado a priori por parte del profesor y es a partir de este que la actividad toma una dirección. Dado lo anterior, se plantea al siguiente objeto y meta de la actividad.

En este caso el Objeto de la actividad es pensar algebraicamente en la solución de tareas sobre secuencias de patrones, así mismo como meta de la actividad se propone, resolver problemas sobre secuencias de patrones figurales.

3.2.1 *Instrumentos*.

A continuación, se presentan las tareas planteadas para llevar a cabo en la institución educativa Liceo de Colombia Bilingüe, con los estudiantes del grado de 3A. Se planteó como contexto para las tareas la canción “Old McDonald has a farm” y a partir de ello se desarrollan las secuencias de patrones.

3.2.1.1 Carrots crop

Mister MacDonald sow carrots, some of them will be food for people, the other ones will be food for animals and the best of them will be seed for the next culture, these carrots are arranged like the pictures show:

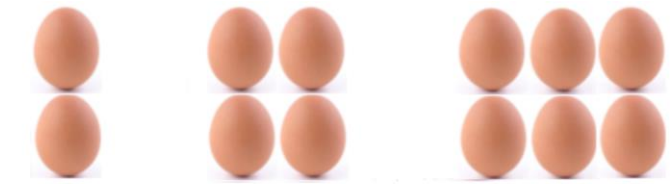
Picture 1 **Picture 2** **Picture 3**

According to the pictures above, answer the following questions:

1. Draw the carrots from the pictures 4 and 8.
2. How many carrots there are in picture 20?
3. Which picture will have 35 carrots?
4. How many carrots there are in picture 100?
5. Write a letter to 1 classmate, where you explain the way to find the number of carrots in any picture.

3.2.1.2 Eggs

Old McDonald has hens, they laid some eggs and Mister McDonald organized them in the way the pictures show:



Picture 1 **Picture 2** **Picture 3**

According to the pictures above, answer the following questions:

1. Draw the pictures 7 and 8.
2. How many eggs there are in picture 12?
3. Which picture will show 22 eggs?
4. How many eggs there are in picture 20?
5. Write a letter to 1 classmate where you explain the way to find the number of eggs in any picture.

3.2.1.3 Hay array

At the farm, Old Macdonald has horses, one of the most delicious food for them, is the hay; on Fridays, he must organize the hay in a specific way, the food has been accumulated as the pictures show:

According to the pictures above, answer the following questions:

1. Draw the pictures 5 and 6.
2. How many rectangles of hay there are in picture 10?
3. Which picture will have 31 rectangles of hay?
4. How many squares there are in picture 100?
5. Write a letter to 1 classmate where you explain the way to find the number of rectangles in any picture.

3.3 Recolección de la información

Es importante aclarar que la recolección de la información fue dispendiosa, ya que el investigador que al mismo tiempo fue el profesor de las sesiones, no se encontraba laborando en colegio bilingüe, por lo tanto, esto podría causar que se cambiaría el contexto de las tareas planteadas y ya no se trabajara en segunda lengua sino en lengua materna. Se realizó la solicitud a diferentes colegios donde se trabajaba las matemáticas en segunda lengua (inglés), pero fue imposible la aprobación de dicha solicitud, tal vez por el recelo que ellos tienen por su proceso de enseñanza-aprendizaje. Fue gracias al Liceo de Colombia Bilingüe, institución del sector privado que permitió la aplicación de las tareas de acuerdo a los permisos firmados por los padres de familia para poder grabarlos y poder hacer el posterior análisis, así mismo se aclara que los videos grabados fue por una persona ajena a la teoría de la objetivación, por lo cual el docente investigador debía hacer algunos señalamientos, para que el camarógrafo enfocara ciertos momentos de la clase, ya que al no conocer la TO el camarógrafo podrían perderse momentos importantes para investigación.

La recolección de la información se llevó a cabo a partir de la colaboración de los padres de los estudiantes del grado 3A y de los directivos de la institución educativa Liceo de Colombia Bilingüe, se desarrollaron 3 sesiones de forma presencial y a causa de la situación de salud generada por el COVID-19, se produjo el aislamiento dirigido desde el Gobierno Nacional, departamental y local, lo cual conllevó a que la educación desde todos los grados de escolaridad se desarrollase de forma virtual. Por tal motivo, la última sesión se desarrolló de esta manera utilizando las plataformas Microsoft Teams para las videoconferencias. Esta plataforma permitió la grabación de la sesión, y la plataforma Moodle para el envío de los productos desarrollados por los estudiantes.

3.3.1 Descripción de la población

El trabajo con las tres tareas se desarrolló en la institución educativa, Liceo de Colombia Bilingüe, colegio ubicado en la localidad de Chapinero en la ciudad de Bogotá. La institución educativa es de carácter privado y de jornada única, según MEN (2018) se diferencian cuatro tipos de jornada en la educación pública y privada. *Jornada obligatoria* es la jornada escolar que comprende el horario entre las 6:00 o 7:00 am a 12:00 o 1:00 pm, la j*ornada complementaria* hace referencia a los programas que complementan el currículo de la jornada obligatoria, *jornada extendida* hace referencia al horario en el que se desarrollan actividades extracurriculares, la *jornada única* comprende el horario de clases que puede iniciar a las 7:00 u 8:00 am y pueden estar finalizando entre las 3:00 o 4:00 pm y *la jornada voluntaria* la cual hace referencia a cualquier horario en el que los estudiantes pueden optar por asistir o no. La institución educativa desarrolla los contenidos de cada asignatura a partir del currículo Cambridge[2] y sobre el modelo de enseñanza de algunas asignaturas en segunda lengua con el modelo CLIL (por sus siglas en inglés Content and Language Integrated Learning). Pero es importante aclarar que las secuencias de actividades se desarrollan a partir de la TO.

---

[2] El currículo Cambridge IGCSE, es un currículo internacional propuesto por la Universidad de Cambridge (Inglaterra), el cual presenta un modelo curricular con estándares académicos internacionales para estudiantes con edades que oscilan entre los 5 y 19 años, dicho currículo consta de cuatro niveles como lo son Cambridge Primary, Cambridge Secondary 1, Cambridge Secondary 2 y Cambridge Advanced, este programa curricular es reconocido por alrededor de 190 países, las asignaturas que se plantea en el currículo san languages, humanities and social sciences, sciences, mathematics y otras de acuerdo a las de necesidades de cada institución educativa y sus respectivos requerimientos de las secretarias de educación. (Almanza, 2016) disponible en: https://www.srg.com.co/noticias/modelo-academico-internacional-de-la-universidad-de-cambridge/.

La población de estudiantes con los que se desarrolló el trabajo de las tres tareas, cursa el grado tercero de primaria, sus edades oscilan entre 7 y 8 años, el grupo está compuesto por 25 estudiantes, 22 de ellos han cursado todos los grados de escolaridad desde first garden (transición) hasta tercero en la institución educativa. Los demás estudiantes ingresaron el presente año. Es importante aclarar que el proceso de enseñanza-aprendizaje que han desarrollado estos tres estudiantes en los anteriores colegios ha sido en la lengua materna.

El nivel de competencia en segunda lengua que deben tener los estudiantes para este grado de escolaridad, según el Marco Común Europeo de Referencia (MCER por sus siglas en inglés) y las directrices de la institución es A2. En este nivel, los estudiantes se encuentran con un dominio básico del inglés, lo cual les permite mantener conversaciones sencillas.

3.4 Descripción de las sesiones de trabajo

Las tres tareas propuestas tenían presupuestadas 6 sesiones para el posterior análisis de los datos, pero debido a la situación de confinamiento al COVID-19 se desarrollaron cuatro, de la cuales tres fueron de forma presencial y una de forma virtual, las sesiones se han desarrollado de acuerdo a la metodología que plantea Radford (2013) con la explicación de las tareas por parte del docente, quien es el investigador, la organización de pequeños grupos que han sido conformados por dos o máximo tres estudiantes, la discusión entre los pequeños grupos junto al docente con el ánimo de direccionar la socialización de lo que cada uno ha desarrollado y poner ideas en común; además de identificar si cada uno de los ejercicios ha sido comprendido por cada uno de los estudiantes y, al final de la sesión,

una posterior socialización de lo que hasta el momento se ha trabajado sobre las tareas retomando las ideas que se han identificado en los grupos.

En la primera sesión se desarrolló la tarea N. 1 (carrots), en la siguiente se desarrolló la N. 2 (eggs), luego se planteó el trabajo del último numeral de las dos tareas anteriores con el fin que los estudiantes se pudieran expresar aún más sobre sus productos. Después de dichas sesiones ocurrió la pandemia, que ha estado afectando al mundo (COVID-19), la cual generó el cambio de la forma del acceso a la educación, por lo tanto, esta sesión se desarrolló de forma virtual por medio de la plataforma Microsoft Teams. Adicionalmente, se trabajó con Moodle, donde los estudiantes enviaban sus productos y descargaban las tareas. En las sesiones presenciales se desarrollaron las cuatro fases que plantea Radford (2020a). La fase inicial fue en la que el docente explicó la tarea a desarrollar, aclarando cada uno de los puntos para, de esta manera, evidenciar la claridad del mismo. Luego de ello, se procedió a desarrollar el primer ejercicio. Cuando los estudiantes dieron respuesta, se planteó que discutieran y compararan con sus compañeros los hallazgos en las respuestas; para ello se organizó el grupo en parejas. Algunos de los estudiantes querían socializar las ideas con sus amigos. Por cuestión de tiempo, el docente solicitó que trabajaran con el estudiante de al lado, a lo cual los estudiantes, en un acto de compromiso con sus compañeros y el trabajo que se estaba desarrollando, accedieron a la propuesta.

Luego de ello, el docente continúa con la explicación de los siguientes puntos de la tarea. Pregunta a los estudiantes si la información ha sido clara y para verificar solicita a alguno de ellos que en sus propias palabras explique lo que se debe hacer y, efectivamente,

así se desarrolla. Al igual que en el momento anterior, cuando los estudiantes finalizan de dar sus respuestas, el docente les propone que discutan sus resultados con los compañeros de al lado, esto con el fin de generar reflexión sobre lo que se ha estado trabajando.

Para la sesión virtual la interacción se dio a partir de lo que la plataforma permitió: pedir la palabra por medio del chat, levantar la mano y/o preguntar a los estudiantes de forma individual y se trató de generar una pequeña discusión entre el grupo para continuar con el reconocimiento del otro e incentivar el trabajo en grupo.

Capítulo 4

Análisis Multimodal

En este capítulo se presenta el análisis realizado a partir de las notas de campo, videos y vivencias por parte del investigador junto con los estudiantes, evidenciando de esta manera las formas en que ellos interactúan, cómo se expresan hacia los demás, cómo es su participación en la actividad matemática desarrollada, además de los intentos realizados por el docente y los estudiantes para generar una labor conjunta en el aula. Indagación hecha a partir de lo planteado por Arzarello (2006), quien indica que el análisis de datos se basa en la concepción multimodal del pensamiento humano, en otras palabras, se debe tener en cuenta la relación de los recursos semióticos que se han movilizado en el trabajo de estudiantes y profesor, los cuales se componen de diferentes modalidades como lo son los gestos, el lenguaje hablado y escrito, símbolos, etc.

A continuación, se presenta una serie de apartados de las diferentes sesiones que se desarrollaron con los estudiantes de grado tercero A de la institución educativa Liceo de Colombia Bilingüe, donde se analizan diferentes aspectos que emergen y están presentes en la actividad matemática trabajando con la secuencia de patrones. Lo anterior da cuenta de un trabajo reflexivo y en conjunto que demuestra el esfuerzo de los sujetos al trabajar *hombro a hombro* para intentar hacer emerger una labor conjunta.

4.1.1. Alejandro, Martín y el profesor tratando de ser subjetividades

Old MacDonald has a farm …

Carrots crop

Mister MacDonald sow carrots, some of them will be food for people, the other ones will be food for animals and the best of them will be a seed for the next culture, these carrots are arranged like the pictures show:

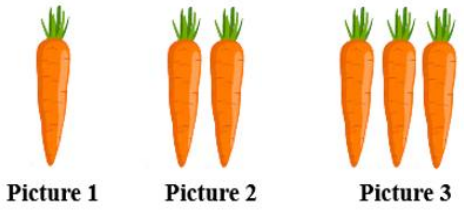


Imagen 4 Secuencia de patrones tarea 1

En la imagen 4 se presenta la secuencia de patrones planteada a los estudiantes. Se les indicó que desarrollaran cada uno de los ítems de la tarea, el primero de ellos decía: Draw the elements that there are in the pictures 4 and 8. El segundo y tercero: how many carrots are there in the picture 12 and 20? respectivamente. El cuarto: Which picture will have 35 carrots? Y el quinto enunciado decía: Write a letter to 1 classmate where you explain the way to find the number of carrots in any picture without using the previous picture.

Para esta parte del análisis, se centra la atención en el quinto enunciado de la tarea donde se le proponía a los estudiantes que, de acuerdo a lo que habían desarrollado en los ejercicios anteriores, explicaran por medio de una carta dirigida a uno de sus compañeros (suponiendo que este no hubiera asistido) la forma de saber cuántas zanahorias habrá en

cualquier imagen. El docente, luego de terminar la explicación de lo que se debía hacer en este apartado de la tarea, procede a caminar por el salón para identificar el trabajo que están desarrollando los grupos de estudiantes. Se detiene en el grupo de Martín y Alejandro, con el fin de verificar su trabajo, ya que se veían muy tensionados por resolver este ítem y a partir de dicha situación se desarrolla la transcripción.

