



Geodésicas: sobre variedades Riemannianas y grupos de Lie.

Sergio Andrés Pinillos Prado

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Matemáticas

Bogotá, D.C., Colombia
2019



Geodésicas: sobre variedades Riemannianas y grupos de Lie.

Sergio Andrés Pinillos Prado

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director interno: Mg. Matemática, Carlos Antonio Julio Arrieta

Director externo: Ph.D. Matemática, Mikhail Malakhaltsev

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Matemáticas

Bogotá, D.C., Colombia
2019

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia, en especial a mis padres y abuelitos, por el apoyo continuo y la dedicación en cada paso que doy durante mi formación personal y profesional. De igual manera agradezco a mi compañera Laura por la motivación, las enseñanzas y el apoyo continuo durante más de dos años.

En segundo lugar quiero agradecer al profesor Mikhail Malakhaltsev por su conocimiento brindado, por la dedicación y por la amabilidad que tuvo conmigo desde el primer momento que nos conocimos. Además, le agradezco al profesor Carlos Julio, que junto con otros matemáticos me mostraron la belleza de esta ciencia.

Resumen

El trabajo está enfocado en el estudio de las geodésicas sobre las variedades Riemannianas y los grupos de Lie. El objetivo principal será encontrar una ecuación para hallar las geodésicas sobre los grupos de Lie, haciendo uso de su respectiva álgebra de Lie. Además, por medio de la forma de índice se podrá concluir cuando las geodésicas son geodésicas mínimas, aspecto que se suma al hecho de que las geodésicas son un punto crítico del funcional de Energía.

Palabras claves: Variedades Riemannianas, grupos de Lie, geodésicas, álgebra de Lie, geodésicas mínimas, punto crítico, funcional de Energía.

Abstract

The work is focused at the geodesics's study on Riemannian Manifolds and Lie groups. The main objective will be look for an equation to find the geodesics on the Lie groups, using their Lie algebra. Besides, through the Index Form, it will be possible to conclude where the geodesic is a minimizing geodesic, aspect added to the fact the geodesics are critical points of the Energy functional.

Keywords: Riemannian Manifolds, Lie groups, geodesics, Lie algebra, minimizing geodesics, critical point, Energy functional.

Introducción

La historia de las líneas geodésicas inició con un estudio por Johan Bernoulli, quien resolvió el problema de la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie convexa en 1697. Luego, Euler obtuvo por primera vez la ecuación de las geodésicas para superficies implícitas. Y con los fundamentos de la geometría diferencial, el estudio de las geodésicas se tornó más riguroso. La idea de este trabajo de grado es presentar un estudio de las geodésicas sobre variedades Riemannianas y grupos de Lie, con ejemplos de como calcularlas en determinados espacios.

En el primer capítulo, presentamos el concepto de fibrado principal y asociado sobre el que desarrollaremos nuestro trabajo de grado, todo el fundamento teórico lo tomamos del Kobayashi-Nomizu. Además, presentaremos el concepto de métricas Riemannianas. En el segundo capítulo, desarrollaremos el concepto de conexiones en fibrados principales para extenderlo a un fibrado asociado a un haz principal. Durante los cursos previos en el pregrado, no profundizamos en la Teoría de Conexiones, pero es interesante el estudio realizado en el Kobayashi, razón por la cuál decidimos mostrar la construcción ayudados de este texto. Posteriormente, en el mismo capítulo, definiremos las conexiones Riemannianas y el concepto de curvatura, el estudio de la curvatura tendrá mayor relevancia, en el último capítulo, específicamente en la sección de Forma de índice, pues será utilizado en las demostraciones.

En el último capítulo, estudiaremos las geodésicas y sus propiedades sobre variedades Riemannianas y los grupos de Lie, la primera manera de describirlas será por medio de los haces principales, luego definiremos las geodésicas como punto crítico de un funcional, específicamente, con el funcional de Energía. En este espacio describiremos las ecuaciones de Euler-Lagrange, ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de las geodésicas, herramienta fundamental para calcular las geodésicas. Todo esto lo aplicaremos en el cálculo de las geodésicas sobre superficies de revolución.

Por último, guiados por el artículo “Geodesics and Classical Mechanics on Lie Groups” de Hermann [4], realizaremos un estudio para caracterizar las geodésicas sobre los grupos de Lie, haciendo uso del álgebra de Lie. Además, brindaremos un ejemplo muy específico para calcular las geodésicas sobre un álgebra de Lie de dimensión dos no conmutativa.

Nuestro objetivo general será describir las geodésicas sobre los grupos de Lie, diferenciando entre las métricas bi-invariantes e invariantes por izquierda. Además, deduciremos cuando una geodésica que une dos puntos es mínima, es decir, que la longitud de la curva geodésica es

igual a la distancia entre los dos puntos. Todo esto nos permitirá ver, que aunque en ocasiones trabajaremos sobre espacios más generales a los estudiados por Johan Bernoulli, el problema planteado para hallar la curva más corta entre dos puntos, no fue dejado de lado.

Pregunta de investigación. ¿Cómo se caracterizan las geodésicas en un grupo de Lie?

Índice de notaciones

$C^\infty(M)$	Anillo de funciones suaves sobre la variedad M .
\mathbb{R}, \mathbb{C}	Campo de los números reales y complejos, respectivamente.
\mathbb{R}^n	Espacio vectorial de n -tuplas de números reales (x^1, \dots, x^n) .
$GL(n; \mathbb{R})$	Grupo lineal general.
$\mathfrak{g}(G)$	Dado un grupo de Lie G , denota su álgebra de Lie.
$T_s^r(V)$	Espacio tensorial de tipo (r, s) sobre un espacio vectorial V .
$T(V)$	Álgebra tensorial sobre V .
$T_x M$	Espacio tangente de una variedad M en x .
$\mathfrak{X}(M)$	Álgebra de Lie de campos vectoriales sobre una variedad M .
TM	Haz tangente de una variedad M .
LM	Haz de marcos lineales de una variedad M .
OM	Haz de marcos ortonormales de una variedad M (con respecto a una métrica Riemanniana dada).
θ	1-forma canónica sobre $L(M)$ o sobre $O(M)$.
\dot{x}_t	Vector tangente de una curva x_t , en el punto x_t .
L_a	Traslación izquierda por $a \in G$. (G un grupo de Lie).
$P(M, G)$	Haz principal sobre M con grupo estructural G .
ω	Forma de conexión.
Ω	Forma de curvatura.
$E(M, F, G, P)$	Haz asociado a $P(M, G)$ con fibra F .
Θ	Forma de torsión.
Γ_{jk}^i	Coefficientes de conexión.
∇_X	Derivada covariante con respecto a un campo vectorial X .
R	Tensor curvatura.
T	Tensor torsión.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Fibrados	1
1.2. Métricas Riemannianas	5
2. Conexiones y curvatura	7
2.1. Conexiones en fibrados principales	7
2.2. Tensores de curvatura y torsión	18
2.3. Conexiones Riemannianas	21
3. Geodésicas	27
3.1. Ecuaciones de derivación y geodésicas	27
3.2. Geodésica una curva óptima	30
3.3. Ley de conservación	32
3.4. Geodésicas en las superficies de revolución	33
3.5. Forma de índice	44
3.6. Geodésicas sobre grupos de Lie	50
3.6.1. Las ecuaciones de Euler para las geodésicas	50
3.6.2. Geodésicas sobre grupos de Lie con métricas bi-invariantes	52
3.6.3. Geodésicas sobre grupos de Lie con métricas invariantes por izquierda	54

Capítulo 1

Preliminares

Los fundamentos de variedades y análisis vectorial que hemos utilizado para desarrollar este trabajo se encuentran en el primer capítulo de [6], y en los tres primeros capítulos de [12]. Por lo tanto, sólo enunciaremos los resultados sobresalientes a usar. Algunos textos que podrían complementar el estudio en este trabajo se encuentran en la bibliografía. Cabe aclarar, que para el desarrollo del trabajo vamos a usar el convenio de sumación de Einstein.

Definición. (*Convenio de sumación de Einstein*).

Esta convención de notación, asume que se suma de 1 hasta n (número de coordenadas), el índice que aparece tanto en el subíndice como en el superíndice de un producto. Por ejemplo,

$$T_{ij}^{jk} = \sum_{j=1}^n T_{ij}^{jk}.$$

1.1. Fibrados

Durante esta sección cabe aclarar que realizamos el uso de palabra haz para referirnos al fibrado sin tener ninguna variación en la definición que brindamos.

Definición 1.1.1. Sea M una variedad y G un grupo de Lie. Un haz o fibrado principal sobre M con grupo G consiste de una variedad P y una acción de G sobre P que satisface las siguientes condiciones:

1. G actúa libremente sobre P por la derecha. $(u, a) \in P \times G \rightarrow ua \in P$, también escribimos $R_a u$ en lugar de ua . (Decimos que G actúa libremente sobre M si $R_a u = u$ para algún $u \in M$ implica que $a = e$).
2. M es el espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G , $M = P/G$, y la proyección canónica $\pi : P \rightarrow M$ es diferenciable,
3. P es localmente trivial, es decir, todo punto $x \in M$ tiene una vecindad U , tal que existe un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, definido por $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$ donde $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ es una aplicación, tal que $\phi(ua) = (\phi(u))a$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ y para todo $a \in G$.

Un haz principal lo notaremos por $P(M, G, \pi)$, o por $P(M, G)$. P se llama espacio total, M espacio base, G el grupo estructural y π la proyección. Si u es un punto de la fibra de x , $\pi^{-1}(x)$, entonces $\pi^{-1}(x)$ es el conjunto de puntos de ua , $a \in G$, y lo conocemos como la fibra a través de u .

Dado un grupo de Lie G y una variedad M , si $P = M \times G$, el haz principal obtenido se llama trivial.

Basados en el libro [6] construiremos lo que se conoce como un haz fibrado asociado a P . Para esto, es necesario además del haz principal $P(M, G, \pi)$, una variedad F sobre la que G actúa por izquierda.

Ahora, sobre la variedad producto $P \times F$ dejamos que G actúe por la derecha. Sea $a \in G$, luego si $(u, \xi) \in P \times F \mapsto (ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$. Luego sea $E = P \times F/G$, el espacio cociente bajo la acción del grupo, denotado también por $P \times_G F$.

Sea $f : P \times F \rightarrow M$, tal que $(u, \xi) \mapsto \pi(u)$. Luego, definimos $\pi_E : E \rightarrow M$ de la siguiente manera: si $[(u, \xi)] \in E$ entonces $\pi_E([(u, \xi)]) = f(u, \xi) \in M$. Si $[(u_1, \xi_1)] = [(u_2, \xi_2)]$ luego $(u_1, \xi_1) \sim (u_2, \xi_2)$, es decir, existe $g \in G$ tal que $(u_1g, g^{-1}\xi_1) = (u_2, \xi_2) \in P \times F$. Aplicando f tenemos que $\pi(u_1g) = \pi(u_2) \in M$, por lo tanto $\pi_E([(u_1, \xi_1)]) = \pi_E([(u_2, \xi_2)])$, es decir que π_E está bien definida.

Por la localidad trivial del haz principal, para cada punto $x \in M$, existe una vecindad U de x , tal que $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo con $U \times G$. Luego la acción de G sobre $\pi^{-1}(U) \times F$ por la derecha está dada por

$$(x, a, \xi) \mapsto (x, ab, b^{-1}\xi), \text{ para } (x, a, \xi) \in U \times G \times F, \text{ y para } b \in G.$$

De aquí obtenemos que el difeomorfismo $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$ induce un difeomorfismo $\pi_E^{-1}(U) \simeq U \times F$, y por lo tanto podemos introducir una estructura diferenciable sobre E , con el requisito de que $\pi_E^{-1}(U)$ sea una subvariedad abierta de E difeomorfa con $U \times F$ bajo el difeomorfismo $\pi_E^{-1}(U) \simeq U \times F$. De esta manera E es una variedad cociente diferenciable y la proyección π_E es entonces una aplicación diferenciable de E sobre M .

Definición 1.1.2. Llamaremos a $E(M, F, G, P)$ el haz fibrado sobre la base M , con fibra (estándar) F , y grupo estructural G , asociado con el haz principal P .

Ejemplo 1.1.3. *El Haz de Marcos Lineales:* Sea M una n -variedad. Un marco lineal u en un punto $x \in M$, es una base X_1, X_2, \dots, X_n del espacio tangente T_xM . Sea LM el conjunto de todos los marcos lineales u en todos los puntos de M y sea π la función de LM sobre M , que mapea un marco lineal u del T_xM en x . El grupo lineal $GL(n; \mathbb{R})$ actúa sobre LM por la derecha de la siguiente manera, si $a = (a_i^j) \in GL(n; \mathbb{R})$ y $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un marco lineal en x entonces ua es por definición (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) con $Y_j = \sum_i a_i^j X_i$. Es claro que $GL(n; \mathbb{R})$ actúa libremente sobre $L(M)$ y $\pi(u) = \pi(v)$ si y sólo si $v = ua$, para algún $a \in GL(n; \mathbb{R})$. Ahora, introduciremos una estructura diferenciable sobre los marcos lineales.

Dada una vecindad coordenada (x^1, x^2, \dots, x^n) en una vecindad U de x , todo marco lineal u puede ser expresado por $X_i = \sum_k X_i^k \partial_k$, donde X_i^k es una matriz no singular. Esto muestra que $\pi^{-1}(U)$ está en correspondencia 1-1 con $U \times GL(n; \mathbb{R})$. Tomando como sistema local de coordenadas a (x^j) y a (X_i^k) en $\pi^{-1}(U)$, podemos convertir a LM en una variedad diferenciable.

Si $(U_\alpha, \varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n))$ y $(V_\beta, \psi = (y^1, y^2, \dots, y^n))$ son sistemas locales de coordenadas para $x \in M$, entonces si $x \in U_\alpha \cap V_\beta$ tenemos que todo marco lineal puede ser expresado por

$$X_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

y por

$$Y_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

de manera respectiva. Si consideramos la aplicación

$$h = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \psi(U_\alpha \cap V_\beta) \\ x \mapsto h(x) = y,$$

donde $y^j = h^j(x^1, \dots, x^n)$.

Entonces para cada $u = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in LM$ tenemos que

$$X_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = X_i^k \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = X_i^k \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n; \quad (1.1.1)$$

donde $\frac{\partial y^j}{\partial x^k} = (J)_k^j$ corresponde a la matriz de Jacobi, es decir, la aplicación $\psi \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ y por lo tanto $(h^1(x^1, \dots, x^n), \dots, h^n(x^1, \dots, x^n), X_1^k (J)_k^j, \dots, X_n^k (J)_k^j)$ es un sistema local de coordenadas en $\pi^{-1}(U_\alpha \cap V_\beta)$.

Por tanto, $LM(M, GL(n; \mathbb{R}))$, es un haz principal. Llamamos LM el haz de marcos lineales sobre M .

Proposición 1.1.4. Sea $P(M, G, \pi)$ un haz principal y F una variedad sobre la que G actúa por la izquierda. Sea $E(M, F, G, P)$ el haz fibrado asociado con P . Para cada $u \in P$ y cada $\zeta \in F$, se nota por $u\zeta$ la imagen de $(u, \zeta) \in P \times F$ por la proyección natural $P \times F \rightarrow E$. Entonces cada $u \in P$ es una función de F sobre $F_x = \pi_E^{-1}(x)$, donde $x = \pi(u)$ y

$$(ua)\zeta = u(a\zeta) \quad \text{para } u \in P, a \in G, \zeta \in F.$$

Ejemplo 1.1.5. *El haz tangente:* Sea $GL(n; \mathbb{R})$ actuando sobre \mathbb{R}^n como en el Ejemplo 1.1.3. El haz tangente TM , sobre M , es el haz asociado con LM con fibra estándar \mathbb{R}^n . Un marco lineal $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ en x puede ser dado como una aplicación lineal $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ tal que $ue_i = X_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, donde e_i es la base estándar de \mathbb{R}^n . La acción de $GL(n; \mathbb{R})$ sobre LM puede ser considerada de la siguiente manera: Considere $a = (a_j^i) \in GL(n; \mathbb{R})$ como una transformación lineal de \mathbb{R}^n que aplica e_j en $a_j^i e_i$. Entonces $ua : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ es una composición, en efecto:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{a} \mathbb{R}^n \xrightarrow{u} T_x M.$$

Si consideramos $TM = \{[(u_x, X)] : u_x \in LM, X \in \mathbb{R}^n\}$, debido a la construcción del haz fibrado asociado al haz principal LM , con la proyección $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ definida por $\pi_{TM}([(u_x, X)]) = \pi(u_x) = x$, entonces, utilizando la Proposición 1.1.4 tenemos que la fibra de TM sobre $x \in M$ es $\pi_{TM}^{-1}(x) = T_x M$.

Definición 1.1.6. Sea $E(M, F, G, P)$ un haz fibrado, una sección de E es una aplicación $f : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ f = \mathbf{1}_E$ y $f \circ \pi = \mathbf{1}_M$.

Ejemplo 1.1.7. Un campo vectorial X es una sección del haz tangente, $X : M \rightarrow TM$.

Definición 1.1.8. Un “homomorfismo” f de un haz principal $P'(M', G')$ en otro haz principal $P(M, G)$ consiste de una aplicación $f' : P' \rightarrow P$ y un homomorfismo $f'' : G' \rightarrow G$ tal que $f'(u'a') = f'(u')f''(a')$ para cada $u' \in P'$ y $a' \in G'$. Todo homomorfismo $f : P' \rightarrow P$ mapea cada fibra de P' en una fibra de P y por lo tanto induce una aplicación de M' en M , que se denota por $f_{P'}$. Un homomorfismo $f : P'(M', G') \rightarrow P(M, G)$ es llamado inyección si $f' : P' \rightarrow P$ es un encaje y si $f'' : G' \rightarrow G$ es un monomorfismo. Identificando P' con $f(P')$, G' con $f(G')$ y M' con $f(M')$, decimos que $P'(M', G')$ es un subhaz de $P(M, G)$. Si además $M = M'$ y la aplicación inducida $f_{P'} : M \rightarrow M'$ es la aplicación identidad de M , $f : P'(M', G') \rightarrow P(M, G)$ es llamada una reducción del grupo estructural G de $P(M, G)$ a G' . El subhaz $P'(M, G')$ es llamado un haz reducido. Dado $P(M, G)$ y un subgrupo de Lie G' de G , decimos que el grupo estructural G es reducible a G' si existe un subhaz reducido $P'(M, G')$.

Ejemplo 1.1.9. Sea LM el haz de marcos lineales sobre una n -variedad M . Sea (\cdot, \cdot) el producto natural interno en \mathbb{R}^n , para el que $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ son ortonormales e invariantes por $O(n)$. Mostraremos que cada reducción del grupo estructural $GL(n; \mathbb{R})$ a $O(n)$ da lugar a una métrica Riemanniana g sobre M . Sea $Q(M, O(n))$ un subhaz reducido de LM . Cuando consideramos cada $u \in LM$, como un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^n sobre $T_x M$, dónde $x = \pi(u)$, cada $u \in Q$, define un producto interno g en $T_x M$ por

$$g(X, Y) = (u^{-1}X, u^{-1}Y), \quad \text{para } X, Y \in T_x M.$$

La invarianza de (\cdot, \cdot) por $O(n)$, implica que $g(X, Y)$ es independiente de la elección del $u \in Q$. Recíprocamente si a M se le asigna una métrica Riemanniana g , sea Q el subconjunto de LM , que consiste de los marcos lineales $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ que son ortonormales con respecto a g . Si consideramos $u \in LM$ como un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^n sobre $T_x M$, entonces $u \in Q$ si y sólo si $(\xi, \xi') = g(u\xi, u\xi')$ para cada $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$. De esta manera Q forma un subhaz reducido de LM sobre M con grupo estructural $O(n)$. El haz Q será llamado el haz de marcos ortonormales sobre M y será notado por OM .

Definición 1.1.10. *Fibrado Vectorial*

Sea \mathbf{F} el campo de los números reales \mathbb{R} o de los complejos \mathbb{C} . El grupo $GL(m; \mathbf{F})$ actúa sobre \mathbf{F}^m por la izquierda de manera natural, si $a = (a_j^i) \in GL(m; \mathbf{F})$ y $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \in \mathbf{F}^m$ entonces $a\xi = (\sum_j a_j^1 \xi^j, \dots, \sum_j a_j^m \xi^j) \in \mathbf{F}^m$. Sea $P(M, G)$ un haz principal y ρ una representación de G en $GL(m; \mathbf{F})$. Sea $E(M, \mathbf{F}^m, G, P)$ el haz asociado con fibra estándar \mathbf{F}^m sobre la cual G actúa a través de ρ . Llamamos a E un fibrado vectorial real o complejo sobre M de acuerdo a $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$. De esta manera, cada fibra $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, de E tiene la estructura de un espacio vectorial tal que todo $u \in P$ con $\pi(u) = x$, considerado como una función de \mathbf{F}^m sobre $\pi_E^{-1}(x)$, es un isomorfismo lineal.

