



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Polinomios Ultraesféricos

Juan Felipe Moreno Pérez

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Polinomios Ultraesféricos

Juan Felipe Moreno Pérez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director(a):
Luis Oriol Mora Valbuena

Línea de Investigación:
Polinomios Ortogonales

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Dedicado a mi padre, por todo el esfuerzo que
ha hecho por mí.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Luis Oriol Mora por tener la disposición y dedicación en guiarme en el camino de las matemáticas, el desarrollo del presente trabajo y la formación humana, pues ha sido un gran maestro en muchos aspectos. Agradezco a la Universidad distrital Francisco José de Caldas y a la planta docente, a mis compañeros por ser de gran ayuda en diferentes momentos, en especial a Daniel Camilo Males. A mis familiares y allegados por darme la motivación y fortaleza día a día. A Carolina Triana y Daniela Velasco por mostrarme que el mejor camino es el del aprendizaje.

Resumen

En el presente trabajo se estudian los polinomios ultrasféricos como un caso particular de los polinomios de Jacobi. En la primera parte del trabajo se estudia la teoría general de los sistemas de polinomios ortogonales respecto a un funcional de momentos, de aquí se observan las distintas propiedades y características de un sistema de polinomios ortogonales, incluyendo su fórmula de recurrencia a tres términos. Para la siguiente parte del trabajo se presentan algunas funciones especiales como la función Gamma, Beta, hipergeométrica y el factorial de Pochhammer para definir a los polinomios de Jacobi, a continuación se muestra cuál es el funcional de momentos que convierte a los polinomios de Jacobi en un sistema de polinomios ortogonales, se estudian algunas propiedades de diferenciabilidad y se caracteriza su fórmula de recurrencia. Finalmente se definen los polinomios ultrasféricos a partir de los polinomios de Jacobi, se exhibe el funcional de momentos que ortogonaliza a estos polinomios, su respectiva fórmula de recurrencia y algunos ejemplos clásicos de los polinomios ultrasféricos como los polinomios de Legendre, de Chebyshev de primer y segundo orden.

Palabras clave: Funcional de momentos, Sistema de polinomios ortogonales, Polinomios de Jacobi y Polinomios ultrasféricos.

Abstract

In the present document are studied ultraspherical polynomials as a particular case of Jacobi Polynomials. First of all general theory of orthogonal polynomial systems is studied respect to a moment functional, so that is seen the different properties and characteristics of an orthogonal polynomial system and its recurrence formula for three terms. In the next part is introduced some special functions as Gamma function, Beta function, hypergeometric function and Pochhammer factorial to define Jacobi Polynomials, below is shown which is the moment functional that turns Jacobi polynomials into an orthogonal polynomial system, then is studied some differential properties and is characterized its recurrence formula. Finally is defined the ultraspherical polynomials based on Jacobi polynomials, is displayed the moment functional that turns ultraspherical polynomial into orthogonal system, its recurrence formula and classic examples as Legendre polynomials, Chebyshev polynomials of first and second order.

Keywords: Moment functional, Orthogonal polynomial system, Jacobi polynomials and Ultraspherical polynomials.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	VIII
1 Introducción	1
Introducción	1
2 Preliminares	3
2.1 Polinomios Ortogonales y Funcional de Momentos	3
2.2 Existencia de SPO	7
2.3 Funcional de momentos positivo	9
2.4 Fórmula fundamental de recurrencia.	11
2.5 Teorema de Favard	14
3 Polinomios de Jacobi	16
3.1 Definición de los Polinomios de Jacobi	16
3.1.1 Función Gamma	16
3.1.2 Función Beta	18
3.1.3 Función Hipergeométrica	20
3.1.4 Polinomios de Jacobi	21
3.2 Función generadora de Bateman	24
3.3 Fórmula de Rodrigues	25
3.4 Ortogonalidad	26
3.5 Fórmula de recurrencia	29
4 Polinomios Ultraesféricos	30
4.1 Definición	30
4.2 Simetría	30
4.3 Funcional de momentos y ortogonalidad	31
4.4 Fórmula de recurrencia	31
4.5 Algunos casos particulares	31
5 Conclusiones	36

Bibliografía

37

Lista de símbolos

Símbolos

Símbolo	Referencia
1. $P_n(x)$	Polinomio de grado n .
2. \mathcal{L}	Funcional de Momentos.
3. Δ_n	Determinante de la n -ésima matriz de momentos.
4. Γ	Función Gamma.
4. B	Función Beta.
6. ${}_2F_1$	Función hipergeométrica.
7. $(\alpha)_n$	Factorial de Pochhammer.
8. $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	Polinomio de Jacobi con parámetros α y β .
9. $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$	Polinomio ultrasférico con parámetro α .
10. D^n	Derivada n -ésima.
11. \mathbb{C}	Sistema de números complejos.
12. \mathbb{R}	Sistema de números reales.
13. $E_n(x)$	Polinomio de Legendre de grado n .
14. $T_n(x)$	Polinomio de Chebyshev de primer orden de grado n .
15. $U_n(x)$	Polinomio de Chebyshev de segundo orden de grado n .

1 Introducción

El análisis funcional es una de las ramas más importantes de la matemática, tiene aplicaciones en la teoría de la aproximación, ecuaciones integrables, física, además es la rama la cuál soporta el presente trabajo.

Para el presente trabajo se asume un conocimiento del lector acerca de los espacios vectoriales.

En el espacio vectorial de las funciones continuas $C[a, b]$ se dice que dos funciones f, g son ortogonales sobre $[a, b]$ si su producto punto satisface

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x) = 0 \quad (1-1)$$

donde $w(x)$ es llamada la función peso. Existen funciones llamadas funciones especiales, como la función Hipergeométrica, Gamma y Beta que nos define cierta familia de polinomios clásicos, como lo son los Polinomios de Jacobi notados $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, los cuáles particularizan otras familias de polinomios. Sin embargo cabe la pregunta, ¿estas funciones definen un conjunto ortogonal de polinomios?, ¿cuál es la función peso que ortogonaliza a estos polinomios? y ¿qué propiedades cumplen los polinomios siempre que tengan un producto punto que los ortogonalice?

Para dar respuesta a las anteriores preguntas el presente trabajo se enfatiza en los siguientes aspectos:

- Estudiar la teoría general de los funcionales de momentos respecto a un conjunto de polinomios, identificando los tipos de funcionales y sus propiedades sobre los polinomios para luego aplicarla en los polinomios Ultraesféricos una vez se conozca cuál es su funcional de momentos.
- Identificar algunas propiedades de la función hipergeométrica para el estudio de propiedades de diferenciabilidad de los polinomios de Jacobi para dar a conocer cual es el funcional de momentos y su relación con las funciones Gamma y Beta.
- Caracterizar a Los polinomios Ultraesféricos y sus casos particulares a partir de la generalización de los polinomios de Jacobi derivados de la función Hipergeométrica.

El desarrollo del presente trabajo se divide en 3 capítulos de la siguiente manera.

Para el Capítulo 2 se desarrolla la teoría general de los funcionales de momentos notados como \mathcal{L} , respecto a una sucesión de polinomios. En las cinco secciones de este capítulo se verán características de los funcionales de momentos, casos particulares de funcionales de momentos y algunas propiedades de los polinomios sobre sus coeficientes y la manera en como se hallan a partir de su fórmula de recurrencia.

En la Capítulo 3 se estudian los Polinomios de Jacobi. Para ello, se comienza con las funciones Gamma, Beta e Hipergométrica, mostrando algunas generalidades y propiedades que son de utilidad para el desarrollo de la fórmula de Rodrigues, Bateman ortogonalidad y recurrencia de los polinomios de Jacobi.

Finalmente, en el Capítulo 4 se particularizan los polinomios de Jacobi con el caso $\alpha = \beta$ también llamados como Polinomios Ultraesféricos y algunas de sus propiedades.

2 Preliminares

2.1. Polinomios Ortogonales y Funcional de Momentos

En la literatura, los polinomios ortogonales se presentan de diversas maneras, la siguiente es una de ellas.

Definición 1 (Funcional de momentos). Sea $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y sea \mathcal{L} una función definida sobre el espacio vectorial de los polinomios definida como

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n, \quad (2-1)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Dónde \mathcal{L} es un funcional lineal, es decir que para $\pi_1(x)$ y $\pi_2(x)$ polinomios y constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\mathcal{L}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] = \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2(x)]. \quad (2-2)$$

Si \mathcal{L} satisface (2-1) y (2-2) se dice que es un funcional de momentos y que μ_n es el ***n*-ésimo momento**.

Definición 2 (Sistema de Polinomios Ortogonales). Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios, se dice que es un sistema de polinomios ortogonales (SPO) respecto a un funcional \mathcal{L} si:

- $P_n(x)$ es de grado n .
- $\mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] = 0$ si $n \neq m$.
- $\mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] \neq 0$ si $n = m$.