1 Profesor: Did you finish boys? (*refiriéndose a toda la clase, pero mirando a Martín y Alejandro*).

2 Alejandro: Which point mister? (*dudando del ítem en el cual debería ir*).

3 Profesor: Do you finish to write the letter? (*mirando a Martín y Alejandro*).

4 Alejandro: Hmmm? (*cierra los ojos y no sabe qué responder*)

5 Profesor: Do you know what is a letter? (*refiriéndose a Martín ya que no lo estaba mirando*)

6 Martín: Carta, ¡la carta! (*sonrié al saber que tiene la respuesta*)

7 Alejandro: But who? (*preguntándole al profesor sobre el destinatario mientras ansioso toca sus manos*).

Imagen 5 Martín Inexpresivo

Imagen 6 Martín angustiado

Imagen 7 Martín feliz

En la línea 7 se logra evidenciar una situación en la que Alejandro se muestra ansioso, ya que no logra entender a quién debe dirigirse la carta, a pesar de que el docente ya había explicado cómo proceder en este punto. Hasta aquí Alejandro y Martín dan a conocer parte de sus sentimientos como lo es la ansiedad en la línea 7 y alegría en la línea 6 así mismo como se presenta en las imágenes 5, 6 y 7. Algo que tal vez no sea muy común que se analice en el aula de clase, como lo menciona Radford (2018b): "El aprendizaje de las matemáticas implica emociones y afecto en maneras que nos afectan profundamente como seres humanos, por eso las aulas no solo producen saberes, sino también subjetividades" (p. 9). Aquí se interpreta a los estudiantes y el docente como subjetividades a partir de lo que indica Radford (2020a), sujeto cultural, concreto y sensible. Se evidencia la inscripción en la sociedad de Martín y Alejandro a partir de sus materializaciones, en este caso, de su lenguaje verbal al indicar que no saben lo que se debe hacer pero, aun así, preguntan para poder desarrollar la actividad y el docente como subjetividad a partir de estar en continua reflexión sobre su quehacer, qué preguntas plantear y cómo dirigir la interacción, siendo afectado de forma reflexiva. Luego de que el docente ha explicado a quién debería dirigirse la carta, menciona lo que cada uno de ellos debe hacer para dar solución al ejercicio.

8 Profesor: And in the letter you should explain how we can know how many carrots are there in any picture (*le toca el hombro a Alejandro para que pare de girar y lo mire mientras le explica*).

9 Martín: And, we have to write it in English? (*hace una cara de preocupación*).

10 Profesor: Yes.

11 Martín y Alejandro: Noooo (*frunciendo el ceño y girando su cuerpo hacia atrás en su puesto*).

12 Profesor: Try to do it, I know that you can know, if you don't know any word you can ask me.

En la línea 9, Martín intenta persuadir al profesor sobre el idioma en el que se debe escribir la carta, aun sabiendo que la clase se desarrolla en inglés, guardando la esperanza de que el profesor responda que se podía trabajar en la lengua materna. Al recibir la respuesta por parte del profesor, como se ve en la línea 10, Martín hace una cara de angustia (Imagen 6), ya que su aprendizaje en los grados de escolaridad anteriores ha sido en su lengua materna, y de acuerdo a sus comentarios sobre si puede desarrollar el producto en español y la interacción con el profesor se evidencia que Martín, no se siente seguro de lograr desarrollarla. Aun así, el docente los invita a escribir la carta diciéndoles palabras que podría ser motivadoras: you can do it, your english level is prety cool, and if you have any question ask me, I Will help you. Motivadoras para que continúen con su compromiso en el trabajo que hasta el momento han desarrollado y no se dé la alienación hacia la tarea en este caso, de esta manera el docente genera empatía con los estudiantes. Dichas palabras resultan ser motivadoras para los estudiantes, ya que las logran comprender y se identifica dentro de la interacción y la evidencia de su producto que los estudiantes continúan trabajando *hombro a hombro* con el compromiso para continuar laborando juntos. Radford (2020b) menciona que en la empatía no solo se muestra compasión, sino que también se da el reconocimiento de nuestra fragilidad y la fragilidad del otro. Con la motivación generada, el docente desea que

los estudiantes se expresen, indicando el por qué no quieren trabajar en inglés. Es por ello que continúa promoviendo la discusión con ellos.

13 Profesor: Why you don't want to write in English? (*tocando el hombre de Alejandro para llamar su atención*).

14 Alejandro: because it's low, low difficult (*tocando sus dedos de la mano derecha con los de la izquierda*).

15 Profesor: Why you don't want to write in English? (*refiriéndose a Matias*).

16 Martín: Ok (*no responde y continúa su trabajo*).

17 Profesor: Don't worry about it, if you have any question or you don't know any word, ask me and I'll help you. Continue working your English level is pretty cool. (*tocando el hombre de ambos*).

18 Alejandro: Ok.

El docente identifica que, al escribir la carta en inglés, tanto Martín como Alejandro no se sienten seguros de lograr completar su producto. Alejandro da sus razones mencionando que escribir en inglés es un poco difícil (línea 14) aunque la palabra usada por el estudiante debería ser little o bit se entiende a partir de la interacción que a lo que él se refería era que escribir en inglés era un *poco* difícil, comprendiendo de esta manera lo que los estudiantes significan por medio de sus palabras, en palabras de Eco (1988, citado por Vergel, 2014) "La compresión en que las personas significan y comunican" (p. 88). Aun así, el docente hace esfuerzos mediante los cuales intenta que los estudiantes no se alienen de la

actividad y su producto. Usa palabras de motivación para que de esta manera continúen con dicho trabajo y les indica que les ayudará con las palabras que ellos no conozcan en inglés, ya que como menciona Marx (Citado por Sossa, 2010), se pueden presentar diversas formas de alienación, entre ellas que el sujeto no se proyecte sobre su producto, no sienta que sea de él. Alejandro y Martín no se sienten identificados con lo que deben hacer o, en otras palabras, se sienten limitados en el desarrollo del trabajo por las diferencias culturales que tienen, en este caso, su vocabulario en segunda lengua. Martín y Alejandro continúan inscribiéndose en la sociedad reflexionando y expresando sus ideas sobre el por qué no trabajar en un idioma u otro, aun así, continúan con su actividad a partir de la conversación que tuvieron con el docente donde este les muestra empatía y motivación, sentimientos de gran importancia para que los estudiantes continúen trabajando en su producto y coproduciéndose como seres de su cultura. Radford (2020b) hace referencia a la empatía como una de las características más centrales de lo que nos hace humanos, “es decir el reconocimiento de nuestra fragilidad en la fragilidad del otro” (p 58).

Así mismo, como los estudiantes se inscriben como subjetividades en su sociedad, de igual manera lo hace el docente, quien se inscribe como sujeto que colabora junto a ellos para lograr hacer emerger la covariación como resultado del producto que están desarrollando y, dentro de esta inscripción, de los sujetos se producen sentimientos en los *seres humanos sensibles*, sentimientos que ayudan a coproducirse (docente-estudiantes) como subjetividades, tal como menciona Radford (2020b) “la coproducción de los estudiantes como subjetividades y su inscripción en el mundo social se lleva a cabo en procesos (procesos de subjetivación) que ocurren cuando los niños participan en la actividad en el aula” (p. 55).

A partir de lo anteriormente analizado, se puede identificar que un factor alienante del alumno hacia la actividad puede ser el uso de la *segunda lengua* por parte del estudiante. Como se evidencia en la línea 16, no responde a la pregunta del docente, solo indica un “ok”. Este factor se puede generar siempre y cuando no se le dé unas posibilidades al estudiante para que se exprese como sujeto que puede interactuar en dicha actividad. A partir del cuidado del otro se identifican las necesidades que tienen Martín y Alejandro y aún el docente les invita a trabajar juntos (líneas 12 y 17), para que esto no sea un factor que los aliene.

4.1.2. Tomás y el profesor trabajando juntos

Imagen 8 Tomás y el profesor trabajando juntos

Este apartado analiza la inscripción de Tomás y el profesor en su trabajo por movilizar el objeto del saber. En la imagen 8 se presenta la interacción entre Tomás y el profesor, donde Tomás presenta la carta (producto) que le ha escrito a alguno de sus compañeros y se acerca al docente para mostrar sus avances. Aquí el docente quiere que

Tomás le explique lo que escribió en la carta, esto con el ánimo de hacer emerger la covariación existente entre el número de la imagen y la cantidad de zanahorias correspondientes y, a partir de dicha reflexión, movilizar el saber matemático en el aula.

1 Profesor: Ok Tomás, please explain, what did you write in your letter?

2 Tomás: Sara, I am Tomás, you didn't come, I am help you. The number of picture is the number of the carrots, for example (*Señala con su dedo el número de la figura y la cantidad de zanahorias*).

3 Profesor: Ok (*motivándolo a que continúe con su descripción*).

4 Tomás: For picture 1, 1 carrot. For picture 4, 4 carrots *(señala con su dedo una flecha que había dibujado*).

5 Profesor: And what does this arrow means in the example? (*Señalando la flecha que había dibujado Tomás*).

6 Tomás: The same, the total of carrots and the picture is equal.

Imagen 10 Tomás señala con su dedo la relación existente entre las variables

Tomás en su discurso ya está hablando de una generalidad con respecto a la secuencia de patrones que se le presentó. En la línea 2, él menciona que el número de la cantidad de zanahorias es el mismo de la imagen, señalando con el dedo como se muestra en la imagen 10; aunque no menciona la palabra “igual”, a partir de la interacción se identifica dicha relación. Ahora, en la línea 6 menciona la palabra “igual”, identificando la covariación existente entre la variable dependiente (número de la imagen) y la variable independiente (cantidad de zanahorias) como se evidencia en la imagen 11. En este caso específico se evidencia el surgimiento de Tomás como subjetividad que se posiciona como sujeto de la sociedad en la cual se encuentra inscrito, teniendo su perspectiva sobre la covariación existente en la tarea 1, y es a partir de la materialización de su conocimiento en su producto, en su discurso y los gestos usados para expresarse como sujeto, que se afecta de forma continua y reflexiva con el trabajo con el docente (Radford 2020b).

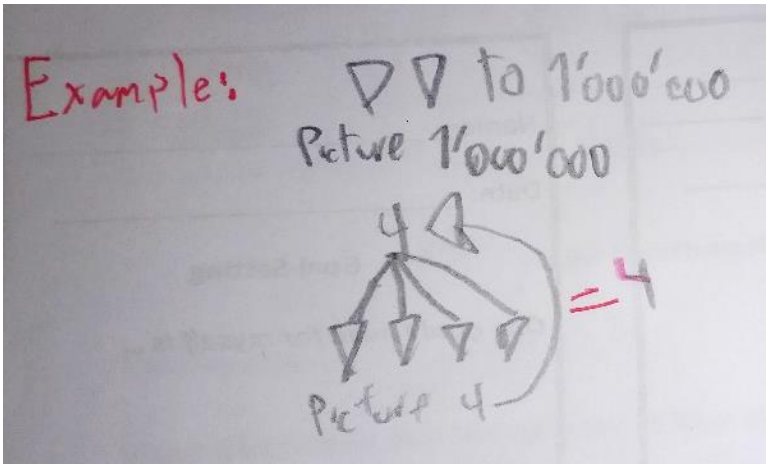


Imagen 11 Relación entre variable dependiente e independiente en el producto de Tomás

Además de ocupar su espacio en la sociedad, se muestra como un sujeto ético y reflexivo (Radford, 2020a), sujeto que tiene *compromiso hacia los demás* al hacer todo lo posible por desarrollar su producto, como lo es interpretar las ideas del profesor, interactuar con sus compañeros en una primera instancia y coproducirse a partir de su trabajo e interacción. Con el desarrollo de su producto se logra identificar de cierto modo el *cuidado del otro*, al reconocer las necesidades de Sara como estudiante, las cuales se identifican que para cualquier estudiante una de sus necesidades para inscribirse en la sociedad en la cual se está inscribiendo logre materializar sus conocimientos, en este caso en la comprensión del objeto matemático, y que al lograr suplir estas necesidades esto le permitirá inscribirse como sujeto en la sociedad en la que, observando que no puede haber separación de las matemáticas y la ética o como menciona Radford (2020b) *ética comunitaria,* "La ética comunitaria debe posibilitar que estas formas de colaboración se den en la medida que hay un compromiso de trabajo conjunto, un cuidado del otro y se asuma una responsabilidad hacía los otros" (León y Lasprilla, 2018, p. 89).

Así mismo, se evidencia el docente como subjetividad (Radford, 2020b) que se posiciona como el sujeto que en el aula debe generar la discusión para que ambos coproduzcan dentro de la idea de covariación y quien ayuda a Tomás para mejorar su experiencia sobre el objeto de la actividad. Adicional a ello y en su coproducción como sujeto y por medio de ello se evidencia el *ser* (Radford, 2020b), ya que es a partir de las materializaciones de docente como lo es su discurso y su interacción como se reconoce en el mundo.