Ejemplo 1.1.11. Si consideramos el haz tangente de \mathbb{R}^n , $T\mathbb{R}^n$, para cada $(p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$, definimos la función proyección $\pi(p, v) = p$. La fibra sobre p , $\pi^{-1}(p)$, puede ser convertida en un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(p, v) \oplus (p, w) &= (p, v + w); \\ a \cdot (p, v) &= (p, av).\end{aligned}$$

1.2. Métricas Riemannianas

Definición 1.2.1. Sea M una n -variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana (definida positiva) sobre M es un campo tensorial covariante de grado 2 que satisface:

1. $g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $g(X, X) = 0$ si y sólo si $X = 0$ y
2. $g(X, Y) = g(Y, X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

En otras palabras g asigna un producto interno en cada espacio tangente $T_x M$, $x \in M$. En términos de un sistema local de coordenadas x^1, \dots, x^n , los componentes de g están dados por $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$. Luego

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Ejemplo 1.2.2. Sea M una n -variedad con una métrica Riemanniana g . Para cada $x \in M$, el producto interno g_x define un isomorfismo ψ de $T_x(M)$ sobre el dual $T_x^*(M)$, de la siguiente manera. Para cada $X \in T_x(M)$ asignamos el covector $\alpha \in T_x^*(M)$ definido por

$$\alpha(Y) = g_x(X, Y), \text{ para todo } Y \in T_x(M).$$

El producto interno g_x en $T_x(M)$ define también un producto interno en el dual $T_x^*(M)$ denotado por g_x^* , usando el isomorfismo

$$g_x^*(\alpha, \beta) = g_x(\psi^{-1}(\alpha), \psi^{-1}(\beta)), \text{ para todo } \alpha, \beta \in T_x^*(M).$$

Sea x^1, x^2, \dots, x^n un sistema local de coordenadas en M . Las componentes g_{ij} de g con respecto a x^1, \dots, x^n están dadas por

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Las componentes contravariantes g^{ij} de g^* , están definidas por

$$g^{ij} = g^*(dx^i, dx^j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces,

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Si definimos ψ_{ij} por $\psi(\partial_i) = \psi_{ij} dx^j$, entonces

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \psi(\partial_i)(\partial_j) = \psi_{ij},$$

por otra parte,

$$\delta_i^k = dx^k(\partial_i) = g^*(dx^k, \psi(\partial_i)) = g^*(dx^k, \psi_{ij} dx^j) = \psi_{ij} g^{jk}.$$

Ejemplo 1.2.3. La métrica euclidiana g sobre \mathbb{R}^n con el sistema natural de coordenadas x^1, x^2, \dots, x^n está determinada por

$$g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \delta_{ij},$$

luego,

$$g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ejemplo 1.2.4. Sea $f : N \rightarrow M$ una inmersión de una variedad N en una variedad Riemanniana M con métrica g . La métrica Riemanniana inducida h sobre N está definida por $h(X, Y) = g(f_*X, f_*Y)$, $X, Y \in T_x(N)$.

Ejemplo 1.2.5. Sea M una 2-subvariedad encajada de \mathbb{R}^3 , con $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión. La primera forma fundamental \mathbf{I} de M es la métrica Riemanniana inducida $i^*(\cdot, \cdot)$ sobre M (donde (\cdot, \cdot) es la métrica Riemanniana usual de \mathbb{R}^3 , o también llamada euclidiana). Por lo tanto

$$\mathbf{I}(p)(X_p, Y_p) = (X_p, Y_p), \quad X_p, Y_p \in T_p M$$

Ejemplo 1.2.6. Un espacio homogéneo G/H donde G es un grupo de Lie y H un subgrupo compacto, admite una métrica invariante. Sea \widehat{H} el grupo de isotropía lineal en el origen o (es decir, el punto representado por la clase H), de G/H ; \widehat{H} es un grupo de aplicaciones lineales de el espacio tangente $T_o(G/H)$, inducida por un elemento de H que deja el punto o fijo. Como H es compacto, así mismo \widehat{H} y existe un producto interno definido positivo, digamos g_o , en $T_o(G/H)$ que es invariante por \widehat{H} . Para cada $x \in G/H$, tomamos un elemento $a \in G$ tal que $a(o) = x$ y definimos un producto interno g_x en $T_x(G/H)$ por $g_x(X, Y) = g_o(a^{-1}X, a^{-1}Y)$, $X, Y \in T_x(G/H)$.

Capítulo 2

Conexiones y curvatura

En este capítulo definiremos conceptos de conexiones en los fibrados principales, asociados y además, el concepto de conexión Riemanniana. Daremos una relación existente entre la conexión y la métrica Riemanniana, con el objetivo de tener una herramienta en el cálculo de las geodésicas. Por último presentamos la definición y algunas propiedades de los tensores de torsión y curvatura, hechos que serán usados posteriormente. Los conceptos son tomados de los capítulos 2 al 4 de [6].

2.1. Conexiones en fibrados principales

Definición 2.1.1. *Conexión en un fibrado principal.* Sea $P(M, G, \pi)$ un haz principal sobre una variedad M , con grupo estructural G , tal y como lo definimos en la Sección 1.1. Para cada $u \in P$, sea T_uP el espacio tangente de P en u y G_u el subespacio de T_uP que consiste de los vectores tangentes a la fibra a través de u . Una conexión Γ en P es una asignación de un subespacio Q_u de T_uP a cada $u \in P$, tal que

- (a) $T_uP = G_u \oplus Q_u$;
- (b) $Q_{ua} = (R_a)_*Q_u$ para todo $u \in P$ y $a \in G$.
- (c) La distribución $u \rightarrow Q_u$ es diferenciable.

Llamamos G_u el subespacio vertical y Q_u el subespacio horizontal de T_uP .

Observemos que la proyección $\pi : P \rightarrow M$ induce una aplicación lineal $\pi_* : T_uP \rightarrow T_xM$ para cada $u \in P$, donde $x = \pi(u)$. Cuando una conexión es dada, $\pi_* : Q_u \rightarrow T_xM$ es un isomorfismo. En efecto, por la condición (a) de la Definición 2.1.1, $\ker(\pi_*) = T_u\pi^{-1}(\{x\}) = G_u$. Además como $P(M, G, \pi)$ es un haz principal, existe un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_U & \\ U & & \end{array}$$

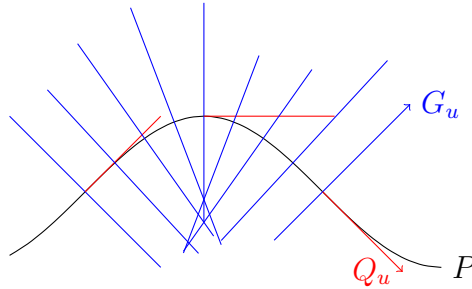
donde $pr_U(x, a) = x$ para $(x, a) \in U \times G$, es una aplicación diferenciable. Además, es claro que toda fibra es difeomorfa a G , pues para cada $x \in U$, $\psi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times G \subseteq U \times G$ es un difeomorfismo, y pr_G es un difeomorfismo sobre G . Entonces

$$pr_G \circ \psi : \pi^{-1}(x) \rightarrow G,$$

es un difeomorfismo, es decir, $\pi^{-1}(x) \simeq G$.

Dado que $ua \in \pi^{-1}(x)$, si $X \in Q_u$, $X \neq 0$, entonces $\pi_*(X) \neq 0$, por lo tanto $ker(\pi_*|_{Q_u}) = \{0\}$, es decir que $\pi_*|_{Q_u}$ es 1-1. Ahora, como $pr_U \circ \psi = \pi$ entonces $\pi_* = (pr_U)_* \circ \psi_*$, es decir, π_* es sobre pues ψ_* es un isomorfismo y además $(pr_U)_*$ es sobre. Luego, como π_* mapea T_uG a 0 y dado que localmente el haz es un espacio producto, la imagen de Q_u bajo π_* debe tener la misma dimensión de T_xM es decir que $\pi_*|_{Q_u}(Q_u) = T_xM$ para todo $u \in P$. Entonces $Q_u \simeq T_xM$.

Ejemplo 2.1.2. Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva en \mathbb{R}^2 y considere $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la distribución horizontal como el espacio de vectores tangentes a la curva γ para cada $t \in (a, b)$.



Definición 2.1.3. Una conexión Γ en el haz de marcos lineales $LM(M, GL(n; \mathbb{R}))$ se denomina una *conexión lineal*.

Ejemplo 2.1.4. Sea $M = \mathbb{R}$, $G = GL(1; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$. De acuerdo al Ejemplo 1.1.3, para U un abierto de M , un marco lineal u en $x^1 \in U \subset M$ está determinado por $X = a \frac{\partial}{\partial x^1}$, $a \in \mathbb{R}^*$, es decir, a este marco le asociamos $u = (x^1, a) \in U \times \mathbb{R}^*$.

Sea $A \in \mathfrak{gl}(1; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, y sea a_t el subgrupo 1-paramétrico generado por A , luego $\exp(A) = e^A \in \mathbb{R}^*$. Definimos el campo vectorial fundamental A^* por

$$A_u^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{a_t} u = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x^1, a e^{tA}) = (x^1, a, 0, aA).$$

Por lo tanto G_u está generado por $\frac{\partial}{\partial a}$. Para determinar el subespacio horizontal, supongamos que este subespacio Q_u está generado por el campo vectorial

$$h(x^1, a) = R(x^1, a) \frac{\partial}{\partial x^1} + S(x^1, a) \frac{\partial}{\partial a} = (x^1, a, R(x^1, a), S(x^1, a)); \quad R(x^1, a) \neq 0.$$

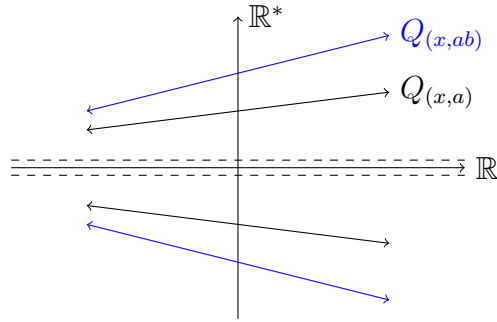
Utilizando la condición (b) de la Definición 2.1.1, $(R_b)_* h(x, a) = h(x, ab) = (x, ab, R(x, a), bS(x, a))$, es decir

$$\begin{aligned} R(x, ab) &= R(x, a); \\ bS(x, a) &= S(x, ab). \end{aligned}$$

Haciendo $a = 1$ y $R = 1$, vemos que el subespacio horizontal de la conexión sobre \mathbb{R} está generado por un campo vectorial de la forma

$$h(x^1, a) = \frac{\partial}{\partial x^1} + aS(x^1) \frac{\partial}{\partial a},$$

La “pendiente” del subespacio horizontal incrementa cuando incrementa el valor del grupo \mathbb{R}^* . En cada punto de la base $M = \mathbb{R}$, la conexión está determinada por su pendiente en un punto en la fibra.



Definición 2.1.5. Dada una conexión Γ en P , definimos una 1-forma ω sobre P con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G como sigue. Para cada $X \in T_u P$, definimos $\omega(X)$ para ser el único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $(A^*)_u$ es igual a la componente vertical de X . Así $\omega(X) = 0$ si y sólo si X es horizontal. La forma ω es llamada *forma de conexión* de la conexión dada Γ .

Ejemplo 2.1.6. De acuerdo al Ejemplo 2.1.4, hallaremos la forma de conexión. Sea $X \in T_{(x,a)}LM$ dado por $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X_2 \frac{\partial}{\partial a}$. Luego

$$X = X_1 h(x^1, a) + (X_2 - aS(x^1)X_1) \frac{\partial}{\partial a}$$

es decir, $h(X) = X_1 h(x^1, a)$, la componente horizontal de X , y $v(X) = X_2 - aS(x^1)X_1$, la componente vertical de X . Entonces $\omega(X) = A \in \mathfrak{gl}(1; \mathbb{R})$. Así,

$$A_{(x^1, a)}^* = (x^1, a, 0, aA) = (x^1, a, 0, X_2 - aS(x^1)X_1),$$

por lo tanto

$$\omega_{(x^1, a)}(X) = \frac{X_2}{a} - S(x^1)X_1 = A \in \mathfrak{gl}(1; \mathbb{R}).$$

Definición 2.1.7. El *levantamiento horizontal* (o simplemente, el levantamiento) de un campo vectorial X sobre M es un único campo vectorial X^* sobre P que es horizontal y que se proyecta sobre X , es decir, $\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)}$ para todo $u \in P$.

Ejemplo 2.1.8. Sea $u = (x, a)$ un punto de $L\mathbb{R}$, luego, teniendo en cuenta el Ejemplo 2.1.6, $X_u^* = X^1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_u + S(x)X^1 a \frac{\partial}{\partial a} \Big|_u \in T_u L\mathbb{R}$ es el levantamiento horizontal del campo vectorial $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x}$.

Proposición 2.1.9. Dada una conexión en P y un campo vectorial X sobre M , existe un único levantamiento horizontal X^* de X . El levantamiento X^* es invariante por $(R_a)_*$ para todo $a \in G$. Recíprocamente, todo campo vectorial horizontal X^* sobre P invariante por G es el levantamiento de un campo vectorial X sobre M .

Demostración. Dado que $\pi_* : T_u(P) \rightarrow T_{\pi(u)}(M)$ es un isomorfismo lineal de Q_u sobre $T_{\pi(u)}(M)$, la existencia y la unicidad las obtenemos de este hecho. Para probar que X^* es diferenciable si X es diferenciable, sea U una vecindad de $x \in M$ tal que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$. Usando este isomorfismo, obtenemos un campo vectorial diferenciable Y sobre $\pi^{-1}(U)$ tal que $\pi Y = X$. Sea X_1, \dots, X_n una base para el álgebra de Lie de \mathfrak{g} de G . Si denominamos por $h(Y)$ la componente horizontal de Y , entonces

$$h(Y) = Y - \omega^j(Y)\sigma(X_j), \quad X_j \in \mathfrak{g} \text{ para } j = 1, \dots, n; \quad (2.1.1)$$

y por lo tanto, la componente horizontal y la componente vertical son diferenciables.

Entonces X^* es la componente horizontal de Y y por lo tanto diferenciable. La invarianza de X^* por G se debe al hecho que los supespacios horizontales son invariantes por G . Finalmente, sea X^* un campo vectorial horizontal sobre P invariante por G . Para cada $x \in M$, tomamos un punto $u \in P$, tal que $\pi(u) = x$ y definimos $X_x = \pi(X_u^*)$. El vector X_x es independiente de la elección de u tal que $\pi(u) = x$, pues si $u' = ua$, entonces $\pi(X_{u'}^*) = \pi(R_a X_u^*) = \pi(X_u^*)$. De esta manera es obvio que X^* es entonces el levantamiento del campo vectorial X . \square

Definición 2.1.10. Sea $\tau = x_t$, $a \leq t \leq b$, una curva diferenciable a trozos de clase C^1 en M . Un *levantamiento horizontal* o simplemente un *levantamiento* de τ es una curva horizontal $\tau^* = u_t$, $a \leq t \leq b$, en P , tal que $\pi(u_t) = x_t$ para cada $t \in [a, b]$. Una curva horizontal en P , es una curva diferenciable a trozos de clase C^1 cuyos vectores tangentes son todos horizontales.

Ejemplo 2.1.11. Dando continuidad al Ejemplo 2.1.4, para $M = \mathbb{R}$ y $LM(M, G)$ el haz de marcos lineales en \mathbb{R} . Supongamos $\tau : [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M , $\tau(0) = x_0$ y supongamos el levantamiento de la curva a través del punto (x_0, a_0) está dado por $\tau^*(t) = (x(t), a(t))$. Como τ^* se debe proyectar sobre τ entonces $x(t) = \tau(t)$. La curva debe ser horizontal, es decir,

$$\dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{a}(t) \frac{\partial}{\partial a} = C(t)h(x(t), a(t))$$

lo que implica que

$$\dot{a}(t) = a(t)S(x(t))\dot{x}(t),$$

que corresponde a una ecuación diferencial ordinaria lineal y de primer orden. Por lo tanto

$$a(t) = a_0 \exp \left(\int_0^t S(x(\eta))\dot{x}(\eta) d\eta \right).$$

Observemos que cuando el subespacio horizontal es horizontal en el sentido más sencillo, entonces $a(t) = a_0$.

Proposición 2.1.12. Sea $\tau = x_t$, $t \in [0, 1]$, una curva diferenciable a trozos de clase C^1 en M . Para un punto arbitrario u_0 de P con $\pi(u_0) = x_0$, existe un único levantamiento $\tau^* = u_t$ de τ que inicia desde u_0 .

Demostración. Por la localidad trivial del haz principal, existe una curva v_t de clase C^1 en P tal que $v_0 = u_0$ y $\pi(v_t) = x_t$ para $0 \leq t \leq 1$. Un levantamiento de τ , si este existe, debe ser

de la forma $u_t = v_t a_t$, donde a_t es una curva en el grupo estructural G tal que $a_0 = e$. Ahora buscaremos una curva $a_t \in G$ que haga $u_t = v_t a_t$ una curva horizontal. Entonces

$$\dot{u}_t = \dot{v}_t a_t + v_t \dot{a}_t. \quad (2.1.2)$$

Sea ω la forma de conexión de Γ . Entonces,

$$\omega(\dot{u}_t) = \omega((R_{a_t})_* v_t) + \omega(v_t \dot{a}_t) \quad (2.1.3)$$

$$= (R_{a_t}^*) \omega(v_t) + a_t^{-1} \dot{a}_t \quad (2.1.4)$$

$$= \text{ad}(a_t^{-1}) \omega(v_t) + a_t^{-1} \dot{a}_t, \quad (2.1.5)$$

donde $a_t^{-1} \dot{a}_t$ es una curva en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . La curva u_t es horizontal si y sólo si $\omega(\dot{u}_t) = 0$, es decir que $\dot{a}_t a_t^{-1} = -\omega(\dot{v}_t)$ para todo t . La construcción de u_t se reduce entonces a lo siguiente

Lema 2.1.13. *Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra identificada con $T_e(G)$. Sea Y_t un curva continua en $T_e(G)$. Entonces existe en G una única curva a_t de clase C^1 tal que $a_0 = e$ y $\dot{a}_t a_t^{-1} = Y_t$ para $0 \leq t \leq 1$.*

Demostración. Asumimos que Y_t está definida y es continua para todo t , $-\infty < t < \infty$. Definimos sobre $G \times \mathbb{R}$ el campo vectorial X de la siguiente manera. El valor de X en $(a, t) \in G \times \mathbb{R}$, es por definición igual a $(Y_t a, (\frac{d}{dr})_t) \in T_a(G) \times T_t(\mathbb{R})$. La curva integral de X que inicia en $(e, 0)$ es de la forma (a_t, t) y a_t es la curva deseada en G . Ahora debemos verificar que a_t esté definida para todo t , $0 \leq t \leq 1$. Sea $\phi_t = \exp(tX)$ el grupo local 1-paramétrico de transformaciones de $G \times \mathbb{R}$ generado por X . Para cada $(e, s) \in G \times \mathbb{R}$, existe $\delta_s > 0$ tal que $\phi_t(e, r)$ está definida para $|r - s| < \delta_s$ y $|t| < \delta_s$. Como el subconjunto $\{e\} \times [0, 1]$ de $G \times \mathbb{R}$ es compacto existe $\delta > 0$ tal que, para cada $r \in [0, 1]$, $\phi_t(e, r)$ está definida para $|t| < \delta$. Tomamos s_0, s_1, \dots, s_k tales que $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ y $s_i - s_{i-1} < \delta$ para todo i . Entonces $\phi_t(e, 0) = (a_t, t)$ está definida para $0 \leq t \leq s_1$; $\phi_u(e, s_1) = (b_u, u + s_1)$ está definida para $0 \leq u \leq s_2 - s_1$, donde $\dot{b}_u b_u^{-1} = Y_{u+s_1}$, y definimos $a_t = b_{t-s_1} a_{s_1}$ para $s_1 \leq t \leq s_2$; \dots ; $\phi_u(e, s_{k-1}) = (c_u, s_{k-1} + u)$ está definida para $0 \leq u \leq s_k - s_{k-1}$, donde $\dot{c}_u c_u^{-1} = Y_{u+s_{k-1}}$ y definimos $a_t = c_{t-s_{k-1}} a_{s_{k-1}}$, completando la construcción de a_t , para $0 \leq t \leq 1$. \square

Dada una conexión Γ en un haz principal $P(M, G, \pi)$, podemos definir el concepto de desplazamiento paralelo de fibras a lo largo de una curva dada τ en la base de una variedad M de la siguiente manera.

Definición 2.1.14. Sea $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, una curva diferenciable a trozos de clase C^1 sobre M . Sea u_0 un punto arbitrario de P , con $\pi(u_0) = x_0$. El único levantamiento τ^* de τ a través de u_0 tiene el punto final u_1 tal que $\pi(u_1) = x_1$. Variando u_0 en la fibra $\pi^{-1}(x_0)$, obtenemos una función de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$ sobre la fibra $\pi^{-1}(x_1)$ que envía u_0 en u_1 . Notamos esta función por la misma letra τ y la llamamos el desplazamiento paralelo a lo largo de la curva τ .

Teorema 2.1.15. *El desplazamiento paralelo a lo largo de cualquier curva τ , conmuta con la acción de G sobre p : $\tau \circ R_a = R_a \circ \tau$, para todo $a \in G$.*

Demostración. Esta prueba se sigue del hecho que R_a envía toda curva horizontal en una curva horizontal. \square

El desplazamiento paralelo a lo largo de τ , tiene una aplicación inversa $\tau^{-1}(t) = \tau(1 - t)$. Entonces, de esta manera afirmamos que τ es un difeomorfismo.

Ejemplo 2.1.16. Sea LM el haz de marcos lineales en M . Para cada $u \in LM$, de acuerdo a la Proposición 1.1.4, determina un isomorfismo desde \mathbb{R}^n hacia $T_{\pi(u)}M$. Luego para cada $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $(ua)\zeta = u(a\zeta)$, con $a \in GL(n; \mathbb{R})$. Supongamos $\tau : [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos de clase C^1 , $X_p \in T_pM$, es un vector tangente a $p = \tau(0)$ y $\tau^* : [0, 1] \rightarrow LM$, es un levantamiento de τ con $\tau^*(0) = u$. Existe un único $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\tau^*(0)(\zeta) = u(\zeta) = X_p$. Definimos el desplazamiento paralelo por

$$\tau_t(X_p) = \tau^*(t)(\zeta),$$

para ver que el desplazamiento paralelo τ_t está bien definido, consideremos otro levantamiento $\hat{\tau}^* = R_a \circ \tau^*$, entonces

$$\begin{aligned} X_p &= \tau^*(0)\zeta = \tau^*(0)a(a^{-1}\zeta) \\ &= \hat{\tau}^*(0)(a^{-1}\zeta), \end{aligned}$$

entonces para el transporte paralelo $\hat{\tau}_t$ definido por $\hat{\tau}^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_t(X_p) = \hat{\tau}^*(t)(a^{-1}\zeta) &= \tau^*(t)a(a^{-1}\zeta) = \tau^*(t)(\zeta) \\ &= \tau_t(X_p). \end{aligned}$$

Si tomamos $\tau^*(0) = u$ con $u((1, 0, \dots, 0)) = X_p$, vemos que podemos desplazar paralelamente X_p , haciendo este, el primer vector en una base, desplazando paralelamente una base, y luego tomando el primer vector en la base trasladada. De esta manera, τ_t es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 2.1.17. Dada una conexión Γ en un fibrado principal $P(M, G)$, definiremos la noción de desplazamiento paralelo en el fibrado asociado $E(M, F, G, P)$ con fibra estándar F . Para cada $w \in E$, el *subespacio horizontal* Q_w y el *subespacio vertical* V_w de $T_w(E)$ se definen como sigue.

