UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ESTIMACIÓN DE LA NORMA DE OPERADORES MATRICIALES ACTUANDO ENTRE RETÍCULOS DE BANACH DE SUCESIONES

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Angie Duque Orozco
Dirigido por: Prof. Julio César Ramos Fernández, Ph.D.

Bogotá DC
Abril de 2022

Resumen

En este trabajo se estimará la norma de operadores definidos por matrices infinitas entre retículos de Banach, más concretamente sobre los espacios ℓ_1 y ℓ_2, donde, para el caso del espacio ℓ_1 es posible determinar exactamente la norma del operador, mientras que al abordar el espacio ℓ_2 se realizará un estudio de un resultado debido a Mastyło y Mleczko [13], así como el test de Schur con el fin de acotar inferiormente y superiormente la norma de estos operadores definidos en ℓ_2, brindando adicionalmente un criterio para determinar cuando un operador actuando sobre ℓ_2 es acotado.

Palabras clave: Retículo de sucesiones de Banach, Matrices infinitas, Operadores continuos
Clasificación AMS: 15A70, 46A45, 46B45, 46E30, 47A30.
Agradecimientos:

Quisiera agradecer al profesor Julio César Ramos Fernández por su constancia, apoyo y dedicación a lo largo del trabajo de tesis, además, de guardar una gran gratitud por brindarme la oportunidad para ilustrar una parte del área de su investigación, también quisiera agradecer al profesor Samuel Barreto y a mis compañeros por sus aportaciones y/o observaciones, agradezco, igualmente a los profesores de la carrera de Matemáticas, en donde manifiesto mi admiración por su labor, dedicación y perseverancia, de igual forma quisiera agradecer a mi familia y amigos, ya que en mis momentos de duda, fueron mi impulso a seguir hasta este punto. Por ultimo pero no menos importante, quisiera agradecer a aquellas personas que me acompañaron recientemente en el transcurso de formación, al brindarme su más sincero apoyo moral.

Índice

1. Introducción

En este trabajo se estimará la norma de operadores definidos por matrices infinitas entre retículos de Banach, en particular, entre espacios ℓ_1 y espacios ℓ_2. Históricamente, a comienzos del siglo XX, se desarrolla la teoría de operadores y el análisis funcional, en los cuales, matemáticos importantes como Fréchet, Toeplitz, Banach, Hilbert, entre otros, participaron. Este último, realizó el artículo [9] en 1904, en donde vislumbra cierta relación entre las matrices infinitas y la solución de ecuaciones integrales, años después, en 1906, el matemático Fréchet en su tesis [5] da a conocer la teoría moderna de operadores.

Es destacable el trabajo del matemático Frigyes Riesz, el cual en 1928 en el articulo "Sur la décomposition des opérations fonctionelles linéaires"[17] introduce ciertos espacios de Banach, los cuales hoy en día se llaman espacios de Riesz y que son ejemplos importantes de los bien conocidos retículos de Banach. Más precisamente, un espacio vectorial X con un orden parcial $\leq$ se dice un espacio de Riesz si satisface las siguientes propiedades:

1. Si $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ implica que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ para todo $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$.
2. Si $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ implica que $\alpha\boldsymbol{x} \leq \alpha\boldsymbol{y}$ para todo $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ y $\alpha \geq 0$,

donde además debe ser un retículo de Banach, en el sentido que en X se define una norma $\|\cdot\|_X$ que lo hace un espacio completo y que satisface

$$|\boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{y}| \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\|_X \leq \|\boldsymbol{y}\|_X,$$

siendo $|\boldsymbol{x}| = x \vee (-x) = \sup\{x,-x\}$. En particular, cuando los elementos del retículo de Banach X son funciones definidas sobre el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}$, se conocerá como retículo de Banach.

Un caso de interés de retículo de Banach será cuando tomemos los espacios ℓ_p, los cuales fueron introducidos por el mismo Riesz en 1910 [16] y que también se conocen como espacios discretos de Lebesgue. Estos están constituidos por las sucesiones reales $\boldsymbol{x} = (x_n)$ tales que

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde el parámetro $p \in [1,+\infty)$ es fijo.

Por otra parte, a lo largo del avance de la teoría de operadores y análisis funcional, al presentarse el estudio de varios espacios clásicos de Banach con sus respectivos operadores lineales, surge la siguiente interrogante

¿Cómo poder calcular la norma de estos operadores?

Este problema, en particular incluye al espacio ℓ_2, de hecho, Hardy y Littlewood [7] en 1934 con la idea de resolver este problema en espacios ℓ_p, publicaron un artículo donde proporcionan una cota inferior para la norma de formas bilineales en espacios ℓ_p, donde el operador en cuestión, tendría una representación matricial y con esta se realizaría dicha estimación. Así mismo, se fueron recopilando ciertas desigualdades de gran importancia en las ramas del análisis matemático y topología en libros publicados por Hardy, Littlewood y Polya [8] en 1934 y Grahame [6] en 1996, en donde se da la clave para abordar la interrogante planteada anteriormente mediante la estimación de la norma de operadores en espacios ℓ_p. También, algunos trabajos recientes abordan el estudio de dichas estimaciones, como bien lo hacen : Pečarić, Perić, Roki [15] en 2001, Osikiwicz y Tonge [14] en 2001 (mediante la perspectiva de la teoría de interpolación) y Jameson y R. Lashkaripour [10] en 2002.