4.1.3 Algunas formas de Colaboración humana

Dentro de la sección de clase, el docente y los estudiantes intentan hacer desarrollar una labor conjunta a partir de su interacción o, como lo denomina Radford (2020a), *formas de colaboración humana*. Se identifican diferentes formas de dirigirse al otro, formas de actuar y formas de colaborar, entre las cuales se tiene referencia las formas de dirigirse al otro a partir de diferentes extractos de clase de las cinco sesiones que se desarrollaron.

4.1.3.1 Sesión 1, momento 1

1 Profesor: Who can help me reading this part (*Refiriéndose al enunciado de la situación de la secuencia de patrones que se está proyectando en el vídeo beam*. *Federico y Alba levantan la mano*).

2 Profesor: Ok Alba help me, please, read.

3 Alba: Carrots crop, mister McDonald sow carrots … (*Continúa leyendo*).

4.1.3.2 Sesión 1, momento 2

4 Profesor: Read the exercise and continue solving the other ones. Who can help me? (*dirige su mirada a todos los estudiantes del salón y algunos levantan la mano para indicar que desean ayudarle*).

5 Alejandro, Valentina, Federico: I, mister (*Responden en coro ya que sienten que solo levantar la mano no es suficiente para que el profesor se fije en ellos).*

6 Profesor: Ok Valentina and Alejandro, help me (*les entrega las hojas con la tarea y los demás estudiantes quedan tristes por no haberles dado la indicación a ellos*).

4.1.3.3 Sesión 1 momento 3

7 Profesor: How many carrots are in picture 1, picture 2 and picture 3, we need to answer this question to know how many will have in picture 4 and 8, for example, how many carrots are there in picture 1? (*5 estudiantes levantan la mano*).

8 Alba: One (*responde con la mano levantada, aunque el profesor no le ha dado la palabra*).

9 Profesor: Do you agree? (*pregunta mirando a los demás estudiantes que levantaron la mano*).

10 José, Shakira, Alejandro, María Paz: Yes (*bajan la mano*).

4.1.3.4 *Sesión 1, momento 4*

11 Isabella: Mister, I don't understand (*se dirige al profesor con la mano levantada*).

12 Profesor: Ok, Tell me how many carrots are there in picture 1 (*Señala la figura 1*).

13 Isabella: One … (*Continúan con la interacción*).

4.1.3.5 *Sesión 1, momento 5*

El docente se acerca a un grupo de estudiantes para identificar si entendieron lo que se debe hacer en el punto 5.

14 Profesor: Sebastian, do you understand what you have to do to solve point number 5?

15 Sebastian: Yes, we need to write a letter to other person (*responde repitiendo las palabras que había mencionado el docente anteriormente, mientras que Celeste levanta la mano para intentar completar la idea de sus compañeros*).

16 Profesor: And you Celeste, what did you understand?

17 Celeste: We should write a letter to another friend where we explain how many carrots are there in the pictures (*refiriéndose a la cantidad de zanahorias de cada figura*).

4.1.3.6 *Sesión 3 momento 1*

En esta sesión el docente les plantea a los estudiantes escribir la carta con mayor detenimiento, ya que ellos habían logrado identificar que la cantidad de zanahorias

era igual al número de la imagen, pero lo hacían con números específicos más de forma general. Así que, el docente revisa la carta con el estudiante para que juntos puedan movilizar la relación de covariación a partir de su interacción.

1 Matías: Mister I finish (*levanta la mano y hace que entrega la hoja*).

2 Profesor: Ok, let me see, *hello, for picture 10 = ten carrots, any picture for this example* (lee detenidamente la carta que escribió Matías), Ok it's great but now, try to explain this for big numbers or better for any number.

3 Matías: Ok.

El común denominador en las descripciones anteriores que se puede evidenciar que la interacción entre docente y estudiante inicia de una forma, tal como Radford denomina emisor-receptor, y se puede convertir de cierta manera en una situación alienante hacia la *actividad*. Este tipo de alienación Marx (Citado por Sossa 2010) la ve como una situación que no le pertenece ni en la cual se siente identificado. Por ejemplo, en la sesión 1 momento 3, exactamente en la línea 9, ni el docente permite que se cree una discusión entre indicar si están de acuerdo o no con lo que dice Alba, se puede dar la alienante hacia el otro, ya que ellos analizan que, si el docente aprobó lo que indica la compañera, efectivamente está bien sin permitir la reflexión entre ellos.

Así mismo, dentro de estas interacciones se puede evidenciar la ética que Marx (1998, citado por Radford, 2020a) menciona como capacidades humanas, como la voluntad, el amor, la cooperación y la solidaridad, capacidades humanas que se desarrollan en el aula con seres vivos, que sienten, actúan, sudan y sufren (Radford 2020a), como por

ejemplo en la parte 2 línea 6, los estudiantes quedan tristes al ver que el profesor no los eligió para la labor que había planteado en ese momento (entregar las hojas). Este tipo de acciones, permite ver al ser humano que siente y que actúa en el aula y en la clase de matemáticas.

En cada una de las transcripciones anteriores se logra evidenciar cómo la acción de levantar la mano para pedir la palabra y poder participar (formas de dirigirse al otro), ya sea que se esté trabajando con el grupo general o pequeños grupos, es necesaria para que en este caso el profesor, quien dirige la interacción permita que los estudiantes logren responder sin que se interrumpan entre ellos, respetando así la respuesta del otro (compromiso hacia los demás). Esta acción de levantar la mano es una forma de dirigirse al otro y de interactuar, lo cual evidencia una *actitud* planteada por la sociedad en la que se encuentran inscritos los estudiantes, ya que desde grados inferiores les han enseñado a pedir la palabra. Este tipo de acciones se reflejan en lo que Radford (2020b) menciona como el *ser* que es a partir de la interacción (levantando la mano para pedir la palabra y discutir), cómo se materializa y materializa sus ideas al mundo concreto por medio del lenguaje y es a partir de esto que, tanto estudiante como docente, se reconocen como lo que son (sujetos que interactúan en el aula con un propósito), siendo en este caso particular el propósito de movilizar el saber a partir de las discusiones que se pudieron dar. Ahora el docente y los estudiantes están *siendo* por medio de estas, (algunas) formas de colaboración humana a partir de la actividad humana que han venido desarrollando en dicha interacción, ya que se logran concebir como sujetos que trabajan hombro a hombro para hacer emerger el *saber* Radford (2020b).

Otras de las formas de colaboración humana que se lograron evidenciar dentro del trabajo fue el cuidado del otro a partir del reconocimiento del otro (Radford, 2020a), ese otro que esta interactuando conmigo y con el que nos respetamos nuestras ideas. Los estudiantes cuando responden al llamado del profesor a partir de las preguntas que este hace, con el fin de generar interacción, se logra identificar el compromiso hacia los demás como la promesa y aplicación de hacer todo lo posible dentro de la interacción (Radford, 2020a) para lograr la obra común (Hegel 2001, citado por Radford, 2020a).

Además de ser un forma de interacción o *Colaboración humana*, es una forma de producción, ya que esta permite desarrollar lo que Gödelier (2010, citado por Radford 2016) menciona como *control y distribución de la fuerza*, puesto que el sujeto sabe en qué momento es en el que debo participar, teniendo en cuenta que anteriormente el docente me dio la palabra, la acción de ceder la palabra y pedir la palabra se puede ver de esta manera, el cómo el docente y los alumnos se distribuyen la fuerza de su trabajo.

4.1.4 El producto como ayudante a la producción de subjetividades

Se realizaron inicialmente tres sesiones presenciales. En la primera sesión se desarrolló la tarea de la secuencia de patrones de las zanahorias (Imagen 11), para la siguiente sesión se trabajó la secuencia de patrones de los huevos (Imagen 12) y para la tercera el docente analizó que sería pertinente que en esta sesión se desarrollarán los numerales 5 de las tareas anteriores, con mayor tranquilidad para que los estudiantes se pudieran proyectar sobre su producto, así que se realizó el análisis del primer producto con respecto al segundo.

Es importante aclarar que para el momento en el que los estudiantes escribieron las cartas, todos habían asistido a la sesión de clase, por lo que se les planteó que ellos debían escribir una carta haciendo de cuenta que el destinatario de la carta no había asistido, esto con el fin de que los estudiantes expresarán sobre su producto toda la idea de las secuencias de patrones que se habían desarrollado en clase.

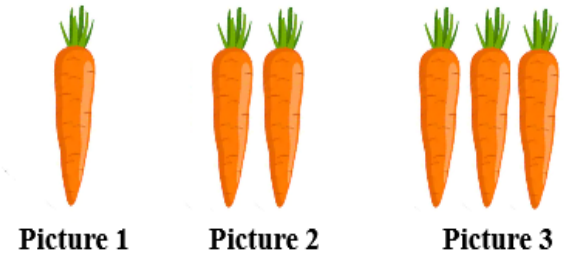


Imagen 12 Secuencia de patrones tarea 1

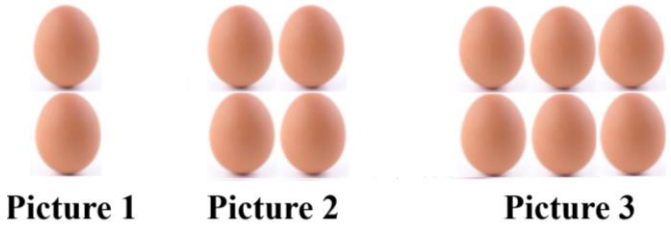


Imagen 13 Secuencia de patrones tarea 2

Para este momento, los estudiantes debían trabajar de forma individual sobre su producto, pero para que el producto se llegará a obtener de la mejor manera debían trabajar en conjunto docente y estudiantes, así que para este caso la *responsabilidad* de los estudiantes era escribir las ideas que habían desarrollado a lo largo de las sesiones sobre la generalización de cada una de las secuencias y, a partir de ello, con la carta tratar de explicarle a un compañero que no haya asistido a clase cómo se da la generalización de dichos patrones. La

responsabilidad del docente, quien se activa, gasta energía generando discusiones con los estudiantes de tal manera que no se alienaran sobre su producto, reconociéndose en sus producciones. Además de indicar la traducción de algunas palabras que ellos desconocían, en otras palabras, al llamado del otro.

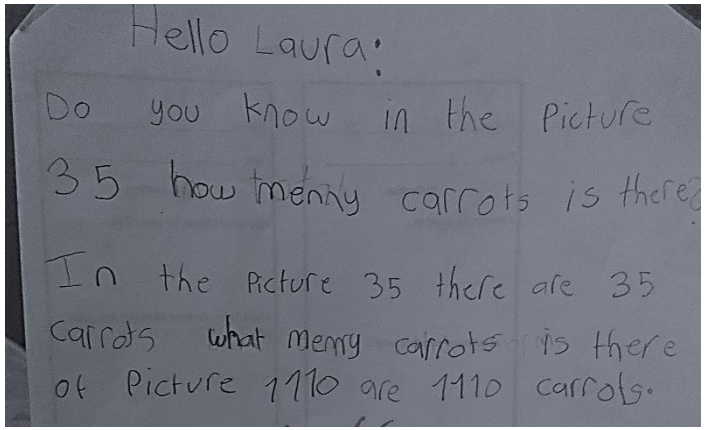
<table>
<tr>
<td>


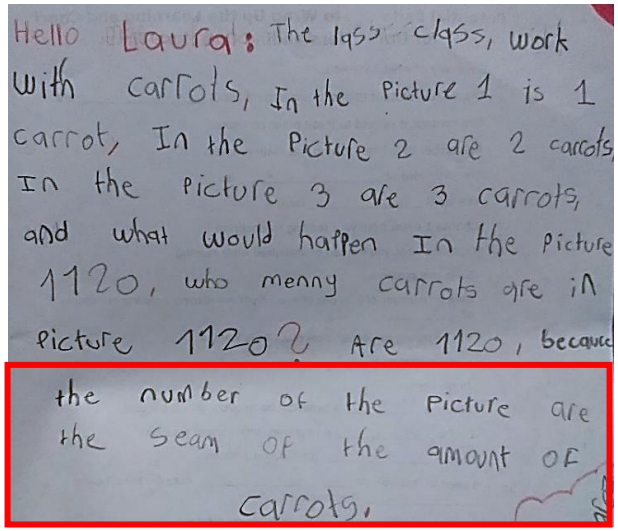
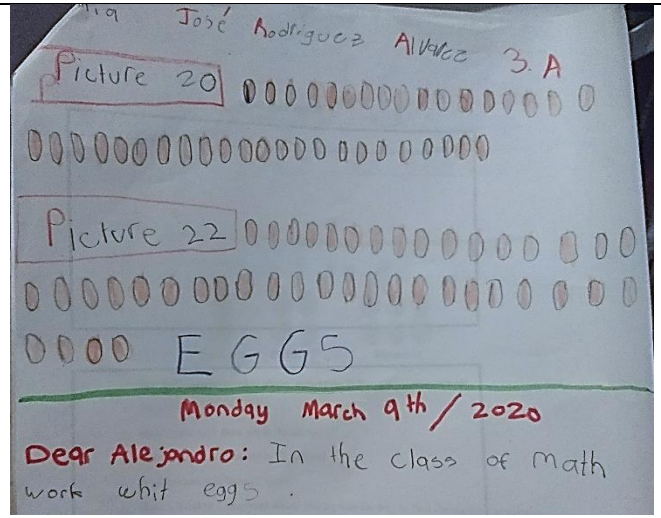
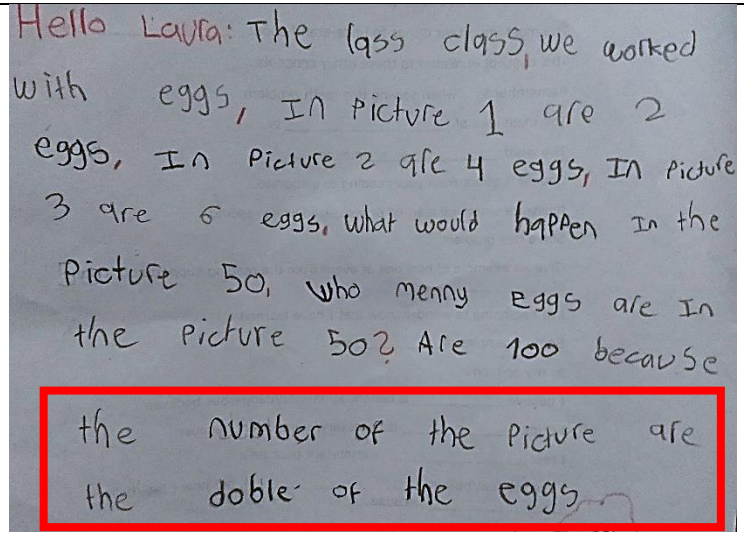
Imagen 14 Primer producto de María José (tarea 1)
</td>
<td>