En el caso particular que se cumpla $\mathcal{L}[P_n^2(x)] = 1$ se dice que $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortonormales. Se debe tener en cuenta que $\mu_0 \neq 0$ y que $P_0(x) \neq 0$.

Teorema 1. Sea \mathcal{L} un funcional de momentos y $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es SPO.
- b) $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$.
 $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $m = n$.
- c) $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{mn}$ con $K_n \neq 0$ para $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Demostración. $a \Rightarrow b$

Como $P_k(x)$ es de grado k , sea $(P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$ es una base para el sub-espacio de los polinomios de grado menor o igual a n . Entonces para cada polinomio $\pi(x)$ cuyo grado es $m < n$ existen únicos $(\alpha_k)_{k=0}^m$ tal que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x).$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] &= \mathcal{L}\left[\left(\sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x)\right)P_n(x)\right] \\ &= \sum_{k=0}^m \mathcal{L}[(\alpha_k P_k(x))P_n(x)] \\ &= \sum_{k=0}^m \alpha_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, si $\pi(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x)$ es de grado n , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] &= \mathcal{L}\left[\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x)\right)P_n(x)\right] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathcal{L}[(\alpha_k P_k(x))P_n(x)] \\ &= \alpha_n \mathcal{L}[P_n(x)P_n(x)] \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2. Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPO respecto a un funcional \mathcal{L} . Entonces para todo polinomio $\pi(x)$ de grado n , $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$. Entonces las constantes c_k son

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]}. \quad (2-3)$$

Demostración. Si $\pi(x)$ es de grado n , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)] &= \mathcal{L}\left[\left(\sum_{k=0}^n c_k P_k(x)\right)P_k(x)\right] \\ &= c_k \mathcal{L}[P_k(x)^2]. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}[P_k(x)^2] \neq 0$. □

Corolario 1: Si $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es un SPO para un funcional \mathcal{L} , entonces cada $P_n(x)$ es determinado de manera única salvo factores distintos de cero. Esto es, que si $(Q_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es un SPO para \mathcal{L} entonces existen constantes c_n tal que:

$$Q_n(x) = c_n P_n(x). \quad (2-4)$$

Para $n = 0, 1, \dots$

Demostración. Si $k < n$ entonces $\mathcal{L}[P_k(x)Q_n(x)] = 0$, usando el teorema anterior con $Q_n(x) = \pi(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] &= c_n \mathcal{L}[P_n(x)^2] \\ &= \mathcal{L}[(c_n P_n(x))P_n(x)], \end{aligned}$$

con lo cual, $Q_n(x) = c_n P_n(x)$. □

Ejemplo 1.1. Aunque más adelante se muestra la relación entre los polinomios de Legendre y los polinomios de Jacobi, a continuación se presenta el funcional de momentos asociado a los polinomios de Legendre.

En este sentido los polinomios de Legendre son el caso particular en que $\alpha = \beta = 0$ en los polinomios de Jacobi. Por lo cual su funcional de momentos \mathcal{L} está definido sobre el intervalo $[-1, 1]$ y es

$$\mathcal{L}[P_n(x)] = \int_{-1}^1 P_n(x) dx. \quad (2-5)$$

Dado el anterior funcional se puede completar la siguiente tabla de manera sencilla, sus primeros momentos, los primeros polinomios de Legendre, el valor de $\mathcal{L}[P_n(x)]$ y sus gráficos como motivación.

Grado	$P_n(x)$	$\mathcal{L}[P_n(x)]$
0	1	2
1	x	0
2	$\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$	0
3	$\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$	0
4	$\frac{35x^4}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{3}{8}$	0
5	$\frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8}$	0

Tabla de momentos

Grado	$P_n(x)$	$\mathcal{L}[P_n(x)]$
0	1	2
1	x	0
2	x^2	$2/3$
3	x^3	0
4	x^4	$2/5$
5	x^5	0

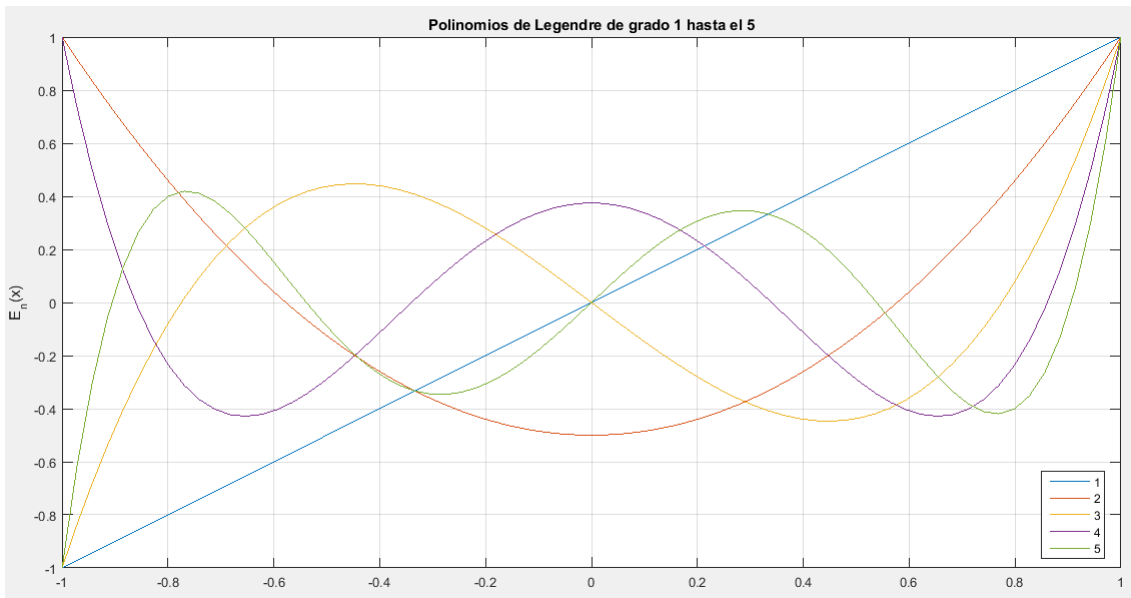


Figura 2-1: Polinomios de Legendre

Teniendo en cuenta el funcional \mathcal{L} también se verifica que para $m < n$ se tiene

$$\mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] = 0.$$

2.2. Existencia de SPO

A continuación, se da a conocer un teorema importante que asegura la existencia de un SPO dado un funcional de momentos \mathcal{L} con sus respectivos momentos $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{C} .

Teorema 3. *Si \mathcal{L} es un funcional de momentos con una sucesión de momentos $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un SPO para \mathcal{L} es*

$$\Delta_n \neq 0, \quad (2-6)$$

donde

$$\Delta_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}. \quad (2-7)$$

Demostración. Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_{nk}x^k$, si existe un SPO $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ para un funcional \mathcal{L} , entonces para $m \geq n$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^m P_n(x)] &= \sum_{k=0}^n C_{nk} \mathcal{L}[x^{k+m}] \\ &= \sum_{k=0}^n C_{nk} (\mu_{m+k}) \\ &= K_n \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Lo anterior, se reduce a darle solución al siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n0} \\ C_{n1} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}.$$

Como \mathcal{L} esta determinado por una constante $K_n \neq 0$ el sistema anterior tiene única solución lo que implica que $\Delta_n \neq 0$.

Ahora, si $\Delta_n \neq 0$ entonces para $K_n \neq 0$ el sistema tiene única solución y es

$$C_{nn} = K_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}.$$

Lo que implica que $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es un SPO para \mathcal{L} . □

Ejemplo 1.2.

Se consideran dos sucesiones, la sucesión de momentos $\mu_n = k$ para $k \in \mathbb{C}$ y $\mu_n = n + 1$.

- Para la primera sucesión de momentos $\mu_n = k$ se tiene que $\Delta_n = 0$, luego no existe un SPO correspondiente a un funcional constante.
- Se considera la sucesión $\mu_n = n + 1$, por medio de operaciones elementales se tiene

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n \end{bmatrix}.$$

Aplicando $F_2 - F_1 \rightarrow F_2$ y $F_4 - F_3 \rightarrow F_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es 0 por tener dos filas iguales. Luego no es un funcional de momentos.

Teorema 4. Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPO para un funcional \mathcal{L} . Entonces para un polinomio $\pi_n(x)$ de grado n se tiene que

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] \quad (2-8)$$

$$= a_n k_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (2-9)$$

donde a_n y k_n son los coeficientes de $\pi_n(x)$ y $P_n(x)$.