El *subespacio vertical* V_w es el espacio tangente a la fibra de E en w . Para definir Q_w , conocemos que hay una proyección $q : P \times F \rightarrow (P \times F)/G$. Luego tomamos un punto $(u, \zeta) \in P \times F$ que es aplicado en w , es decir, $q((u, \zeta)) = [(u, \zeta)] = w$, fijamos $\zeta \in F$ y consideramos la aplicación $f_\zeta : P \rightarrow E$, que aplica $v \in P \mapsto v\zeta = q((v, \zeta))$. Entonces, el *subespacio horizontal* Q_w es por definición $Q_w = (f_\zeta)_*(Q_u)$, donde Q_u es el subespacio horizontal de T_uP .

Ejemplo 2.1.18. Sea $M = \mathbb{R}$ y supongamos que la conexión lineal en LM está generada por

$$h(x^1, a) = \frac{\partial}{\partial x^1} + aS(x^1)\frac{\partial}{\partial a},$$

para determinar la conexión en el haz tangente, TM , consideramos la imagen de h bajo la aplicación $(f_\zeta)_* : TLM \rightarrow TTM$,

$$(f_\zeta)_*(h(x^1, a)) = (f_\zeta)_*((x^1, a, 1, aS(x^1))) = (x^1, \zeta a, 1, \zeta aS(x^1)),$$

es decir para cada $w = [(x^1, v)] \in TM$, el subespacio horizontal es generado por

$$\hat{h}(x^1, v) = \frac{\partial}{\partial x^1} + vS(x^1)\frac{\partial}{\partial v}, \quad u\zeta = w$$

Teorema 2.1.19. *Sea $E(M, F, G, P)$ el haz asociado al haz principal $P(M, G)$ con fibra estándar F y sea V_w el subespacio vertical de T_wE . Entonces $T_wE = V_w \oplus Q_w$.*

Demostración. Por la localidad trivial del haz fibrado E , asociado a P , será suficiente probar que la proyección $\pi_E : E \rightarrow M$ induce un isomorfismo lineal $(\pi_E)_* : Q_w \rightarrow T_xM$, donde $x = \pi(u) = \pi_E([(u, \zeta)])$. Sea $X_w \in V_w \cap Q_w$, como $X_w \in V_w$, entonces $(\pi_E)_*(X_w) = 0$. Además, dado que $X_w \in Q_w$ entonces por la aplicación $(f_\zeta)_*$ definida en 2.1.17, existe un $X_u \in Q_u$ tal que $(f_\zeta)_*(X_u) = X_w$.

Si consideramos la aplicación compuesta $\pi_E \circ f_\zeta : P \rightarrow M$, con $(\pi_E \circ f_\zeta)_* : T_wE \rightarrow T_xM$, donde $\pi : P \rightarrow M$ es la aplicación proyección del haz principal P , entonces $(\pi_E \circ f_\zeta)_*(X_u) = (\pi_E)_*((f_\zeta)_*(X_u)) = (\pi_E)_*(X_w) = 0 = \pi_*(X_u)$, es decir $X_u \in Ker(\pi_*) = G_u$ y $X_w \in Ker((\pi_E)_*)$. Como $T_uP = G_u \oplus Q_u$, entonces $X_u = 0$. Dado que π_* y 1_{T_xM} son isomorfismos, luego $1_{T_xM} \circ \pi_*$ es un isomorfismo. Además, como para cada $\hat{X}_u \in Q_u$, $\pi_*(\hat{X}_u) = \hat{X}_x = (\pi_E)_*(\hat{X}_{[(u, \zeta)]})$, entonces $1_{T_xM} \circ \pi_* = (f_\zeta)_* \circ (\pi_E)_*$, es decir que tanto $(f_\zeta)_*|_{Q_w}$ como $(\pi_E)_*$ deben también ser isomorfismos y por lo tanto el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} Q_u & \xrightarrow{(f_\zeta)_*} & Q_w \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow (\pi_E)_* \\ T_xM & \xrightarrow{1_{T_xM}} & T_xM. \end{array}$$

Luego, $V_w \cap Q_w = \{0\}$ y por lo tanto, $T_wE = V_w \oplus Q_w$. □

Definición 2.1.20. Una curva en E es *horizontal* si su vector tangente es horizontal en cada punto. Dada una curva $\tau \in M$, un *levantamiento horizontal* τ^* de τ es una curva horizontal en E tal que $\pi_E(\tau^*) = \tau$.

Teorema 2.1.21. *Dada una curva $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, y un punto $w_0 \in E$ tal que $\pi_E(w_0) = x_0$, existe un único levantamiento horizontal $\tau' = w_t$ que inicia desde w_0 .*

Demostración. Para probar la existencia de τ' , escogemos un punto $(u_0, \zeta) \in P \times F$ tal que $q(u_0, \zeta) = w_0$. Sea u_t el levantamiento de $\tau = x_t$ que inicia desde u_0 . Entonces $w_t = q(u_t, \zeta)$ es un levantamiento de τ que inicia desde w_0 . La unicidad de τ' se reduce a la unicidad de una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que satisfacen una condición inicial dada tal y como sucede en el levantamiento en un haz principal. □

Definición 2.1.22. Una sección σ de E definida sobre un subconjunto abierto U de M se llama *paralela* si la imagen de T_xM por σ es horizontal para cada $x \in U$, es decir, para cualquier curva $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, el desplazamiento paralelo de $\sigma(x_0)$ a lo largo de τ da $\sigma(x_1)$.

Para asociar el desplazamiento paralelo que habíamos definido, si $\tau \in M$, y $\tau^* = u_t$ es el levantamiento horizontal de τ a P , entonces para cada $\xi \in \mathbf{F}^m$ fijo, la curva $\tau' = q(u_t, \xi) = u_t \xi$, es un levantamiento horizontal de τ a E , pues $\pi_E^{-1}(U) \simeq U \times F^m$.

Ejemplo 2.1.23. Seguimos considerando el Ejemplo 2.1.4 del haz de marcos lineales en $M = \mathbb{R}$. Supongamos que $\tau(t)$ es una curva diferenciable en M , con $\tau(0) = x_0$. Sea $X \in T_{x_0}M$. Sea $\zeta = e_1 = 1$ y $u = \{X\}$. Luego utilizando la Proposición 1.1.4, $u\zeta = X$. Si $u = (x_0, a_0)$ en nuestro sistema local de coordenadas para LM . De acuerdo al Ejemplo 2.1.11, el levantamiento horizontal de τ a través de u está dado por $(x(t), a(t))$ donde

$$a(t) = a_0 \exp \left(\int_0^t S(x(\eta)) \dot{x}(\eta) d\eta \right).$$

La imagen de esta curva bajo f_ζ , está dada por

$$\left(x(t), a_0 \exp \left(\int_0^t S(x(\eta)) \dot{x}(\eta) d\eta \right) \right).$$

Definición 2.1.24. Sea ϕ una sección de E definida sobre $\tau = x_t$ tal que $\pi_E \circ \phi(x_t) = x_t$ para todo t . Sea \dot{x}_t el vector tangente a τ en x_t . Entonces, para cada t fijo, la derivada covariante $\nabla_{\dot{x}_t} \phi$ de ϕ en la dirección de (o con respecto a) \dot{x}_t está definida por

$$\nabla_{\dot{x}_t} \phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_t^{t+h}(\phi(x_{t+h})) - \phi(x_t)], \quad (2.1.6)$$

donde $\tau_t^{t+h} : \pi_E^{-1}(x_{t+h}) \rightarrow \pi_E^{-1}(x_t)$ denota el desplazamiento paralelo de la fibra $\pi_E^{-1}(x_t)$ a lo largo de τ desde x_{t+h} hasta x_t . Por consiguiente, $\nabla_{\dot{x}_t} \phi \in \pi_E^{-1}(x_t)$ para cada t y define una sección de E a lo largo de τ . La sección es paralela, es decir, la curva $\phi(x_t)$ en E es horizontal, si y sólo si $\nabla_{\dot{x}_t} \phi = 0$.

Una conexión lineal de una variedad M define, para cada curva $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, de M , el desplazamiento paralelo de los espacios tangentes $T_{x_0}M$ sobre el espacio tangente $T_{x_1}M$; estos espacios son considerados como espacios vectoriales y el desplazamiento paralelo es un isomorfismo lineal entre ellos.

Definición 2.1.25. Sea $X \in T_x M$ y ϕ una sección de E definida en una vecindad de x . Entonces la derivada covariante $\nabla_X \phi$ de ϕ en la dirección de X se define de la siguiente manera. Sea $\tau = x_t$, $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$, una curva tal que $X = \dot{x}_0$. Entonces

$$\nabla_X \phi = \nabla_{\dot{x}_0} \phi.$$

Ejemplo 2.1.26. Dado que hemos definido un desplazamiento paralelo en el Ejemplo 2.1.16, consideremos entonces una derivada covariante de campos vectoriales, de la siguiente manera:

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau_h^{-1} Y_{c(h)} - Y_p), \quad (2.1.7)$$

donde $c(0) = p$ y $c'(0) = X_p$.

Proposición 2.1.27. Sean $X, Y \in T_x M$ y sean ϕ y ψ secciones de E definidas en una vecindad de x . Entonces,

1. $\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi$;
2. $\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi$;
3. $\nabla_{\lambda X}\phi = \lambda\nabla_X\phi$, donde $\lambda \in \mathbf{F}$;
4. $\nabla_X(\lambda\phi) = \lambda(x)\nabla_X\phi + (X\lambda)\phi(x)$, donde λ es una función con valores en el campo \mathbf{F} definida sobre una vecindad de x .

Demostración. Sean $X, Y \in T_xM$ y sean ϕ, ψ secciones de E definidas en una vecindad de x , entonces

2.

$$\begin{aligned}\nabla_X(\phi + \psi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h((\phi + \psi)(x_h)) - (\phi + \psi)(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\phi(x_h) + \psi(x_h)) - \phi(x_0) - \psi(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\phi(x_h)) - \phi(x_0)] + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\psi(x_h)) - \psi(x_0)].\end{aligned}$$

3. Si $\lambda \in \mathbf{F}$

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda X}\phi &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\lambda\phi(x_h)) - \lambda\phi(x_0)] \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\phi(x_h)) - \phi(x_0)]\end{aligned}$$

4. Si λ es una función con valores en el campo \mathbf{F} definida sobre una vecindad de x .

$$\begin{aligned}\nabla_X(\lambda\phi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h((\lambda\phi)(x_h)) - (\lambda\phi)(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\lambda(x_h)\tau_0^h(\phi(x_h)) - \lambda(x_0)\phi(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\lambda(x_h)\tau_0^h(\phi(x_h)) - \lambda(x_h)\phi(x_0) + \lambda(x_h)\phi(x_0) - \lambda(x_0)\phi(x_0)] \\ &= \lambda(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h(\phi(x_h)) - \phi(x_0)] + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\lambda(x_h) - \lambda(x_0)] \phi(x_0) \\ &= \lambda(x)\nabla_X\phi + (X\lambda)\phi(x).\end{aligned}$$

Para probar 1., consideremos el Lema 2.1.30, y el hecho que, si $X, Y \in T_xM$ y $X^*, Y^* \in T_uP$ son levantamientos horizontales de X y Y respectivamente, entonces $X^* + Y^*$ es un levantamiento horizontal de $X + Y$. \square

Ejemplo 2.1.28. Sea Y un campo vectorial diferenciable definido en un abierto de \mathbb{R}^n . Asumamos que $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$. Entonces, la expresión

$$D_{\mathbf{v}}Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - Y(\mathbf{x})}{t} \quad (2.1.8)$$

se denomina la *derivada direccional* de Y en dirección de \mathbf{v} .

Además, para $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = \mathbf{x}$ y $\gamma'(0) = \mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}}Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(\gamma(t)) - Y(\mathbf{x})). \quad (2.1.9)$$

Definición 2.1.29. Si ϕ es una sección de E definida sobre un subconjunto abierto U de M , definimos la aplicación f ,

$$\begin{aligned} f : \pi^{-1}(U) &\rightarrow \mathbf{F}^m \\ v &\longmapsto f(v) = v^{-1}(\phi(\pi(v))) \end{aligned}$$

Lema 2.1.30. $\nabla_X \phi = u(X^* f)$.

Demostración. Sea $\tau = x_t$, $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$ una curva tal que $X = \dot{x}_0$. Sea $\tau^* = u_t$ un levantamiento horizontal de τ tal que $u_0 = u$ y $X^* = \dot{u}_0$. Entonces

$$X^* f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(u_h) - f(u)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u_h^{-1}(\phi(x_h)) - u^{-1}(\phi(x))]$$

y

$$u(X^* f) = \lim_{h \rightarrow 0} [u \circ u_h^{-1}(\phi(x_h)) - \phi(x)].$$

Para probar el Lema, es suficiente probar que $tau_0^h(\phi(x_h)) = u \circ u_h^{-1}(\phi(x_h))$.

Sea $\zeta = u_h^{-1}(\phi(x_h)) \in \mathbf{F}^m$. Entonces $u_t \zeta$ es una curva horizontal en E . Como $u_h \zeta = \phi(x_h)$, $\phi(x_h)$ es el elemento de E obtenido por el transporte paralelo de $u_0 \zeta = u \circ u_h^{-1}(\phi(x_h))$ a lo largo de τ desde x_0 hasta x_h . Esto implica que $\tau_0^h(\phi(x_h)) = u \circ u_h^{-1}(\phi(x_h))$. \square

Además, si ϕ es una sección de E definida sobre M y X es un campo vectorial sobre M , entonces la derivada covariante $\nabla_X \phi$ de ϕ en la dirección de X está definida por

$$(\nabla_X \phi)(x) = \nabla_{X_x} \phi.$$

De manera más general tenemos,

Proposición 2.1.31. Sean X y Y campos vectoriales sobre M , ϕ , ψ secciones transversales de E sobre M y λ una función con valores en el campo \mathbf{F} sobre M . Entonces

1. $\nabla_{X+Y} \phi = \nabla_X \phi + \nabla_Y \phi$;
2. $\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X \phi + \nabla_X \psi$;
3. $\nabla_{\lambda X} \phi = \lambda \nabla_X \phi$;
4. $\nabla_X(\lambda \phi) = \lambda(x) \nabla_X \phi + (X\lambda)\phi(x)$.

Como corolario inmediato de la Proposición 2.1.31 y del Ejemplo 1.1.7, tenemos

Proposición 2.1.32. Si X, Y y Z son campos vectoriales sobre M , entonces

- (1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;
- (3) $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$, para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$;
- (4) $\nabla_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf)Y$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$;

(5) $\nabla_X f = Xf$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Definición 2.1.33. La forma canónica θ de LM es la 1-forma con valores en \mathbb{R}^n sobre P definida por $\theta(X) = u^{-1}(\pi_*(X))$, para $X \in T_u P$, dónde u es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n sobre $T_{\pi(u)}M$.

Definición 2.1.34. Dada una conexión lineal Γ de M , asociamos a cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ un campo vectorial horizontal $B(\xi)$ sobre P , de la siguiente manera. Para cada $u \in P$, $(B(\xi))_u$ es el único campo vectorial horizontal en u tal que $\pi_*((B(\xi))_u) = u(\xi)$. $B(\xi)$ se llama el campo vectorial horizontal estándar correspondiente a ξ .

Ejemplo 2.1.35. Sea $\zeta \in \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}$, $P = LM$, $G = \mathbb{R}^*$. Para $u = (x, a) \in LM$ y $\pi(u) = x$, luego $u(\zeta) = a\zeta \frac{\partial}{\partial x} = (x, a\zeta)$. Deseamos hallar un campo vectorial horizontal $B(\zeta)$ tal que $\pi_*(B(\zeta)_u) = u(\zeta)$. De acuerdo al Ejemplo 2.1.18 $h(x, a) = (x, a, 1, aS(x))$ genera la conexión lineal en LM , luego $a\zeta h(x, a) = a\zeta \frac{\partial}{\partial x} + a^2\zeta S(x) \frac{\partial}{\partial a} = (x, a, a\zeta, a^2\zeta S(x))$. Si $B(\zeta)_u = a\zeta h(x, a)$, entonces $\pi_*(B(\zeta)_u) = (x, a\zeta) = u(\zeta)$.

Definición 2.1.36. Una métrica g en las fibras de un haz vectorial E es una asignación, a cada $x \in M$, de un producto interno g_x en la fibra $\pi_E^{-1}(x)$, que es diferenciable en x . Dada una métrica g en las fibras de E , una conexión en P es llamada una conexión métrica si el desplazamiento paralelo de fibras de E preserva la métrica g . De manera más precisa, para cada $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, de M , el desplazamiento paralelo $\pi_E^{-1}(x_0) \rightarrow \pi_E^{-1}(x_1)$ a lo largo de τ es isométrico.

Proposición 2.1.37. Sea g una métrica en las fibras de un haz vectorial $E(M, F^m, G, P)$ y $Q(M, H)$ el subhaz reducido de $P(M, G)$ definido por g . Una conexión Γ en P es reducible a una conexión Γ' en Q si y sólo si Γ es una conexión métrica.

Demostración. Sea $\tau = x_t$, $0 \leq t \leq 1$, una curva en M . Sea $\xi, \eta \in F^m$ y $u_0 \in Q$ con $\pi(u_0) = x_0$. Sea $\tau^* = u_t$ el levantamiento horizontal de τ a P iniciando desde u_0 tal que ambos $\tau' = u_t(\xi)$ y $\tau'' = u_t(\eta)$ son levantamientos horizontales de τ a E . Si Γ es reducible a una conexión Γ' en Q , entonces $u_t \in Q$ para todo t . Así,

$$g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = (\xi, \eta) = g(u_t(\xi), u_t(\eta)),$$

probando que Γ es una conexión métrica. Recíprocamente, si Γ es una conexión métrica, entonces

$$g(u_t(\xi), u_t(\eta)) = g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = (\xi, \eta).$$

Por lo tanto, $u_t \in Q$. Esto significa que Γ es reducible a una conexión en Q , pues definimos Γ' en Q de la siguiente manera. El subespacio horizontal de $T_u Q$, $u \in Q$, con respecto a Γ' es por definición el subespacio horizontal de $T_u P$ con respecto a Γ , siempre que para todo $u \in Q$, el subespacio horizontal de $T_u P$ sea tangente a Q . \square

2.2. Tensores de curvatura y torsión

Definición 2.2.1. Sea $h : T_uP \rightarrow Q_u$ la proyección sobre la componente horizontal, es decir, si $X \in T_uP$, $X = Y + Z$, donde Y corresponde a la componente horizontal de X y Z a la componente vertical de X , entonces $h(X) = Y$. Definimos la forma de torsión Θ de una conexión lineal Γ por

$$\Theta = D\theta = (d\theta)h, \text{ llamada la derivada covariante exterior de } \theta.$$

De manera similar $D\omega = (d\omega)h = \Omega$ se llama forma de curvatura de ω .

Teorema 2.2.2. (*Ecuaciones de Estructura.*) Sean ω una forma de conexión, Ω su forma de curvatura y Θ la forma de torsión de una conexión lineal Γ de M . Entonces

(a)

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2} [\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y),$$

(b)

$$d\theta(X, Y) = -\frac{1}{2} (\omega(X) \cdot \theta(Y) - \omega(Y) \cdot \theta(X)) + \Theta(X, Y).$$

para $X, Y \in T_uP$, $u \in P$.

Demostración. (a) Todo vector de P es una suma de un vector vertical y un vector horizontal. Como ambos lados de la igualdad son bilineales y anti-simétricos en X y Y , podemos verificar los siguientes casos:

1. X y Y son horizontales. En este caso $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ y la igualdad se reduce a la definición de Ω .
2. X y Y son verticales. Sean $X = A^*$ y $Y = B^*$ en u , donde $A, B \in \mathfrak{g}$, donde A^* y B^* son los campos vectoriales fundamentales correspondientes a A y B respectivamente. Luego

$$2d\omega(A^*, B^*) = A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) = -[A, B] = -[\omega(A^*), \omega(B^*)],$$

como $\omega(A^*) = A$, $\omega(B^*) = B$ y $[A^*, B^*] = [A, B]^*$. Además $\Omega(A^*, B^*) = 0$.

3. X es horizontal y Y es vertical. Sea $Y = A^*$ en u , donde $A \in \mathfrak{g}$. Como el lado derecho de la igualdad se anula, es suficiente probar que $d\omega(X, A^*) = 0$. Luego

$$2d\omega(X, A^*) = -\omega([X, A^*]).$$

Ahora, solo debemos probar lo siguiente

Lema 2.2.3. Si A^* es el campo vectorial fundamental correspondiente a un elemento $A \in \mathfrak{g}$ y X es un campo vectorial horizontal, entonces $[X, A^*]$ es horizontal.

Demostración. El campo vectorial fundamental A^* es inducido por R_{a_t} donde a_t es el subgrupo 1-paramétrico de G generado por $A \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$[X, A^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [R_{a_t}(X) - X].$$

Si X es horizontal, también lo es $R_{a_t}(X)$. Por consiguiente $[X, A^*]$ es horizontal. \square

- (b) De manera similar probaremos el único caso no trivial donde X es vertical y Y es horizontal. Tomando $A \in \mathfrak{g}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ tales que $X = A^*_u$ y $Y = B(\xi)_u$. Entonces $\Theta(X, Y) = 0$, $\omega(Y) \cdot \theta(X) = 0$ y $\omega(X) \cdot \theta(Y) = \omega(A^*)\theta(B(\xi)) = A\xi$. Del otro lado, $2d\theta(X, Y) = A^*(\theta(B(\xi))) - B(\xi)(\theta(A^*)) - \theta([A^*, B(\xi)]) = -\theta([A^*, B(\xi)]) = -\theta(B(A\xi)) = -A\xi$. Lo que prueba la segunda ecuación de estructura. \square

Ejemplo 2.2.4. Consideremos la base $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ de \mathbb{R}^n . Escribimos

$$\theta = \theta^i e_i, \quad \Theta = \Theta^i e_i.$$

Con respecto a la base E_i^j de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, escribimos

$$\omega = \omega_j^i E_i^j, \quad \Omega = \Omega_j^i E_i^j.$$

Entonces las ecuaciones de estructura pueden ser escritas como

$$d\theta^i = -\omega_j^i \wedge \theta^j + \Theta^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Considerando θ como una forma con valor vectorial y ω como una forma con valores en una matriz, también podemos escribir las ecuaciones de estructura de la siguiente manera:

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta \tag{2.2.1}$$

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega. \tag{2.2.2}$$

Definición 2.2.5. Definimos la torsión T y la curvatura R de la siguiente manera:

Sea M una variedad y $x \in M$. Sea u un punto de LM con $\pi(u) = x$. Sean X^* y Y^* vectores de LM en u con $\pi(X^*) = X$ y $\pi(Y^*) = Y$. Entonces T define una aplicación bilineal anti-simétrica en todo punto $x \in M$, $T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M$.

$$T(X, Y) = u(2\Theta(X^*, Y^*)), \quad X, Y \in T_x M.$$

De manera similar,

$$R(X, Y)Z = u((2\Omega(X^*, Y^*))(u^{-1}Z)), \quad X, Y, Z \in T_x M,$$

tal que $R(X, Y) = -R(Y, X)$.