No obstante, al trabajar sobre operadores definidos en retículos de Banach, estos admiten representaciones por matrices infinitas y por tanto, surge la inquietud:

¿Cómo estimar la norma de estos operadores en retículos de Banach ?

La solución de este problema, podría encontrar aplicaciones en el área de análisis complejo. Más concretamente, tal como se puede ver en el artículo de Mastyło y Mleczko [13] en 2013, esta teoría sirve para estimar la norma de operadores actuando sobre los espacios de Hardy. El trabajo se sustentará en un resultado del articulo de Mastyło y Mleczko, en donde, a la vez que se abordara alguna de las interrogantes planteadas, se estudiará ciertos resultados de estos operadores definidos por matrices infinitas en espacios ℓ_1 y ℓ_2, a modo de ejemplificar la interrogante propuesta sobre como estimar la norma de estos operadores en retículos de Banach.

2. Retículos de Banach y operadores lineales

En esta sección se recompila una serie de definiciones y teoremas esenciales, con el fin de brindar un panorama previo para comprender el desarrollo posterior en las siguientes sesiones y así mismo ofrecer una estructura organizada en este trabajo. Empezamos recordando un concepto previo de retículo de Banach, tomado del texto Lindenstrauss y Tzafriti [12, Pág. 1].

Definición 1 (Retículo de Banach). Un espacio de Banach X con orden parcial $\leq$ sobre los reales se dice un retículo de Banach si se satisface:

1. $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$, para todo $x.y, z \in X$.
2. $ax \geq 0$, para todo $x \geq 0$ en X y todo real no negativo a.

3. Para todo $x, y \in X$ existe una mínima cota superior $x \vee y$ y máxima cota inferior $x \wedge y$.
4. $\|x\|_X \leq \|y\|_X$ cuando $|x| \leq |y|$, donde el valor absoluto $|x|$ de $x \in X$ es definido por $|x| = x \vee (-x)$.

Ejemplo 1. El espacio ℓ_p con $p \in [1, \infty)$ es un retículo de Banach. Para $x \in \ell_p$, la norma viene dada por

$$\|x\|_{\ell_p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \\ \displaystyle\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, & si \quad\quad p = \infty. \end{cases}$$

Aquí, $x \leq y$ en ℓ_p si y sólo si $x_k \leq y_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Con este orden parcial, se verifican las condiciones 1, 2 y 3. También, considerando $|x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots)$ y $|x|^p = (|x_1|^p, |x_2|^p, \ldots)$, al suponer $|x| \leq |y|$, entonces $|x_k| \leq |y_k|$ para $k \in \mathbb{N}$, y así $\|x\|_{\ell_p} \leq \|y\|_{\ell_p}$ verificando la condición 4. □

En vista de que el trabajo trata sobre la norma de ciertos operadores matriciales, es conveniente recordar (véase Kreyzig [11]) que una función $T : X \to Y$ con X, Y espacio de Banach, se dice que es un operador lineal sí se satisface

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$ y α escalar. Adicionalmente, la norma de un operador $T : X \to Y$ es la expresión

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y .$$

En el caso que $\|T\| < +\infty$, entonces se dice que el operador es acotado o continuo, y es de interés hallar o estimar la cantidad $\|T\|$ para X, Y espacios de Banach fijos. El conjunto de los operadores acotados de X en Y se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ y en el caso que $X = Y$, solamente escribimos $\mathcal{L}(X)$. También se requiere recordar lo referente a espacios duales:

Definición 2 (Espacio dual X'). Sea X un espacio normado. El espacio dual de X es notado por X' y es el conjunto de todos funcionales lineales acotados sobre X. Éste constituye un espacio de Banach con la norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} |f(x)|.$$

Ejemplo 2. Es conocido (véase Kreyzig [11, Pág. 123]) que para $1 < p < +\infty$, el espacio dual de ℓ_p, $\left(\ell_p\right)'$ se identifica con ℓ_q, donde q es el conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mientras que $(\ell_1)'$ se identifica con ℓ_∞.

Continuando, con la serie de definiciones y relacionando esta misma con el concepto de retículo de Banach, se define enseguida el concepto de espacio p-convexo, tomado del texto Lindestrauss y Tzafriti [12, Pág. 45] .

Definición 3 (p-Convexo). Sea X un retículo de Banach, V un espacio de Banach arbitrario y sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador lineal $T : V \to X$ es llamado p-convexo, si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tv_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_X \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda elección de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ en V. El valor más pequeño posible de M es notado por $M^{(p)}(T)$. Decimos que el espacio X es p-convexo si el operador identidad I sobre X es p-convexo. En este caso, escribimos $M^{(p)}(X)$ en vez de $M^{(p)}(I)$.