Imagen 15 Segundo producto de María José (tarea 1)
</td>
</tr>
<tr>
<td>
En este primer producto se logra evidenciar el trabajo de María José, quien logra dar ejemplos sobre la forma de hallar la cantidad de zanahorias con respecto al número de la imagen. Hay *covariación* entre la variable independiente y la dependiente. Adicional a ello, hablando desde la ética comunitaria, se evidencia el *cuidado del otro* (Radford 2020a). En este caso, el reconocimiento de las necesidades de Laura, necesidades que emergen como estudiante que se inscribe dentro de la
</td>
<td>
En este segundo producto, María José ya ha podido discutir con el docente acerca de su trabajo, el cual es la ejemplificación de algunas secuencias (como se evidencia en el primer producto), pero además de ello, se logra evidenciar la generalización que hace del patrón que se presenta en la tarea al indicar que el número de la imagen es igual a la cantidad de zanahorias. Así mismo, se identifica al *cuidado*
</td>
</tr>
</table>

sociedad con la que trabaja. Entre ellas está el comprender el objeto matemático, colaborar junto a sus compañeros, etc. Laura como un ser que está inscrito en su comunidad y para su continua inscripción necesita comprender cómo funciona el patrón que María José, con anterioridad, ha movilizado en el aula.	*del otro* de parte de María José se evidencia el compromiso, primero hacia la actividad con el docente al realizar su producto y segundo a trabajar, aunque no directamente con su compañera.

Dentro de los productos, además del análisis anterior, se logran evidenciar las formas de colaboración humana que han surgido luego del trabajo entre el profesor y estudiante. Para que María José se logre producir como subjetividad (Radford 2020b), quien, a pesar de las dificultades que se presentaron en el aula y con su esfuerzo, es afectada de forma reflexiva y continua para lograr la materialización de parte de su pensamiento en sus productos, en su discurso y en el trabajo del reconocimiento de las necesidades de su compañera. La reflexión con el docente se materializa como estudiante que está siendo (Radford, 2020b), y esto la permite concebirse como sujeto perteneciendo a la sociedad que se inscribe.

 *Imagen 16* Primer producto de María José	 *Imagen 17* Segundo producto de María José
En este primer producto se evidencia que María José no finaliza su trabajo, el cual ayudaría a su compañero a comprender lo que no había podido vivenciar al no poder asistir este día. No se logra reconocer la generalización de los patrones de esta tarea, ya que no hay una descripción que permita analizar dicha información. Se podría ver a María José *alienada al producto* (Marx citado por	En este segundo producto María José, aunque cambia el destinatario de su carta, tal vez porque se sentía más identificada con su compañera, logra desarrollar un acercamiento a la generalización, aunque no es la que indica el patrón, ya que se confunde sobre cuál es el doble de cual, pero a partir de la interacción con la estudiante se comprende lo ella quería decir que era “el número de huevos es el doble del número de la imagen”, en palabras de Eco (1988, citado por Vergel, 2014) “La

Sossa, 2010), ya que no se siente identificada con este, por lo tanto, no lo desarrolló. Para este caso se puede ver la variable *tiempo* como un factor alienante de la actividad, ya que este no permite que, tanto María José como algunos estudiantes, logren primero reconocerse en su producto y segundo colaborar con los demás.	compresión en que las personas significan y comunican" (p. 88). Además de ello ya se puede evidenciar del *Responsabilidad* (Radford, 2020a), que tiene María José hacia Laura por la compresión sobre la secuencia de patrones que ha trabajado en las sesiones.

A partir, tanto del producto inmediatamente anterior (tarea de los huevos) como el que le antecede (tarea de las zanahorias), se ve el proceso de María José como subjetividad, en el que ella como *ser* (Radford 2020b) ha estado comprometida en sus productos y el trabajo con los demás para lograr lo que es uno de los objetos de la actividad humana: *movilizar el saber* (generalización de patrones) movilización que se da a partir de sus productos e interacción en el aula. Ahora, dentro de su trabajo, ella ha sido y está siendo reconocida a partir de sus materializaciones y logró el *becoming*, a partir de su materialización como sujeto de la sociedad, como proyecto de vida en devenir (Radford 2020a, 2020b). Por lo tanto, partiendo de las complicaciones que tuvo se logró desarrollar como una subjetividad en el aula, como un sujeto cultural concreto y sensible.

La variable *tiempo* es mencionada como un factor alienante a la actividad. El docente no permitió que en las siguientes sesiones esto se diera, por ello, a partir de lo vivenciado en las sesiones, planteó una sesión adicional en la que ellos trabajaron únicamente en la creación de su producto con respecto al numeral 5 de la tarea 1 y 2.

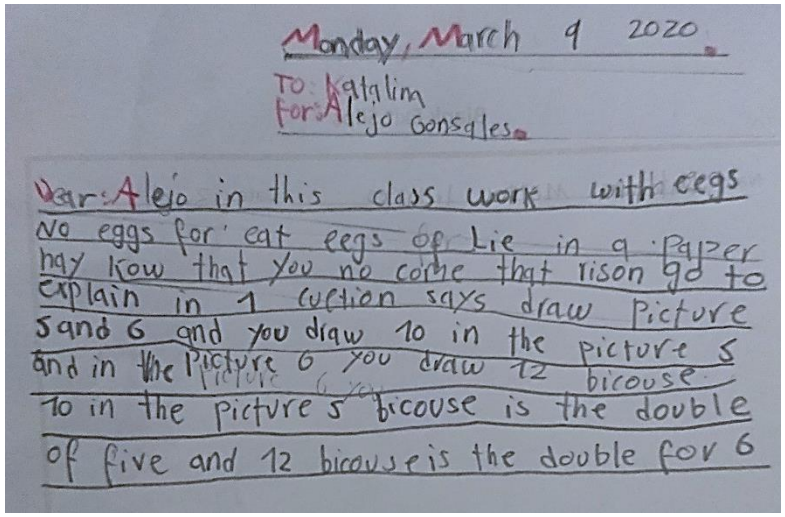


Imagen 18 Primer producto de Katalina

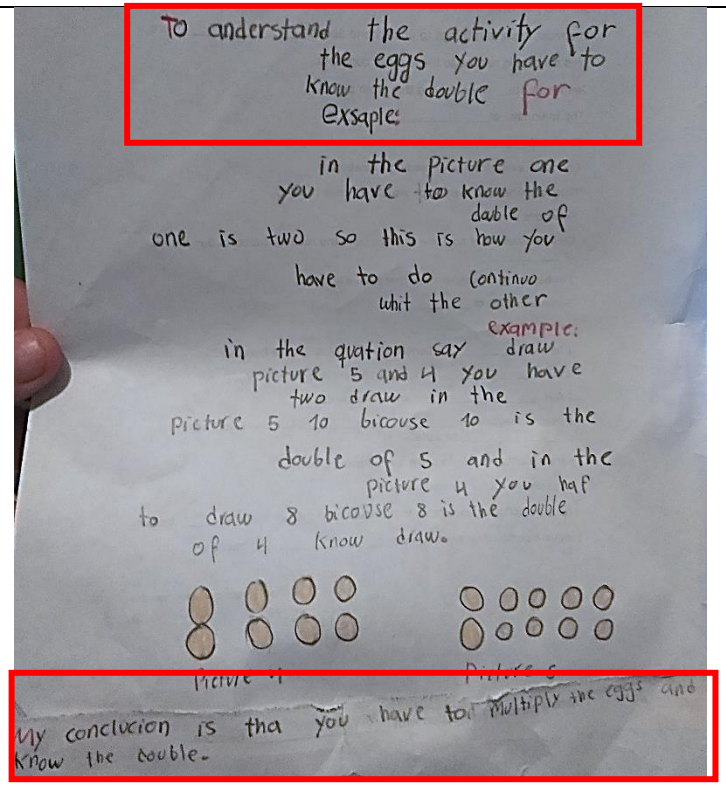


Imagen 19 Segundo producto de Katalina

En este primer producto, Katalina logra reconocer la situación de Alejandro al no poder asistir a la clase (de acuerdo a las instrucciones del profesor), y su necesidad como estudiante de comprender la secuencia que ella logró trabajar con los

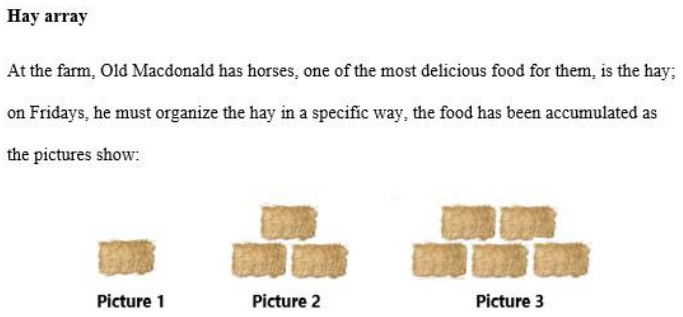
En este segundo producto Katalina logra interactuar con sus compañeros, además de discutir con el docente. Se evidencia cómo logra movilizar el saber sobre secuencia de patrones de acuerdo a la discusión desarrollada con el profesor. En este caso,

compañeros y el profesor, identificando de esta manera, la categoría del cuidado del otro. Con respecto a las formas de producción de saberes, Katalina presenta el *acceso que tuvo al recurso* (Godelier, 2010 citado por Radford, 2016) en este caso el recurso de su lenguaje, sus nociones y sus interacciones para lograr expresarse en este producto.	sobre la imagen de la cantidad de huevos, inicialmente ella identifica que Alejandro debe reconocer que toda la actividad es entorno al doble (como se muestra en la parte superior de la imagen) da ejemplos sobre algunos casos y al final logra dar una conclusión sobre lo trabajado, mencionando el tener que trabajar con la multiplicación y, de esta manera, obtener el doble. Aunque no lo dice, se evidencia la generalización de la secuencia planteada, ya que menciona la multiplicación para doble, pese a no ser clara con su idea. A partir de la interacción y de las notas de campo se evidenció la relación de covariación entre la variable dependiente y la independiente. Comprendiendo la idea de Katalina en su conclusión. “La compresión en que las personas significan y comunican” (Eco, 1988, citado por Vergel, 2014, p. 88).

Fue de vital importancia el trabajo de los estudiantes con el profesor. Un ejemplo es el caso de Katalina, en el que se evidencia que, aunque tiene la idea del patrón que está trabajando, no logra hacer la generalización del mismo, ya que solo da ejemplos en la sesión 3, donde el docente le permitió a los estudiantes volver a escribir las cartas y, a partir de ello, lograr expresarse con mayor experiencia sobre el producto, para el *becoming* (Radford 2017, 2020b) al materializar sus ideas en el mundo concreto en el que habita, evidenciando a la estudiante como la *subjetividad* que es a partir de su trabajo desarrollado en el aula.

4.1.4 Intento de labor conjunta en la virtualidad

Debido a la situación de COVID-19, surgió la necesidad de desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de las pantallas del computador. Ya los estudiantes no levantaban la mano de forma física, sino que pedían la palabra por medio de lo que permitía la herramienta de las reuniones virtuales (por medio del chat). Para esta sesión se trabajó la secuencia de patrones de la imagen 19, se plantearon los numerales 1, 2, 3 y 4. En el primero, debían dibujar las figuras 5 y 6; en el segundo, debían indicar cuántos henos habrá en la imagen 10; así mismo, en el tercero se pregunta "¿Qué imagen tendrá 31 henos?" Y, por último, en el cuarto se pregunta cuánto heno habrá en la imagen 100.