Demostración. Sea $\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] &= \mathcal{L}[(a_n x^n + \pi_{n-1}(x))P_n(x)] \\ &= a_n k_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] \\ &= a_n k_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \end{aligned}$$

□

2.3. Funcional de momentos positivo

Definición 3 (Funcional Positivo). *Un funcional de momentos \mathcal{L} se dice positivo si para todo polinomio $\pi(x)$ no negativo se tiene que:*

$$\mathcal{L}[\pi(x)] > 0. \quad (2-10)$$

Claramente el funcional de momentos asociado a los polinomios de Legendre (2-5) es un funcional positivo, ya que es la integral con respecto a una medida positiva en un intervalo.

Teorema 5. *Sea \mathcal{L} un funcional de momentos positivo. Entonces \mathcal{L} tiene momentos reales y existe un SPO reales correspondiente.*

Lema. *Sea $\pi(x)$ un polinomio que es no negativo para todo número real x . Entonces existen polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tal que*

$$\pi(x) = p(x)^2 + q(x)^2. \quad (2-11)$$

Demostración. Si $0 \leq \pi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces todos sus ceros son números reales, por lo cual $\pi(x)$ se puede escribir así

$$\begin{aligned} \pi(x) &= r^2(x) \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k + i\beta_k)(x - \alpha_k - i\beta_k) \\ &= r^2(x)[A^2(x) + B^2(x)], \end{aligned}$$

donde $A(x) + B(x) = \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k + i\beta_k)$. □

Definición 4 (Polinomio mónico). *Un polinomio $\pi(x)$ de grado n se dice mónico si el coeficiente que acompaña a x^n es 1.*

Teorema 6. *\mathcal{L} es un funcional positivo si y sólo si los momentos son todos reales y $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Suponga que los momentos $\mu_i \in \mathbb{R}$ y $\Delta_n > 0$, y asuma que $P_n(x)$ es un polinomio mónico, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[P_n^2(x)] &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i P_i(x)$ distinto de 0, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[P^2(x)] &= \mathcal{L}\left[\left(\sum_{i=0}^m a_i P_i(x)\right)\left(\sum_{j=0}^m a_j P_j(x)\right)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{i,j=0}^m a_i P_i(x) a_j P_j(x)\right] \\ &= \sum_{k=0}^m a_k^2 \mathcal{L}[P_k^2(x)] \\ &> 0.\end{aligned}$$

Si \mathcal{L} es un funcional positivo, se obtiene

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = K_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Con lo cual $\Delta_n > 0$.

□

2.4. Fórmula fundamental de recurrencia.

Uno de los hechos más interesantes al rededor de los SPO es su fórmula de recurrencia dada a tres términos.

Definición 5 (Funcional Quasi-definido). *Un funcional \mathcal{L} se denomina quasi-definido si y sólo si $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.*

Teorema 7. *Sea \mathcal{L} un funcional de momentos quasi-definido y $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPOM. Entonces existen c_n y $\lambda_n \neq 0$ en \mathbb{C} tal que*

$$P_{n+1}(x) = (x - c_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad (2-12)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, con $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$.

Demostración. Como $P_n(x)$ es de grado n , entonces el polinomio $xP_n(x)$ es de grado $n + 1$, entonces

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} P_k(x),$$

donde para un k fijo, por **Teorema 2** se tiene

$$a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_k(x)P_n(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Como $xP_k(x)$ es de grado $k + 1$ y al ser $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPOM con respecto a \mathcal{L} se concluye

$$a_{nk} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq k < n + 1. \quad (2-13)$$

$$a_{nk} = 1 \quad \text{si} \quad k = n + 1. \quad (2-14)$$

La última condición se tiene, pues $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es un SPOM, se puede reescribir a $xP_n(x)$ y $xP_{n-1}(x)$ como:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x), \quad \text{para } n \geq 1.$$

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x), \quad \text{para } n \geq 2.$$

Aplicando \mathcal{L} a la fórmula (2-12) y multiplicando por x^{n-2} se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^{n-2}P_n(x)] &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x) - C_n x^{n-2}P_{n-1}(x) - \lambda_n x^{n-2}P_{n-2}(x)] \\ &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - C_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-1}(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)] \\ 0 &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lambda_n = \frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}^2} \neq 0. \quad (2-15)$$

□

Teorema 8. *Sea \mathcal{L} un funcional quasi-definido y $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPOM que cumplen (2-12), entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) $\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}$.

b) El coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$ es $-(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$.

c) $c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}(x)^2]}{\mathcal{L}[P_n(x)^2]}$.

Demostración. ■ Por el teorema anterior se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[P_n^2(x)] &= \lambda_{n+1}\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)] \\ &= \lambda_{n+1}\lambda_n\mathcal{L}[P_{n-2}^2(x)] \\ &\vdots \\ &= \lambda_{n+1}\lambda_n \cdots \lambda_2\lambda_1. \end{aligned}$$

- Como $P_k(x)$ satisface (2-12) para todo k . Entonces para $k = 1$

$$P_1(x) = xP_0(x) - C_1P_0(x) - \lambda_1P_{-1}(x).$$

el coeficiente de 1 es $d_1 = -C_1$.

Para $k = 2$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= xP_1(x) - C_1P_1(x) - \lambda_2P_0(x) \\ &= (x - C_2)(xP_0(x) - C_1P_0(x) - \lambda_1P_{-1}(x)) - \lambda_2P_0(x) \\ &= x^2P_0(x) + xP_0(x)(-C_1 - C_2) + (C_1C_2 - \lambda_2)P_0(x) - C_2\lambda_1. \end{aligned}$$

De manera que el coeficiente de x en $P_2(x)$ es $d_2 = -C_1 - C_2$.

Ahora se supone que se cumple para $k = n - 1$, es decir que el coeficiente de x^{n-2} en P_{n-1} es $d_{n-1} = -C_1 - C_2 - \dots - C_{n-2} - C_{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - C_n)P_{n-1}(x) - C_nP_{n-1}(x) - \lambda_nP_{n-2}(x) \\ &= xP_{n-1}(x) - C_nP_{n-1}(x) - \lambda_nP_{n-2}(x) \\ &= x^n + (-C_1 - C_2 - \dots - C_{n-2} - C_{n-1})x^{n-1} + \dots - C_nP_{n-1}(x) - \lambda_nP_{n-2}(x) \\ &= x^n + (-C_1 - C_2 - \dots - C_{n-1} - C_n)x^{n-1} + \dots - \lambda_nP_{n-2}. \end{aligned}$$

Así el coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$ es $d_n = (-C_1 - C_2 - \dots - C_{n-2} - C_{n-1} - C_n)$.

- Si $P_n(x)$ satisface (2-12), entonces multiplicando a ambos lados por $P_{n-1}(x)$ y aplicando el funcional de momentos \mathcal{L} se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[P_{n-1}P_n(x)] &= \mathcal{L}[(x - c_n)P_{n-1}^2(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)] \\ 0 &= \mathcal{L}[xP_{n-1}^2(x)] - c_n \mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)].\end{aligned}$$

□

Definici3n 6 (Funcional sim3trico). *Un funcional de Momentos \mathcal{L} es llamado sim3trico si todos sus momentos de orden impar son 0, es decir*

$$\mathcal{L}[x^{2n+1}] = 0, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (2-16)$$

Teorema 9. *Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ un SPOM con respecto a un funcional \mathcal{L} quasi-definido. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- \mathcal{L} es sim3trico.
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
- En (2-12) $c_n = 0$ para $n \geq 0$

Demostraci3n. a \Leftrightarrow b.

Si \mathcal{L} es sim3trico, entonces para un polinomio $Q(x)$ se tiene al comparar los coeficientes impares que

$$\mathcal{L}[Q(x)] = \mathcal{L}[Q(-x)],$$

ahora, como $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es un SPOM con respecto a \mathcal{L} se tiene que

$$\mathcal{L}[P_n(-x)P_m(-x)] = \mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)],$$

por **Teorema 2** y **Corolario 1** existe $a_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}P_n(-x) &= a_n P_n(-x) \\ &= (-1)^n P_n(x).\end{aligned}$$

Rec3procamente, suponga que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ entonces $P_n(x)$ tiene solo potencias impares cuando n es impar, as3, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}[(-1)^n P_n(x) - P_n(-x)] \\ &= (-1)^n \mathcal{L}[P_n(x)] - \mathcal{L}[P_n(-x)],\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que $\mathcal{L} = 0$ para n impar.

b \Leftrightarrow c

Suponga que $(-1)^n P_n(x) = Q_n(x)$ y que $Q(x)$ satisface (2-12)

- $Q_n = (x + c_n)Q_{n-1}(x) - \lambda_n Q_{n-2}(x)$, para $P_n(x) = Q_n(x)$ se tiene la siguiente relaci3n

$$ii \quad Q_n = (x - c_n)Q_{n-1}(x) - \lambda_n Q_{n-2}(x).$$

Se hace $i - ii$ y se tiene lo siguiente

$$0 = 2c_n Q_{n-1}(x),$$

con lo cual se concluye que $c_n = 0$ para $n \geq 0$. \square

Retomando el ejemplo 1 de los polinomios de Legendre, es claro que es un funcional de momentos simétrico.