Teorema 2.2.6. *Para cualesquiera X, Y, Z campos vectoriales sobre M , tenemos*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.2.3)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.2.4)$$

Demostración. Por el Lema 2.1.30, definimos $f_Y : LM \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f_Y(u) = u^{-1}(Y_{\pi(u)})$. Si Y^* el levantamiento horizontal de Y , entonces podemos escribir $f_Y(u) = \theta(Y_{\pi(u)})$. Luego, $\nabla_X Y = u(X^* \theta(Y))$. Usando la ecuación de estructura (b) del Teorema 2.2.2 tenemos

$$\begin{aligned} T(X_x, Y_x) &= u(2\Theta(X_u^*, Y_u^*)) \\ &= u(2D\theta(X_u^*, Y_u^*)) \\ &= u(2d\theta(h(X_u^*), h(Y_u^*))) \\ &= u(X^*(\theta(Y_u^*)) - Y^*(\theta(X_u^*)) - \theta([X_u^*, Y_u^*])) \\ &= (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x. \end{aligned}$$

Para probar la otra igualdad como X^*, Y^*, Z^* son horizontales, entonces

$$\begin{aligned} \Omega(X_u^*, Y_u^*) &= d\omega(X^*, Y^*)(u) \\ &= \frac{1}{2} (X^* \omega(Y^*)(u) - Y^* \omega(X^*)(u) - \omega([X^*, Y^*])(u)) \\ &= -\frac{1}{2} \omega([X^*, Y^*])(u). \end{aligned}$$

Además, sea $f = \theta(Z^*)$ una aplicación con valores en \mathbb{R}^n . Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} ([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z)_x &= u(X_u^*(Y^* f) - Y_u^*(X^* f) - (h[X^*, Y^*])_u f) \\ &= u((v[X^*, Y^*])_u f), \end{aligned}$$

donde v corresponde a la componente vertical y h a la componente horizontal. Sea $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}^n)$ tal que $A_u^* = (v[X^*, Y^*])_u$, donde A^* es el campo vectorial fundamental correspondiente a A , así, $-\omega([X^*, Y^*]) = -A$. Si a_t es el subgrupo 1-paramétrico de $GL(n, \mathbb{R})$ generado por A , entonces

$$\begin{aligned} A_u^* f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(ua_t) - f(u)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (a_t^{-1} f(u) - f(u)) \\ &= -A(f(u)) \end{aligned}$$

donde $A(f(u))$ denota la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicada a $f(u) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} ([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z)_x &= u((v[X^*, Y^*])_u f) = u(-A(f(u))) = u(2\Omega(X_u^*, Y_u^*)(f(u))) \\ &= u(2\Omega(X_u^*, Y_u^*)(u^{-1}Z)) = R(X, Y)Z \end{aligned}$$

□

Definición 2.2.7. Sea M una n -variedad diferenciable con tensor métrico g . Denotemos por $R(X, Y)$ la aplicación curvatura de $T_x M$. El tensor de la *curvatura Riemanniana* de M , denotado también por R , es el campo tensorial de grado 4 covariante definido por

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1), \quad X_i \in T_x M, i = 1, \dots, 4. \quad (2.2.5)$$

Este campo tensorial satisface las siguientes propiedades:

- (a) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4)$
- (b) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_4, X_3)$
- (c) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) = 0$
- (d) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$

2.3. Conexiones Riemannianas

Proposición 2.3.1. Sea M una n -variedad diferenciable. Todo fibrado vectorial E sobre M admite una métrica en las fibras de E (Definición 2.1.36).

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento localmente finito de M tal que $\pi_E^{-1}(U_i)$ es difeomorfo con $U_i \times \mathbb{R}^m$ para cada i . Sea $\{s_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$. Sea h^i una métrica sobre las fibras de $E|_{U_i} = \pi_E^{-1}(U_i)$. Sea $g = s_i h^i$, es decir,

$$g_x(X, Y) = s_i(x)h^i(X, Y), \text{ para } X, Y \in \pi_E^{-1}(x), x \in M. \quad (2.3.1)$$

1. Como h^i es una métrica en la fibra $\pi_E^{-1}(x)$, luego $h(X, X) \geq 0$ y por lo tanto $g_x(X, X) = s_i(x)h^i(X, X) \geq 0$. Además para $x \in U_i$, si $g_x(X, X) = 0$ entonces $h(X, X) = 0$ y por lo tanto $X = 0$. Como el razonamiento anterior es válido de manera contraria, entonces hemos probado que $g_x(X, X) = 0$ si y sólo si $X = 0$.
2. $g_x(X, Y) = s_i(x)h^i(X, Y) = s_i(x)h^i(Y, X) = g(Y, X)$.

Como $\{U_i\}$ es localmente finito y s_i se anula fuera de U_i , g está bien definida. □

Ejemplo 2.3.2. Sea M una n -variedad diferenciable. Por la Proposición 2.3.1 el fibrado asociado sobre M admite una métrica Riemanniana. Sea $U_i \in I$ un cubrimiento localmente finito de M tal que $\pi_E^{-1}(U_i)$ es difeomorfo con $U_i \times \mathbb{R}^m$. Sobre $U_i \times \mathbb{R}^m$ existe una métrica Riemanniana definida por,

$$((p, a), (p, b))_p = (a, b).$$

Para $X, Y \in \pi_E^{-1}(x)$, definimos

$$(X, Y)_x^{U_i} = (\psi_{U_i}(X), \psi_{U_i}(Y))_x,$$

donde ψ_{U_i} corresponde al difeomorfismo de la localidad trivial del fibrado asociado.

Entonces $(,)^{U_i}$ es una métrica Riemanniana para $E|_{U_i}$. Tomando $\{s_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$. Definimos $(,)$ por

$$(X, Y)_x = \sum_{U_i} s_i(x)(X, Y)_x^{U_i}, \quad X, Y \in \pi_E^{-1}(x).$$

Entonces $(,)$ es una métrica Riemanniana.

Definición 2.3.3. Sea M una variedad y U una vecindad coordinada en M con un sistema local de coordenadas x^1, \dots, x^n . Sea ω la forma de conexión de una conexión lineal Γ de M . Con respecto a la base $\{E_i^j\}$ de $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, escribimos

$$\omega = \omega_j^i E_i^j.$$

Sea σ la sección de LM sobre U que asigna a cada $x \in U$ el marco lineal $((X_1)_x, \dots, (X_n)_x)$. Definimos

$$\omega_U = \sigma^* \omega.$$

La función ω_U es una 1-forma definida sobre U con valores en $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$. Definimos las funciones Γ_{jk}^i , $i, j, k = 1, \dots, n$, sobre U por

$$\omega_U = (\Gamma_{jk}^i dx^j) E_i^k.$$

Las funciones Γ_{jk}^i se llaman los coeficientes de la conexión lineal Γ con respecto al sistema local de coordenadas x^1, \dots, x^n .

Proposición 2.3.4. Asumamos que la aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, satisface las condiciones (1), (2), (3), (4) de la Proposición 2.1.32. Entonces existe una única conexión lineal Γ de M tal que $\nabla_X Y$ es la derivada covariante de Y en la dirección de X con respecto a Γ .

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [6, Proposición 7.5., p.143]. \square

Proposición 2.3.5. Una conexión lineal Γ de una variedad Riemanniana M con métrica g es una conexión métrica si y sólo si g es paralela con respecto a Γ .

Demostración. Dado que g es una métrica en las fibras del haz tangente $T(M)$, entonces por 2.1.37, la Proposición se deduce de manera inmediata. \square

Teorema 2.3.6. Dada M una variedad Riemanniana existe una única conexión métrica (Definición 2.1.36) con torsión nula, conocida como Conexión de Levi-Civita.

Demostración. Sea g una métrica Riemanniana sobre M , y sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Como $g(X, Y)$ es una aplicación diferenciable sobre M , entonces $\nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z)$.

Ahora supongamos la existencia de dicha conexión ∇ . Dado que g es una conexión métrica, $\nabla g = 0$, es decir,

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (2.3.2)$$

$$Yg(X, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z), \quad (2.3.3)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (2.3.4)$$

Sumando las expresiones (2.3.2) con (2.3.3) y restando la expresión (2.3.4), obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + 2g(\nabla_Y X, Z) + \\ &\quad g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\ &= 2g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) + g(X, [Y, Z]) + g(Y, [X, Z]). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2g(\nabla_Y X, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g(Y, [X, Z]), \quad (2.3.5)$$

La expresión (2.3.5) muestra que ∇ está determinado de manera única por la métrica g , por lo tanto si esta existe debe ser única.

Para probar la existencia, definimos ∇ por la ecuación (2.3.5) para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces,

1. Sean $X, Y, Y', Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{Y+Y'} X, Z) &= Xg(Y + Y', Z) + (Y + Y')g(X, Z) - Zg(X, Y + Y') \\ &\quad - g([X, (Y + Y')], Z) - g([(Y + Y'), Z], X) - g((Y + Y'), [X, Z]) \\ &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) + Xg(Y', Z) + Y'g(X, Z) - Zg(X, Y') \\ &\quad - g([X, Y'], Z) - g([Y', Z], X) - g(Y', [X, Z]) \\ &= 2g(\nabla_Y X, Z) + 2g(\nabla_{Y'} X, Z) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\nabla_{Y+Y'} X = \nabla_Y X + \nabla_{Y'} X$.

2. De manera análoga al primer ítem, $\nabla_Y(X + Z) = \nabla_Y X + \nabla_Y Z$

3. Sea $f \in \mathfrak{F}(M)$,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fY} X, Z) &= fYg(X, Z) + Xg(fY, Z) - Zg(X, fY) - g([X, fY], Z) \\ &\quad - g([fY, Z], X) - g(fY, [X, Z]) \\ &= X(f)g(Y, Z) + fXg(Y, Z) + fYg(X, Z) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad - fZg(X, Y) - g((Xf)Y, Z) - fg([X, Y], Z) \\ &\quad - fg([Y, Z], X) + g((Zf)Y, X) - fg([X, Z], Y) \\ &= f\{Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g([X, Z], Y)\} \\ &= f2g(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X.$$

4. Sea $f \in \mathfrak{F}(M)$, luego

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y(fX), Z) &= Y(g(fX, Z)) + fXg(Y, Z) - Zg(fY, X) - g([fX, Y], Z) \\ &\quad - g(fX, [Y, Z]) - g(Y, [fX, Z]) \\ &= Y(f)g(X, Z) + fXg(Y, Z) - Z(f)g(Y, X) + g((Yf)X, Z) \\ &\quad - fg([X, Y], Z) - fg([Y, Z], X) + g((Zf)Y, X) - fg(Y, [X, Z]) \\ &= 2g((Yf)X + f\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

Dado que ∇ cumple las condiciones de la Proposición 2.3.4, entonces ∇ determina una conexión lineal Γ de M . El hecho que Γ tiene torsión nula, corresponde a utilizar la ecuación (2.2.3) y la definición de $\nabla_X Y$. Luego, para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$2g(T(X, Y), Z) = 2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_Y X, Z) - 2g([X, Y], Z) = 0.$$

Es decir que Γ es una conexión con torsión nula. Para mostrar que Γ es una conexión métrica, esto es, $\nabla g = 0$, es suficiente probar que para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Pero esto es inmediato de la definición de $\nabla_X Y$. \square

Proposición 2.3.7. Sea x^1, \dots, x^n un sistema de coordenadas local sobre U , una vecindad coordinada en una n -variedad Riemanniana M con una conexión lineal Γ . Sea $X_i = \partial_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces los coeficientes de conexión Γ_{jk}^i de Γ con respecto a x^1, \dots, x^n están dados por

$$\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ji}^k \partial_k, \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (2.3.6)$$

Los n^3 coeficientes de conexión son funciones diferenciables de $M \rightarrow \mathbb{R}$.

Si Γ es la *conexión de Levi-Civita*, entonces son $\frac{n^2(n+1)}{2}$ coeficientes de conexión y se llaman *símbolos de Christoffel*.

Demostración. Sea X_j^* el levantamiento horizontal de X_j . En términos del sistema de coordenadas local (x^i, X_k^j) en LM y de acuerdo a (2.1.1), X_j^* está dado por

$$X_j^* = X_j - \omega_k^i(X_j) \sigma(E_i^k)$$

Para aplicar el Lema 2.1.30, sea f la función con valores en \mathbb{R}^n sobre $\pi^{-1}(U) \subset LM$ que corresponde a X_i , entonces $f(u) = u^{-1}((X_i)_x) = Y_i^k e_k$. Por lo tanto $f^k(u) = Y_i^k$. Además, $Y_i^k X_k^j = \delta_i^j$, luego,

$$f^k(u)(X_k^j(X_j)_x) = (X_j)_x, \quad (2.3.7)$$

donde $u_k = X_k^j(X_j)_x$ y $u = (u_1, \dots, u_n) \in LM$. Si ϕ es una sección de LM sobre U definida por $s(x) = ((X_1)_x, \dots, (X_n)_x)$, entonces $f^k(s(x)) = \delta_j^k$. Si escribimos $u = s(x) \exp(tA)$ donde $A \in \mathfrak{g}$, lo reemplazamos en la ecuación (2.3.7) y derivamos con respecto a t , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f^k(s(x) \exp(tA)) X_k + f^k(s(x)) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (s(x) \exp(tA))_k \\ = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f^k(s(x) \exp(tA)) X_k + \delta_j^k (s(x) A)_k = 0. \end{aligned}$$

Entonces, $\sigma(A) f^k X_k = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f^k(s(x) \exp(tA)) X_k = -(s(x) A)_j$. De manera particular si $E_i^l \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, entonces

$$\sigma(E_i^l) f^k X_k = -(s(x) E_i^l)_j = -(E_i^l)_j^\alpha X_\alpha = -\delta_i^l \delta_j^\alpha X_\alpha = -\delta_i^l X_j \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto

$$\sigma(E_i^l)f^k = \begin{cases} -\delta_i^l & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Aplicando el levantamiento horizontal X_j^* sobre f^k tenemos que

$$\begin{aligned} X_j^*f^k &= X_jf^k - \omega_l^i(X_j)\sigma(E_i^l)f^k \\ &= -\Gamma_{jl}^i f^k (-\delta_i^l) \\ &= \Gamma_{ji}^l Y_l^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_j^*f = \Gamma_{ji}^l Y_l^k e_k$ y por el Lema (2.1.30) X_j^*f es la función correspondiente a $\nabla_{X_j} X_i$, es decir,

$$\nabla_{X_j} X_i = \Gamma_{ji}^k X_k. \quad (2.3.9)$$

□

Proposición 2.3.8. En términos de un sistema de coordenadas local x^1, \dots, x^n , los coeficientes Γ_{jk}^i de la conexión de *Levi-Civita* están dados por

$$g_{lk}\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ji}), \quad i, j, k, l = 1, \dots, n. \quad (2.3.10)$$

Demostración. Sea $X = \partial_j$, $Y = \partial_i$ y $Z = \partial_k$. Dado que se trata de la conexión de *Levi-Civita*, entonces se debe cumplir la ecuación que determina $\nabla_X Y$, dada por la expresión (2.3.5). Entonces

$$2g(\nabla_{\partial_j} \partial_i, \partial_k) = \partial_j g(\partial_i, \partial_k) + \partial_i g(\partial_j, \partial_k) - \partial_k g(\partial_j, \partial_i) + g([\partial_j, \partial_i], \partial_k) + g([\partial_k, \partial_j], \partial_i) + g(\partial_j, [\partial_k, \partial_i]), \quad (2.3.11)$$

como $[\partial_i, \partial_j] = 0$ para todo i, j , entonces

$$g_{lk}\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ji}). \quad (2.3.12)$$

□

Capítulo 3

Geodésicas

Este capítulo está dedicado al estudio de las geodésicas sobre las variedades Riemannianas brindando algunos ejemplos sobre como calcularlas. Además, determinaremos cuando las geodésicas son mínimas. Para terminar, enfocamos el estudio de las geodésicas sobre los grupos de Lie, guiados y motivados por el artículo [4].

3.1. Ecuaciones de derivación y geodésicas

Definición 3.1.1. Una curva $\tau = x_t$, $a < t < b$, diferenciable en una variedad M con una conexión lineal se llama una geodésica si el campo vectorial $X = \dot{x}_t$ definido a lo largo de τ es paralelo a lo largo de τ , es decir si $\nabla_X X$ existe y es igual a 0 para todo t .

Proposición 3.1.2. Sea $x^i = x^i(t)$ las ecuaciones de una curva τ diferenciable. Entonces τ es una geodésica si y sólo si

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ji}^k \dot{x}^j \dot{x}^i = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.1.1)$$

Demostración. Las componentes del campo vectorial \dot{x}_t a lo largo de τ están dados por $V^i = \frac{dx^i}{dt}$, entonces si $X = \dot{x}_t$, $\nabla_X X = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{x}_t} \dot{x}_t &= [V^i (\partial_i V^k) + \Gamma_{ij}^k V^i V^j] \partial_k \\ &= [\dot{V}^k + \Gamma_{ij}^k V^i V^j] \partial_k \\ &= [\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j] \partial_k = 0 \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.3. Sea S una *superficie regular*, es decir, una 2-subvariedad diferenciable encajada de \mathbb{R}^3 , parametrizada por $r(u^1, u^2) = (f(u^1) \cos(u^2), f(u^1) \sin(u^2), g(u^1))$.

Sea $\vec{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u^1} \times \frac{\partial r}{\partial u^2}}{\|\frac{\partial r}{\partial u^1} \times \frac{\partial r}{\partial u^2}\|}$, luego el trihedro definido por $\{\partial_1 r, \partial_2 r, \vec{n}\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Para cada punto $p \in S$, definimos las *Ecuaciones de Derivación* por las siguientes relaciones

$$\partial_i r_j = \Gamma_{ij}^k r_k + h_{ij} \vec{n}, \quad (3.1.2)$$

$$\partial_i \vec{n} = f_i^j r_j + p \vec{n}. \quad (3.1.3)$$

Observación. La base definida por el trihedro, se conoce como un marco móvil, porque intuitivamente puede entenderse como un conjunto de vectores que parecen “moverse” sobre la subvariedad encajada en \mathbb{R}^3 .

Teorema 3.1.4. *Sobre las Ecuaciones de derivación, podemos concluir que:*

1. $\partial_i \vec{n} = f_i^j r_j$
2. $f_j^k g_{ik} = -h_{ij}$

Demostración. Dado que $\|\vec{n}\| = 1$, por 3.1.3, tenemos:

$$\partial_i \vec{n} \cdot \vec{n} = f_i^j r_j \cdot \vec{n} + p = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

de dónde $p = 0$, pues $r_j \cdot \vec{n} = 0$. De manera similar, como $\vec{n} \cdot r_i = 0$, luego

$$\partial_j(\vec{n} \cdot r_i) = \partial_j \vec{n} \cdot r_i + \vec{n} \cdot \partial_j r_i = 0,$$

es decir que

$$\begin{aligned} f_j^k r_k \cdot r_i + \vec{n} \cdot \Gamma_{ji}^k r_k + h_{ji} &= f_j^k g_{ik} + h_{ji} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $f_j^k g_{ik} = -h_{ij}$, de dónde $f_j^k = -h_{ij} g^{ki}$, para $i, j, k = 1, 2$. Así, hemos probado nuestro teorema y deducimos que:

$$\partial_i \vec{n} = f_i^j r_j, \tag{3.1.4}$$

$$\partial_i r_j = \Gamma_{ij}^k r_k + h_{ij} \vec{n}. \tag{3.1.5}$$

□

Observación. En física, la *fuerza* es una magnitud vectorial que mide la razón de cambio de momento lineal entre dos partículas o sistema de partículas.

Proposición 3.1.5. Si M es una hipersuperficie en N , es decir (M, i) es una subvariedad de codimensión 1 de N , donde i es la inclusión, y g una métrica riemanniana sobre N , localmente podemos escoger un *campo unitario normal* a M de la siguiente manera, sobre una vecindad U de un punto $p \in M$, podemos escoger un campo vectorial X tal que $g(X, X) = 1$ y $X(q) \in T_q(M)^\perp$ para cada $q \in U$.

Teorema 3.1.6. *Sea M una n -superficie regular, parametrizada por (U, r) en p y con coordenadas u^1, \dots, u^n . Sea $\rho(t)$, una curva diferenciable en M . Si \vec{n} es la fuerza que actúa para que ρ no salga de la variedad mientras esta se mueve, es decir, consideramos \vec{n} como el campo unitario normal a M , entonces*

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Observación. Las ecuaciones de derivación (3.1.4) son validas para \mathbb{R}^{n+1} tomando $\vec{n} = \frac{\partial_1 r \times \dots \times \partial_n r}{\|\partial_1 r \times \dots \times \partial_n r\|}$ y $\{\partial_1 r, \dots, \partial_n r, \vec{n}\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} .

Demostración. Dado que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \right) = \partial_i r_j \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + r_i \frac{d^2 u^i}{dt^2}.$$

Así,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = (\Gamma_{ij}^k r_k + h_{ij} \cdot \vec{n}) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + r_k \frac{d^2 u^k}{dt^2} = \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) r_k + h_{ij} \cdot \vec{n} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}.$$

Por la segunda ley de Newton

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \|\vec{n}\| \Leftrightarrow \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.6)$$

□

Dadas unas condiciones iniciales para (3.1.6) tales como $u^c(0) = u_0^c$ y $\frac{du^c}{dt}(0) = v_0^c$, el sistema de ecuaciones diferenciales tendrá una solución única.