Hay array

At the farm, Old Macdonald has horses, one of the most delicious food for them, is the hay; on Fridays, he must organize the hay in a specific way, the food has been accumulated as the pictures show:

Picture 1 Picture 2 Picture 3

Imagen 20 Secuencia de patrones (Tarea 3)

En esta sesión el docente menciona a los estudiantes algunas de las preguntas y ellos deben responder por medio del chat de la plataforma. Otra forma de interacción se da cuando el docente le pregunta a un estudiante específico y este enciende su micrófono y responde a lo preguntado. Adicional a ello, el docente evidencia el trabajo de los estudiantes cuando estos activan sus cámaras y por allí muestran sus respuestas (Imagen 20), como se aprecia en el siguiente diálogo.

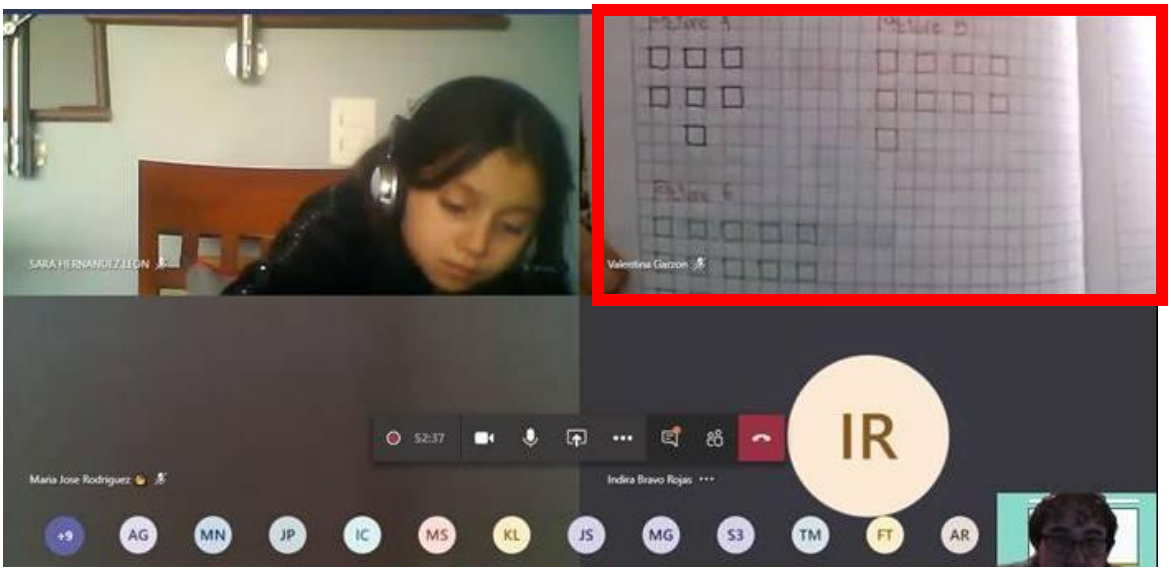


Imagen 21 Valentina mostrando su producto a través de su cámara en la plataforma Microsoft Teams

1 Profesor: So, guys I would like to see the pictures that you draw, so turn on your camera and let me see, for example, María José, turn your camera on and show me your notebook.

2 María José: Can you see my notebook (*Mientras lo está mostrando el docente le pide que mueva el cuaderno en ciertas direcciones para poder ver mejor las imágenes*).

3 Profesor: Ok Majo, thank you so much, now I would like to ask some questions about your job. If I have some questions this doesn't mean that your job it's bad or good, just questions (*indica estas palabras con el propósito de que el estudiante no piense que su producto está bien o mal desarrollado y de esta manera permita que logre hablar sobre este*). Tell me why do you change the way of the hay?

4 Valentina: I do in picture 2 is 3 rectangles, in picture 3 are 5 rectangles, so in five I draw 7. (*intentado dar su respuesta de forma pausada ya que no sabe cómo explicarse*).

5 Profesor: Yes, the question is why do you change the way to draw and organize the hays?

6 Valentina: Because I do like a group and that why I change (*dando a entender que el organizar de esta manera no cambiaba la cantidad de figuras que había en la imagen*).

En este apartado se logra evidenciar el esfuerzo que hay en dicho momento de la sesión por movilizar las ideas que tienen los estudiantes con respecto al numeral 1. Adicional a ello, el docente plantea la discusión a desarrollar junto con Valentina, con el propósito de hacer emerger una persona crítica que se cuestione sobre si afecta o no la forma en la que se organicen los rectángulos de heno (como se evidencia en la línea 3 y 5). Aunque ella en su limitación al expresar sus ideas en segunda lengua, no porque no la sepa, sino

porque la está aprendiendo y al estarla aprendiendo no tiene el suficiente vocabulario (línea 6), por lo tanto, no logra decirlo claramente en su producto (Imagen 22), se evidencia dicho pensamiento: que no afecta cómo se organicen si se tiene en cuenta la cantidad con respecto a la imagen; importa más la covariación que la imagen. Adicional a ello, el resultado del esfuerzo que hace el docente para que Valentina se afirme como sujeto en la sociedad, esfuerzo que se presenta cuando el docente intenta preguntarle a Valentina sobre so producto. Tal y como se menciona en el objetivo de educación matemática la TO (Radford 2020a), a partir de responder la pregunta de por qué lo hizo así y no de otra forma. Además del esfuerzo de Valentina por tratar de explicar su idea a pesar de su corto vocabulario.

A partir de esta interacción se logra evidenciar lo que Godelier (2010, citado por Radford 2014) menciona como distribución de la fuerza en los procesos de trabajo, ya que no es el docente quien posee mayor fuerza al tener mayor experiencia en el objeto matemático, sino que ambos están colaborando para hacer que el pensamiento de Valentina se exprese por medio del lenguaje a partir de la pregunta que el docente plantea en la línea 5

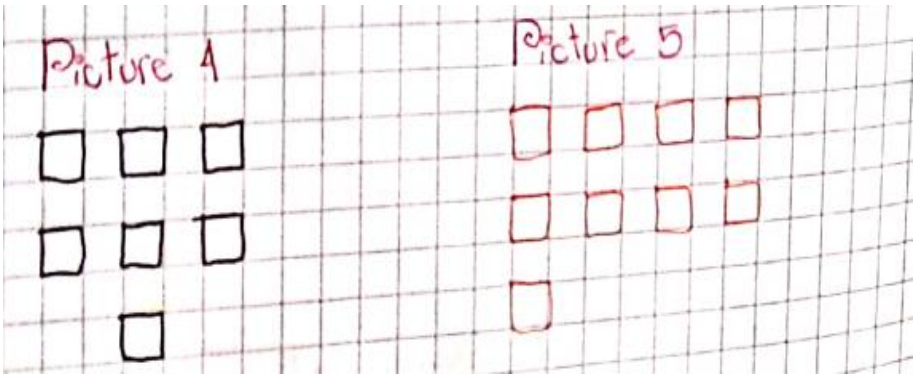


Imagen 22 Producto de Valentina (Tarea 3)

4.1.5 Algunas formas de colaboración humana y formas de producción en la virtualidad

Para este momento de la sesión los estudiantes están trabajando en el numeral 1 que hace referencia a la cantidad de rectángulos de heno que habrá en la figura número 5. El docente identifica algunas respuestas que dan los estudiantes a partir de mostrar sus productos por la cámara o de escribir en el chat (imagen 22), y procede a discutir con ellos con el objetivo de lograr la producción de cada uno como subjetividades. Para este momento, el docente les habría indicado a los estudiantes que escribieran por medio del chat si habían finalizado sus ejercicios con la palabra “Finish 2”.

1 Profesor: Majo, I would like to know your answer, so, tell me how many rectangles of hay are there in picture 10? (*espera un momento, pero no recibe respuesta así que procede a realizar la pregunta a otra estudiante*).

2 Profesor: Indira please, tell me what is your answer at this point.

3 María José: Mister can you hear me? (*activando su micrófono para poder dar su respuesta*).

4 Indira: Yes Mister (*responde Indira mientras María José enciende el micrófono*).

5 Profesor: Ok Indira, give me a second while María José answers (*Indira desactiva su micrófono y espera*).

6 María José: Could you repeat the question mister.

7 Profesor: Yes, Tell me how many rectangles of hay are there in the picture 5.

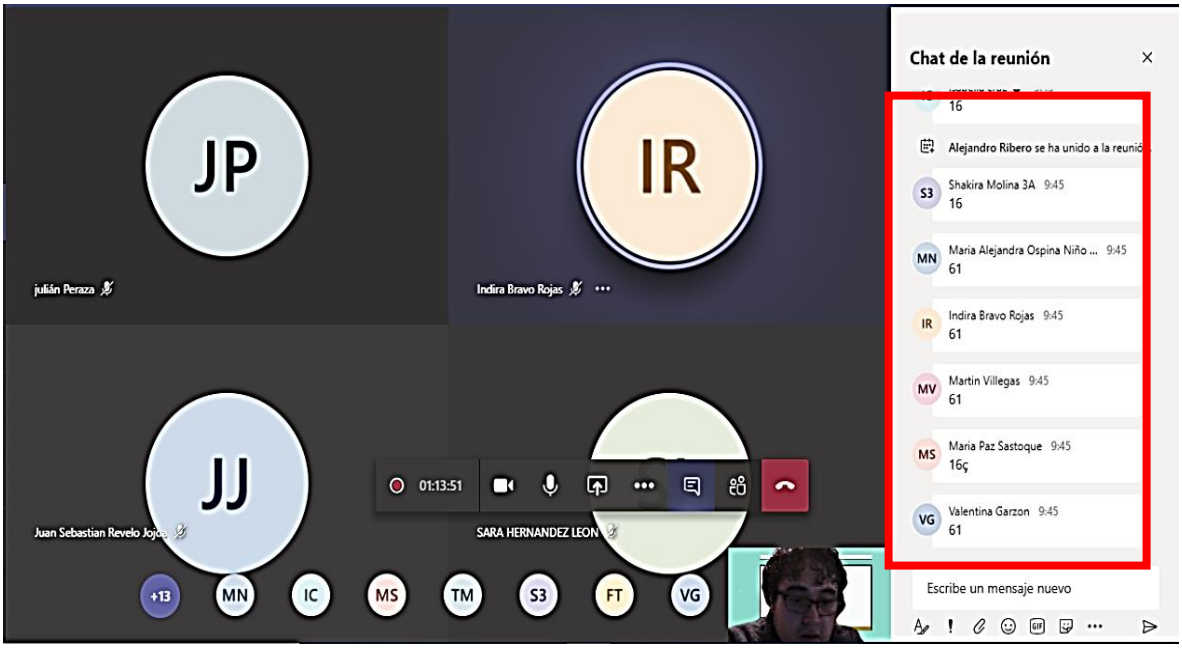


Imagen 23 Respuestas sobre la segunda pregunta de la tercer tarea.

Hasta aquí se pueden evidenciar algunas formas de interacción que se llevaron a cabo durante la participación del docente y la estudiante. María José enciende el micrófono interrumpiendo la palabra de Indira, pero esto no se debe ver como que María José no reconoce a Indira como sujeto que participa en la actividad, sino que antes el micrófono no le había funcionado, así que cuando lo encendió Indira estaba participando. Así mismo, (como se evidencia en la línea 5) en Indira se identifica el *cuidado del otro* (Radford, 2020a), al reconocer a María José como su otro y sujeto de la actividad. De forma respetuosa espera su turno para que María José pueda expresar sus ideas.

8 María José: There are ten (*responde mientras mira su cuaderno*).

9 Profesor: Indira, do you agree?

10 Indira: What mister (*pregunta sobre lo que se le había dicho, ya que su entorno no le permitía escuchar bien*).

11 Profesor: Yes Indira, Majo say that the answer in the exercise 2 in 10, do you agree?

12 Indira: What mister? (*interrumpe Federico indicando que finalizó el ejercicio*).

13 Profesor: Tell me Indira. Federico you can't turn your microphone on until mr González tell you (*intentando continuar con la conversación*).

14 Profesor: Ok Indira, Majo say that the answer in the exercise 2 in 10, do you agree? (*no se escucha bien y Maria José responde 10*)

15 Indira: No, I'm not agree, there are 9.

16 Profesor: How many do you think? (*intentando que Indira complemente su respuesta en indique por qué no está de acuerdo*).

17 Indira: Nine mister, I have nine (*no se escucha muy clara su respuesta ya que continua el ruido en su entorno*).

Hasta este momento, el docente continúa con su esfuerzo de generar una discusión entre María José e Indira en la que ellas sustentan el porqué de sus respuestas. Adicional a ello, en la línea 12 se evidencia cómo Federico interrumpe la discusión que se está intentado desarrollar por el anhelo de que el profesor le pregunte a él y, de esta manera, poder inscribirse como sujeto de su sociedad, aunque el docente no le dé la palabra y continúe con la discusión que está intentando generar entre las estudiantes.

De esta manera se ve al sujeto alienado, que en este caso es Federico, quien está siendo alienado de la actividad por parte del docente, aunque este no lo hace de acuerdo a Marx (citado por Sossa, 2010) quien dice que el hombre se aliena del hombre porque ve a este otro como una cosa. Evidentemente, el docente no está viendo a Federico como una cosa que no tiene que ver con la actividad, sino que quiere continuar con el trabajo que ha intentado desarrollar entre María José e Indira y lo puede desarrollar de esta manera debido a la situación o medios por los que pueden trabajar (COVID-19, teams).