Grado	$P_n(x)$	$\mathcal{L}[P_n(x)]$
0	1	2
1	x	0
2	x^2	2/3
3	x^3	0
4	x^4	2/5
5	x^5	0

Donde el funcional de momentos \mathcal{L} es

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx.$$

2.5. Teorema de Favard

Teorema 10 (Teorema de Favard). *Sea $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones arbitrarias de números complejos y sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios determinada por la fórmula de recurrencia*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \text{ para } n \geq 1. \\ P_{-1}(x) &= 0 \text{ y } P_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Entonces existe un único funcional de momentos \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L}[1] = \lambda_1, \quad \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0, \text{ siempre que } m \neq n.$$

\mathcal{L} es cuasi-definido y $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es el correspondiente SPOM si y sólo si $\lambda_n \neq 0$. Por otro lado, \mathcal{L} es positivo si y sólo si c_n es real y $\lambda_n > 0$ para $n \geq 1$.

Demostración. Se define a \mathcal{L} como

$$\mathcal{L}[1] = \lambda_1 = \mu_0 \text{ y } \mathcal{L}[P_n(x)] = 0, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

La fórmula de recurrencia permite reescribirse de la siguiente manera y aplicando \mathcal{L} se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[xP_n(x)] &= \mathcal{L}[P_{n+1}(x) + c_nP_n(x) + \lambda_nP_{n-1}(x)] \\ &= \mathcal{L}[P_{n+1}(x)] + c_n\mathcal{L}[P_n(x)] + \lambda_n\mathcal{L}[P_{n-1}(x)] \\ &= 0,\end{aligned}$$

siempre que $n \geq 2$. De manera similar multiplicando por x a ambos lados de (2-12) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^2P_n(x)] &= \mathcal{L}[xP_{n+1}(x) + c_nxP_n(x) + \lambda_nxP_{n-1}(x)] \\ &= \mathcal{L}[xP_{n+1}(x)] + c_n\mathcal{L}[xP_n(x)] + \lambda_n\mathcal{L}[xP_{n-1}(x)] \\ &= 0,\end{aligned}$$

siempre que $n \geq 3$.

Se supone que se cumple para $m < n$, entonces

$$\mathcal{L}[x^mP_n(x)] = L[P_m(x)P_n(x)] = 0.$$

Multiplicando por x^{n-1} a ambos lados y aplicando \mathcal{L} se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^nP_n(x)] &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n+1}(x) + c_nx^{n-1}P_n(x) + \lambda_nx^{n-1}P_{n-1}(x)] \\ &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n+1}(x)] + c_n\mathcal{L}[x^{n-1}P_n(x)] + \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] \\ &= \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)].\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior. Si \mathcal{L} es quasi-definido entonces por **Teorema7** $\lambda_n \neq 0$.

Ahora, si \mathcal{L} es positivo, entonces por **Teorema6** se concluye que $c_n \in R$ y que $\lambda_n > 0$, para todo n . □

El presente capítulo está fundamentado en [4] y [6].

3 Polinomios de Jacobi

3.1. Definición de los Polinomios de Jacobi

Antes de dar comienzo a los polinomios de Jacobi, se muestra la función Gamma denotada como $\Gamma(z)$ para $z \in \mathbb{C}$, la función beta denotada como $B(p, q)$ con $Re(p) > 0$ y $Re(q) > 0$ para introducir la función hipergeométrica, una función especial representada por una serie hipergeométrica denotada como ${}_2F_1$ o como $F(a, b; c; z)$.

3.1.1. Función Gamma

Para dar inicio a la función Gamma, se muestra la constante de Mascheroni-Euler quienes fueron los primeros en aproximar este número el cual se denota como γ y se define como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \text{Log}(n)), \quad \text{con} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (3-1)$$

Acontinuación se prueba que γ existe y también que $0 \leq \gamma < 1$. Para ello se define la sucesión $A_n = H_n - \text{Log}(n)$, la cual es decreciente ya que

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= H_{n+1} - \text{Log}(n+1) - H_n + \text{Log}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \text{Log}\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \text{Log}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Ahora, para continuar la prueba se observa lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{Log}(1-x) &= \int \frac{-1}{1-x} dx, \quad \text{como } |x| < 1 \\ &= - \int (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + \dots) dx \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \end{aligned}$$

tomando $x = \frac{1}{n+1}$ se tiene

$$\frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k+1} (k+1)} < 0.$$

Ahora, como $1/t$ es una función decreciente a medida que t crece y de lo anterior se deduce

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt < \frac{1}{k-1} \text{ para } k \geq 2.$$

Sumando desde $k = 2$ hasta n se obtiene

$$H_n - 1 < \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{t} dt + \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt < H_{n-1},$$

lo cual se recude a

$$-1 < -H_n + \text{Log}(n) < \frac{1}{n},$$

teniendo en cuenta la definición de A_n se concluye

$$\frac{1}{n} < A_n < 1. \quad (3-2)$$

Ya conocido la constante de Mascheroni-Euler, se dan las dos definiciones de la función Gamma, notada como $\Gamma(z)$ para $z \in \mathbb{C}$.

Definición 7.

- Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]. \quad (3-3)$$

- Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (3-4)$$

De la definición (3-3) se muestra una propiedad importante de la función Gamma.

$$z\Gamma(z) = e^{-z\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}. \quad (3-5)$$

Ahora teniendo en cuenta la definición de γ se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \text{Log}(n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \text{Log}(n+1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(H_n - \sum_{k=1}^n \text{Log} \left(\frac{k+1}{k} \right) \right). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la función exponencial en (3-7) se deduce

$$\begin{aligned} e^{-z\gamma} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-zH_n + z \sum_{k=1}^n \text{Log} \left(\frac{k+1}{k} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^z e^{-z/k} \right]. \end{aligned}$$

Ahora se reemplaza lo anterior en la ecuación (3-5)

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^z e^{-z/k} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{z/k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^z \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} \right] \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^z \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^z}{(z)_n}. \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $(a)_n$ es el factorial de Pochhammer definido como

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-2)(a+n-1), \text{ para } n \leq 1.$$

$$(a)_0 = 1, \text{ para } a \neq 0.$$

3.1.2. Función Beta

La función Beta de parámetros p y q con $Re(p) > 0$ y $Re(q) > 0$ se define como

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt. \quad (3-6)$$

Se considera la siguiente sustitución, $t = \sin^2(\varphi)$, entonces $dt = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt &= \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)^{2p-2} \cos(\varphi)^{2q-2} 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)^{2p-1} \cos(\varphi)^{2q-1} d\varphi. \end{aligned}$$

A continuación se muestra la relación que existe entre las funciones Γ y B de la siguiente manera

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-v} v^{q-1} dv.$$

Ahora tomando las sustituciones $t = x^2$ con $dt = 2xdx$ y $t = v^2$ con $dt = 2v dv$ se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy.\end{aligned}$$

Se hace cambio de coordenadas, de cartesianas a coordenadas polares, con lo cual la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} (r \cos(\theta))^{2p-1} (r \sin(\theta))^{2q-1} r d\theta dr \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr 2 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)^{2p-1} \sin(\theta)^{2q-1} d\theta.\end{aligned}$$

Se hace uso, ahora, de la sustitución $r = \sqrt{t}$ con $dr = 1/(2\sqrt{t})dt$ y de la sustitución $\theta = \pi/2 - \varphi$ con $d\theta = -d\varphi$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 2 \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{p+q-1/2}}{2\sqrt{t}} dt 2 \int_0^{\pi/2} (\cos(\pi/2 - \varphi))^{2p-1} (\sin(\pi/2 - \varphi))^{2q-1} (-1) d\varphi \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt 2 \int_0^{\pi/2} (\sin(\varphi))^{2p-1} (\cos(\varphi))^{2q-1} d\varphi \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q).\end{aligned}$$

Con lo cual se llega a la relación que existe entre las dos funciones y además que se puede observar la conmutatividad de los parámetros p y q en la función Beta

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q). \quad (3-7)$$

Para finalizar se considera la siguiente integral y su desarrollo, tomado de [2, Pag31, Ej7].

$$\int (1-x)^{p-1} (1+x)^{q-1} dx. \quad (3-8)$$

Se considera la sustitución $2y = 1+x$ con lo cual $2y-2 = 1-x$ y $dx = 2dy$, concluyendo

$$\begin{aligned}\int (1-x)^{q-1} (1+x)^{p-1} dx &= \int 2(2y)^{p-1} (2y-2)^{q-1} dy \\ &= 2^{p+q-1} \int (y)^{p-1} (y-1)^{q-1} dy \\ &= 2^{p+q-1} B(p, q).\end{aligned}$$

3.1.3. Función Hipergeométrica

La función hipergeométrica se define como

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, & b; \\ & c; \end{matrix} z \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n!}, \quad (3-9)$$

para $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $c \neq 0$, recordando que $(a)_n$ es el factorial de Pochhammer definido como

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-2)(a+n-1), \text{ para } n \leq 1. \quad (3-10)$$

$$(a)_0 = 1, \text{ para } a \neq 0. \quad (3-11)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se determinara el radio de convergencia de (2-1), para ello se debe tener en cuenta que $\sum a_n$ converge si

$$\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \quad (3-12)$$

en (2-1) se tiene

$$\begin{aligned} \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \limsup \left| \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}z^{n+1}(c)_n n!}{(c)_{n+1}(n+1)!(a)_n(b)_n z^n} \right| \\ &= \limsup \left| \frac{(a+n)(b+n)z}{(c+n)(n+1)} \right| \\ &= |z| \limsup \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \right| \\ &= |z| \limsup \left| \frac{(a/n+1)(b/n+1)}{(c/n+1)(1+1/n)} \right| \\ &= |z|, \end{aligned}$$

así, para que (2-1) converja se debe tener que $|z| < 1$.