Ejemplo 3.1.7. Sea $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación $r(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$. Luego, una base ortonormal para \mathbb{R}^3 es $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$, así, los coeficientes de h_{ij} son todos nulos. De las ecuaciones de derivación podemos obtener que $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo i, j, k . Así mismo los coeficientes del operador forma h_i^k son todos nulos.

El sistema de ecuaciones diferenciales para saber cuáles son las geodésicas en el plano está dado por:

$$\frac{d^2 u^1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 u^2}{dt^2} = 0.$$

Solucionando el sistema tenemos que: $u^i(t) = C^i t + k^i$, con $C^i, k^i \in \mathbb{R}$, luego $\rho(t) = r(u^1(t), u^2(t)) = (C^1 t + k^1, C^2 t + k^2, 0) = t(C^1, C^2, 0) + (k^1, k^2, 0)$, que corresponde a la ecuación de una recta. Por lo tanto, las rectas en el plano cumplen con la definición de geodésica. Si tuvieramos condiciones iniciales la solución sería una única recta.

Definición 3.1.8. Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^n , $p \in M$ y (U, r) una carta de M tal que $p \in U$. Si $\vec{w} \in T_p(M)$, luego $\vec{w} = W^a r_a$, así

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(W^a r_a) = \left[\frac{dw^a}{dt} + \Gamma_{cb}^a \frac{du^c}{dt} w^b \right] r_a + h_{ab} w^a \frac{du^b}{dt} \vec{n}.$$

Como $d\vec{w}/dt \|\vec{n}\|$, entonces

$$\frac{dw^a}{dt} + \Gamma_{cb}^a \frac{du^c}{dt} w^b = 0, \quad (3.1.7)$$

que se conoce como *Ecuación de Transporte Paralelo*.

Otra interpretación de las geodésicas está dada en términos del haz de marcos lineales M .

Proposición 3.1.9. La proyección sobre M de cualquier curva integral de un campo vectorial horizontal estándar de LM es una geodésica y, recíprocamente, toda geodésica es obtenida en esta manera.

Demostración. Sea B el campo vectorial horizontal estándar sobre LM correspondiente a $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Sea b_t una curva integral de B . Sea $x_t = \pi(b_t)$. Entonces $\dot{x}_t = \pi_*(\dot{b}_t) = \pi_*(B_{b_t}) = b_t\zeta$, donde $b_t\zeta$ es la imagen de ζ bajo la aplicación lineal $b_t : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_t}M$ (Proposición 1.1.4). Como b_t es un levantamiento horizontal de x_t y ζ es independiente de t , $b_t\zeta$ es paralela a lo largo de la curva x_t (ver Definición 2.1.22).

Recíprocamente, sea x_t una geodésica en M definida en algún intervalo abierto que contiene el 0. Sea u_0 un punto arbitrario de LM tal que $\pi(u_0) = x_0$. Definimos $\zeta = u_0^{-1}\dot{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea u_t el levantamiento horizontal de x_t a través de u_0 . Como x_t es una geodésica, tenemos que $\dot{x}_t = u_t\zeta$. Dado que u_t es horizontal y como $\theta(\dot{u}_t) = u_t^{-1}(\pi_*(\dot{u}_t)) = u_t^{-1}\dot{x}_t = \zeta$, u_t es una curva integral de el campo vectorial horizontal estándar B correspondiente a ζ . \square

3.2. Geodésica una curva óptima

En esta sección del trabajo estudiaremos las geodésicas a partir del cálculo variacional. Dados dos puntos sobre una variedad M , deseamos encontrar al camino más corto sobre M que une estos dos puntos.

Definición 3.2.1. Si $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow M$ es una curva, con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, definimos una variación de γ por la función $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$, para algún $\epsilon > 0$, tal que

1. $\alpha(0, t) = \gamma(t)$,
2. existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$ tal que α es C^∞ sobre cada banda $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$.

Decimos que α es una variación de γ que deja los extremos fijos si $\alpha(u, a) = p$ y $\alpha(u, b) = q$ para todo $u \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Definición 3.2.2. Sea γ_ϵ arbitraria, una familia de variaciones de γ que deja los puntos extremos fijos, así para un funcional J definido de la siguiente manera

$$J(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

decimos que γ minimiza el funcional siempre que $J(\gamma) \leq J(\gamma_\epsilon)$.

Se debe aclarar que $L : TM \rightarrow M$, es decir que si $\gamma(t) \in M$ y (x, U) es un sistema coordenado sobre M alrededor de $\gamma(t)$, entonces $L = L(x^i, \dot{x}^i)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(\gamma_\epsilon) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_a^b L(t, \gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) dt \\ &= \int_a^b \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} L(t, \gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[\left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial t} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_a^b \left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} dt + \int_a^b \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial t} \right) \right|_{\epsilon=0} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes el segundo término tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial t} \right) \right|_{\epsilon=0} dt &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial \epsilon} \right|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dt \\ &= - \int_a^b \frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) dt \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(\gamma_\epsilon) &= \int_a^b \left[\frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial \gamma_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} dt. \end{aligned}$$

Como γ minimiza J luego $\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(\gamma_\epsilon) = 0$ es decir que

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \quad (3.2.1)$$

la ecuación (3.2.1) se conoce como *ecuación de Euler-Lagrange*.

Ejemplo 3.2.3. En un sistema mecánico, definimos $L = K - U$, donde K hace referencia a la energía cinética del sistema y U a la energía potencial. Buscamos encontrar la curva que minimiza el funcional descrito por :

$$E(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$$

Dado que $L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n (\dot{x}^i)^2 - U(x^1, x^2, \dots, x^n)$, luego haciendo uso de las *Ecuaciones de Euler-Lagrange* tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= -\frac{\partial U(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial x^i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(m \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \right) = m \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{dt} \right), \text{ es decir,} \\ m \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial x^i} = \mathbf{F} \end{aligned}$$

La ecuación anterior coincide con la ecuación de *Newton* para las leyes del movimiento, $F = ma$, es decir, que sobre un sistema físico con energía potencial y cinética, las trayectorias son curvas óptimas.

Ejemplo 3.2.4. Dada $J(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j dt$ hallar la curva que minimiza el funcional J .

Es claro que L está definido sobre TM , además supongamos que $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Así, el Lagrangiano L está definido por $L(x^i, \dot{x}^i) = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$. Haciendo uso de las ecuaciones de *Euler-Lagrange*, obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (\dot{x}^i \dot{x}^j) \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (\dot{x}^i) \dot{x}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (\dot{x}^j) \\ &= \frac{1}{2} g_{kj} \dot{x}^j + \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \\ &= g_{ki} \dot{x}^i. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (g_{ki} \dot{x}^i) = \left[\partial_j g_{ik} \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial t} + g_{ik} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right].$$

De dónde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) &= \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \partial_j g_{ik} \dot{x}^j \dot{x}^i - g_{ik} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^j [\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}] - g_{ik} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego aplicando (g^{kl}) obtenemos:

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (3.2.2)$$

La ecuación (3.2.2) coincide con la ecuación (3.1.1), ecuación que caracteriza las geodésicas.

3.3. Ley de conservación

Definición 3.3.1. Sea M una variedad y sea $\mathcal{P} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M\}$. Definimos una *acción* del sistema S por la función $S : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Una simetría del sistema es una aplicación $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que $S(\phi \circ \gamma) = S(\gamma)$, para todo $\gamma \in \mathcal{P}$.

Lema 3.3.2. *Las simetrías de un sistema forman un grupo bajo la composición de funciones.*

Podemos suponer que la acción no es arbitraria. Sea $S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$.

Si f es un difeomorfismo sobre M , podemos definir $\hat{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ por medio de $\hat{f}(\gamma) = f \circ \gamma$. Pero de esta manera no podemos afirmar que para todo $\gamma \in \mathcal{P}$, $S(f \circ \gamma) = S(\gamma)$, es decir que f no siempre induce una simetría.

Definición 3.3.3. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo, tal que f induce una simetría del sistema. El grupo de transformaciones sobre \mathcal{P} , que denotamos por $\{f_t\}$ es un *grupo uno-paramétrico de simetrías*.

Sea $f_t \in \{f_t\}$ y $\gamma_t = f_t \circ \gamma_0$ sean $p, q \in M$. Si $S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$ y γ_0 es una curva sobre M que une a los puntos p y q con $S(\gamma_0)$ mínimo, luego $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(\gamma_t) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(\gamma_t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_a^b L(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) dt \\
&= \int_a^b \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) dt \\
&= \int_a^b \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L \left(f^i(t, \gamma^i(s)), \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(t, \gamma^i(s)) \frac{\partial x^k}{\partial s} \right) ds \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f^i}{\partial t}(t, \gamma^i(s)) + \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f^i}{\partial t \partial x^k}(t, \gamma^i(s)) \frac{\partial x^k}{\partial s} \right) ds \\
&= \left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f^i}{\partial t} \right|_{t=0} \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f^i}{\partial t} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f^i}{\partial t} \right] ds \\
&= \left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f^i}{\partial t} \right|_{t=0} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\partial f^i}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \right) \right) ds \\
&= \left. \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma^i(s), \dot{\gamma}^i(s)) \frac{\partial f^i}{\partial t}(t, \gamma^i(s)) \right|_{t=0} \Big|_a^b \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\gamma^i(a), \dot{\gamma}^i(a))v^i(a) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\gamma^i(b), \dot{\gamma}^i(b))v^i(b)$. La igualdad anterior corresponde a *La Ley de la Conservación* y nos permite concluir que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(x^i, \dot{x}^i)v^i(x)$ es constante sobre toda la trayectoria.

3.4. Geodésicas en las superficies de revolución

Ejemplo 3.4.1. Las geodésicas en la superficie de revolución.

Supongamos que S está parametrizada por la ecuación $r(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u))$. Supongamos que $f > 0$ y $\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 = 1$. Entonces

$$g = du \otimes du + f(u)^2 dv \otimes dv$$

luego, nuestro lagrangiano está representado por $L = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}f(u)^2\dot{v}^2$. Haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos las ecuaciones de las geodésicas. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= f(u) \frac{df}{du} \dot{v}^2, & \frac{\partial L}{\partial v} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) &= \ddot{u}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) &= \frac{d}{dt} (f(u)^2 \dot{v}), \end{aligned}$$

y por lo tanto, las ecuaciones que caracterizan las geodésicas en la superficie de revolución S son

$$\ddot{u} = f(u) \frac{df}{du} \dot{v}^2, \quad (3.4.1)$$

$$\frac{d}{dt} (f(u)^2 \dot{v}) = 0. \quad (3.4.2)$$

Veamos que los meridianos son geodésicas en S . Supongamos por la ley de la conservación que $E = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}f(u)^2\dot{v}^2$, dónde $E = \lambda \in \mathbb{R}$. En los meridianos, $v = c \in \mathbb{R}$, luego cumple la ecuación (3.4.2). Por nuestra última suposición, $\dot{u} = \pm\sqrt{2E}$, es decir que \dot{u} es constante, y por lo tanto la ecuación (3.4.1) se cumple. Entonces los meridianos, tal y como habíamos supuesto son geodésicas en S .

Veamos cuando un paralelo sería una geodésica. Sea $u = u_0$ constante, luego de (3.4.2) podemos deducir que $\dot{v} = \pm \frac{c}{f(u)^2}$, dónde $c \neq 0$ pues de lo contrario v sería constante. Para que se cumpla (3.4.1) es necesario que $\frac{df}{du} = 0$. De manera recíproca, si $\frac{df}{du} = 0$ para $u = u_0$ constante, (3.4.1)

se cumple de manera directa y (3.4.2) se cumple de igual manera pues $\dot{v} = \pm \frac{\sqrt{2E}}{f(u)}$ es constante.

Si observamos la ecuación (3.4.2), vemos que es consecuencia de la ley de conservación expuesta anteriormente, pues $\frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t))v^i(t)$ es constante sobre la trayectoria en S . Aunque estas no son todas las geodésicas, el siguiente teorema nos ayudará a caracterizar las faltantes.

Teorema 3.4.2. (Teorema de Clairaut). *Sea $\rho(t)$ una curva de rapidez unitaria sobre una superficie de revolución S . Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, la distancia de un punto de la superficie S desde el eje de rotación, y sea ψ el ángulo entre $\dot{\rho}(t)$ y los meridianos de S . Si $\rho(t)$ es una geodésica, entonces $f \sin(\psi)$ es constante a través de $\rho(t)$. Recíprocamente si $f \sin(\psi)$ es constante a través de $\rho(t)$ y si ninguna parte de ρ es parte de algún paralelo de S , entonces $\rho(t)$ es una geodésica. Por una parte de ρ , nos referimos a $\rho(I)$, dónde I es un intervalo abierto.*

Demostración. Sea $r = f(x^1)\vec{e} + x^1\vec{k}$ una parametrización de S , donde $\vec{e}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ y $\vec{g}(t) = \vec{e}'(t)$, x^1 corresponde a la altura y x^2 al ángulo de rotación. Como $r_1 = f'\vec{e} + k$ y $r_2 = f\vec{g}$, el tensor métrico corresponde a $g = (f'^2 + 1)dx^1 \otimes dx^1 + f^2 dx^2 \otimes dx^2$. El grupo 1-paramétrico de simetrías corresponde a $\varphi_s(x^1, x^2) = (x^1, x^2 + s)$, una rotación. De esta manera, el lagrangiano corresponde a $L = \frac{1}{2}\{(f'^2 + 1)(\dot{x}^1)^2 + f^2(\dot{x}^2)^2\}$ y haciendo uso de la ley de la conservación

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} V^i = f^2 \dot{x}^2 = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.4.3)$$

Si $\rho(t)$ es una geodésica entonces $f^2(\rho(t))\rho_2'(t) = k$, luego dado que $\dot{\rho}(t) \in T_{\rho(t)}S$, entonces $\dot{\rho}(t) = r_1\dot{x}^1 + r_2\dot{x}^2 = r_1 \cos(\psi) + r_2 f^{-1} \sin(\psi)$. Por lo tanto

$$r_1 \times \dot{\rho} = \dot{x}^2 r_1 \times r_2 = f^{-1} \sin(\psi) r_1 \times r_2, \quad (3.4.4)$$

entonces

$$f^2(\rho(t))\rho_2'(t) = f(\rho(t)) \sin(\psi) = k. \quad (3.4.5)$$

□

Ejemplo 3.4.3. Considere la parametrización para S^2 , definida por

$$r(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u)).$$

Antes de continuar, es claro que los meridianos son geodésicas y además si $u = u_0$ es un punto estacionario luego ρ es una geodésica que representa un paralelo. En efecto, dado que $f(u) = \cos(u)$ luego $\frac{df}{du} = 0$ si y solo si $u = n\pi$, con $n = 0, 1, 2$. Entonces $\rho(t) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ es el único paralelo que corresponde a una geodésica en S^2 . De las ecuaciones de las geodésicas para la superficie de revolución tenemos

$$\ddot{u} + \sin(u) \cos(u) \dot{v}^2 = 0,$$

$$\cos^2(u) \dot{v} = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Por el Teorema de Clairaut (3.4.2), $\cos^2(u) \dot{v} = \cos(u) \sin(\psi) = k$. Si suponemos que $k = 0$, entonces ρ correspondería a un meridiano. Supongamos que $k \neq 0$ y que ρ es de rapidez unitaria, de dónde obtenemos

$$\dot{u} = \sqrt{1 - \cos^2(u) \dot{v}^2}.$$

Reemplazando la igualdad obtenida por el Teorema de Clairut (3.4.2), $\dot{u} = \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{\cos^2(u)}}$.

Por lo tanto

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \frac{k}{\cos^2(u) \sqrt{1 - \frac{k^2}{\cos^2(u)}}} \quad (3.4.6)$$

Haciendo $x = \tan(u)$, luego

$$\pm(v - v_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{k^{-2} - 1 - x^2}} \quad (3.4.7)$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{k^{-2} - 1}} \right). \quad (3.4.8)$$

Por tanto,

$$\tan(u) = \pm \sqrt{k^{-2} - 1} \sin(v - v_0). \quad (3.4.9)$$

Así,

$$\begin{aligned} \sin(u) &= \pm \cos(u) \sqrt{k^{-2} - 1} (\sin(v) \cos(v_0) - \cos(v) \sin(v_0)) \\ &= \pm \sqrt{k^{-2} - 1} (\cos(u) \sin(v) \cos(v_0) - \cos(u) \cos(v) \sin(v_0)). \end{aligned}$$

Si $\rho(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$, podemos concluir de la ecuación anterior que

$$z = \left(\mp \sqrt{k^{-2} - 1} \sin(v_0) \right) x + \left(\pm \sqrt{k^{-2} - 1} \cos(v_0) \right) y, \quad (3.4.10)$$

es decir que $\rho(t)$ es una geodésica que pertenece a la intersección de un plano Π y S^2 . Por lo tanto las geodésicas en S^2 corresponden a los grandes círculos.

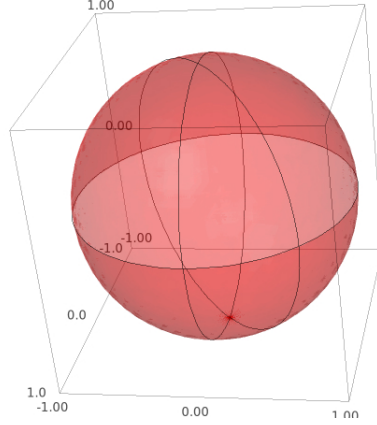


Figura 3.1: Geodésicas sobre S^2

Definición 3.4.4. Sea $\hat{g} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{g}(v) = g(v, v)$. Si $f : S \rightarrow S$ es un difeomorfismo, decimos que f una isometría si y sólo si para $f_* : TM \rightarrow TM$, se cumple que

$$\hat{g} \circ f_* = \hat{g}. \quad (3.4.11)$$

Si definimos $L = \hat{g}$ entonces para $\hat{f}_* : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$, $\gamma \mapsto \hat{f}_*(\gamma) = f \circ \gamma$, dónde γ es una curva en S . Si $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow TM$ entonces $S(\gamma) = \int_a^b \hat{g} \circ \hat{\gamma} dt$. Si f es una isometría, tenemos

$$\begin{aligned} S(\hat{f}_*(\gamma)) &= \int_a^b \hat{g} \circ f_* \circ \gamma dt \\ &= \int_a^b \hat{g} \circ \gamma dt \\ &= S(\gamma). \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite dar una caracterización, pues las isometrías dejan invariante las geodésicas. Una manera alternativa para hallar las geodésicas sobre S^2 , consiste en utilizar las isometrías sobre la esfera S^2 . En efecto, el ecuador define una geodésica sobre S^2 . Sean $P, P_0 \in S^2$, dónde P no se encuentra sobre el ecuador. Si definimos un plano Π , que pasa por el origen y contiene a P_0 y P , podríamos ir de P_0 a P por medio de una rotación. Una rotación r en \mathbb{R}^3 es una isometría, pues una rotación es una aplicación lineal, luego, la diferencial de la rotación es la misma rotación, es decir $dr_p = r$, y por tanto, $g \circ r = g$ pues r preserva distancias. Ahora, si restringimos r sobre la 2-esfera S^2 entonces claramente es una isometría en M . De aquí podemos concluir que hay un camino de P_0 a P . Sea \mathbf{v}_0 un vector tangente unitario a P_0 . Si tenemos

en cuenta que $X(t) = \mathbf{v}_t$, luego sobre P existe un vector tangente $v(p)$. Al aplicar la rotación sobre P_0 , definimos un transporte paralelo del vector \mathbf{v}_0 hacia $v(p)$. Geométricamente, estos dos vectores tangentes se encuentran sobre el espacio tangente, $T_P M$. Utilizando el mismo razonamiento, y dado que una rotación r define una isometría, entonces podemos rotar v_0 hasta $v(p)$. Por lo tanto el camino que va de P a P_0 corresponde a la geodésica del ecuador luego de ser rotada. Entonces, podemos concluir que las únicas geodésicas sobre S^2 son los grandes círculos, tal y como queríamos probar.

Ejemplo 3.4.5. Consideremos como parametrización para el toro de revolución con $R < a$

$$r(\phi, \theta) = ((R \cos \phi + a) \cos \theta, (R \cos \phi + a) \sin \theta, R \sin \phi)$$

Además,

$$g = R^2 d\phi \otimes d\phi + (R \cos \phi + a)^2 d\theta \otimes d\theta$$

y por lo tanto $g^{\phi\phi} = \frac{1}{R^2}$ y $g^{\theta\theta} = \frac{1}{(R \cos \phi + a)^2}$.

Definimos el lagrangiano L por: $L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (R \cos \phi + a)^2 \dot{\theta}^2$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -\dot{\theta}^2 (R \cos(\phi) + a) R \sin(\phi), \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \dot{\theta} (R \cos(\phi) + a)^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} R^2. \end{aligned}$$

Haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} (R \cos(\phi) + a)^2 - 2R \sin(\phi) (R \cos(\phi) + a) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (3.4.12)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} R^2 = -R \sin(\phi) (R \cos(\phi) + a) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (3.4.13)$$

Por la ecuación (3.4.5), podemos deducir que $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = k$, con $k \in \mathbb{R}$, así,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{(R \cos(\phi) + a)^2}. \quad (3.4.14)$$

De la ley de conservación, obtenemos otra ecuación, en efecto

$$E = \frac{1}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (R \cos \phi + a)^2 \dot{\theta}^2, \quad E \in \mathbb{R}. \quad (3.4.15)$$

Reemplazando (3.4.14) en (3.4.15), obtenemos una expresión para $\frac{d\phi}{dt}$,

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{1}{R^2} \left(2E - \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2} \right)}. \quad (3.4.16)$$

Bajo unas condiciones iniciales, la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales (3.4.14) y (3.4.16) será única. Para obtener las geodésicas del toro T^2 , tendremos en cuenta que

$$E = \frac{1}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2} \geq \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2} \text{ y supongamos que } \theta(0) = \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0$$

y $\theta'(0) = \frac{k}{(R+a)^2}$.

1. Supongamos que $k = 0$ y que $E = \frac{1}{2} \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2}$.

Por lo anterior, $\theta(t) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$, bajo las condiciones iniciales obtenemos que una de las geodésicas del toro corresponde a la circunferencia parametrizada por: $\rho(t) = (R \cos(\phi) + a, 0, R \sin(\phi))$.