Ejemplo 3. Considérese el espacio ℓ_p con $p \in [1, \infty)$ y el operador identidad I sobre ℓ_p. Si se toma una cantidad finita de vectores en ℓ_p a saber $\{x^i\}_{i=1}^n$ entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{\ell_p} &= \left\| \left(|x^1|^p + |x^2|^p + \ldots + |x^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{\ell_p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(|x_j{}^1|^p + |x_j{}^2|^p + \ldots + |x_j{}^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|x_j{}^1|^p + |x_j{}^2|^p + \ldots + |x_j{}^n|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\|x^1\|_{\ell_p}^p + \|x^2\|_{\ell_p}^p + \ldots + \|x^n\|_{\ell_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x^i\|_{\ell_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Se concluye que ℓ_p es p-convexo y además que la mínima constante para dicha desigualdad es $M^{(p)}(\ell_p) = 1$. □

De la misma forma, se adiciona un nuevo concepto, importante para entender resultados posteriores, el cual es el de funciones de Rademacher, tomado del texto de Albiac y Kalton [1, Pág. 145].

Definición 4 (Funciones de Rademacher). Las funciones de Rademacher $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ están definidas sobre $[0,1]$ por

$$r_k(t) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^k \pi t\right)\right).$$

Los dos primeros términos de esta sucesión son

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \\ -1, & si \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \\ -1, & si \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases}$$

Y más generalmente para $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$r_{k+1}(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \in \displaystyle\bigcup_{s=1}^{2^k} \left[\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right), \\ \\ -1, & si \quad t \in \displaystyle\bigcup_{s=1}^{2^k} \left(\frac{2s-1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Gráficamente

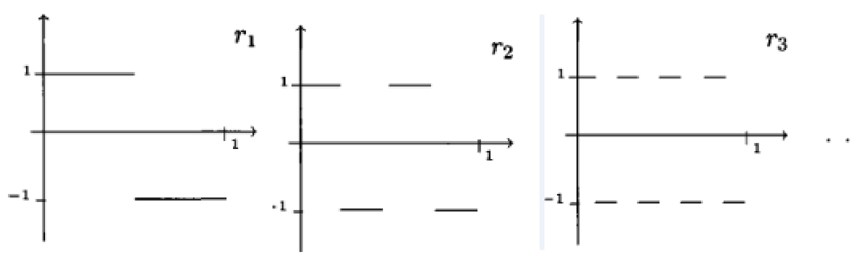

Figura 1: Sucesiones de Rademacher

El primer teorema que se presentará a continuación, es un resultado de suma importancia, el cual se llama desigualdad de Khintchine, tomado del texto Albiac y Kalton [1, Pág. 146]

Teorema 1 (Desigualdad de Khintchine). *Sea $p \in [1,\infty)$ fijo. Entonces existen constantes positivas A_p y B_p tales que:*

$$A_p\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right\|_{\ell_p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad si \quad 1 \leq p < 2,$$

y

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right\|_{\ell_p} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad si \quad p > 2$$

para toda sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ y donde r_i es la i-ésima sucesión de Rademacher.

También podemos encontrar una variante interesante al resultado presentado previamente, tomada del texto de Diestel, Jarchow y Tonge [3, Pág. 329]

Corolario 1 (Variante de la desigualdad de Khintchine). *Para cualquier cantidad finita de vectores $x_1,..,x_n$ de un retículo de Banach p-convexo X y $0 < p < \infty$, se cumple que*

$$A_1\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_X \leq \left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)x_k\right\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Un resultado, sobre los operadores, que estudiaremos aquí es sobre la norma de estos y su relación con su operador adjunto, este resultado fue tomado del texto Lokenath [2, Pág. 158].

Teorema 2. *El operador adjunto A' de un operador acotado A es acotado. Más áun, tenemos que $\|A\| = \|A'\|$ y $\|A'A\| = \|A\|^2$.*

Otro de los conceptos necesarios para abordar el trabajo es el de un retículo $(F,2)$- cóncavo, el cual relaciona naturalmente el retículo de Banach con una sucesión canónica e_k del mismo, este concepto es tomado del artículo de Masty/lo [13].

Definición 5 ($(F,2)$- Cóncavo). Sea X un retículo de Banach y F un espacio de sucesiones de Banach tal que $\ell_2 \subset F$, entonces X se dice un $(F,2)$- cóncavo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_X e_k\right\|_F \leq M\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_X,$$

para cada colección finita de vectores $x_1, x_2, ..., x_n \in X$. El valor más pequeño posible que satisface la desigualdad anterior se denota por $M_F(X)$.

Ejemplo 4. ℓ_2 es $(\ell_2, 2)$-cóncavo. Para ver esto, se elige una cantidad finita de vectores $\{x^i\}_{i=1}^n$ en el espacio ℓ_2 cualquiera y la sucesiones $\{e^i\}_{i=1}^n$, donde cada e^m es el m-ésimo vector unitario estándar en ℓ_2. Se realiza la siguiente observación:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} e^i\right\|_{\ell_2} &= \left\|\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^1|^2\right)^{\frac{1}{2}} e^1 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^2|^2\right)^{\frac{1}{2}} e^2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} e^n\right\|_{\ell_2} \\
&= \left\|\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^1|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^2|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, 0, 0, 0, ..\right)\right\|_{\ell_2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^i|^2\right|\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\|x^i\|_{\ell_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De aquí se concluye que ℓ_2 es $(\ell_2, 2)$-cóncavo y además, $M_{\ell_2}(\ell_2) = 1$.