Teorema 11. Si $|z| = 1$ una condición suficiente para que (2-1) converja es $Re(c-a-b) > 0$.

Demostración. Se hace uso del criterio de comparación por paso al límite con la serie $\sum n^{-1-\delta}$, donde $2\delta = Re(c-a-b) > 0$, y la serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n!} \right|.$$

Entonces, si $|z| = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n z^n n^{1+\delta}}{(c)_n n!} \right| &= |z^n| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n n^{1+\delta}}{(c)_n n!} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_n}{n^a (n-1)!} \frac{(b)_n}{n^b (n-1)!} \frac{n^c (n-1)! n^{1+\delta} (n-1)!}{(c)_n n^{c-a-b} n!} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{\Gamma(b)} \Gamma(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{c-a-b-\delta}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con lo que la serie (2-1) converge absolutamente para $|z| = 1$, luego (2-1) converge. \square

3.1.4. Polinomios de Jacobi

Definición 8. *Los polinomios de Jacobi se definen como*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1+\alpha+\beta+n; \\ & 1+\alpha; \end{matrix} \quad \frac{1-x}{2} \right]. \quad (3-13)$$

Donde $\alpha, \beta > -1$. Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce la restricción para los parámetros α y β de la siguiente manera, si $\alpha = -1$ entonces

$$P_n^{(-1, \beta)}(x) = \frac{(0)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & \beta+n; \\ & 0; \end{matrix} \quad \frac{1-x}{2} \right].$$

Es decir que (3-9) estaría indeterminada.

De lo anterior si $\alpha = \beta = 0$, se obtienen los polinomios de Legendre mencionados anteriormente

$$P_n^{(0,0)}(x) = \frac{(1)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1+n; \\ & 1; \end{matrix} \quad \frac{1-x}{2} \right].$$

Ahora, de (3-13) se obtiene

$$\begin{aligned}
\blacksquare \\
P_n^{(\alpha, \beta)}(1) &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1+\alpha+\beta+n; \\ & 1+\alpha; \end{matrix} \quad 0 \right] \\
&= \frac{(1+\alpha)_n}{n!}.
\end{aligned}$$

Los polinomios de Jacobi tienen la virtud de poder expresarlos de distintas maneras como:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1 + \alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1 + \alpha + \beta + n; \\ & 1 + \alpha; \end{matrix} \quad \frac{1-x}{2} \right] \quad (3-14)$$

$$= \frac{(1 + \alpha)_n}{n!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^n {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & -\beta - n; \\ & 1 + \alpha; \end{matrix} \quad \frac{x-1}{x+1} \right]. \quad (3-15)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1 + \alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1 + \alpha + \beta + n; \\ & 1 + \alpha; \end{matrix} \quad \frac{1-x}{2} \right] \quad (3-16)$$

$$= \frac{(-1)^n (1 + \beta)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1 + \beta + \beta + n; \\ & 1 + \beta; \end{matrix} \quad \frac{x+1}{2} \right]. \quad (3-17)$$

De (3-17) se deduce que β no puede tener el valor de -1. Dada su notación hipergeométrica se reescribe cada uno de los items anteriores como suma parcial de la siguiente manera:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(1 + \alpha)_n (1 + \alpha + \beta)_{n+k}}{k! (n-k)! (1 + \alpha)_k (1 + \alpha + \beta)_n} \left(\frac{x-1}{2} \right)^k. \quad (3-18)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n}{k! (n-k)! (1 + \alpha)_k (1 + \beta)_{n-k}} \left(\frac{x-1}{2} \right)^k \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-k}. \quad (3-19)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (1 + \beta)_n (1 + \alpha + \beta)_{n+k}}{k! (n-k)! (1 + \beta)_k (1 + \alpha + \beta)_n} \left(\frac{x+1}{2} \right)^k. \quad (3-20)$$

Ejemplo 2. Se asume que $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ de manera sencilla y cuidadosa se pueden calcular los primeros seis polinomios de Jacobi, adicionalmente se adjuntan sus respectivos gráficos.

Grado	Polinomio
0	1
1	$\frac{5x}{2} - \frac{1}{2}$
2	$\frac{21x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{3}{4}$
3	$\frac{21x^3}{2} - \frac{7x^2}{2} - \frac{7x}{2} + \frac{1}{2}$
4	$\frac{165x^4}{8} - \frac{15x^3}{2} - \frac{45x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{5}{8}$
5	$\frac{1287x^5}{32} - \frac{495x^4}{32} - \frac{495x^3}{16} + \frac{135x^2}{16} + \frac{135x}{32} - \frac{15}{32}$

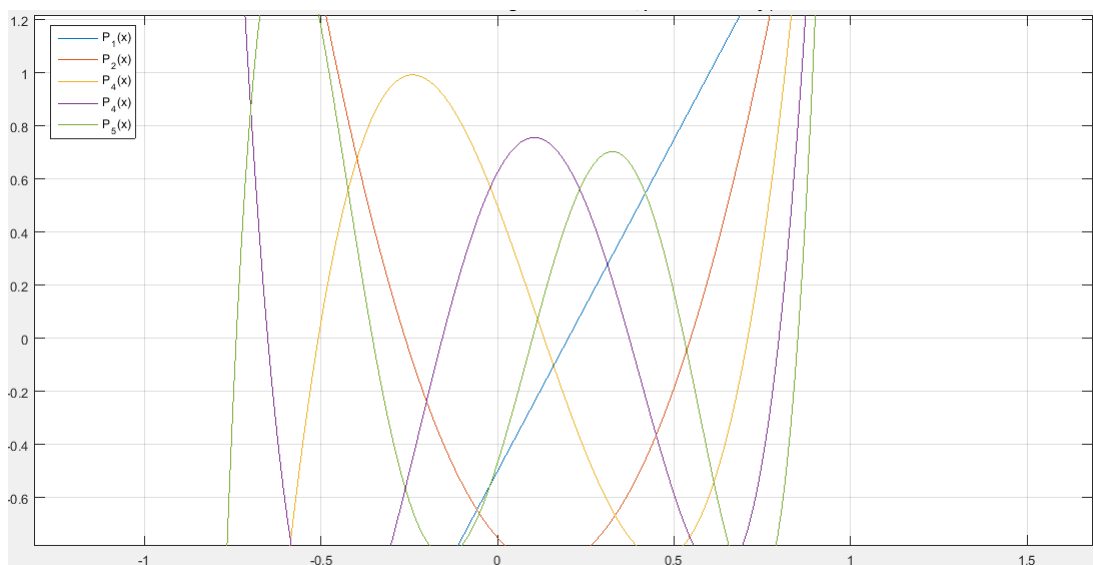


Figura 3-1: Polinomios de Jacobi

3.2. Función generadora de Bateman

Se considera la siguiente serie de polinomios de Jacobi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n}{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n}{k! (n - k)! (1 + \alpha)_k (1 + \beta)_{n-k}} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{x - 1}{2} \right)^k \left(\frac{x + 1}{2} \right)^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n}{k! (n - k)! (1 + \alpha)_k (1 + \beta)_{n-k}} \left(\frac{x - 1}{2} \right)^k \left(\frac{x + 1}{2} \right)^{n-k} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! (1 + \alpha)_n} \left(\frac{x - 1}{2} \right)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! (1 + \beta)_n} \left(\frac{x + 1}{2} \right)^n \right] \\
&= {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \alpha; \end{matrix} \frac{t(x-1)}{2} \right] {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \beta; \end{matrix} \frac{t(x+1)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Gracias a la última ecuación se puede ver que los polinomios de Jacobi cumplen

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x), \quad (3-21)$$

llamada quasi-simetría para su comprobación se hacen los reemplazos de x por $-x$ y t por $-t$ y así se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) (-t)^n}{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n} &= {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \alpha; \end{matrix} \frac{-t(-x-1)}{2} \right] {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \beta; \end{matrix} \frac{-t(-x+1)}{2} \right] \\
&= {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \alpha; \end{matrix} \frac{t(x+1)}{2} \right] {}_0F_1 \left[\begin{matrix} -; \\ 1 + \beta; \end{matrix} \frac{t(x-1)}{2} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\beta, \alpha)}(x) (t)^n}{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n}.
\end{aligned}$$

3.3. F3rmula de Rodrigues

Se consideran los polinomios de Jacobi de la siguiente manera para dar un paso m3s adelante a la presentaci3n de el funcional de momentos correspondiente.