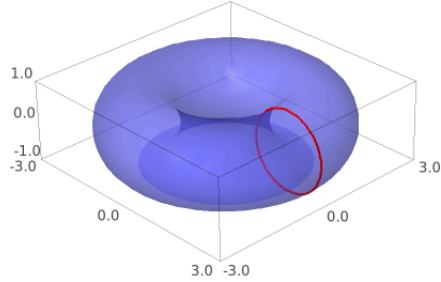


Figura 3.2: Geodésica en el toro: $\rho(t) = (R \cos(\phi) + a, 0, R \sin(\phi))$

2. Supongamos que $k \neq 0$ y $E = \frac{1}{2} \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2}$.

Dado que $\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{1}{R^2} \left(2E - \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2} \right)}$, luego $\phi(t) = \lambda \in \mathbb{R}$, haciendo uso de las condiciones iniciales, tenemos que la geodésica en el toro está parametrizada por: $\rho(t) = ((R + a) \cos(\theta), (R + a) \sin(\theta), 0)$, que corresponde a la línea del ecuador sobre el toro.

3. Supongamos $k \neq 0$ y $\frac{k^2}{2(R + a)^2} < E < \frac{k^2}{2(a - R)^2}$.

Por la condición inicial $E \geq \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2}$, es decir, $R \cos(\phi) \geq \frac{k}{\sqrt{2E}} - a$. Por nuestra suposición inicial $E < \frac{k^2}{2(a - R)^2}$ si y solo si $(a - R) < \frac{k}{\sqrt{2E}}$, entonces

$$\begin{aligned} \cos(\phi(t)) &\geq \frac{1}{R} \left(\frac{k}{\sqrt{2E}} - a \right) \\ &> -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para un ϕ_0 arbitrario pero fijo, $\cos(\phi_0) = \frac{1}{R} \left(\frac{k}{\sqrt{2E}} - a \right)$, $0 < \phi_0 < \pi$, y además $\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{(R \cos(\phi) + a)^2} = \lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego la geodésica oscila en el ecuador externo del toro.

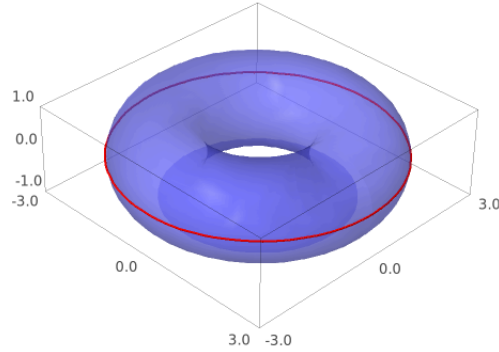


Figura 3.3: Geodésica en el toro: $\rho(t) = ((R + a) \cos(\theta), (R + a) \sin(\theta), 0)$

4. Supongamos $k \neq 0$ y $E = \frac{k^2}{2(a - R)^2}$.

Por la suposición inicial de $\frac{d\phi}{dt}$, es claro que la expresión $\left(2E - \frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2}\right) \geq 0$, de donde, se debe cumplir que $(R - a)^{-2} - (R \cos(\phi) + a)^{-2} \geq 0$, así :

$$(R \cos(\phi) + a)^2 \geq (R - a)^2.$$

Por lo tanto, $\cos(\phi) \geq 1 - 2\frac{a}{R} \geq -1$. Obtenemos que $0 \leq \phi(t) \leq \pi$. Si suponemos $\phi(t) = 0$ obtenemos el segundo caso. Suponiendo $0 < \phi(t) < \pi$ tenemos el resultado inmediatamente anterior. Luego podemos suponer que $\phi(t) = \pi$. De esta manera obtenemos reemplazando en la ecuación (3.4.14) que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{(a - R)^2}.$$

Entonces $\theta(t) = \frac{k}{(a - R)^2}t$, y la ecuación de la geodésica está dada por:

$$\rho(t) = ((a - R) \cos(\theta), (a - R) \sin(\theta), 0),$$

que corresponde a la línea del ecuador al interior del toro.

5. Supongamos $k \neq 0$ y $E > \frac{k^2}{2(a - R)^2}$.

Dado que $E = \frac{1}{2}R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2}$, entonces

$$\frac{1}{2}R^2\dot{\phi}^2 = E - \frac{1}{2}\frac{k^2}{(R \cos(\phi) + a)^2} \geq E - \frac{1}{2}\frac{k^2}{(a - R)^2} > 0.$$

Como $\dot{\phi}(t)$ es continua acotada lejos del cero, de signo constante, y además

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{(R \cos(\phi(t)) + a)^2} > 0,$$

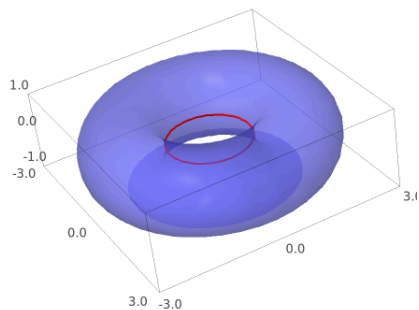


Figura 3.4: Geodésica en el toro: $\rho(t) = ((a - R) \cos(\theta), (a - R) \sin(\theta), 0)$

es de signo constante y acotada lejos del cero, entonces la geodésica parametrizada por $\rho(t) = ((R \cos(\phi(t)) + a) \cos(\theta(t)), (R \cos(\phi(t)) + a) \sin(\theta(t)), R \sin(\phi(t)))$, envuelve al toro.

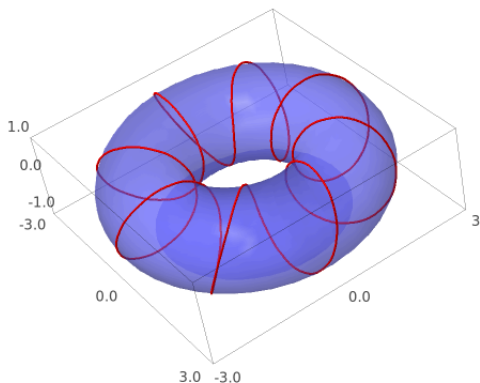


Figura 3.5: Geodésica en el toro: $\rho(t) = ((R \cos(\phi(t)) + a) \cos(\theta(t)), (R \cos(\phi(t)) + a) \sin(\theta(t)), R \sin(\phi(t)))$

Definición 3.4.6. Se denomina *tractriz* a la curva que describe un objeto (situado en P) que es arrastrado por otro (situado en A), que se mantiene a distancia constante d y que se desplaza en línea recta.

La curva definida por

$$z = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - x^2}, \quad (3.4.17)$$

es una parametrización de la tractriz. Al rotar la tractriz sobre el z -eje obtenemos una superficie conocida como *pseudoesfera*. La ecuación (3.4.17) puede reescribirse haciendo que $x = e^u$, de

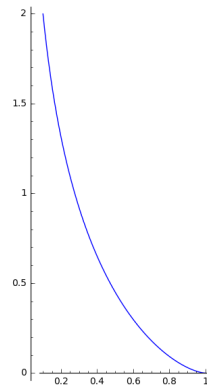


Figura 3.6: Gráfica de tracteriz.

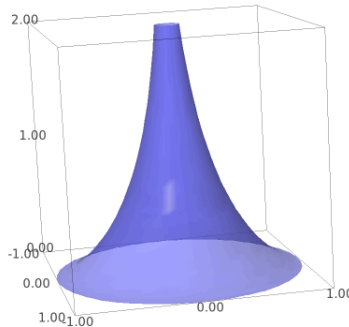


Figura 3.7: Pseudoesfera

esta manera obtenemos una parametrización de la pseudoesfera, definida de la siguiente manera

$$r(u, v) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), \ln(e^{-2u} - 1) - \sqrt{1 - e^{2u}}). \quad (3.4.18)$$

El tensor métrico para la pseudoesfera está definido por:

$$\begin{aligned} g &= du \otimes du + e^{2u} dv \otimes dv \\ &= e^{2u}(e^{-u} du \otimes e^{-u} du + dv \otimes dv) \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

y tomando $w = e^{-u}$,

$$g = \frac{1}{w^2} (dv \otimes dv + dw \otimes dw). \quad (3.4.20)$$

Es un hecho conocido que el conjunto $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, se llama *semiplano de Poincaré* y su tensor métrico está descrito por la siguiente relación

$$g = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy). \quad (3.4.21)$$

Ejemplo 3.4.7. Geodésicas en la pseudoesfera.

El tensor métrico sobre la pseudoesfera reparametrizada, define la primera forma fundamental

igual a la definida sobre el *semiplano de Poincaré*. De esta manera, podemos verificar que una geodésica en el *semiplano de Poincaré* describe una geodésica en la pseudoesfera.

En efecto, supongamos que $\rho(t)$ es una geodésica de rapidez unitaria, definida sobre la pseudoesfera, luego

$$\dot{v}^2 + \dot{w}^2 = w^2. \quad (3.4.22)$$

Por el Teorema de *Clairaut*,

$$h \sin(\psi) = h^2 \dot{v} = \frac{1}{w^2} \dot{v} = k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.4.23)$$

es decir que

$$\dot{v} = kw^2. \quad (3.4.24)$$

Si $k = 0$ es claro que $\rho(t)$ definiría un meridiano. Supongamos que $k \neq 0$, reemplazando en la ecuación (3.4.22), tenemos

$$\dot{w} = \pm w \sqrt{1 - k^2 w^2}, \quad (3.4.25)$$

así,

$$\frac{dv}{dw} = \frac{kw}{\sqrt{1 - k^2 w^2}}. \quad (3.4.26)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v - C &= \pm \int \frac{kw}{\sqrt{1 - k^2 w^2}} dw \\ &= \pm \frac{1}{k} \int -\cos(\theta) d\theta \\ &= \mp \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 w^2}, \\ (v - C)^2 + \frac{1}{w^2} &= \frac{1}{k^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Las geodésicas son imágenes de circunferencias del plano vw , definidas por (3.4.27), con centro en el eje v , $w > 0$, y que intersectan el eje v perpendicularmente. Los meridianos corresponden a rectas perpendiculares al eje v . Además, dado que los tensores métrico sobre la pseudoesfera (3.4.20) y sobre \mathcal{H} (3.4.21) coinciden, entonces la pseudoesfera y \mathcal{H} son localmente isométricos.

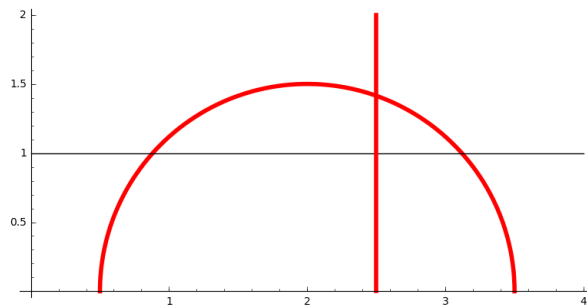


Figura 3.8: Geodésicas en el *semiplano de Poincaré*.

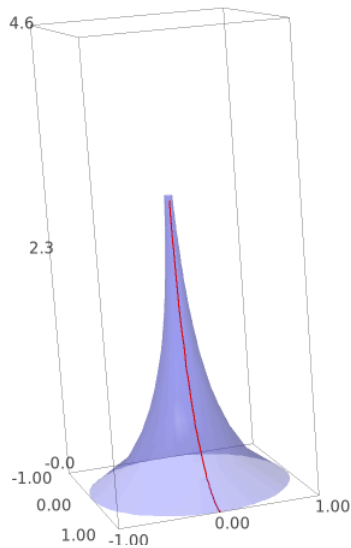


Figura 3.9: Meridiano en la pseudoesfera.

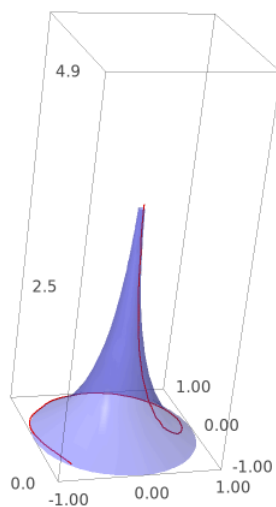


Figura 3.10: Geodésica en la pseudoesfera.

Ejemplo 3.4.8. Identificamos el *semiplano de Poincaré* por $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, por medio de la correspondencia de $(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$. Sea $z \in \mathcal{H}$, la métrica Riemanniana para \mathcal{H} en su forma compleja está definida por

$$ds^2 = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(\Im(z))^2} \quad (3.4.28)$$

Teorema 3.4.9. *El y -eje es una geodésica en \mathcal{H} .*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$, definida por $\gamma(t) = it$ con $a \leq t \leq b$. Además, la longitud de arco de la curva, está definida por

$$s(t) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log(b/a).$$

Supongamos que existe otra curva $\rho(t) : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$, definida por $\rho(t) = x(t) + iy(t)$, con $\rho(a) = ia$ y $\rho(b) = ib$. Entonces,

$$\int_a^b |\rho'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}{y(t)^2}} dt \quad (3.4.29)$$

$$\geq \int_a^b \left| \frac{dy}{dt} \right| \frac{dt}{y} \quad (3.4.30)$$

$$\geq \int_a^b \frac{dy}{y} = \log(b/a). \quad (3.4.31)$$

Por lo tanto cualquier curva que una los puntos ia e ib mide al menos $\log(b/a)$, y la igualdad se mantiene sólo si $x'(t) = 0$, es decir que $x(t)$ debe ser constante, pero por la condición inicial de $\rho(a) = ia$, $x(t) = 0$. Es decir que la única curva que une a los puntos ia e ib es la línea vertical que coincide con el y -eje. Además, es una curva que minimiza distancias sobre el modelo \mathcal{H} , y en consecuencia, podemos afirmar que γ es una geodésica en \mathcal{H} . \square

El Teorema 3.4.9 nos permiten afirmar que las únicas geodésicas en el *semiplano de Poincaré* son las líneas verticales y las circunferencias ortogonales al x -eje, pues para cada $p \in \mathcal{H}$ y cualquier dirección en $T_p(\mathcal{H})$, existe exactamente una circunferencia ortogonal al x -eje (o línea vertical) tangente a cada dirección en p .

3.5. Forma de índice

Durante la sección 3, las geodésicas eran los puntos críticos del funcional de energía, esta sección del trabajo está dedicada a determinar cuando son un mínimo del funcional.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Fijaremos dos puntos y, z de M , y notamos por Γ el conjunto de todas las curvas diferenciables $\tau = x_t, t \in [a, b]$, de y a z parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco. El “*espacio tangente*” de Γ en τ , es el espacio vectorial de todos los campos vectoriales X a lo largo de τ que se anulan en y y z . Veremos que Γ es similar a una variedad y $T_\tau\Gamma$ juega el rol del espacio tangente. Aclaremos que usaremos esta analogía tan solo para motivar definiciones posteriores. Nuestro propósito principal es el estudio de el Hessiano de L en cada punto crítico de L .

Definición 3.5.1. Sea L la función de longitud definida sobre Γ , que asigna a cada τ su longitud. El diferencial total dL de L , asigna a cada τ un funcional lineal sobre $T_\tau\Gamma$, de la siguiente manera. Dado X en $T_\tau\Gamma$, considere una familia uno-paramétrica de curvas $\tau^s = x_t^s$, $a \leq t \leq b$, y $-\epsilon < s < \epsilon$, tales que

1. Cada τ^s es un elemento de Γ ;
2. $\tau^0 = \tau$;
3. Existe un conjunto finito de numeros $t_i \in [a, b]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tales que $(t, s) \rightarrow x_t^s$ es diferenciable sobre cada rectángulo $[t_{i+1}, t_i] \times (-\epsilon, \epsilon)$;
4. Para cada $t \in [a, b]$ fijo, el vector \dot{x}_t^0 tangente a la curva x_t^s , $(-\epsilon, \epsilon)$, en el punto $x_t = x_t^0$ coincide con X_{x_t} .

Entonces

$$dL(X) = \left(\frac{d}{ds} L(\tau^s) \right)_{s=0}.$$

Con referencia a lo anterior, debemos observar que esta parte ya fue trabajada en la sección 3, así que definiremos el Hessiano de L en una geodésica $\tau \in \Gamma$.

Definición 3.5.2. Notaremos el Hessiano por I . Será una forma bilineal real simétrica sobre $T_\tau\Gamma$, considerando la familia uno-paramétrica de curvas con las propiedades anteriores, entonces

$$I(X, X) = \left(\frac{d^2}{ds^2} L(\tau^s) \right)_{s=0}. \quad (3.5.1)$$

Teorema 3.5.3. Si $\tau \in \Gamma$ es una geodésica y si $X, Y \in T_\tau(\Gamma)$ entonces

$$I(X, Y) = \frac{1}{r} \int_a^b \left[g(X^{\perp'}, Y^{\perp'}) - g(R(X^{\perp'}, \dot{\tau})\dot{\tau}, Y^{\perp'}) \right] dt, \quad (3.5.2)$$

donde $X^\perp = X - \frac{1}{r}g(X, \dot{\tau})\dot{\tau}$ es la componente de X perpendicular a τ , $X^{\perp'}$ denota la derivada covariante $\nabla_{\dot{\tau}}X^\perp$ de X^\perp a lo largo de τ y r es la longitud común de los vectores tangentes a τ .

Demostración. Realizamos el levantamiento de la función $(t, s) \rightarrow x_t^s$ a una función $\gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow O(M)$, tal que $\pi \circ \gamma(t, s) = x_t^s$ y que la curva $\gamma^0(t) = \gamma(t, 0)$ es horizontal.

Sean S y T los campos vectoriales definidos en el rectángulo $[a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ definidos por $S = \partial_s$, $T = \partial_t$.

Sea θ , ω , Ω las formas canónica, de conexión y de curvatura sobre $O(M)$. Definimos las formas θ^* , ω^* , Ω^* sobre el rectángulo por

$$\theta^* = \gamma^*(\theta), \omega^* = \gamma^*(\omega), \Omega^* = \gamma^*(\Omega).$$

Entonces tenemos

$$[S, T] = 0, \quad (3.5.3)$$

$$\omega^*T = 0 \text{ en los puntos } (t, 0), \quad (3.5.4)$$

$$S(\theta^*(T)) = T(\theta^*(S)) + \omega^*(T)\theta^*(S) - \omega^*(S)\theta^*(T); \quad (3.5.5)$$

$$S(\omega^*(T)) = T(\omega^*(S)) + \omega^*(T)\omega^*(S) - \omega^*(S)\omega^*(T) + 2\Omega^*(S, T). \quad (3.5.6)$$

La ecuación (3.5.3) se deriva de la conmutatividad de los campos S y T . La (3.5.4) se deduce pues por hipótesis $\gamma(t, 0)$ es horizontal. Las ecuaciones (3.5.5) y (3.5.6) se deducen de las ecuaciones

de estructura y de la derivada de una r -forma. En efecto, dado que la forma de conexión ω es una 1-forma, entonces

$$d\omega^*(S, T) = \frac{1}{2}\{S(\omega^*(T)) - T(\omega^*(S)) - \omega^*([S, T])\},$$

y por la ecuación de estructura definida por

$$d\omega^*(S, T) = -\frac{1}{2}[\omega^*(S), \omega^*(T)] + \Omega^*(S, T), \quad (3.5.7)$$

tenemos que

$$S(\omega^*(T)) - T(\omega^*(S)) - \omega^*([S, T]) = -[\omega^*(S), \omega^*(T)] + 2\Omega^*(S, T), \quad (3.5.8)$$

es decir que

$$S(\omega^*T) = T(\omega^*(S)) + \omega^*(T)\omega^*(S) - \omega^*(S)\omega^*(T) + 2\Omega^*(S, T), \quad (3.5.9)$$

obtenemos (3.5.6). De manera análoga, dado que θ es una 1-forma, entonces

$$d\theta^*(S, T) = \frac{1}{2}\{S(\theta^*(T)) - T(\theta^*(S)) - \theta^*([S, T])\},$$

y la ecuación de estructura dada por

$$d\theta^*(S, T) = -\frac{1}{2}(\omega^*(S)\theta^*(T) - \omega^*(T)\theta^*(S)) + \Theta(S, T). \quad (3.5.10)$$

Entonces podemos deducir igualando las ecuaciones que

$$-\omega^*(S)\theta^*(T) + \omega^*(T)\theta^*(S) + 2\Theta(S, T) = S(\theta^*(T)) - T(\theta^*(S)) - \theta^*([S, T]),$$

donde $\Theta(S, T)$ corresponde a la forma de torsión de la conexión lineal Γ de M , como se trata de una variedad Riemanniana, la conexión es la conexión de *Levi-Civita*. Entonces, la forma de torsión se anula, y por lo tanto reescribimos la expresión anterior para obtener la ecuación deseada

$$S(\theta^*(T)) = T(\theta^*(S)) - \omega^*(S)\theta^*(T) + \omega^*(T)\theta^*(S). \quad (3.5.11)$$

Definimos F sobre el rectángulo por

$$F = (\theta^*(T), \theta^*(T))^{\frac{1}{2}},$$

en cada (t, s) , $F(t, s)$ es la longitud de el vector \dot{x}_i^s . Luego, en los puntos $(t, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned} S(F^2) &= 2F \cdot S(F) \\ &= 2(S(\theta^*(T)), \theta^*(T)) \\ &= 2(T(\theta^*(S)), \theta^*(T)) + 2(\omega^*(T)\theta^*(S), \theta^*(T)) - 2(\omega^*(S)\theta^*(T), \theta^*(T)). \end{aligned}$$

como $\omega^*(S) \in \mathfrak{o}(n)$, es decir que es antisimétrico, luego el último término se anula, además por (3.5.4), tenemos que

$$S(F) = \frac{1}{r}(T(\theta^*(S)), \theta^*(T)) \text{ en los puntos } (t, 0), \quad (3.5.12)$$

donde r es la longitud común de los vectores tangentes a τ . De aquí, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S^2(F^2) &= (S(T(\theta^*(S))), \theta^*(T)) + (T(\theta^*(S)), S(\theta^*(T))) + (S(\omega^*(T))\theta^*(S), \theta^*(T)) \\ &+ (\omega^*(T)S(\theta^*(S)), \theta^*(T)) + (\omega^*(T)\theta^*(S), S(\theta^*(T))). \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

A partir de acá, trataremos de reescribir esa expresión. Lo primero es que los dos últimos términos de la expresión se anulan en $(t, 0)$ por (3.5.4). Además, si usamos (3.5.3) obtenemos

$$\begin{aligned} (ST(\theta^*(S)), \theta^*(T)) &= (TS(\theta^*(S)), \theta^*(T)) \\ &= T(S(\theta^*(S)), \theta^*(T)) - (S(\theta^*(S)), T(\theta^*(T))). \end{aligned}$$

Como τ es una geodésica y $\gamma(t, 0)$ es horizontal, $\theta^*(T)$ es constante a lo largo de la línea $s = 0$, luego $T(\theta^*(T)) = 0$ en los puntos $(t, 0)$. Por lo tanto

$$(ST(\theta^*(S)), \theta^*(T)) = T(S(\theta^*(S)), \theta^*(T)).$$

Ahora, con respecto al segundo término

$$(T(\theta^*(S)), S(\theta^*(T))) = (T(\theta^*(S)), T(\theta^*(S))) + (T(\theta^*(S)), \omega^*(T)\theta^*(S)) - (T(\theta^*(S)), \omega^*(S)\theta^*(T)),$$

donde $\omega^*(T) = 0$, además por la antisimetría de $\omega^*(S)$, en los puntos $(t, 0)$ tenemos que el segundo término es igual a

$$(T(\theta^*(S)), T(\theta^*(S))) + (\omega^*(S)T(\theta^*(S)), \theta^*(T)).$$

Ahora, haciendo uso de (3.5.4) y (3.5.6), podemos deducir para el tercer término que

$$(S(\omega^*(T))\theta^*(S), \theta^*(T)) = (T(\omega^*(S))\theta^*(S), \theta^*(T)) + (2\Omega^*(S, T)\theta^*(S), \theta^*(T)). \quad (3.5.14)$$

Por lo tanto, sumando las expresiones que obtuvimos, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S^2(F^2) &= (T(\theta^*(S)), T(\theta^*(S))) + T(S(\theta^*(S)) + \omega^*(S)\theta^*(S), \theta^*(T)) \\ &+ (2\Omega^*(S, T)\theta^*(S), \theta^*(T)). \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Adicionalmente, como $FS^2(F) = \frac{1}{2}S^2(F^2) - S(F)S(F)$, por (3.5.12) y (3.5.15), deducimos que

$$\begin{aligned} S^2(F) &= \frac{1}{r} \{ (T(\theta^*(S)), T(\theta^*(S))) + T(S(\theta^*(S)) + \omega^*(S)\theta^*(S), \theta^*(T)) \\ &+ (2\Omega^*(S, T)\theta^*(S), \theta^*(T)) - \frac{1}{r^2} (T(\theta^*(S)), \theta^*(T))^2 \}, \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

en los puntos $(t, 0)$.