18 Profesor: Majo why do you think that there are ten? (*intentando que revise su producto y analice sobre el mismo*). I'm not sure what it's the number but tell me.

19 María José: Because in the picture are one … Are one … one hays (*habla pausado ya que no recuerda la palabra*). In picture two are thee, in the picture three are one … one of the … of the first and here are two.

20 Profesor: Ok and what do you think that there are in picture 4 majo? (*haciendo que María José continúe con la secuencia*).

21: Are, are (*mira su cuaderno donde tiene dibujada la secuencia*), are eight, no, no are 7 (*identifica que no es el número 8 de forma inmediata, sino que es el 7).*

22 Profesor: Ok 7 in picture 4 and now in picture 5. The other students please continue solving the next point (*intenta que los demás estudiantes continúen en la integración de la actividad*).

23 Profesor: Majo, tell me how many do you think that should have the picture 5? (*repite la pregunta para que María José continúe expresándose*).

24 María José: Bueno creo que sí es el 9 (*usa el español).*

25 Profesor: ¿Por qué María José? (*también usa el español para preguntar*) Why do you think, María José?

26 María José: Because we have to add two and I added three (*identificando el error que tenía en su producto*).

27 Profesor: Ahhh, ok thank you Majo.

En esta parte de la discusión podemos ver lo que Gödelier (2010 citado por Radford 2017) menciona sobre la distribución de la fuerza como una forma de producción, en nuestro caso, una forma de movilizar el saber. En la línea 17, Indira se convierte en subjetividad, ya que a partir de su trabajo y la interacción se ve afectada de forma reflexiva (Radford 2020b) y esto le permite posicionarse sobre su respuesta e indicar que no está de acuerdo con lo que su compañera plantea. Adicional a ello, durante la interacción, el docente trata de mantener el trabajo conjunto con María José y que no se aliene de la actividad realizando preguntas para que, a partir de estas, ella pueda expresarse como sujeto de su sociedad. En la línea 24 se podría hablar de una María José que asume que la respuesta era 9 no como suya, sino como algo que le impone la sociedad, pero luego de la redistribución de la fuerza (Godelier 2010, citado por Radford 2016), entre el docente y María José, estos pasan a *ser* ya que se muestra, a partir de su producto, y el docente se muestra en la interacción, a el *becoming* (Radford, 2020a) ya que en la línea 26 María José demuestra que no se quedó

con lo que ella tenía, sino que reflexionó y esto le permitió identificar lo que estaba mal y reflexionar para mostrar un mejor producto, siendo así el docente y la estudiante subjetividades de acuerdo a la definición que Radford (2020b) propone de subjetividad:

> Una subjetividad es un sujeto concreto, cultural y sensible (William Webbe, Richard Bourdeaux, o un estudiante o un profesor en nuestro caso) cuya especificidad resulta desde el hecho de que está continuamente afectado reflexivamente por el *ser* a través de sus materializaciones concretas-una entidad siempre en un proceso de transformación: un proyecto de vida inacabado e interminable (p. 49).

Marx (citado por Radford, 2014) denomina las formas de interacción como formas de *colaboración humana*, las cuales hacen referencia a la mediatización de las interacciones de los individuos inmersos en la actividad. Para que el docente pueda participar con los estudiantes debe asignarle la palabra a alguno de ellos, este responde y de esta manera se genera la discusión. Otra forma de interacción que se genera por parte de los estudiantes es el pedir la palabra con el botón de la plataforma Microsoft Teams, utilizada para desarrollar la clase; así mismo, los estudiantes tienen la opción de solicitar su turno de intervención escribiendo en el chat. Otra forma de interacción se aprecia cuando los estudiantes se dirigen al docente, siempre de una forma amable y respetuosa, llamándolo mister e indicando “yes mister”, para que este les asigne las preguntas o le manifiesten lo que sea necesario.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presenta la respuesta a la pregunta de investigación a partir de los análisis, referentes bibliográficos y la bibliografía base de la investigación, que es la teoría de la objetivación, notas de campo e interacción con los estudiantes que se llevaron a cabo durante el desarrollo del presente documento. Adicionalmente, se presentan algunas reflexiones que surgieron a partir del desarrollo y ejecución de la investigación.

La pregunta de investigación que se planteó es:

¿Qué características emergen de una actividad matemática, en el contexto de una segunda lengua (inglés), en grado tercero de primaria en torno a tareas sobre secuencias de patrones que se aproxime a una labor conjunta entre estudiantes y profesor?

De acuerdo a la interacción, trabajo *hombro a hombro* (Radford 2020a), esfuerzo de los sujetos por movilizar el saber y afirmarse como sujetos de la sociedad, se plantean algunas características que emergieron dentro de la actividad matemática planteada, en la resolución de tareas, las discusiones entre pequeños grupos y el grupo general. Dichas características permiten abordar el primer objetivo: *Describir las formas de producción de saberes asociados a secuencias de patrones.*

5.1 Formas de producción de saberes

Las formas de producción de saberes que emergieron dentro de la actividad matemática se describen a partir de las funciones de las relaciones de producción planteadas por Godelier (2010, citado por Radford 2010) entre ellas están:

5.1.1 La forma de acceso a los recursos y al control de los medios de producción.

En esta, se identificó a partir de cómo los estudiantes acceden a recursos como la tarea, el lenguaje, los gestos, entre otros. Todo esto para lograr materializar sus ideas y presentarlas a la sociedad en que se encuentran y de esta manera afirmarse como subjetos que respiran, sudan, sufren y gozan (Radford 2020a); dentro de dichas formas de acceso están:

5.1.1.1 *Discusión entre pequeños grupos y/o estudiante y profesor.*

A partir de esta interacción entre los sujetos y de las preguntas que plantean los estudiantes, ya sea porque no se entiende algo específico de la tarea, por desconocer cómo proceder en un ejercicio, el docente debe generar discusiones a partir de preguntas, ideas o sugerencias sutiles que ayuden a responder a cómo proceder frente a las dudas que se están presentando, en otras palabras, movilizar el saber. Se puede decir que esta subcategoría que plantea el autor, es la más importante sin demeritar las demás, ya que esta permite redireccionar las discusiones, ideas y/o análisis para un mayor aprovechamiento del trabajo.

De igual manera, estas discusiones pueden permitir que la actividad sea alienante al estudiante, ya que se puede permitir la interacción, la identificación del sujeto sobre su producto, o como se da en ocasiones en el aula con el individualismo del estudiante, la alienación de este hacia quienes trabajan con él. Es por ello que dichas discusiones permitirán movilizar el saber, de manera que sea coadyuvante a la inscripción del sujeto a partir de cómo este justifica sus respuestas, indaga por seguir avanzando en la resolución de la tarea y, permite que el estudiante reflexione como sujeto crítico y ético.

Algunas de las discusiones que planteaba el docente para que los estudiantes materializaran sus ideas y se inscribieran en la sociedad en la que laboraban era como las que se evidencian en los apartados 4.1.1. Alejandro, Martín y el profesor tratando de ser subjetividades. Ya que el docente quiere ellos justifique el por qué no quiere desarrollar su producto en segunda lengua. Y en el 4.1.2. Tomás y el profesor trabajando juntos, allí el docente plantea preguntas sobre lo que Tomás presenta en su trabajo, pregunta con la intención de que el estudiante justifique sus ideas y el porqué de hacerlas de esa manera y no de otra.

5.1.1.2 *Justificación de las respuestas*.

Será a partir de esta subcategoría que el estudiante continuará con la reflexión de lo que ha estado trabajando, y es a partir de las preguntas que los demás sujetos le planteen como podrán afirmarse como sujeto de la sociedad en la cual se encuentra inscrito. Esa justificación de las respuestas debe entenderse como la forma en la que los estudiantes defienden sus ideas o trabajos; o también como a partir de las críticas constructivas del docente o compañeros, le permitirá continuar con sus ideas y productos o cambiarlos. Por ejemplo, se puede evidenciar cuando los estudiantes en cada una de las tareas iniciaban con ejemplificación de los patrones y a partir de la reflexión del trabajo, justificaban sus respuestas de acuerdo a lo que el docente o los compañeros preguntaban y por medio de ello lograban finalizar con un conclusión o idea que permitía relacionar su trabajo con sus ideas movilizando la generalización del patrón con el que estaban trabajando.

5.1.1.3 *Reflexión sobre los productos.*

A partir de cada una de las indagaciones que haga el estudiante, ya sea sobre sus producciones o sus ideas en cierto momento, será la reflexión de las mismas las que le permitirán identificar si su trabajo responde a lo que solicita la tarea o no. Por ejemplo, cuando los estudiantes presentan su producto a la sociedad con el fin de que este sea aprobado o rechazado, es a partir de dicha interacción, que se puede indicar que lo que se hizo está bien o no. Si no hay aprobación, por parte de las personas con las que está laborando, los estudiantes pueden intentar persuadirlos para dar a conocer que su producto para él esta correcto o analizar si debe hacer cambios sobre el mismo.

5.1.2 La redistribución de la fuerza de trabajo de los individuos en los diferentes procesos de trabajo.

Esta categoría de las formas de producción de saberes, permite que se dé lo que en la teoría de la objetivación se denomina *trabajo hombro a hombro*. Entre los sujetos que participaron en el desarrollo de las tareas no siempre fue el docente sujeto activo, como se identifica en la enseñanza tradicional, o el estudiante como lo hace el constructivismo (Radford 2020a), sino que ambos estuvieron en la mayoría de momentos trabajando estudiante-estudiante o profesor-estudiante. Y a partir de este trabajo que los estudiantes discuten sobre sus ideas con los compañeros acerca de cómo actuar frente a un punto de la tarea, y con el docente con respecto al producto en sí.

Dicha redistribución del trabajo en estudiantes cuando el docente les pregunta y ellos responden ademá de cuando el docente les plantea la tarea y ellos la desarrollan, del docente cuando diseña, explica y genera discusiones. Esto permite que los estudiantes no se

alienen con el otro, sino que, con este se generen ideas más solidificadas que permita hacer producciones más eficientes. Dicha redistribución se puede dar por medio de las siguientes subcategorías que se plantean a partir de la naturalidad con la que trabajan y se expresan los estudiantes, ya que no lo hacen de la misma forma cuando trabajan entre ellos a como lo hacen con el profesor-estudiantes (cuando trabaja el profesor con el grupo general o los pequeños grupos) profesor estudiante (cuando el profesor interactúa con un estudiante especifico reflexionando sobre los productos).

5.1.2.1 Estudiante-estudiante.

Esta subcategoría no quiere decir que el docente no participe en este momento, sino que es un momento crucial para que entre los estudiantes se logre consolidar ideas y se genere lo que la teoría de la objetivación define como ética comunitaria.

5.1.2.2 Profesor-estudiantes o profesor-estudiante.

En esta subcategoría no necesariamente la redistribución de la fuerza se está dando dentro de todos los estudiantes, ya que, por ejemplo, en las discusiones entre pequeños grupos no todos están participando en esta movilización del saber, sino que ellos en sus diferentes grupos están movilizando el saber con sus demás compañeros.

5.1.2.3 Grupo general.

Esta categoría hace referencia a la recolección de ideas y experiencias que se presentaron dentro de las categorías anteriores y cómo a partir de este análisis todo el grupo de estudiantes y el profesor logran producir sus materializaciones para continuar con la inscripción en la sociedad con la que laboran continuamente.

En cada una de las subcategorías mencionadas anteriormente, en ningún momento se prioriza o se hacen relevantes las ideas, trabajo y/o experiencia sobre las de otro sujeto, sino que ambos están trabajando activamente para que se intente generar una labor conjunta.

5.1.3 La determinación de la forma social de la circulación y de la redistribución de los productos del trabajo individual y colectivo.

Esta funcionalidad tiene bastante relación con las descritas anteriormente, ya que habla de trabajo individual cuando el estudiante se acerca a la tarea e intenta generar su producto, tal como cuando se da el trabajo en pequeños grupos, en pequeños grupos con el profesor, y en el grupo general, pero hace falta revisar la categoría que a continuación se plantea.

5.1.3.1 Reconstrucción de productos.

La reflexión y análisis son algunos de los procesos más relevantes en la actividad matemática desarrollada, ya que a partir de estos se vio la pertinencia de desarrollar una nueva sesión para reconstruir los primeros productos presentados por los estudiantes. En el primer producto no se presentaba la generalidad que se esperaba del patrón, sino una ejemplificación de algunos casos, en el segundo producto los estudiantes ya presentaron una “conclusión” de sus ideas. A partir de esa reconstrucción de los productos, de las reflexiones que el profesor y estudiantes hagan sobre la generalidad, se permitirá una coproducción de subjetividades.

De acuerdo a lo anteriormente descrito, se intenta dar respuesta al objetivo que hace referencia a los modos de producción de saberes que emergieron en la actividad matemática de generalización de secuencia de patrones.

Luego de abordar las formas de producción de saberes, se presentan las formas de colaboración humana que emergieron en el intento de labor conjunta al trabajar secuencia de patrones, más específicamente, al tener en cuenta el objetivo que se plantea en la investigación como lo es *Describir las formas de interacción y colaboración humana que se materializan entre los estudiantes y profesor*. A partir de esto se plantean las siguientes formas, las cuales fueron las que surgieron en la resolución de las tres tareas planteadas.