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum \frac{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n (x - 1)^k (x + 1)^{n-k}}{2^n k! (n - k)! (1 + \alpha)_k (1 + \beta)_{n-k}}. \quad (3-22)$$

Se hace uso del operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$ entonces para $m, s \in \mathbb{Z}^+$

$$D^s [x^{m+\alpha}] = (m + \alpha)(m + \alpha - 1) \dots (m + \alpha - s + 1) x^{m+\alpha-s} \quad (3-23)$$

$$= \frac{(1 + \alpha)_m}{(1 + \alpha)_{m-s}} x^{m+\alpha-s}. \quad (3-24)$$

De manera similar para $n, k \in \mathbb{Z}^+$

$$D^k [(x + 1)^{n+\beta}] = \frac{(1 + \beta)_n}{(1 + \beta)_{n-k}} (x + 1)^{n+\beta-k}. \quad (3-25)$$

Ahora, si $n \geq k$ se obtiene la siguiente relaci3n

$$D^{n-k} [(x - 1)^{n+\alpha}] = \frac{(1 + \alpha)_n}{(1 + \alpha)_k} (x - 1)^{\alpha+k}.$$

De manera que se puede escribir cada $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ en t3rminos de su derivada como

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{(x + 1)^\beta (x - 1)^\alpha n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{2^n k! (n - k)!} \left(D^k [(1 + x)^{n+\beta}] \right) \left(D^{n-k} [(x - 1)^{n+\alpha}] \right). \quad (3-26)$$

Gracias a la f3rmula de Rodrigues (3-26) y aplicando la regla de Leibniz para derivadas se obtienen otras dos maneras de escribir a los polinomios de Jacobi, las cuales son:

■

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(x - 1)^{-\alpha} (x + 1)^{-\beta}}{2^n n!} D^n [(x - 1)^{n+\alpha} (x + 1)^{n+\beta}]. \quad (3-27)$$

■

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \frac{(1 - x)^{-\alpha} (x + 1)^{-\beta}}{2^n n!} D^n [(1 - x)^{n+\alpha} (x + 1)^{n+\beta}]. \quad (3-28)$$

3.4. Ortogonalidad

La presente sección muestra cual es el funcional de momentos \mathcal{L} que ortogonaliza a los polinomios de Jacobi respecto a sus parámetros α y β , para ello, asuma que los polinomios de Jacobi satisfacen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (2 + \alpha + \beta)x]y' + n(1 + n + \alpha + \beta)y = 0, \quad (3-29)$$

es decir que el n -ésimo polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisface

$$(1 - x^2)D^2(P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) + [\beta - \alpha - (2 + \alpha + \beta)x]D(P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) + n(1 + n + \alpha + \beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0,$$

el término $\beta - \alpha - (2 + \alpha + \beta)x$ se puede simplificar como $(1 + \beta)(1 - x) - (1 + \alpha)(1 + x)$, de tal manera se reescribe (3-29) y multiplicando por $(1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha$ se tiene

$$(1 + x)^{\beta+1}(1 - x)^{\alpha+1}D^2(P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) + (1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha[(1 + \beta)(1 - x) - (1 + \alpha)(1 + x)]D(P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) + (1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha n(1 + n + \alpha + \beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.$$

Dado que el término anterior resulta ser un poco extenso para trabajar se simplifica con la regla del producto para derivadas, obteniendo

$$D[(1 + x)^{\beta+1}(1 - x)^{\alpha+1}D(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))] + (1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha n(1 + n + \alpha + \beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.$$

multiplicando la ecuación anterior por el m -ésimo polinomio de Jacobi se tiene

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(x)D[(1 + x)^{\beta+1}(1 - x)^{\alpha+1}D(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))] + (1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha n(1 + n + \alpha + \beta)P_m^{(\alpha, \beta)}(x)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0,$$

ahora intercambiando m y n de la ecuación anterior se obtiene un resultado similar

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)D[(1 + x)^{\beta+1}(1 - x)^{\alpha+1}D(P_m^{(\alpha, \beta)}(x))] + (1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha m(1 + m + \alpha + \beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)P_m^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.$$

Restando las anteriores ecuaciones se obtiene

$$(n - m)(1 + m + \alpha + \beta)(1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(x)P_m^{(\alpha, \beta)}(x) = D[(1 + x)^\beta(1 - x)^\alpha \{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)D(P_m^{(\alpha, \beta)}(x)) - P_m^{(\alpha, \beta)}(x)D(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))\}].$$

La ecuación anterior es vital para el trabajo, pues es la que da a conocer la función peso para nuestros polinomios de Jacobi ya que relaciona el producto de dos polinomios de Jacobi, integrando la ecuación sobre el intervalo $[-1, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
& (n-m)(1+m+\alpha+\beta) \int_{-1}^1 (1+x)^\beta (1-x)^\alpha P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \\
& \int_{-1}^1 D[(1+x)^\beta (1-x)^\alpha \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x) D(P_m^{(\alpha,\beta)}(x)) - P_m^{(\alpha,\beta)}(x) D(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))\}] dx = \\
& (1+x)^\beta (1-x)^\alpha \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x) D(P_m^{(\alpha,\beta)}(x)) - P_m^{(\alpha,\beta)}(x) D(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))\}.
\end{aligned}$$

Al evaluar el último término en -1 y 1 se observa que el resultado es 0 para $m \neq n$. Ahora queda el caso cuando $m = n$. Para ello, se define g_n como

$$g_n = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}]^2 dx, \quad (3-30)$$

teniendo en cuenta la fórmula de Rodrigues (3-28) con la cual se representa los Polinomios de Jacobi, se sigue lo siguiente

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 D^n [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx. \quad (3-31)$$

Se observa de manera cuidadosa que la hacer la k -ésima integración por partes, para $k = 1, \dots, n$ se que el nuevo integrando es

$$D^{n-k} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] D^{k-1} [P_m^{(\alpha,\beta)}(x)].$$

Con lo anterior se obtiene

$$g_n = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx \quad (3-32)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} D^n [P_m^{(\alpha,\beta)}(x)] dx \quad (3-33)$$

$$= 0, \quad (3-34)$$

esto ocurre siempre que $m < n$. Teniendo en cuenta la definición los Polinomios de Jacobi (3-13) se observa

$$\begin{aligned}
D^n [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)] &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \frac{1}{(-2)^n} \frac{(-n)_n (1+\alpha+\beta+n)_n}{(1+\alpha)_n n!} \\
&= \frac{1}{(2)^n} \frac{(1+\alpha+\beta+n)_n}{n!} \\
&= \frac{1}{(2)^n} \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(1+\alpha+\beta)_n n!}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la última conclusión de g_n (3-31) y si $m = n$, reemplazando el valor de la **n-ésima** derivada se obtiene

$$g_n = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx \quad (3-35)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} D^n [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)] dx \quad (3-36)$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(1+\alpha+\beta)_n n!} \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx \quad (3-37)$$

$$= \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(1+\alpha+\beta)_n n!} (2^{1+\alpha+\beta+2n} B(1+\alpha+n, 1+\beta+n)) \quad (3-38)$$

$$\neq 0. \quad (3-39)$$

Con lo anterior se observa que el respectivo funcional de momentos para los polinomios de Jacobi es

$$\mathcal{L} [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)] = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)} dx. \quad (3-40)$$

Ejemplo 3. Considere como en el **Ejemplo 2.** los parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, entonces el respectivo funcional de momentos es

$$\mathcal{L} [P_n(x)] = \int_{-1}^1 (1-x)^1 (1+x)^2 [P_n(x)] dx,$$

con el cuál se completa la siguiente tabla que muestra los primeros seis momentos.