Por otra parte,

$$\theta^*(S)_{(t,0)} = \theta(\gamma_*(S_{(t,0)})) = \gamma^0(t)^{-1}((\pi \circ \gamma)_*(S_{(t,0)})) = \gamma^0(t)^{-1}(X_{x_t}); \quad (3.5.17)$$

y

$$\theta^*(T)_{(t,0)} = \theta(\gamma_*(T_{(t,0)})) = \gamma^0(t)^{-1}((\pi \circ \gamma)_*(T_{(t,0)})) = \gamma^0(t)^{-1}(\dot{x}_t). \quad (3.5.18)$$

Como $\gamma^0(t)$ es horizontal, $\gamma^0(t+h)^{-1}(\dot{x}_{t+h}) = \gamma^0(t)^{-1}[\tau_t^{t+h}(\dot{x}_{t+h})]$, donde τ_t^{t+h} es el desplazamiento paralelo a lo largo de τ desde x_{t+h} hasta x_t . Esto junto con (3.5.17), implica

$$\begin{aligned} (T(\theta^*(S)))_{(t,0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\gamma^0(t+h)^{-1}(X_{x_{t+h}}) - \gamma^0(t)^{-1}(X_{x_t})] \\ &= \gamma^0(t)^{-1} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau_t^{t+h}(X_{x_{t+h}}) - X_{x_t}) \right] \\ &= \gamma^0(t)^{-1} [(\nabla_{\dot{\tau}} X)_{x_t}]. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Por (3.5.18) y (3.5.19) podemos reescribir el primer y el último término de la derecha de (3.5.16) tal y como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \{(T(\theta^*(S)), T(\theta^*(S))) - \frac{1}{r^2} (T(\theta^*(S)), \theta^*(T))^2\}_{(t,0)} &= \frac{1}{r} \{g(X', X') - \frac{1}{r^2} g(X', \dot{\tau})^2\}_{x_t} \\ &= \frac{1}{r} g(X^{\perp'}, X^{\perp'})_{x_t}. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

De la definición del tensor curvatura, y de las ecuaciones (3.5.17) y (3.5.18),

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (2\Omega^*(S, T)\theta^*(S), \theta^*(T))_{(t,0)} &= \frac{1}{r} g(R(X, \dot{\tau})X, \dot{\tau})_{x_t} = -\frac{1}{r} g(R(X, \dot{\tau})\dot{\tau}, X)_{x_t} \\ &= -\frac{1}{r} g(R(X^{\perp}, \dot{\tau})\dot{\tau}, X^{\perp})_{x_t}. \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Luego, debemos probar que la integral de el tercer término de $t=a$ a $t=b$ es cero. Sabemos que $\pi \circ \gamma(a, s) = y$ y $\pi \circ \gamma(b, s) = z$ para todo s , así que $\gamma(S_{(a,s)})$ y $\gamma(S_{(b,s)})$ son verticales luego $\theta^*(S)_{(a,s)} = \theta^*(S)_{(b,s)} = 0$. Por lo tanto

$$\int_a^b T(S(\theta^*(S)) + \omega^*(S)\theta^*(S), \theta^*(T))_{(t,0)} dt = (S(\theta^*(S)) + \omega^*(S)\theta^*(S), \theta^*(T))_{(t,0)} \Big|_a^b = 0 \quad (3.5.22)$$

Finalmente,

$$I(X, X) = \int_a^b [S^2(F)]_{(t,0)} dt = \frac{1}{r} \int_a^b [g(X^{\perp'}, X^{\perp'}) - g(R(X^{\perp}, \dot{\tau})\dot{\tau}, X^{\perp})] dt. \quad (3.5.23)$$

Dado que $g(X^{\perp'}, Y^{\perp'}) - g(R(X^{\perp}, \dot{\tau})\dot{\tau}, Y^{\perp})$ es simétrico en X y Y , entonces

$$I(X, Y) = \frac{1}{r} \int_a^b [g(X^{\perp'}, Y^{\perp'}) - g(R(X^{\perp}, \dot{\tau})\dot{\tau}, Y^{\perp})] dt. \quad (3.5.24)$$

□

Definición 3.5.4. Sea M una n -variedad con una conexión lineal, y sean T y R los campos tensoriales de torsión y curvatura sobre M . Un campo vectorial X a lo largo de una geodésica $\tau = x_t$ de M , es llamado un *campo de Jacobi*, si satisface la siguiente ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, conocida también como *ecuación de Jacobi*

$$\nabla_{\dot{\tau}}^2 X + \nabla_{\dot{\tau}} T(X, \dot{x}_t) + R(X, \dot{x}_t)\dot{x}_t = 0, \quad (3.5.25)$$

donde \dot{x}_t es el vector tangente de τ en el punto x_t , Se nota por J_{τ} , el conjunto de todos los campos de Jacobi a lo largo de τ .

Ejemplo 3.5.5. Sea M una n -variedad Riemanniana y sea $\tau = x_t$ una geodésica en M . El campo vectorial \dot{x}_t es un campo de Jacobi. En efecto

$$\nabla_{\dot{x}_t}^2 \dot{x}_t + R(X, \dot{x}_t)\dot{x}_t = 0.$$

Definición 3.5.6. Sea τ una geodésica en M . Dos puntos x y z sobre τ se dicen conjugados el uno al otro a lo largo de τ , si existe un campo de Jacobi X no nulo, que se anula en ambos puntos.

Proposición 3.5.7. Sea $\tau = x_t$, $a \leq t \leq b$, una geodésica en M , una n -variedad Riemanniana. Entonces existe un punto conjugado x_c , $a < c < b$, de x_a a lo largo de τ si y sólo si existe un campo vectorial diferenciable a trozos X a lo largo de τ tal que

1. X es perpendicular a τ ,
2. X se anula en x_a y en x_b y
3. $I_a^b(X) < 0$.

donde

$$I_a^b(X) = \int_a^b g(X', X') - g(R(X, \dot{\tau})\dot{\tau}, X) dt. \quad (3.5.26)$$

Corolario 3.5.8. Sea $\tau = x_t$, $a \leq t \leq b$, una geodésica en M tal que x_a no tiene un punto conjugado a lo largo de $\tau = x_t$, para $a \leq t \leq b$. Si X es un campo vectorial diferenciable a trozos a lo largo de τ que se anula en x_a y en x_b , perpendicular a τ , entonces

$$I_a^b(X) \geq 0$$

y la igualdad se mantiene solo cuando $X = 0$.

En consecuencia de la Proposición 3.5.7 y del Teorema 3.5.3 tenemos

Teorema 3.5.9. Sea $\tau = x_t$, $a \leq t \leq b$, una geodésica. Si existe un punto conjugado x_c , $a < c < b$, de x_a , entonces τ no es la geodésica mínima que une x_a a x_b , i.e., la longitud de τ es mayor que la distancia entre x_a y x_b .

Demostración. Por la Proposición 3.5.7 y el Teorema 3.5.3 existe un campo vectorial X a lo largo de τ , con las siguientes propiedades:

1. X es perpendicular a τ ;
2. X se anula en x_a y en x_b ;
3. $I(X, X) < 0$.

Sea τ^s , $-\epsilon < s < \epsilon$ una familia 1-paramétrica de curvas desde x_a hasta x_b construida en la Definición 3.5.1 y en 3.5.2. Es claro que

$$\left(\frac{dL(\tau^s)}{ds} \right)_{s=0} = 0.$$

Como $I(X, X) = [d^2L(\tau^s)/ds^2]_{s=0}$ por definición, tenemos

$$\left(\frac{d^2L(\tau^s)}{ds^2} \right)_{s=0} < 0.$$

Por lo tanto, $L(\tau^s) < L(\tau)$ si $s \neq 0$ es suficientemente pequeño. □

3.6. Geodésicas sobre grupos de Lie

Lo que vamos a presentar en esta sección está basado en el artículo [4].

3.6.1. Las ecuaciones de Euler para las geodésicas

Definición 3.6.1. Sea M una n -variedad diferenciable. Sea $T(M)$ el haz tangente a M y sea $\{\omega^i\} \in \mathfrak{X}^*(M)$ un comarco no holonómico. Sea $\pi : T(M) \rightarrow M$, la aplicación proyección del fibrado tangente y consideremos el pull-back de esta aplicación,

$$\pi^* : T^*(M) \rightarrow T^*(T(M)).$$

También, vamos a denotar por ω^i al pullback del comarco no holonómico, es decir, $\omega^i = \pi^*(\omega^i) \in \mathfrak{X}^*(T(M))$. De esta manera, las funciones $y^i : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$ estarán definidas por

$$y^i(v) = \omega^i(v), \text{ para } v \in T(M). \quad (3.6.1)$$

Definición 3.6.2. Sea $L : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$ una función a valor real sobre M . Sea $U \subset M$, $\{\omega^i\} \in \mathfrak{X}^*(U)$ un comarco no holonómico. Definimos L_i y L_{n+i} como aplicaciones sobre el haz tangente $T(M)$ que satisfacen la siguiente relación:

$$dL = L_i \omega^i + L_{n+i} dy^i. \quad (3.6.2)$$

Además, considerando la Definición 3.6.1 tenemos que

$$\omega^i = \omega_j^i dx^j, \quad (3.6.3)$$

$$y^i = \omega_j^i x^{n+j}, \quad (3.6.4)$$

$$dy^i = \partial_s \omega_j^i x^{n+j} dx^s + \omega_j^i dx^{n+j}. \quad (3.6.5)$$

Definición 3.6.3. Definimos por (c_{jk}^i) aplicaciones sobre M , y por \hat{c}_{jk}^i aplicaciones sobre $T(M)$ que satisfacen las siguientes relaciones:

$$d\omega^i = c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (3.6.6)$$

$$c_{jk}^i + c_{kj}^i = 0. \quad (3.6.7)$$

Las aplicaciones \hat{c}_{jk}^i sobre $T(M)$, también cumplen las relaciones (3.6.6) y (3.6.7).

Expresando el diferencial de L , a partir de las relaciones determinadas por el comarco $\{\omega^i\}$ no holonómico, tenemos:

$$dL = L_i \omega^i + L_{n+i} dy^i \quad (3.6.8)$$

$$= L_i \omega_j^i dx^j + L_{n+i} (\partial_k \omega_j^i x^{n+j} dx^k + \omega_j^i dx^{n+j}), \quad (3.6.9)$$

luego,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = L_j \omega_j^i + L_{n+k} \partial_i \omega_j^k x^{n+j}, \quad (3.6.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = L_{n+j}\omega_i^j. \quad (3.6.11)$$

Si utilizamos la ecuación de Euler-Lagrange (3.2.1), tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{d}{dt} L_{n+j}\omega_i^j + L_{n+j}\partial_s \omega_i^j x^{n+s} = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad (3.6.12)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} L_{n+j}\omega_i^j + L_{n+k}(\partial_s \omega_i^k x^{n+s} - \partial_i \omega_j^k x^{n+j}) - L_j \omega_i^j = 0, \quad (3.6.13)$$

luego

$$\frac{d}{dt} L_{n+j}\omega_i^j + L_{n+k}(\partial_j \omega_i^k - \partial_i \omega_j^k) x^{n+j} - L_j \omega_i^j = 0. \quad (3.6.14)$$

Por las ecuaciones (3.6.3) y (3.6.6). Tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_j \omega_i^k - \partial_i \omega_j^k &= \partial_{j'} \omega_{i'}^k dx^{j'} \wedge dx^{i'}(x^j, x^i) \\ &= d\omega^k(x^j, x^i) \\ &= c_{ji}^k \omega^j \wedge \omega^i(x^j, x^i) \\ &= c_{ji}^k \omega_j^j \omega_m^i dx^l \wedge dx^m(x^j, x^i) \\ &= c_{lm}^k \omega_j^l \omega_m^i \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

y aplicando una contracción tensorial de manera conveniente a la expresión (3.6.15) por ω_s^i , donde $\omega_s^i \omega_i^s = \delta_{is}$, tenemos

$$\left(\frac{d}{dt} L_{n+j}\omega_i^j - L_j \omega_i^j + L_{n+k} c_{lm}^k \omega_j^l \omega_m^i x^{n+j} \right) \omega_s^i = \frac{d}{dt} L_{n+s} - L_s + L_{n+k} c_{ms}^k y^m. \quad (3.6.16)$$

Como consecuencia tenemos la siguiente definición

Definición 3.6.4. Decimos que una curva $t \mapsto \sigma(t)$ en M es un extremo de L si satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt} L_{n+i}(\sigma'(t)) - L_i(\sigma'(t)) + L_{n+k}(\sigma'(t)) y^j(\sigma'(t)) c_{ji}^k(\sigma(t)) = 0. \quad (3.6.17)$$

Ahora, las ecuaciones (3.6.17), toman una forma más simple si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Si M es un grupo de Lie G , con $\{\omega^i\}$ una base para las 1-formas invariantes por izquierda sobre M .
2. $L_i = 0$.

Por consiguiente, en el primer caso, (c_{jk}^i) son constantes, de hecho son las constantes estructurales del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , relativa a su base que es dual a los $\{\omega^i\}$. En efecto, si $\{X_i\}$ son campos vectoriales sobre M que son duales a los ω^i , es decir, que satisfacen las condiciones

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad (3.6.18)$$

entonces

$$d\omega^k(X_i, X_j) = \frac{1}{2} (X_i\omega^k(X_j) - X_j\omega^k(X_i) - \omega^k([X_i, X_j])) = -\frac{1}{2}\omega^k([X_i, X_j]), \quad (3.6.19)$$

por lo tanto

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k. \quad (3.6.20)$$

Por consiguiente, las ecuaciones (3.6.17) se reducen a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}L_{n+i}(y(t)) + L_{n+k}(y(t))y^j(\sigma'(t))c_{ji}^k = 0. \quad (3.6.21)$$

Ejemplo 3.6.5. Tomamos L definida por la siguiente igualdad

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j, \quad (3.6.22)$$

donde g_{ij} es simétrica, real y constante. Entonces, las ecuaciones de Euler (3.6.21) estarán determinadas por la siguiente igualdad:

$$g_{ij}\frac{dy^j}{dt} + g_{kl}y^l y^j c_{ji}^k = 0. \quad (3.6.23)$$

3.6.2. Geodésicas sobre grupos de Lie con métricas bi-invariantes

Definición 3.6.6. Una métrica $g(\cdot, \cdot)$ sobre un grupo de Lie se llama métrica *invariante por izquierda* si

$$g(X, Y)_h = g((L_{h^{-1}})_*X, (L_{h^{-1}})_*Y)_e, \quad (3.6.24)$$

para $h \in G$, y $X, Y \in T_h(G)$. De manera análoga, la métrica se llama *invariante por derecha* si

$$g(X, Y)_h = g((R_{h^{-1}})_*X, (R_{h^{-1}})_*Y)_e. \quad (3.6.25)$$

Si $g(\cdot, \cdot)$ es una métrica invariante por izquierda y por derecha, g se llama métrica *bi-invariante*.

Proposición 3.6.7. Sea g una métrica invariante por izquierda y sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces, la aplicación $a \mapsto g(X, Y)_a$ es constante.

Demostración. Sea $a \in G$ y sea $e \in G$, luego

$$g(X_a, Y_a) = g((L_a)_*X_e, (L_a)_*Y_e) = g(X_e, Y_e). \quad (3.6.26)$$

Entonces $g(X_a, Y_a) = g(X_e, Y_e)$ lo que implica que $g(X, Y)_a$ es constante. \square

Teorema 3.6.8. Si g es una métrica bi-invariante sobre un grupo de Lie G , entonces para todos los X, Y, Z campos vectoriales invariantes por izquierda sobre G , se cumple la igualdad

$$g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z]). \quad (3.6.27)$$

Demostración. Como g es bi-invariante, entonces para cualquier $a \in G$ y $X_e, Z_e \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} g(X_e, Z_e) &= g((L_a)_* \circ (R_{a^{-1}})_* X_e, (L_a)_* \circ (R_{a^{-1}})_* Z_e) \\ &= g(Ad_a X_e, Ad_a Z_e). \end{aligned}$$

Si $\gamma(t)$ es la curva integral del campo vectorial invariante por izquierda Y tal que $\gamma(0) = e$, entonces

$$g(X_e, Z_e) = g(Ad_{\gamma(t)} X_e, Ad_{\gamma(t)} Z_e), \quad \text{para todo } t.$$

Derivando con respecto a t y evaluando en $t = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(Ad_{\gamma(t)} X_e, Ad_{\gamma(t)} Z_e) \\ &= g((Ad_* \gamma'(0)) X_e, Ad_{\gamma(0)} Z_e) + g(Ad_{\gamma(0)} X_e, (Ad_* \gamma'(0)) Z_e) \\ &= g((Ad_*)_{Y_e} X_e, Ad_{\gamma(0)} Z_e) + g(Ad_{\gamma(0)} X_e, (Ad_*)_{Y_e} Z_e) \\ &= g(ad_{Y_e} X_e, Z_e) + g(X_e, ad_{Y_e} Z_e) \\ &= g([Y_e, X_e], Z_e) + g(X_e, [Y_e, Z_e]) \\ &= -g([X_e, Y_e], Z_e) + g(X_e, [Y_e, Z_e]). \end{aligned}$$

Como $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Luego, $(L_a)_*[X_e, Y_e] = [X_a, Y_a]$. Entonces para cualquier $a \in G$ y g una métrica invariante por izquierda,

$$g([X_a, Y_a], Z_a) = (L_a)_* g([X_e, Y_e], Z_e) = (L_a)_* g(X_e, [Y_e, Z_e]) = g(X_a, [Y_a, Z_a]), \quad (3.6.28)$$

tal y como queríamos probar. \square

Teorema 3.6.9. *Sea G un grupo de Lie y sea g una métrica Riemanniana bi-invariante. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita, entonces $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ para cualesquiera X, Y campos vectoriales invariantes por izquierda sobre G .*

Demostración. Sean X, Y, Z campos vectoriales invariantes por izquierda sobre G y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Entonces

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) \\ &= \{g(X, [Y, Z]) + g(X, [Z, Y])\} + g(Y, [Z, X]) \\ &= -g(Y, ad_X Z) \\ &= g(ad_X Y, Z) \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple para cualesquiera X, Y, Z entonces

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} ad_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]. \quad (3.6.29)$$

\square

Teorema 3.6.10. *Sea G un grupo de Lie con una métrica Riemanniana bi-invariante. Las geodésicas sobre G son las curvas $\gamma(t) = L_a(a_t)$, para todo $a \in G$ y a_t subgrupo 1-paramétrico generado por $X \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea g una métrica bi-invariante. Si $X \in \mathfrak{g}$ y $a_t = \exp tX$ es el subgrupo 1-paramétrico generado por X , entonces a_t es la curva integral al campo vectorial invariante por izquierda X y además $\nabla_X X = 0$. Por lo tanto, el subgrupo 1-paramétrico generado por X es una geodésica que pasa por e . Dado que g es una métrica bi-invariante, L_a es una isometría de G , para cualquier $a \in G$. Luego, L_a aplica la geodésica a_t que pasa por e a una geodésica $L_a(a_t)$, que pasa por a , para cualquier $a \in G$. Entonces las curvas $L_a(a_t)$ sobre G son geodésicas. Además, si a_t^1 y a_t^2 son dos geodésicas tales que $a_0^i = a$, con $\dot{a}_0^i = X_a$, para $i = 1, 2$. Entonces por la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial, podemos concluir que $a_t^1 = a_t^2 = L_a(\exp tX)$. Por lo tanto, las geodésicas sobre G , son traslaciones de los subgrupos 1-paramétricos tal y como queríamos probar. \square