De la misma forma, en el mismo artículo de Mastyłlo [13], se define otro concepto el cual relaciona dos retículos de Banach, con sus respectivas normas. Este es el de espacio de norma- mixta $E[F]$. Para introducir esta noción, es conveniente definir las sucesiones filas de una sucesión doble $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que será, para $k \in \mathbb{N}$ fija, la sucesión $F^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definida por

$$F^{(k)} = \left(F_n^{(k)}\right)_{n\geq 1} = (a_{k,n})_{n\geq 1}.$$

Definición 6 (Espacio de norma mixta). Sean E y F retículos de Banach sobre $\mathbb{N}$. Una sucesión doble $(a_{k,n})_{k,n\geq 1}$ se dice que pertenece a un espacio de norma-mixta $E[F]$, si $\left\|F^{(k)}\right\|_{F\, k\geq 1} \in E$.

Se puede observar que $E[F]$ es un retículo de Banach sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ equipado con la norma

$$\left\|(a_{k,n})_{k,n\geq 1}\right\|_{E[F]} = \left\|\left(\left\|F^{(k)}\right\|_F\right)_k\right\|_E.$$

Se ilustra esta definición con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Consideramos $E = F = \ell_2$ y sea $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, la sucesión doble definida por

$$a_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces para $k \in \mathbb{N}$ fija

$$F^{(k)} = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right)$$

y por tanto

$$\left\|F^{(k)}\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{k}.$$

Luego, se tiene $\left(\left\|F^{(k)}\right\|_{\ell_2}\right)_{k\geq 1} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$; y de aquí

$$\left\|(a_{k,n})_{k,n\geq 0}\right\|_{\ell_2[\ell_2]} = \left\|\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} < +\infty,$$

y así se obtiene $(a_{k,n})_{k,n\geq 1} \in \ell_2[\ell_2]$. Sin embargo, la sucesión doble

$$b_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, & \text{si } k = n, \\ \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

no pertenece a $\ell_2[\ell_2]$, pues:

$$\left\|(b_{k,n})_{k,n\geq 1}\right\|_{\ell_2[\ell_2]} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Esto culminado el ejemplo. ■

Adicionamos a nuestra lista de definiciones la noción de operador transpuesto de Köthe, tomada nuevamente del artículo de Mastyło [13].

Definición 7 (Operador transpuesto de Köthe). Sean E y F retículos de y $T : E \to F$ un operador lineal definido por una matriz S. La transpuesta de T, denotado por $T' : F' \to E'$ es la transformación obtenida por la transpuesta de S la cual es la matriz S' que se obtiene intercambiando filas por columnas en S.

Entre las propiedades más destacadas del operador transpuesto, se pueden mencionar que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ cuando la transpuesta $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ y $\|T\| = \|T'\|$. También será de utilidad la célebre desigualdad de Hölder que hemos tomado del texto de Kreyzig [11, Pág. 14].

Teorema 3. *Sean $x = (\xi_j) \in \ell_p$, $y = (\eta_j) \in \ell_q$, donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se satisface:*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_j \cdot \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De igual importancia, se introduce la noción de espacio de multiplicadores, tomada del artículo de Mastyło [13].

Definición 8 (Espacio de multiplicadores). Sean E y F retículos de Banach, el espacio de multiplicadores $M(F,E)$ de F en E, es el espacio de sucesiones $x=(x_k)\in F$ tal que se le asocia un operador de multiplicación, es decir

$$y \mapsto x\cdot y = (x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2, x_3\cdot y_3,\ldots) \quad \text{para todo } y=(y_k)\in F,$$

donde la norma se considera como:

$$\|x\|_{M(F,E)} = \sup_{\|y\|_F\le 1} \left\|x\cdot y\right\|_E$$

para $y=(y_k)$.

Se ilustrará un ejemplo.

Ejemplo 6. El espacio de multiplicadores $M(\ell_2,\ell_2)=\ell_\infty$. Suponga que $x\in\ell_\infty$ y sea $y\in\ell_2$ (cualquiera), entonces

$$\begin{aligned}\left\|x\cdot y\right\|_{\ell_2}^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2|y_n|^2 \le \|x\|_{\ell_\infty}^2\sum_{n=1}^{+\infty}|y_n|^2\\ &= \|x\|_{\ell_\infty}^2\left\|y\right\|_{\ell_2}^2 < +\infty\end{aligned}$$

pues $x\in\ell_\infty, y\in\ell_2$. Ahora, si existe $L>0$ tal que

$$\left\|x\cdot y\right\|_{\ell_2}\le L\left\|y\right\|_{\ell_2},$$

para todo $y\in\ell_2$, entonces considerando las sucesiones canónicas $e_n=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ se obtiene

$$|x_n| = \|x\cdot e_n\|_{\ell_2}\le L\|e_n\| = L,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ y por tanto, $x\in\ell_\infty$. ■

3. La norma de operadores matriciales definidos en ℓ_1

En esta sección se aborda el problema de calcular la norma de operadores matriciales actuando sobre el espacio ℓ_1. Recordamos que si $A=(a_{i,j})$ es una matriz infinita; es decir, una sucesión doble, y $x=(x_k)$ es una sucesión numérica, el producto $A\cdot x$ es la sucesión $y=(y_i)$ tal que para cada $i\in\mathbb{N}$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j}\cdot x_j,$$

siempre que la serie de la derecha sea convergente para todo $i \in \mathbb{N}$. En el caso que $y = A \cdot x \in \ell_1$ para cada $x \in \ell_1$, entonces decimos que A define un operador matricial T_A en ℓ_1 y su norma es

$$\|A\| = \|T_A\| = \sup_{\|x\|_{\ell_1}=1} \|T_A(x)\|_{\ell_1}.$$

La norma de un operador matricial en el contexto mas general de los espacios ℓ_1 con peso fue calculada por J. J. Williams y Q. Ye. en [19]. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4. *Una matriz infinita, $A = (a_{i,j})$, define un operador lineal acotado en ℓ_1 si y sólo si*

$$K = \sup_{j\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| < +\infty$$

En este caso, $\|A\| = K$, la cual denotamos como $\|A\|_{\ell_1}$.