$P_n(x)$	$\mathcal{L} [P_n(x)]$
1	$\frac{4}{3}$
x	$\frac{4}{15}$
x^2	$\frac{4}{15}$
x^3	$\frac{4}{35}$
x^4	$\frac{4}{35}$
x^5	$\frac{4}{63}$

3.5. F3rmula de recurrencia

Lo que se ha hecho en la secci3n de ortogonalidad, comprueba que la sucesi3n $(P_n(x)^{(\alpha,\beta)})_{n=0}^{\infty}$ es un SPO para el funcional \mathcal{L} , ahora, por el **Teorema 3**, se tiene que $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y por **Teorema 7** podemos concluir que los polinomios de Jacobi satisfacen una relaci3n de recurrencia a tres t3rminos la cu3l es

$$\begin{aligned}
 2n(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 2)(P_n(x)^{(\alpha,\beta)}) &= (\alpha + \beta + 2n - 1) \\
 &[\alpha^2 - \beta^2 + x(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 2)] \\
 &P_{n-1}(x)^{(\alpha,\beta)} \\
 &- (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\alpha + \beta + 2n)P_{n-2}(x)^{(\alpha,\beta)}.
 \end{aligned} \tag{3-41}$$

Para verificar la relaci3n de recurrencia se toma la sustituci3n $x = 1 - 2z$, con lo cual se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 2n(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 2)(P_n(1 - 2z)^{(\alpha,\beta)}) &= (\alpha + \beta + 2n - 1) \\
 &[\alpha^2 - \beta^2 + (1 - 2z)(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 2)] \\
 &P_{n-1}(1 - 2z)^{(\alpha,\beta)} \\
 &- (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\alpha + \beta + 2n) \\
 &P_{n-2}(1 - 2z)^{(\alpha,\beta)}.
 \end{aligned} \tag{3-42}$$

La primera parte de la igualdad queda de la siguiente manera

$$2n(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 2) \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)(\alpha+\beta+n+1)_k}{(\alpha+1)_k n!} (z^k).$$

De manera an3loga se tiene que la parte a la derecha de la igualdad queda de la siguiente manera el primer sumando es

$$(\alpha + \beta + 2n - 1)[\alpha^2 + \beta^2 + (1 - 2z)(\alpha - \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 2)] \frac{(1+\alpha)_{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n+1)(\alpha+\beta+n)_k}{(\alpha+1)_k (n-1)!} (z^k).$$

Finalmente, el otro t3rmino de la parte derecha de la relaci3n de recurrencia se puede reescribir como

$$-(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\alpha + \beta + 2n) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-n+2)(\alpha+\beta+n-1)_k}{(\alpha+1)_k (n-2)!} (z^k).$$

Con esto se finaliza la presente secci3n la cu3l se encuentra fundamentada en el estudio detallado de [2],[4], [5] y [6]

4 Polinomios Ultraesféricos

Los polinomios ultraesféricos se presentan como una particularidad de los polinomios de Jacobi, esto ocurre siempre que $\alpha = \beta > -1$ como se ha mencionado anteriormente. Para la presente sección se hace uso de los resultados del capítulo anterior.

Se debe tener presente que así como los polinomios de Jacobi generalizan una gran familia de polinomios, los polinomios ultraesféricos también generalizan ciertas familias las cuales se muestran más adelante.

4.1. Definición

Los polinomios ultraesféricos notados como $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ para $\alpha > -1$ se definen como

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1+2\alpha+n; \\ & 1+\alpha; \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right]. \quad (4-1)$$

Los polinomios ultraesféricos también cumplen

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\alpha)}(1) &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, & 1+2\alpha+n; \\ & 1+\alpha; \end{matrix} \middle| 0 \right] \\ &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!}. \end{aligned}$$

4.2. Simetría

Como se vio en la sección 2.2. la función generadora de Bateman proporciona una cuasi-simetría de los polinomios de Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

teniendo presente que en los polinomios ultraesféricos los parámetros son iguales obtenemos la siguiente propiedad de simetría

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\alpha)}(x). \quad (4-2)$$

Con lo cual se deduce que el funcional \mathcal{L} asociado a los polinomios ultraesféricos es simétrico y en la fórmula de recurrencia (2-12) $c_n = 0$ para $n \geq 0$.

4.3. Funcional de momentos y ortogonalidad

Ahora, de manera general para un parámetro $\alpha > -1$ se define el funcional de momentos correspondiente para los polinomios ultraesféricos, esto, deducido del funcional de momentos de los polinomios de Jacobi (3-40) cuando $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)P_m^{(\alpha,\alpha)}(x)] &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)P_m^{(\alpha,\alpha)}(x)dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{(1+2\alpha)2n}{(1+2\alpha)_n n!} (2^{1+2\alpha} B(1+\alpha+n, 1+\alpha+n)), & \text{si } m = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{(1+2\alpha+n)_n}{n!} (2^{1+2\alpha+2n} B(1+\alpha+n, 1+\alpha+n)), & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

4.4. Fórmula de recurrencia

Así como se ha trabajado en el presente capítulo, teniendo en cuenta que $\alpha = \beta$ en (3-41) la fórmula de recurrencia para los polinomios ultraesféricos es

$$\begin{aligned} 2n(2\alpha+n)(2\alpha+2n-2)(P_n(x)^{(\alpha,\alpha)}) &= x(2\alpha+2n)(2\alpha+2n-1)(2\alpha+2n-2)P_{n-1}(x)^{(\alpha,\alpha)} \\ &\quad - (\alpha+n-1)^2(2\alpha+2n)P_{n-2}(x)^{(\alpha,\alpha)}. \end{aligned} \quad (4-3)$$

De lo anterior, según el parámetro α , tomando $n = 1$, teniendo en cuenta que $P_{-1}^{\alpha,\alpha}(x) = 0$ y $P_0^{\alpha,\alpha}(x) = 1$ que se tiene

$$2(2\alpha+1)(2\alpha)(P_1(x)^{(\alpha,\alpha)}) = x(2\alpha+2)(2\alpha+1)(2\alpha)P_0(x)^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

con lo cual el primer polinomio ultraesférico para cada caso será

$$P_1(x)^{(\alpha,\alpha)} = x(\alpha+1). \quad (4-4)$$

4.5. Algunos casos particulares

Ahora se dan a conocer algunos polinomios ultraesféricos, una de las sucesiones de polinomios son los Polinomios de Legendre, de notados como $E_n(x)$, presentados anterior mente, con el caso $\alpha = 0$, con lo cuál su funcional de \mathcal{L} es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [E_n(x)E_m(x)] &= \int_{-1}^1 E_n(x)E_m(x)dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \frac{(1+n)_n}{n!} 2^{2n} B(1+n, 1+n), & \text{si } m = n; \end{cases} \end{aligned}$$

Su fórmula de recurrencia a tres términos está determinada por

$$E_n(x) = x \frac{(2n-1)}{n} E_{n-1}(x) - \frac{(n-1)}{n} E_{n-2}(x).$$

Los polinomios ultraesféricos con parámetro $\alpha = -1/2$ son una familia de polinomios ortogonales respecto al siguiente funcional de momentos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) P_m^{(-1/2, -1/2)}(x)] &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) P_m^{(-1/2, -1/2)}(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \frac{(n)_n}{n!} 2B(1/2 + n, 1/2 + n), & \text{si } m = n; \end{cases} \end{aligned}$$

Los primeros polinomios ultraesféricos son

Grado	Polinomio
0	1
1	$\frac{x}{2}$
2	$\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{8}$
3	$\frac{5x^3}{4} - \frac{15x}{16}$
4	$\frac{35x^4}{16} - \frac{35x^2}{16} + \frac{35}{128}$
5	$\frac{63x^5}{16} - \frac{315x^3}{64} + \frac{315}{256}$

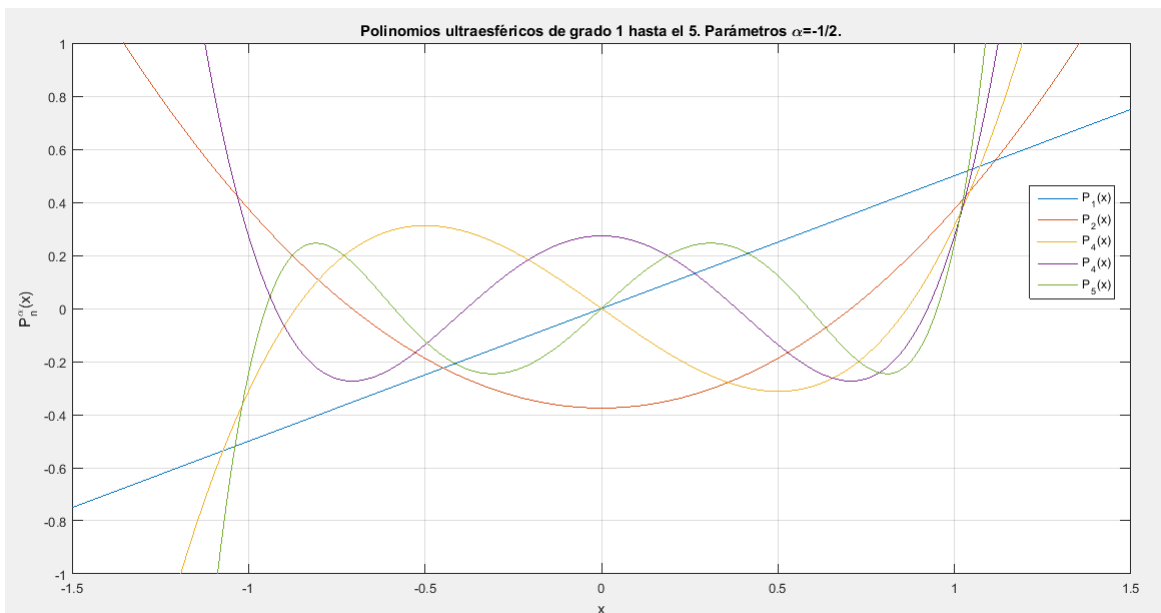


Figura 4-1: Polinomios ultraesféricos con parámetro $\alpha = -1/2$

Ahora, se presentan los polinomios de Chebyshev de primer orden denotados como $T_n(x)$, teniendo en cuenta que son un caso particular de los polinomios ultrasféricos para $\alpha = -1/2$. Esto se debe al **Corolario 1**, en este caso existen constantes a_n tal que

$$\frac{4^n}{\binom{2n}{n}} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) = T_n(x).$$