5.2 Formas de interacción y colaboración humana

Para movilizar el saber a partir de las formas de producción, se deben tener en cuenta las formas de interacción y colaboración humana, ya que estas no se deben ver como dos formas que suceden en la interacción de forma separa, sino que ambas emergen dentro del trabajo en conjunto entre estudiantes y profesor.

A continuación, se describen las formas de interacción que se presentaron en el trabajo de secuencia de patrones.

5.2.1 Dirigirse al otro.

Comunicarse con el otro permite que la interacción planteada en el aula se dé en un ambiente ideal donde todos los sujetos puedan participar e interactuar entre ellos. Al momento de dirigirse al otro se plantea una forma inicial, como lo es levantar la mano para

pedir la palabra y dar a conocer ideas o preguntar sobre las inquietudes que se tenga, esto se presenta tanto en la modalidad presencial como en la virtual.

Es importante tener en cuenta que estas maneras de dirigirse al otro pueden llegar a ser alienantes si no se da un direccionamiento adecuado, por ejemplo, cuando los estudiantes desean participar y a alguno de ellos no se le da la palabra. En tal caso, el estudiante no se sentiría identificado con lo que se está desarrollando o, de otra manera, sentiría que su participación no es importante, lo cual sería gravísimo para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

5.2.1 Respuesta a las preguntas.

En el contexto de segunda lengua, algunas de las formas de respuesta concreta son: ok, yes, ahhh I understood; sin profundizar sobre sus ideas o complementar la información acerca de lo que se está preguntando. Esto se dio de acuerdo a las limitaciones que tienen los estudiantes con respecto al inglés, ya que el hecho de que desarrollen una asignatura en segunda lengua no quiere decir que los estudiantes tengan un nivel perfecto de comunicación, en otras palabras, los estudiantes aprenden inglés y al mismo tiempo que están aprendiendo matemáticas.

5.2.3 Actuación estudiante-estudiante, estudiantes-profesor

En esta subcategoría se describe cómo actúan los estudiantes de acuerdo al sujeto con el que entran en contacto, ya que los estudiantes se comportan de forma más natural cuando trabajan con sus compañeros, por ejemplo, en algunos momentos utilizan la lengua materna y se hacen bromas entre ellos. Situación diferente a cuando trabajan con el

docente presente en el grupo, ya que cuando está presente los estudiantes se sienten en la obligación de hablar siempre en la segunda lengua, además de centrarse únicamente en la tarea que se está desarrollando y no hablar de otra temática.

5.2.4 Responsabilidad

Dentro de esta categoría desarrollada por la teoría de la objetivación (Radford 2020a), se identifica como la respuesta al llamado del otro, la respuesta que generan los estudiantes cuando su compañero o profesor le están llamando. Por ejemplo, dentro del documento se evidencia en el llamado al otro partiendo de la inasistencia de un compañero a la sesión de clase, siendo conscientes que la necesidad de apoyarlo es explicarle lo que se desarrolló en la sesión, a partir de dicha explicación, presentar la generalización en su producto y es de esta manera como los estudiantes intentan responder al llamado que hace su compañero.

De acuerdo a lo anteriormente descrito, se plantean dos subcategorías de la responsabilidad, teniendo en cuenta este valor como el llamado al otro por dos sujetos diferentes.

5.2.4.1 Responsabilidad del profesor.

La responsabilidad del profesor es atender al llamado que hace el estudiante a ser presencia. El identificar dicho llamado tiene que ver con cómo el docente percibe el trabajo con el estudiante y este se da a partir de responder a las necesidades que el escolar tiene, a ayudarle a comprender y a animarle para que continúe con su trabajo, para que de esta manera tanto el estudiante como el profesor se coproduzcan como subjetividades.

5.2.4.2 Responsabilidad del estudiante

En este caso se habla de responder al llamado, tanto del docente como del grupo, que está actuando con él. El llamado e invitación que le hace el docente a que laboren juntos y, de esta manera, por medio de sus materializaciones se coproduzcan como subjetividades que sienten e interactúan en el aula. De igual manera, se identifica la responsabilidad del estudiante hacia sus compañeros a reconocer cuál es el llamado que le están haciendo para, juntos, inscribirse. Por ejemplo, a partir de la carta que construyeron dan respuesta tanto al llamado del profesor como al de sus compañeros, ya que logran responder a lo que el docente plantea y, así mismo responden al llamado de sus compañeros.

5.2.5 Compromiso hacia los demás.

Esta categoría desarrollada en la ética comunitaria planteada en la TO (Radford 2020a), es vista desde sí misma, desde cómo el sujeto que trabaja con los demás, se compromete a cumplir con lo que se me asigna, ya sea por sus compañeros o profesor, y cómo a partir de dichos esfuerzos se logra cumplir con el hacer todo lo posible para desarrollar la obra común. Dentro de esta categoría se evidencian dos subcategorías, una vista desde lo individual y la otra desde lo colectivo.

5.2.5.1 Esfuerzo.

Esta subcategoría permite evidenciar el trabajo constante que desarrolla el estudiante por comprometerse e intentar cumplir con lo que se le ha propuesto y, a partir de las dificultades que se le puedan presentar, hacer todo lo posible para colaborar con sus semejantes. Así mismo el docente todo lo que hace para lograr que los estudiantes le

entiendan lo que quiere decir, se comprometan a trabajar juntos y estén constantemente motivados a trabajar *hombro a hombro*.

5.2.5.2 Afinidad.

A pesar de con quién deba trabajar el sujeto, este se compromete con los demás a coproducir juntos, de tal manera que se evidencia el respeto que tiene hacia sus compañeros y el reconocimiento hacia el otro como sujeto con el cual trabaja, sufre, siente y moviliza el conocimiento.

5.2.5.3 Respeto hacia las ideas del otro.

Al trabajar con algo, en este caso sujeto que es diferente, se puede presentar la no aceptación de las ideas, pensar que lo que el otro dice no es correcto o sencillamente subestimar toda la interacción del otro. Es aquí donde emerge, junto en el trabajo del docente y los estudiantes, el respeto a la diferencia: a la diferencia de ideas, a la diferencia de productos y a la diferencia de *algo que no soy yo*. En otras palabras, aceptar o discutir las ideas de los demás de la manera más adecuada para que se dé un trabajo en correcta armonía.

5.2.6 Cuidado del otro.

Dentro de la teoría de la TO (Radford 2020a), se plantea esta categoría desarrollada en la ética comunitaria y, esta es entendida como el reconocimiento de que hay otro sujeto interactuando conmigo, otro sujeto que también siente, sufre, piensa y se esfuerza dentro de la actividad, además de reconocer sus necesidades, reconocer mi vulnerabilidad y la vulnerabilidad del otro. A partir de ello, se plantean las siguientes subcategorías que se evidenciaron en el trabajo de secuencia de patrones:

5.2.6.1 Empatía.

Definida por Radford (2020b) no solo como la compasión que se tiene hacia el otro, sino también el reconocimiento de la fragilidad del otro y de su propia fragilidad, situaciones que se hacen presentes al trabajar en el aula interactuando y coproduciendo con los demás en diferentes momentos de la actividad.

5.2.6.2 Consideración.

Esta categoría se puede evidenciar cuando el sujeto identifica que el otro tiene problemas, dificultades o necesidades para comprender, solucionar y/o ejecutar algo dentro del aula, más explícitamente, cuando el sujeto muestra interés por el reconocimiento del otro como sujeto, ya que este otro no está pudiendo actuar. Un ejemplo claro es el trabajo de la escritura de las cartas, en el que los estudiantes sintieron consideración por sus compañeros y le ayudaron a comprender el trabajo que se estaba desarrollando por medio de dicha herramienta.

5.3 Un acercamiento a la hipótesis de Sapir-Whorf

A partir del análisis y las reflexiones sobre el trabajo desarrollado se logra hacer un pequeño acercamiento a cómo el lenguaje puede modificar nuestras formas de aprehensión del mundo, Radford (2018b) menciona sobre esta hipótesis que "la cultura de la lengua influye en los modos de pensamiento, la percepción y la experiencia que los individuos hacen en el mundo" (p. 30). Parra (1988) cita específicamente la hipótesis sobre el análisis fuerte y débil de acuerdo a lo que mencionan algunos lingüistas:

1. EI lenguaje, que es un producto social, configura nuestra forma de aprehensión del mundo que nos rodea.
2. Considerando las diferencias entre los sistemas lingüísticos, que son reflejo de los distintos medios que crean esos sistemas, los hombres que piensan por medio de estos lenguajes aprehenden el mundo de formas distintas. (p. 12)

Lo que quiere decir que al trabajar en diferentes lenguas, es a partir de ellas que se aprehende el mundo, en el caso de la investigación se trabajó con una población de lengua materna español y segunda lengua inglés, de acuerdo a lo que plantean Sapir y Whorf, tanto el profesor como los estudiantes se ven influenciados tal ves en su actuar, en su forma de responder y/o de pensar de acuerdo a la lengua con la que trabajan.

5.3.1 Acertamiento a la hipótesis en los estudiantes

La lengua inglesa de acuerdo a su estructura gramatical puede influir en la concreción de las respuestas de los angloparlantes, se evidencia esta información en los siguientes productos de los estudiantes de acuerdo al ejercicio que se les planteaba de cada

una de las tareas el numeral 5: Write a letter to 1 classmate, where you explain the way to find the number of carrots in any picture. Los estudiantes a partir de la reflexión sobre los ejercicios anteriores lograron movilizar las secuencias de patrones y esto les permitía dar solución a lo que se les plantea.

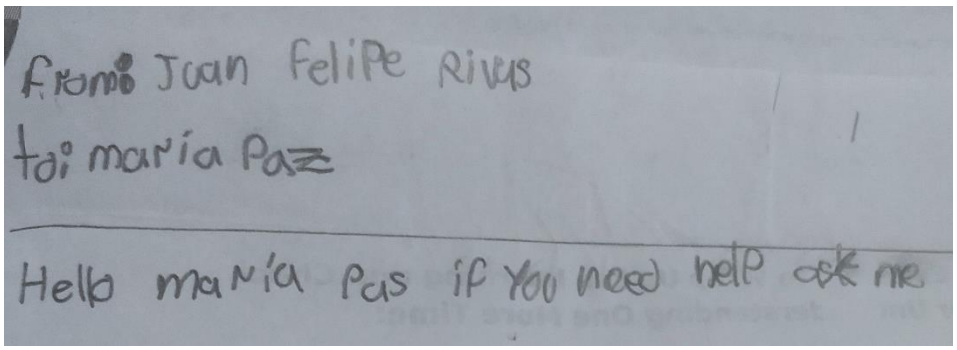


Imagen 24 Producto de Felipe

En este primer producto se puede observar la concreción sobre sus ideas, donde el estudiante interpreta que lo que debe hacer es explicar a su compañera sobre lo que se trabajó en el aula y lo que el menciona es que si se tiene alguna duda sobre el trabajo que le pregunte. Bastante concreto a lo que se le pidió en el ejercicio.

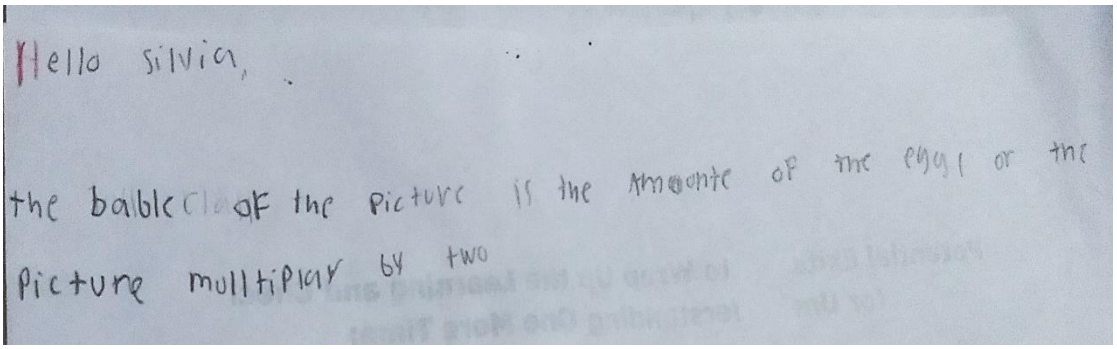


Imagen 25 Producto de Isabella

En este producto se puede observar una materialización que hizo Isabella sobre lo que comprendió acerca de la secuencia de patrones con la que se trabajó (tarea 2), donde explica la relación de covariación entre la variable dependiente (cantidad de huevos) y la variable independiente (número de la imagen) y cómo a partir de dicha compresión, expresa la idea de forma concreta.