Demostración. Supongamos que $A = (a_{i,j})$ es una matriz infinita la cual define un operador lineal y acotado en ℓ_1, entonces

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\ell_1}\leq 1} \|A \cdot x\|_{\ell_1} < \infty.$$

Fijando $j \in \mathbb{N}$, se considera la sucesión canónica.

$$e_j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...),$$

es decir, la sucesión que contiene al 1 en la j-ésima posición. Entonces $e_j \in \ell_1$ y $\|e_j\|_{\ell_1} = 1$. Así que por definición de $\|A\|$, se obtiene que

$$\|A \cdot e_j\|_{\ell_1} \leq \|A\|.$$

Todavía más, como $\|A \cdot e_j\|_{\ell_1}$ es la norma-1 de la j-ésima columna de A, entonces

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \leq \|A\|;$$

y como el $j \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, se concluye que

$$K = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \leq \|A\| < \infty. \tag{1}$$

Ahora se supone que las componentes de la matriz infinita A satisface que

$$K = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| < \infty.$$

Se va a probar que A define un operador lineal y acotado en ℓ_1. Para ello, sea $x \in \ell_1$ cualquiera tal que $\|x\|_{\ell_1} \leq 1$. Se considera la sucesión $y = A \cdot x$, se va a demostrar que $y \in \ell_1$. En efecto, por la definición de multiplicación de una matriz por una sucesión, se tiene que la i-ésima componente de la sucesión y es

$$y_i = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot x_j.$$

Por tanto, se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \|A \cdot x\|_{\ell_1} &= \|y\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j} \cdot x_j| \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j| \left(\left| \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \right| \right) \leq K \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} |x_i| = K \cdot \|x\|_{\ell_1} \leq K. \end{aligned}$$

Así se obtiene que:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\ell_1} \leq 1} \|A \cdot x\|_{\ell_1} \leq K. \tag{2}$$

Adicionalmente, de (1) y (2) se tiene que

$$\|A\| = K.$$

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Ilustramos este resultado con un par de ejemplos.

Ejemplo 7. Consideramos la matriz infinita $A = (a_{i,j})$ dada por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j, \\ \dfrac{1}{i^2}, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Gráficamente esta matriz se puede ver como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Luego, para $j \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{j-1} |a_{i,j}| + \sum_{i=j}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{i^2},$$

y por tanto,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esto significa que esta matriz infinita A define un operador T_A acotado o continuo en ℓ_1. De hecho, si denotamos por $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$ entonces $T_A(x) = y$ es la sucesión definida por

$$y_j = \frac{1}{j^2} \sum_{i=1}^{j} x_i,$$

con $j \in \mathbb{N}$. Esto culmina el ejemplo. ■

Ejemplo 8. Consideramos la matriz infinita $A = (a_{i,j})$ definida como

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j, \\ \frac{1}{i}, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Gráficamente esta matriz se puede ver como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Luego, para $j \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{j-1} |a_{i,j}| + \sum_{i=j}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{i},$$

y por tanto,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} = +\infty.$$

Observe que en este caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_A(e_n)\|_{\ell_1} = +\infty.$$

Lo cual ciertamente reafirma que este operador no es acotado en ℓ_1. ■.

4. Una cota inferior para la norma de operadores matriciales en ℓ_2

En esta sección se hace una aproximación al problema de determinar cuando un operador matricial actuando sobre el espacio ℓ_2 es acotado inferiormente. Conviene recordar que para una matriz infinita $S = (s_{i,j})$ y una sucesión $x = (x_k) \in \ell_2$, el producto $S \cdot x$ es la sucesión $b = (b_k)$ dada por

$$b_i = \sum_{j=1}^{+\infty} s_{ij} \cdot x_j,$$

siempre que la serie converja para todo $i \in \mathbb{N}$. También, como es usual, La n-ésima columna de la matriz S es la sucesión

$$C^n = (s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n}, ...)$$

y el producto $C^n \cdot x$ se define puntualmente por

$$C^n \cdot x = (s_{1,n} \cdot x_1, s_{2,n} \cdot x_2, s_{3,n} \cdot x_3, ...).$$

De manera, que también, para cada $x \in \ell^2$, se necesita la sucesión

$$C_x = \left(\left\|C^1 \cdot x\right\|_{\ell_2}, \left\|C^2 \cdot x\right\|_{\ell_2}, \left\|C^3 \cdot x\right\|_{\ell_2}, ... \right).$$

Similarmente, la n-ésima fila de la matriz A es la sucesión

$$F^n = (s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}, \dots)$$

y se define además la sucesión de normas de las filas por

$$F = \left(\|F^1\|_{\ell_2}, \|F^2\|_{\ell_2}, \dots \right).$$

Con estas notaciones se tiene el resultado principal de esta sección. En el contexto de espacios más generales se obtiene un resultado similar de M. Mastyło y P. Mleczko [13]. Se hace el estudio en el espacio ℓ_2 pues el problema de calcular la norma operadores matriciales actuando sobre este espacio sigue estando abierto hoy en día.