De tal manera que resulta ser un SPO con respecto al anterior funcional, teniendo en cuenta que si $m = n$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[T_n(x)T_m(x)] &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ [4^n / \binom{2n}{n}]^2 \frac{(n)_n}{n!} 2B(1/2 + n, 1/2 + n), & \text{si } m = n; \end{cases} \end{aligned}$$

Dado su funcional de momentos, los polinomios de Chebyshev de primer orden satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (4-5)$$

Con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

Los primeros seis polinomios de Chebyshev de primer orden son

Grado	Polinomio
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

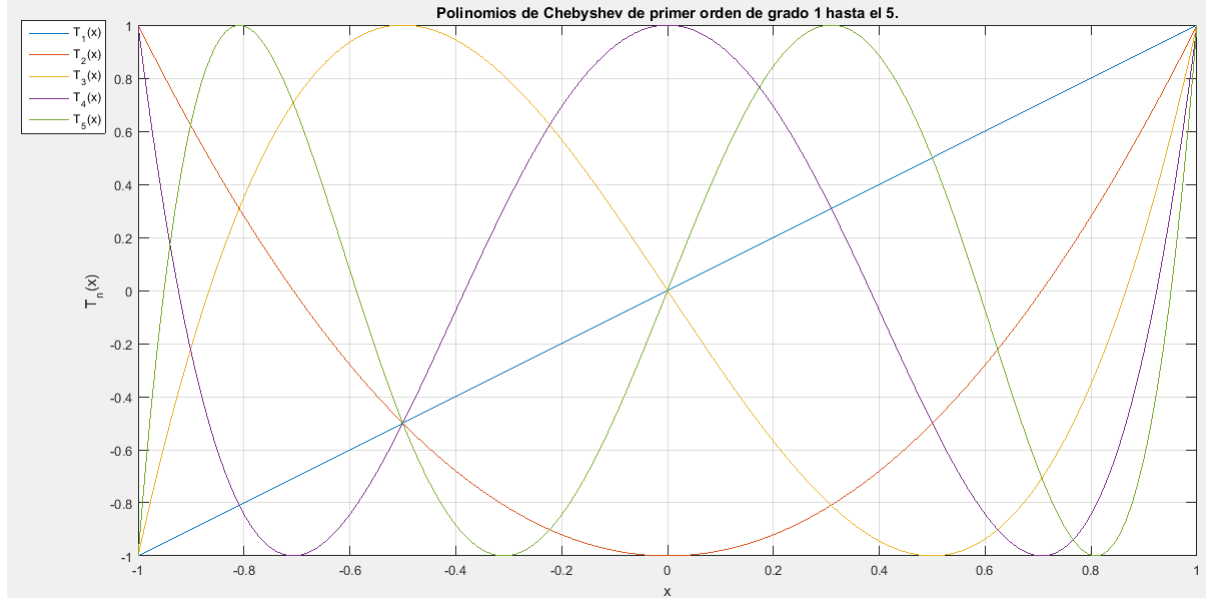


Figura 4-2: Polinomios de Chebyshev de primer orden.

Para culminar con el presente trabajo se muestran los polinomios de Chebyshev de segundo orden que se definen como un polinomio ultraesférico con parámetro $\alpha = 1/2$.

$$U_n(x) = \frac{(n+1)}{P_n^{(1/2,1/2)}(1)} P_n^{(1/2,1/2)}(x).$$

Teniendo en cuenta la definición de los $U_n(x)$ se muestra el funcional de momentos \mathcal{L} el cual es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_n(x)U_m(x)] &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x)U_m(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \left[\frac{(n+1)}{P_n^{(1/2)}} \right]^2 \frac{(2+n)_n}{n!} 2^{2+2n} B(3/2+n, 3/2+n), & \text{si } m = n; \end{cases} \end{aligned}$$

Dado su funcional de momentos, los polinomios de Chebyshev de segundo orden satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (4-6)$$

Con $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$.

Los primeros seis polinomios de Chebyshev de segundo orden son

Grado	Polinomio
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$

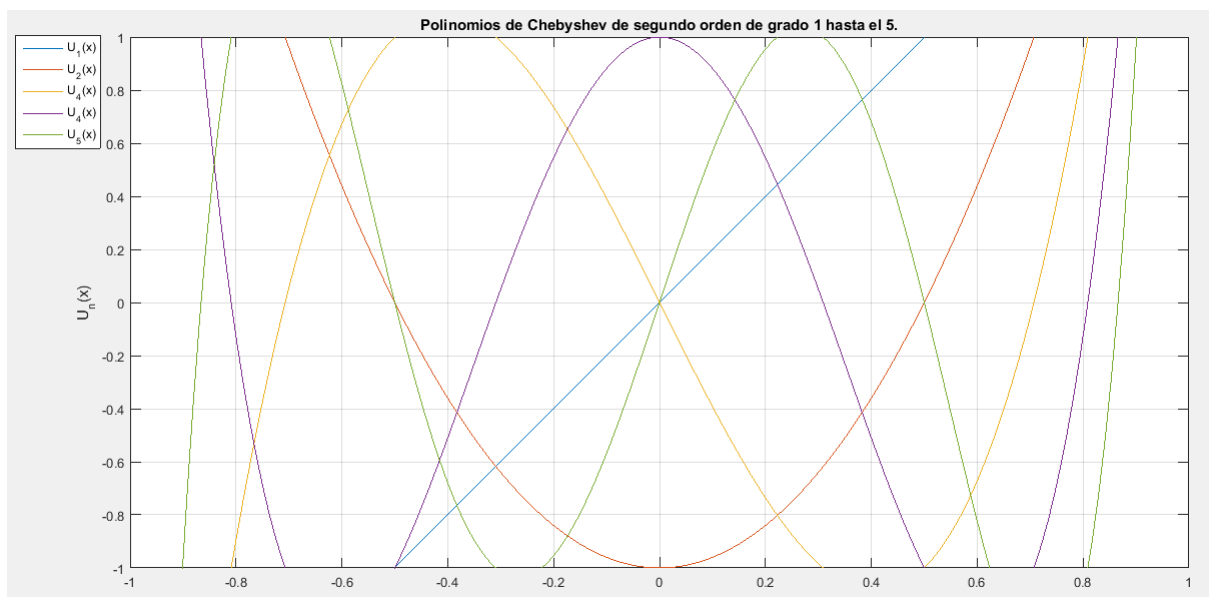


Figura 4-3: Polinomios de Chebyshev de segundo orden.

5 Conclusiones

- Al observar que el funcional de momentos respectivo a los polinomios ultraesféricos y sus particularidad se deduce que es simétrico y a su vez se satisfacen las condiciones del Teorema 9, con lo que satisfacen una fórmula de recurrencia y en (2-12) $c_n = 0$.
- El estudio previo de las funciones especiales Gamma, Beta e Hipergeométrica permiten hacer más breve y ágil el manejo de los polinomios de Jacobi además de que su funcional de momentos se puede expresar en términos simplificados de las funciones anteriormente mencionadas.
- Se observa que tanto los funcionales de momentos y las formules de recurrencia de los polinomios de Legendre, de Chebyshev de primer y segundo orden satisfacen todas las propiedades de los polinomios ultraesféricos además de cumplir con el Corolario 1

Bibliográfia

- [1] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley & Sons. Inc, 1978.
- [2] E. Rainville, *Special Functions*, first edition, The Macmillan Company, 1960.
- [3] F. Marcellan, W. Van Assche, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Springer, 2006.
- [4] , G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, fourth edition, American Mathematical Society, Rhode Island, 1975.
- [5] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, tenth edition, National Bureau of Standards, 1972.
- [6] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, 1978.