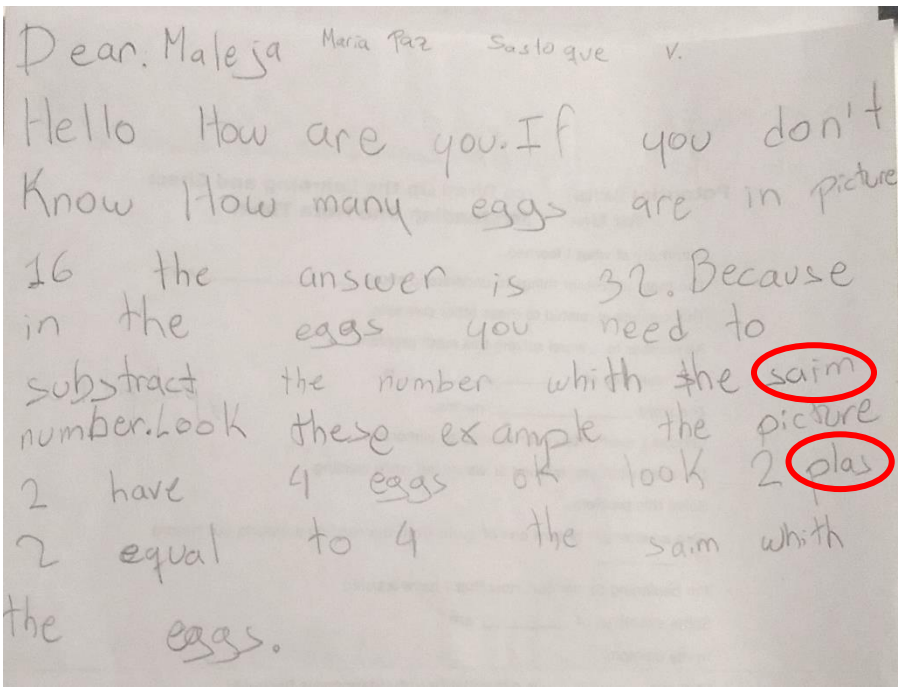

Dear. Maleja Maria Paz Sastoque V.
Hello How are you. If you don't
Know How many eggs are in picture
16 the answer is 32. Because
in the eggs you need to
substract the number whith the saim
number. Look these example the picture
2 have 4 eggs ok look 2 plas
2 equal to 4 the saim whith
the eggs.

Imagen 26 Producto de María Paz

En el producto de María Paz y se logra evidenciar como ella es más específica sobre lo que debe dar a conocer siguiendo las instrucciones del profesor, como lo era explicar a su compañero que no había podido asistir lo que se había trabajado durante la sesión, y a partir de ello lograr dar a conocer lo que comprendió, como ella ve y moviliza el objeto matemático. Indiciando con que el estudiante no sabe lo que se hizo así que ella procederá a explicarlo, luego de ello da ejemplos indicando la generalidad sobre el doble de la imagen será la cantidad total de huevos. En las palabras encerradas por los ovalos se logra evidenciar

como influye la fonética de la lengua española sobre el inglés, ya que en inglés se escribe como se lee, ella escribió la palabra same de acuerdo a como lo escucha es sería same, y la operación de adición (plus), vuelve a recaer en lo mismo y escribe plas.

Es importante mencionar que el acercamiento a la hipótesis es muy poco esto debido a que los estudiantes no han tenido una inmersión al 100 % sobre la segunda lengua, ya que esta la trabajan únicamente en el colegio.

5.3.1 Acertamiento a la hipótesis en el profesor

A partir del trabajo que ha desarrollado el docente con la segunda lengua logra percibir que de acuerdo a la segunda lengua logra una mayor comprensión de le primera, un ejemplo especifico es sobre la doble negación que se trabaja español, por ejemplo, en español se diría yo *no* tengo *ningún* problema con esto. Mientras que en inglés esta doble negación no se puede dar ya que sería algo como I have no problema with this. Esta puede ser una forma aproximación a la hipótesis ya que el docente está aprehendiendo el mundo con la ayuda de ambas lenguas.

Otra aproximación que se plantea es a partir del trabajo con los estudiantes que además de aprender matemáticas están aprendiendo inglés, se logra identificar la compresión que debe tener el profesor para de esta forma actuar con los estudiantes, ya que independientemente del nivel de inglés que domine el docente, este siempre deberá tener en cuenta el nivel de los estudiantes para de esa manera comunicarse con ellos y que se logre una mejor compresión sobre el mensaje que se quiere dar. En palabras de Rojas (2013) es necesario que los docentes se conviertan en estudiantes y se identifiquen con sus estudiantes.

Lo que implica que los profesores necesitan aprender sobre sus estudiantes y cambio del aprendizaje unidireccional que generalmente se presenta en el aula.

5.4 Observaciones finales

Las subcategorías que plantea el autor de la tesis se describen a partir de la reflexión y análisis del intento de labor conjunta que se logró desarrollar entre los estudiantes de grado 3a y el profesor, se plantean, pero estas merecen mayor análisis e investigación.

De acuerdo a lo anteriormente descrito, se intenta dar a conocer las categorías que plantea el profesor Radford en sus diferentes documentos sobre ética comunitaria, la TO, y algunas subcategorías que emergieron, las cuales se plantean dentro del intento de desarrollar la labor conjunta de estudiantes de grado 3A del colegio Liceo de Colombia Bilingüe y el docente.

Se logra concluir que la labor conjunta es una entidad difícil de construir, ya que no es fácil construir una actividad en tanto que labor conjunta, esta investigación se dio un acercamiento, pero la labor conjunta en ningún momento puede ser alienante y se debe cambiar el discurso transmisor-receptor (Radford, 2020a). Entre otras razones es complejo el hacer emerger una labor conjunta ya que el modelo tradicional es dominante y existen situaciones en las que se puede recaer en este, lo cual para el docente puede ser una de las formas más fáciles de interactuar con los estudiantes. La cantidad de las sesiones, si bien están adecuadas a la ecología escolar de los participantes y de la institución, probablemente no logró ser suficiente para que los alumnos alcanzaran un mayor grado de compromiso con

la labor conjunta, así como un trabajo por parte del profesor que posibilitara unas formas de cooperación e interacción humanas menos alienantes.

Durante las sesiones desarrolladas se presentaron algunos factores alienantes dentro del trabajo entre estudiantes y profesores. Uno de los factores más relevantes que se presentaron son los que se describen a continuación:

5.3.1 El tiempo.

Al considerar que el tiempo no fue suficiente se produjo la alienación del sujeto con su producto, por ejemplo, se evidenció en el análisis que los estudiantes no finalizaban su trabajo. Al no finalizar no producían ni se coproducían como sujetos que trabajaban en el aula ni como subjetividades. Así mismo, se planteó el uso de una sesión adicional para permitir que los estudiantes se produjeran y coprodujeran de manera tal que esto se evidenciará en sus discursos y en sus productos.

Así mismo, se presentó otro factor alienante dentro de la actividad, es el caso específico del trabajo a partir de sesiones virtuales por medio de plataformas. Dicho factor causó que varios estudiantes no se identificaran con la actividad.

5.3.2 La videoconferencia y sus plataformas.

A través de la virtualidad se presentó la situación de que los estudiantes intentaban participar, dar a conocer sus ideas, posturas, pero no todos podían intervenir ni activar el micrófono. Esto generó que mientras se discutía con algunos estudiantes sobre su producto e ideas, los demás no interactuaran, de hecho, era imposible identificar en ciertos momentos si los estudiantes en su totalidad estaban presentes o no, por lo tanto, no todos

trabajaban hombro a hombro a pesar de que tuvieran su compromiso de hacer su mayor esfuerzo, de cuidar al otro y ser responsables; por tal motivo las plataformas pueden llegar a ser alienantes en la actividad.

5.3.3 El vocabulario de la segunda lengua.

El vocabulario puede ser un factor alienante *de la actividad* y *con el otro*, ya que esto no permitirá que el sujeto se exprese de forma verbal. Al no saber cómo decir algo, el sujeto se alienará, se ve específicamente en la sesión en la que se analiza la intervención del profesor interactuando con Alejandro y Martín, ya que los estudiantes manifiestan no querer trabajar en segunda lengua por la dificultad que conlleva hacerlo. Así mismo, se puede evidenciar la alienación del producto, específicamente, en el análisis que se hace sobre la primera y segunda entrega de los productos cuando los estudiantes no se expresan de la mejor manera, ya que logran confundir palabras, aunque eso no quiere decir que desarrollan la idea de las secuencias de patrones.

Todos y cada uno de los anteriores factores se pueden presentar en el intento de desarrollar la labor conjunta, pero en este caso será el docente quien direccionará el discurso, los momentos de las sesiones, las preguntas y cada una de las partes que conforman el trabajo con los estudiantes. Lo anterior permitirá que definitivamente se dé una alienación o sencillamente se presente como un factor (mas no aliene lo que ya se mencionó). Por ello es el docente quien sortea todas sus habilidades para que esto no se presente en el trabajo con los estudiantes e invita a que participen, reflexionen y trabajen con los demás.

La situación de COVID-19 y la virtualidad han permitido que la labor docente se exprese por sí misma como una de las profesiones más relevantes de nuestra sociedad, ya

que no es lo mismo que un estudiante intente aprender por medio de un computador a que interactúe con alguien y, dentro de dicha interacción, permita producir cada una de las categorías, ejes y vectores que se plantean en la teoría de la objetivación. Además de dicha interacción con los estudiantes ya sea en la virtualidad o presencialidad se permitirá emerger sentimientos que se da entre los seres humanos como el cariño, el poder sonreír juntos por volver a ver el uno al otro, por poder expresar las situaciones que le aquejan al uno y al otro, pero todo esta se dará únicamente entre el trabajo entre estudiantes y profesor.

Bibliografía

Almanza, D. (17 de Noviembre de 2016). *Sapiens Research.* Obtenido de https://www.srg.com.co/noticias/modelo-academico-internacional-de-la-universidad-de-cambridge/

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME, 9*(1), 267-300.

Bodgan, R., & Biklen, S. (1992). *Qualitative Research for Education, an introduction to theory and methods* (Third ed.). America: Omegatype Typography, Inc.

Civil, M., & Planas, N. (2010). El aprendizaje matemático de alumnos bilingües en Barcelona y Tucson. *Quadrante, XIX*(1), 5-28.

Constitución política de Colombia (segunda ed.). (1991). Legis.

Cotán, A. (2016). El sentido de la investigación cualitativa. *Escuela Abierta, 19*, 33-48.

D'Amore, B. (2017). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica. En B. D'Amore, & L. Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (págs. 27-36). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

De Mejía, A.-M. (1998). Educación bilingüe en Colombia en contextos lingüísticos mayoritarios: hacia una caracterización del campo. *Revista del Lenguaje, 26*, 8-23.

Díaz, D. (2014). *Factores de dificultad para el aprendizaje del inglés como lengua extranjera en estudiantes con bajo rendimiento en inglés de la universidad ICESI.* Santiago de Cali: Universidad ICESI.

González, F. (2006). *Investigación Cualitativa y Subjetividad.* Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala.

Landaburu, J. (2004-2005). Las lenguas indígenas de Colombia: presentación y estado del arte. *AMERINDIA*(29/30), 3-22.

León, O., & Lasprilla, A. (2018). Enfoques necesarios para la reflexión sobre una ética comunitaria en la educación matemática. *PNA, 12*(2), 81-96.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Educación ética y valores. Lineamientos curiculares.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2018). *Lineamientos para la implementación de la jornada única en Colombia durante 2018.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Navarro, B. (2010). Adquisición de la primera y segunda lengua en aprendientes en edad infantil y adulta. *Philologica Urcitana, 2*, 115-128.

Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Parra, M. (1988). La hipótesis Sapir- Whorf. *Forma y Función, 3*, 9-16.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de los signos en álgebra. Una perspectiva post-vigostkiana. *Educación Matemática, 11*(3), 25-33.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 4*(2), 132-150.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8*(18), 547-567.

Radford, L. (2016). Mathematics Education as a Matter of Labor. En P. Valero, & G. Knijnik, *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory.* Singapore.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde las perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D'Amore, & L. Radford, *ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (págs. 113-134). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Ser, Subjetividad y Alienación. En B. D'Amore, & L. Radford, *ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (págs. 137-164). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018a). Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. *5º SIMPOSIO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, (págs. 1-22). BELÉM.

Radford, L. (2018b). Lenguaje, política y alteridad. En T. Barbosa, & C. Noronha (Edits.), *Leituras e escritas: olhares plurais para múltiplas cenas educativas* (págs. 17-42). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En L. Radford, & S. Gobara, *TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática* (págs. 1-42). Sao Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Radford, L. (2020b). Play and the production of subjectivities in preschool. En M. Carlsen, I. Erfjord, & P. Hundeland (Edits.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM4 conference 2018* (págs. 43-60). Springer.

Radford, L., & Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 227-245.

Raford, L., & Lasprilla, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 107-128.

Rodriguez, I. (2015). Preview-view-review en la enseñanza de las matemáticas en segunda lengua: análisis de su aplicación a estudiantes de transición de un colegio privado de Bogotá. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 6*(2), 66-100.

Rojas, L. (2013). Towards the Development of Bilingualism in the Colombian Context. *Educación y Ciencia*(16), 117-126.

Sossa, A. (2010). La alienación en Marx: el cuerpo como dimensión de utilidad. *Revista de Ciencias Sociales (Cl)*(25), 37-55.

Truscott, A., Ordonez, C., & Fonseca, L. (2006). *Lineamientos para la educación bilingüe en Colombia: hacia una política diferente.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Vergel, R. (2010). La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 69-81). Bogotá: Asocolme.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.