Teorema 5. *Si $S \in \mathcal{L} \in (\ell_2)$ se representa por una matriz infinita $S = (s_{k,n})$ para $k, n \geq 1$ y tiene traspuesta de Köthe, entonces*

$$A_1 \sup_{\|x\|_{\ell_2} \leq 1} \|C_x\|_{\ell_2} \leq \|S\|,$$

donde A_1 es la constante de la variante de la desigualdad de Khintchine (Corolario 1). Además,

$$\left\| (s_{k,n}) \right\|_{\ell_\infty[\ell_2]} \leq \|S\|.$$

Demostración. Como $S \in \mathcal{L}(\ell_2)$ tiene transpuesta de Köthe, entonces $\|S\| = \|S'\|$, donde $S' \in \mathcal{L}(\ell_2)$ es la transpuesta de S. Al ser S' representado por una matriz $(s_{n,k})$, se puede escribir

$$\|S'\| = \|S\| = \sup_{\|x\|_{\ell_2} \leq 1} \|z\|_{\ell_2}, \tag{3}$$

donde $z = (z_n) \in \ell^2$ y cada término z_n es de la forma

$$z_n = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{kn} \cdot x_k.$$

Se fija $x = (x_k)$ en la bola unitaria de ℓ_2 y se nombra la sucesión $y_k = (s_{k,n} x_k)$ para cada $k \in \mathbf{N}$. Al considerar la sucesión de Rademacher $r(t) = (r_k(t))$ para $t \in [0,1]$, se realiza la siguiente observación

$$r_k(t) \cdot x_k = \begin{cases} x_k, & \text{si} \quad t \in \displaystyle\bigcup_{s=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2s-2}{2^k}, \frac{2s-1}{2^k} \right), \\ \\ -x_k, & \text{si} \quad t \in \displaystyle\bigcup_{s=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{2s-1}{2^{k-1}}, \frac{2}{2^{k-1}} \right]. \end{cases}$$

Así que

$$\|r(t)\cdot x\|_{\ell_2} \quad = \quad \|x\|_{\ell_2} \leq 1,$$

para todo $t \in [0,1]$. En particular, si se considera la sucesión $w \in \ell_2$, como una sucesión truncada de la forma

$$w = (1,1,\ldots,1,0,0,\ldots),$$

entonces la sucesión del producto $r(t)\cdot x\cdot w \in \ell_2$ es

$$r(t)\cdot x\cdot w = (r_1(t)\cdot x_1, r_2(t)\cdot x_2, \ldots, r_N(t)\cdot x_N, 0, 0, \ldots),$$

para cada $N \in \mathbf{N}$ y para cada $t \in [0,1]$. Luego

$$\|r(t)\cdot x\cdot w\|_{\ell_2} \leq \|r(t)\cdot x\|_{\ell_2} \leq 1,$$

y se satisface la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \left\|S'\right\|^2 &= \sup_{\|x\|_{\ell_2}\leq 1} \|z\|_{\ell_2}^2 \geq \|S\cdot r(t)\cdot x\|_{\ell_2}^2 \\ &\geq \|S\cdot r(t)\cdot w\|_{\ell_2}^2 = \left\|\sum_{k=1}^{N} y_k\cdot r_k(t)\right\|_{\ell_2}^2, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0,1]$; donde el producto $S\cdot r(t)\cdot x$ es la sucesión $z' = (z'_n)$ de la forma

$$z'_n = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{k,n}\cdot r_k(t)\cdot x_k,$$

siempre que converja, para cada $n \in \mathbb{N}$. De forma similar, se describe la sucesión del producto $S\cdot r(t)\cdot w$. Como

$$\|S'\|^2 \quad \geq \quad \left\|\sum_{k=1}^{N} y_k\cdot r_k(t)\right\|_{\ell_2}^2.$$

Entonces, integrando, se obtiene

$$\left\|S'\right\| = \left(\int_0^1 \|S'\|^2 dt\right)^2 \geq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{N} y_k\cdot r_k(t)\right\|_{\ell_2}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq A_1 \sup_{N\geq 1} \left\|\left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\ell_2}, \tag{4}$$

donde la última desigualdad se usó la variante de la desigualdad de Khintchine (Corolario 1).