3.6.3. Geodésicas sobre grupos de Lie con métricas invariantes por izquierda

Definición 3.6.11. Sea $\{\omega^i\}$ una base para las 1-formas invariantes por izquierda y $\{X_i\}$ la base dual para el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Sea $ds^2 = g_{ij}\omega^i \cdot \omega^j$ una métrica invariante por izquierda sobre G , donde “ \cdot ” denota el producto simétrico de formas, es decir $\omega^i \cdot \omega^j = \text{Sym}(\omega^i \otimes \omega^j)$. Si $t \mapsto \sigma(t)$ es una geodésica, entonces los $y^i(t) = y^i(\sigma(t))$ satisfacen las ecuaciones (3.6.23). Definimos la curva $X(t)$ en \mathfrak{g} por la siguiente igualdad $(L_{\sigma^{-1}(t)})_* \dot{\sigma}(t) = X(t)$ donde

$$X(t) = y^i(t)X_i. \quad (3.6.30)$$

Teorema 3.6.12. Sea $X(t)$ la curva en \mathfrak{g} definida en 3.6.11 y sea g una métrica Riemanniana invariante por izquierda, entonces

$$\frac{dX}{dt} = \mathbf{ad}_X^*(X) \quad (3.6.31)$$

Demostración. Dado que $X(t) = y^j(t)X_j$, luego

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dy^j(t)}{dt}X_j, \quad (3.6.32)$$

Además por la ecuación (2.3.5), para todos los $\{X_i\}$ campos vectoriales invariantes por izquierda

$$g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = \frac{1}{2} \{X_i g(X_j, X_k) + X_j g(X_i, X_k) - X_k g(X_j, X_i) + g([X_i, X_j], X_k) \\ + g([X_k, X_i], X_j) + g(X_i, [X_k, X_j])\}. \quad (3.6.33)$$

Por la Proposición 3.6.7, $X_i g(X_j, X_k) = 0$, y dado que $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, entonces

$$\Gamma_{ij}^s g_{sk} = \frac{1}{2} \{c_{ij}^s g_{sk} + c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}\}. \quad (3.6.34)$$

Multiplicando por g^{mk} , tenemos la siguiente igualdad

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \{c_{ij}^m + c_{ki}^s g_{sj} g^{mk} + c_{kj}^s g_{si} g^{mk}\}. \quad (3.6.35)$$

Si $\sigma(t)$ es una geodésica, entonces $\dot{\sigma}(t) = y^i(t)X_i(\sigma(t))$ y $\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma}(t) = 0$. Luego,

$$\frac{dy^i}{dt}X_i + y^i y^j \nabla_{X_j} X_i = \frac{dy^i}{dt}X_i + y^i y^j \Gamma_{ij}^m = 0, \quad (3.6.36)$$

es decir,

$$\frac{dy^m}{dt}X_m + \frac{1}{2}\{c_{ki}^s y^i g_{sj} y^j g^{mk} + c_{kj}^s y^j g_{si} y^i g^{mk}\}X_m = 0. \quad (3.6.37)$$

Aplicamos de manera conveniente g_{lm} a la expresión (3.6.37) para hacer uso de la contracción tensorial, $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, y así podemos deducir que

$$g_{lm} \frac{dy^m}{dt} + c_{li}^s y^i g_{sj} y^j = 0, \quad (3.6.38)$$

entonces

$$g\left(\frac{dX}{dt}, X_l\right) + g(X, [X_l, X]) = 0. \quad (3.6.39)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{dX}{dt}, X_l\right) &= g([X, X_l], X) \\ &= g(\mathbf{ad}_X X_l, X) \\ &= g(X_l, \mathbf{ad}_X^* X). \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dX}{dt} = \mathbf{ad}_X^* X \quad (3.6.41)$$

□

Teorema 3.6.13. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie orientada, $\dim \mathfrak{g} = 2$, con producto escalar (\cdot, \cdot) . Entonces existe un marco ortonormal positivo $\{e_1, e_2\}$ tal que $[e_1, e_2] = \lambda^2 e_2$*

Demostración. Fijamos un marco ortonormal $\{e_1, e_2\}$. Sea $e'_1 = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2$ y $e'_2 = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2$. Entonces

$$[e'_1, e'_2] = (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))[e_1, e_2] = [e_1, e_2], \quad (3.6.42)$$

además

$$[e'_1, e'_2] = c_{1'2'}^1 (\cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2) + c_{1'2'}^2 (-\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2). \quad (3.6.43)$$

Por lo tanto

$$c_{12}^1 = (c_{1'2'}^1 \cos(\varphi) - c_{1'2'}^2 \sin(\varphi)) \quad (3.6.44)$$

y

$$c_{12}^2 = (c_{1'2'}^1 \sin(\varphi) + c_{1'2'}^2 \cos(\varphi)). \quad (3.6.45)$$

Luego, es posible hallar un ángulo φ tal que $c_{12}^1 = 0$ y $c_{12}^2 = \lambda^2$. □

Observación. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie 2-dimensional, si $[e_1, e_2] = 0$, el álgebra de Lie es conmutativa, entonces la estructura de álgebra de Lie es isomorfa al espacio vectorial \mathbb{R}^2 .

Corolario 3.6.14. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie orientada 2-dimensional no conmutativa, siempre existe un marco positivo $\{e_1, e_2\}$ tal que $[e_1, e_2] = e_2$, $(e_1, e_2) = 0$ y $(e_2, e_2) = 1$.

Demostración. Sea $\{e_1, e_2\}$ un marco ortonormal tal que $[e_1, e_2] = \lambda^2 e_2$ y $\lambda^2 \neq 0$ pues \mathfrak{g} es no conmutativa. Tomando $e'_1 = \frac{1}{\lambda^2} e_1$ y $e'_2 = e_2$ entonces

$$[e'_1, e'_2] = \frac{1}{\lambda^2} [e_1, e_2] = e_2 = e'_2. \quad (3.6.46)$$

□

Ejemplo 3.6.15. Sea $G = GL(2, \mathbb{R})$ y consideremos su álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Sea \mathfrak{h} una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , generada por los campos vectoriales $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. El corchete sobre el espacio vectorial está definido por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Además,

$$XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Y,$$

y

$$YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $[X, Y] = Y$, y $[Y, X] = -Y$. Entonces $\mathfrak{h} = \langle X, Y \rangle$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ no conmutativa de dimensión 2.

Teorema 3.6.16. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} , y sea $\hat{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo (H, φ) de G tal que $\varphi_*(\hat{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{h}$.

Para la demostración podemos remitirnos al Warner [12, p.94].

Teorema 3.6.17. (Teorema de Ado.) Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita sobre un campo de característica cero tiene una representación fiel de dimensión finita.

Para la demostración podemos remitirnos al Jacobson [5, p.202-203]. Como consecuencia de este teorema, si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, entonces existe un grupo de Lie G simplemente conexo, cuya álgebra de Lie es \mathfrak{g} .

Como consecuencia del Teorema 3.6.16 y del Teorema de Ado 3.6.17, existe un único subgrupo de Lie H simplemente conexo de G tal que su álgebra de Lie es igual a \mathfrak{h} . Para hallar H , tomemos para cada $A \in G$, la distribución $\Delta_A = L_A \mathfrak{h}$.

$$L_A X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{bmatrix} = x_{11} \frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{21} \frac{\partial}{\partial x_{21}}, \quad (3.6.47)$$

$$L_A Y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix} = x_{11} \frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_{21} \frac{\partial}{\partial x_{22}}. \quad (3.6.48)$$

Consideremos el sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^4 ,

$$x_{21}dx_{11} - x_{11}dx_{21} = 0 \quad (3.6.49)$$

y

$$x_{21}dx_{12} - x_{11}dx_{22} = 0. \quad (3.6.50)$$

Encontraremos la subvariedad integral de Δ que pasa por I . De la ecuación (3.6.49) obtenemos que

$$d\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) = 0, \quad (3.6.51)$$

esto es,

$$x_{21} = C_1 x_{11}. \quad (3.6.52)$$

Luego, si reemplazamos (3.6.52) en (3.6.50) tenemos que $C_1 x_{11} dx_{12} - x_{11} dx_{22} = 0$, es decir

$$d(x_{22} - C_1 x_{12}) = 0, \quad (3.6.53)$$

deduciendo la siguiente igualdad

$$x_{22} - C_1 x_{12} = C_2. \quad (3.6.54)$$

Las ecuaciones (3.6.52) y (3.6.54) son ecuaciones de la subvariedad integral de Δ , entonces $x_{21} = 0$ y $x_{22} = 1$.

Entonces

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.6.55)$$

Ahora, veamos que \mathfrak{h} es única salvo isomorfismo. En efecto, supongamos $\{f_1, f_2\}$ una base para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 = \langle f_1, f_2 \rangle$ no conmutativa de dimensión 2. Luego

$$[f_1, f_2] = \lambda f_1 + \mu f_2; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\mu = 0$, $[f_1, f_2] = \lambda f_1$ y por lo tanto $\varphi_1([X, Y]) = \varphi_1(Y) = \lambda f_1$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \\ X &\mapsto -\frac{1}{\lambda} f_2 \\ Y &\mapsto \lambda f_1, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Si $\lambda = 0$, $[f_1, f_2] = \mu f_2$, así, $\varphi_2([X, Y]) = \varphi_2(Y) = \mu f_2$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \\ X &\mapsto \frac{1}{\mu} f_1 \\ Y &\mapsto \mu f_2, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Si $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, entonces $Y \mapsto \lambda f_1 + \mu f_2$, luego

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] = [\alpha f_1 + \beta f_2, \lambda f_1 + \mu f_2] = \lambda f_1 + \mu f_2, \quad (3.6.56)$$

entonces

$$\varphi([X, Y]) = [\alpha f_1, \mu f_2] + [\beta f_2, \lambda f_1] = (\alpha\mu - \beta\lambda)[f_1, f_2] = [f_1, f_2]. \quad (3.6.57)$$

Por lo tanto haciendo $\beta = \frac{\alpha\mu - 1}{\lambda}$, tenemos que la aplicación φ definida por

$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \\ X &\mapsto \alpha f_1 + \frac{\alpha\mu-1}{\lambda} f_2 \\ Y &\mapsto \lambda f_1 + \mu f_2,\end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

A partir de acá, solucionaremos la ecuación (3.6.31).

Definición 3.6.18. Sea $\{e_1, e_2\}$ un marco del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G tal que $g(e_1, e_1) = \lambda^2$, $g(e_1, e_2) = 0$, $g(e_2, e_2) = 1$ y $[e_1, e_2] = e_2$

Definida g , ahora vamos a encontrar los coeficientes de la matriz del operador \mathbf{ad}_X^* correspondientes a la base e_1, e_2 . Dado que $[e_1, e_2] = e_2$, entonces

$$\mathbf{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.58)$$

y

$$\mathbf{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6.59)$$

Para hallar los coeficientes de la matriz del operador \mathbf{ad}_X^* correspondientes a la base e_1, e_2 , sabemos que

$$g(Ax, y) = g(x, A^*y), \quad (3.6.60)$$

es decir, $(Ax)^t G(y) = x^t G(A^*y)$. Entonces

$$A^* = G^{-1}AG \quad (3.6.61)$$

Como

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{ad}_{e_1}^* = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.62)$$

y

$$\mathbf{ad}_{e_2}^* = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\lambda^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6.63)$$

Si $X(t) = y^j(t)e_j$ es una curva en el álgebra de Lie \mathfrak{h} de H (3.6.55), entonces

$$y^1(t)\mathbf{ad}_{e_1}^* + y^2(t)\mathbf{ad}_{e_2}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{y^2(t)}{\lambda^2} \\ 0 & y^1(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{ad}_{X(t)}^* X(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{y^2(t)}{\lambda^2} \\ 0 & y^1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(y^2(t))^2}{\lambda^2} \\ y^1(t)y^2(t), \end{bmatrix} \quad (3.6.64)$$

es decir, que por la ecuación (3.6.31),

$$\dot{X}(t) = -\frac{(y^2(t))^2}{\lambda^2}e_1 + y^1(t)y^2(t)e_2, \quad (3.6.65)$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy^1(t)}{dt} = -\frac{(y^2(t))^2}{\lambda^2}, \quad (3.6.66)$$

$$\frac{dy^2(t)}{dt} = y^1(t)y^2(t). \quad (3.6.67)$$

Consideremos $y^1(t) = \frac{C}{\lambda} \cos(\varphi(t))$ y $y^2(t) = C \sin(\varphi(t))$, luego

$$\frac{dy^1(t)}{dt} = -\frac{C}{\lambda} \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), \quad (3.6.68)$$

$$\frac{dy^2(t)}{dt} = C \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t). \quad (3.6.69)$$

Utilizando las ecuaciones (3.6.66), (3.6.68) y (3.6.67), (3.6.69), tenemos que

$$-\frac{C}{\lambda} \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = -\frac{C^2}{\lambda^2} \sin^2(\varphi(t)) \quad (3.6.70)$$

y

$$C \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{C^2}{\lambda} \cos(\varphi(t)) \sin(\varphi(t)) \quad (3.6.71)$$

respectivamente. Entonces,

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{C}{\lambda} \sin(\varphi(t)). \quad (3.6.72)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (3.6.72)

$$\varphi(t) = 2 \arctan[\tan(\varphi_0/2)e^{(c/\lambda)t}]. \quad (3.6.73)$$

Luego, usando la siguiente identidad $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$, tenemos que:

$$y^1(t) = \frac{C}{\lambda} \left[\frac{1 - (\tan(\varphi_0/2))^2 e^{(2C/\lambda)t}}{1 + (\tan(\varphi_0/2))^2 e^{(2C/\lambda)t}} \right] \quad (3.6.74)$$

y usando la siguiente identidad $\sin(x) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x)}$, tenemos que:

$$y^2(t) = C \frac{2 \tan(\varphi_0/2) e^{(C/\lambda)t}}{1 + (\tan(\varphi_0/2))^2 e^{(2C/\lambda)t}}. \quad (3.6.75)$$

Ahora, encontraremos las geodésicas de la métrica invariante por izquierda sobre H (definido por 3.6.55), determinada por el producto escalar (\cdot, \cdot) sobre $\mathfrak{h} = \langle \{e_1, e_2 | [e_1, e_2] = e_2\} \rangle \cong \mathfrak{h}(H)$,

donde $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como $H \cong \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tiene coordenadas $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, hacemos uso de la operación sobre la

variedad producto $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ definida por $(A, v)(A_1, v_1) = (AA_1, Av_1 + v)$ y conocida como aplicación de movimientos afines de \mathbb{R}^n . En este caso $L_{(a_1, b_1)}(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$, entonces

$$(L_{(a_1, b_1)})_*|_{(1, 0)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (3.6.76)$$

que corresponde a

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 v_1 & a_1 v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6.77)$$

para cualquier $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}$. Luego, si $\sigma(t)$ es una geodésica que pasa por $I = (1, 0)$, entonces debe ser la solución $\sigma(t) = (a(t), b(t))$ de el sistema de ecuaciones diferenciales determinado por la relación $\dot{\sigma}(t) = (L_{\sigma(t)})_* X(t)$ (Def. 3.6.11), esto es

$$\dot{a}(t) = a(t)y^1(t), \quad (3.6.78)$$

$$\dot{b}(t) = a(t)y^2(t), \quad (3.6.79)$$

con la condición inicial $\sigma(0) = I$. De la ecuación (3.6.78) con $a(0) = 1$, tenemos que

$$a(t) = e^{\int_0^t y^1(s) ds} \quad (3.6.80)$$

y de la ecuación (3.6.79) con $b(0) = 0$,

$$b(t) = \int_0^t y^2(s) e^{\int_0^s y^1(u) du} ds. \quad (3.6.81)$$

Al resolver la expresión del lado derecho de la ecuación (3.6.80), tenemos que

$$a(t) = \frac{e^{C/\lambda t}}{e^{2C/\lambda t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)}, \quad (3.6.82)$$

luego

$$\begin{aligned} a(t)y^2(t) &= \left[\frac{e^{C/\lambda t}}{e^{2C/\lambda t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)} \right] \left[\frac{2C \tan(\varphi_0/2) e^{(C/\lambda)t}}{1 + (\tan(\varphi_0/2))^2 e^{2C/\lambda t}} \right] \\ &= \frac{2C \cos^2(\varphi_0/2) \tan(\varphi_0/2) e^{2C/\lambda t}}{(e^{2C/\lambda t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2))^2} \\ &= \frac{C \sin(\varphi_0) e^{2C/\lambda t}}{(e^{2C/\lambda t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2))^2}, \end{aligned} \quad (3.6.83)$$

por lo tanto

$$b(t) = C \sin(\varphi_0) \int_0^t \frac{e^{2C/\lambda t}}{(e^{2C/\lambda t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2))^2} dt, \quad (3.6.84)$$

haciendo la sustitución $u = e^{2\mu t}$, donde $\mu = \frac{C}{\lambda}$,

$$\begin{aligned}
 b(t) &= \frac{C \sin(\varphi_0)}{2\mu} \int_1^{e^{2\mu t}} \frac{du}{(u \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2))^2} \\
 &= \frac{C \sin(\varphi_0)}{2\mu \sin^2(\varphi_0/2)} \left[-\frac{1}{u \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)} \right] \Big|_1^{e^{2\mu t}} \\
 &= \frac{C \sin(\varphi_0)}{2\mu \sin^2(\varphi_0/2)} \left[1 - \frac{1}{e^{2\mu t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)} \right] \\
 &= \frac{C \sin(\varphi_0)}{2\mu \sin^2(\varphi_0/2)} \left[\frac{e^{2\mu t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2) - 1}{e^{2\mu t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)} \right] \\
 &= \frac{C \sin(\varphi_0)(e^{2\mu t} - 1)}{2\mu(e^{2\mu t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2))} \\
 &= \frac{1}{2} \lambda \sin(\varphi_0) \frac{e^{2\frac{C}{\lambda}t} - 1}{e^{2\frac{C}{\lambda}t} \sin^2(\varphi_0/2) + \cos^2(\varphi_0/2)}.
 \end{aligned} \tag{3.6.85}$$

Entonces, una geodésica $\sigma(t) = (a(t), b(t))$ que pasa por $I = (1, 0)$, con $a(t)$ definida por (3.6.82) y $b(t)$ definida por (3.6.85), cumple que

$$\dot{a}(0) = \frac{C}{\lambda}(1 - 2 \sin^2(\varphi_0/2)) = \frac{C}{\lambda} \cos(\varphi_0), \tag{3.6.86}$$

$$\dot{b}(0) = C \sin(\varphi_0). \tag{3.6.87}$$

Si fijamos λ y una dirección sobre el $T_I(H)$, entonces tenemos que las geodésicas sobre H , de acuerdo a la métrica g , están dadas por las figuras 3.11 y 3.12.

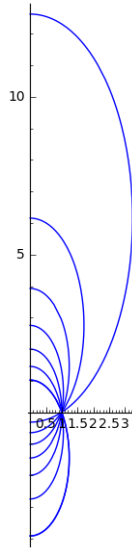
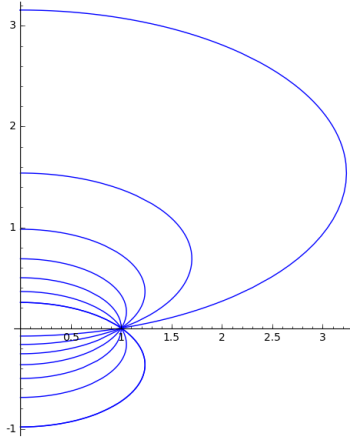


Figura 3.11: $|\lambda| > 1$.

Otra manera de hallar las geodésicas del grupo de Lie H (3.6.55), es considerar la métrica g invariante por izquierda, es decir,

$$g(X, Y)_{(a,b)} = g((L_{(a,b)})_*^{-1}X, (L_{(a,b)})_*^{-1}Y)_{(1,0)}. \tag{3.6.88}$$

Figura 3.12: $|\lambda| < 1$.

Por la Ecuación (3.6.76) y por la Definición 3.6.18 tenemos que

$$(L_{(a,b)})_* \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) = a \frac{\partial}{\partial a}, \quad (3.6.89)$$

$$(L_{(a,b)})_* \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) = a \frac{\partial}{\partial b}. \quad (3.6.90)$$

Luego, la métrica invariante por izquierda g , quedaría determinada por las siguientes relaciones

$$g \left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial a} \right) = \frac{\lambda^2}{a^2}, \quad (3.6.91)$$

$$g \left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b} \right)_{(a,b)} = 0, \quad (3.6.92)$$

y

$$g \left(\frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial b} \right)_{(a,b)} = \frac{1}{a^2}. \quad (3.6.93)$$

Entonces

$$g = \frac{\lambda^2 da \otimes da + db \otimes db}{a^2} \quad (3.6.94)$$

Para $\lambda = 1$ y $a > 0$, la métrica g definida por la Ecuación (3.6.94), es la métrica de Lobachevski (3.4.21). Entonces, de acuerdo al semiplano de *Poincaré* (Ejemplo 3.4.8) las geodésicas están determinadas por rectas verticales paralelas al x -eje y circunferencias ortogonales que intersectan el y -eje, es decir

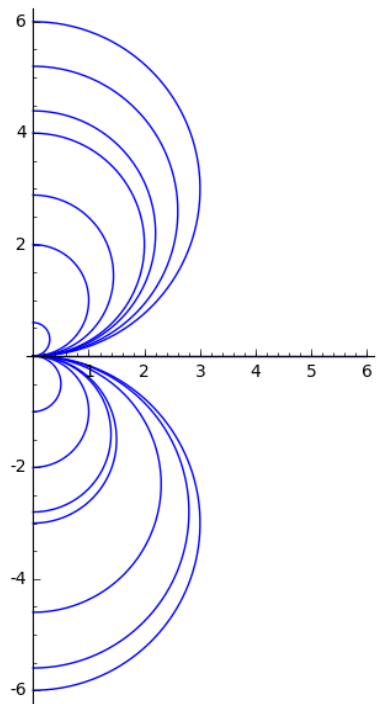


Figura 3.13: Geodésicas sobre grupo $Aff_+(1)$ con respecto a la métrica invariante por izquierda g .

Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, second edition, 1996.
- [2] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [3] Victor Guillemin and Allan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [4] Robert Hermann. Geodesics and classical mechanics on lie groups. *AIP Journal of Mathematical Physics*, 13:460–463, 1972.
- [5] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. Dover Publication Inc., 1979.
- [6] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume I. Interscience Publishers, 1963.
- [7] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume II. Interscience Publishers, 1969.
- [8] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., second edition, 2002.
- [9] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 1. Publish or Perish, Inc., third edition, 1999.
- [10] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 2. Publish or Perish, Inc., third edition, 1999.
- [11] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 3. Publish or Perish, Inc., third edition, 1999.
- [12] W. Frank Warner. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 1994.
- [13] Dennis Zill. *A first Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Brooks/Cole Cengage Learning, ninth edition, 2009.