Observe que por la definición de la sucesión y_k, se tiene el desarrollo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{N}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{N}\left|(s_{k,n}\cdot x_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{N}\left|(s_{k,1}\cdot x_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{k=1}^{N}\left|(s_{k,2}\cdot x_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \dots\right) = C'_x,\end{aligned}$$

donde C'_x es la sucesión truncada de columnas

$$C'_x = \left(\left\|C^1\cdot x\cdot w\right\|_{\ell_2}\left\|C^2\cdot x\cdot w\right\|_{\ell_2}, \left\|C^3\cdot x\cdot w\right\|_{\ell_2}, \dots\right).$$

Luego, para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|C^k\cdot x\cdot w\right\|_{\ell_2}^2 = \left\|C'_x\right\|_{\ell_2}^2 \leq \frac{1}{A_1}\left\|S'\right\|^2 = \frac{1}{A_1}\|S\|^2.$$

Así que tomando el límite cuando $N \to \infty$, se concluye que

$$\|C_x\|_{\ell_2} \leq \frac{1}{A_1}\|S\|$$

que es la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda cota inferior, se retoma la desigualdad (4). Como $A_1 \geq 1$, entonces se puede escribir

$$\left\|S'\right\| \geq \|C_x\|_{\ell_2} = \sup_{N\geq 1}\left\|C'_x\right\|_{\ell_2} = \sup_{N\geq 1}\left\|\left(\sum_{k=1}^{N}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\ell_2}$$

para todo $x = (x_k)$ en la bola unitaria de ℓ_2. Luego, usando el hecho que ℓ_2 es $(\ell_2, 2)$-cóncavo (véase Ejemplo 4) , se cumple que

$$\|S\| \geq \sup_{N\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{N}\left\|y_k\right\|_{\ell_2} e_k\right\|_{\ell_2}$$

para una cantidad finita de sucesiones unitarias $e_1, e_2, ..., e_N \in \ell_2$. Observe que

$$\begin{aligned}
\sup_{N\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{N}\|y_k\|_{\ell_2}e_k\right\|_{\ell_2} &= \sup_{N\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{N}\left\|(s_{k,n}\cdot x_k)\right\|_{\ell_2}e_k\right\|_{\ell_2} = \sup_{N\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{N}\left\|(s_{k,1}\cdot x_k, s_{k,2}\cdot x_k, \ldots)\right\|_{\ell_2}e_k\right\|_{\ell_2} \\
&= \sup_{N\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{N}|x_k|\cdot\left\|F^k\right\|_{\ell_2}\cdot e_k\right\|_{\ell_2} = \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{N}\|x_k\left\|F^k\right\|_{\ell_2}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|F\cdot x\|_{\ell_2}.
\end{aligned}$$

Al estar $x = (x_k)$ fijo en la bola unitaria de ℓ_2, se toma el supremo de todos los $x = (x_k)$ para así obtener

$$\|S\| \geq \sup_{\|x\|_{\ell_2}} \|F\cdot x\|_{\ell_2}.$$

Esto es, por definición de la norma de F en el espacio de multiplicadores $M(\ell_2, \ell_2)$, la cual como se vio en los preliminares, es en ℓ_∞, se puede concluir que

$$\|S\| \quad \geq \quad \|F\|_{M(\ell_2,\ell_2)} = \left\|(s_{k,n})\right\|_{\ell_\infty[\ell_2]}$$

Esto culmina la demostración. □

Se ilustra el resultado anterior con algunos ejemplos

Ejemplo 9. En este ejemplo se hará una observación interesante sobre el teorema aplicado en ℓ_2 y es que puede dar un criterio para saber cuando un operador no es acotado:

Considerando la matriz infinita $S = (s_{n,k})$ definida por

$$s_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, & si \quad n \geq k, \\ \\ 0, & si \quad n < k. \end{cases}$$

La cual gráficamente se puede visualizar como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Al determinar la sucesión F como se describió en el teorema, tenemos que:

$$\begin{aligned} F &= (\|F^1\|_{\ell_2}, \|F^2\|_{\ell_2}, \|F^3\|_{\ell_2}, \dots) \\ &= \left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{11}{6}}, \dots\right). \end{aligned}$$

Entonces la norma mixta queda como:

$$\begin{aligned} \left\|(s_{n,k})\right\|_{\ell_\infty[\ell_2]} &= \|F\|_{\ell_\infty} \\ &= \sup\left\{1, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{11}{6}}, \dots\right\} = +\infty. \end{aligned}$$

Se concluye que $\|S\| = +\infty$ y el operador definido por esta matriz infinita no es acotado en ℓ_2. ■

El siguiente ejemplo estudiará un caso en donde un operador en el espacio ℓ_2 posee una norma mixta finita

Ejemplo 10. Considerando una matriz infinita $S = (s_{n,k})$ definida por

$$s_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{k!}}.$$

Gráficamente, dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2!}} & \frac{1}{\sqrt{3!}} & \frac{1}{\sqrt{4!}} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2!}} & \frac{1}{\sqrt{3!}} & \frac{1}{\sqrt{4!}} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2!}} & \frac{1}{\sqrt{3!}} & \frac{1}{\sqrt{4!}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Para determinar la sucesión F, tenemos que:

$$\begin{aligned} F &= (\|F^1\|_{\ell_2}, \|F^2\|_{\ell_2}, \|F^3\|_{\ell_2}, \dots) \\ &= \left(\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}, \dots\right) \end{aligned}$$

Al calcular la norma mixta:

$$\begin{aligned} \left\|(s_{n,k})\right\|_{\ell_\infty[\ell_2]} &= \|F\|_{\ell_\infty} \\ &= \sup\left\{\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e}, \dots\right\} \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

Aquí se observa que la norma mixta de este operador en efecto es finita. ■

5. Una cota superior para la norma de operadores matriciales en ℓ_2: Test de Schur

Con la motivación de estudiar criterios para decidir cuando un operador es acotado sobre el espacio ℓ_2 y como se observó en la sección previa, será de interés en esta sección, estudiar cuando es posible encontrar una cota superior para estos. Para ello, se considerará un resultado relevante: el Test de Schur; nombrado así en honor de Issai Schur, matemático judío- alemán, asesorado en su tesis doctoral por Frobenius, especializado en teoría de grupos, combinatoria y física teórica, no obstante, entre sus contribuciones, se encuentra la realizada en 1911 [18], en el área del Análisis Funcional justamente con este Test el cual posee varias adaptaciones tanto en el área de las Matemáticas como en la Física, la adaptación que compete en esta ocasión será la realizada sobre operadores matriciales en el espacio ℓ_2.

Teorema 6 (Test de Schur). *Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz infinita tal que $a_{i,j} \geq 0$ para todo $i, j \geq 1$ y supongamos que existe una sucesión de términos positivos $p = (p_i)$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ que satisfacen*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i \leq C_1 \cdot p_j, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_j \leq C_2 \cdot p_i, \tag{6}$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces el operador A definido por la matriz infinita $A = (a_{i,j})$ es acotada en ℓ_2 y además

$$\|A\| \leq \sqrt{C_1 \cdot C_2}.$$

Demostración. Recordamos que para $x = (x_i) \in \ell_2$ la sucesión $y = A \cdot x$ se define por

$$y_j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot x_i,$$

siempre que la serie de la derecha sea convergente para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|y_j\right|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot x_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot |x_i|\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j}^{\frac{1}{2}} \cdot a_{i,j}^{\frac{1}{2}} \cdot p_i^{\frac{1}{2}} \cdot p_i^{-\frac{1}{2}} \cdot |x_i|\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i^{-1} \cdot |x_i|^2\right) \quad \leq C_1 \cdot p_j \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i^{-1} \cdot |x_i|^2\right),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima línea se hace uso de la desigualdad de Hölder. Por tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\ell_2}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |y_j|^2 &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} C_1 \cdot p_j \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i^{-1} \cdot |x_i|^2 \right) \\
&= C_1 \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} p_j \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_i^{-1} \cdot |x_i|^2 \right) = C_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_i^{-1} \cdot |x_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} \cdot p_j \right) \\
&\leq C_1 \cdot C_2 \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right) = C_1 \cdot C_2 \cdot \|x\|_{\ell_2}^2 .
\end{aligned}$$

Luego, se cumple que

$$\|A \cdot x\|_{\ell_2} \leq \sqrt{C_1 \cdot C_2}\, \|x\|_{\ell_2} ,$$

para todo $x \in \ell_2$ y esto culmina la demostración. □

Ejemplo 11. Se verá una aplicación directa de este resultado, al considerar la matriz infinita $S = (s_{n,k})$ definida por

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sea $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \right)$, entonces al tomar el producto de las filas de S por la sucesión p, se tiene

$$F_k \cdot p = \sum_{i=1}^{+\infty} s_{i,k} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 \cdot p_k.$$

Por otro lado, al considerar el producto de las columnas de S por la sucesión p se puede ver que

$$C_j \cdot p = \sum_{i=1}^{+\infty} s_{j,i} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 \cdot p_j.$$

Entonces para cada $i, j \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$F_j \cdot p \leq 2 \cdot p_j$$
$$C_i \cdot p \leq 2 \cdot p_i$$

y por tanto, el Test de Schur garantiza que el operador definido por la matriz infinita S es continuo o acotado en ℓ_2 y además $\|S\| \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. ■

6. Conclusiones y recomendaciones

En el transcurso de este trabajo se han obtenido los siguientes resultados:

- Se estudió las propiedades relevantes de un retículo de Banach como el ser p- convexo y $(F, 2)$-cóncavo para posteriormente relacionarlo con el espacio de estudio ℓ_2.
- El cálculo exacto de la norma de operadores matriciales definidos en el espacio ℓ_1 para una matriz infinita $A = (a_{i,j})$ es

$$\|A\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,j}| < \infty.$$

- La estimación de una cota inferior para operadores definidos por matrices infinitas actuando en ℓ_2 mediante la matriz infinita $A = (a_{i,j})$ es

$$\left\|(a_{i,j})\right\|_{\ell_\infty[\ell_2]} \leq \|A\|,$$

  en particular, se obtiene un criterio para cuando un operador definido en el espacio ℓ_2 es no acotado.

- Se enunció y demostró el Test de Schur para operadores matriciales actuando en el espacio ℓ_2, proporcionando bajo ciertas condiciones para filas y columnas del operador matricial $A = (a_{i,j})$ la cota superior

$$\|A\| \leq \sqrt{C_1 \cdot C_2}.$$

  para algunas constantes positivas C_1 y C_2

Como recomendación se sugiere abordar en un contexto más general las condiciones para que un operador definido por matrices infinitas sobre retículos de Banach se acote inferiormente establecido en el articulo de Mastyło y Mleczko [13], además se sugieren el estudio de trabajos destacables como el de Williams y Ye [19] donde se demuestra que si A es una matriz infinita, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son sucesiones pesos (es decir, $r(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces T_A aplica un espacio $l^1(\mathbf{r})$ dentro de $l^1(\mathbf{s})$ si y sólo si

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{r_j} \left|a_{i,j}\right| < \infty,$$

y el trabajo de Foroutannia y Roopaei [4] en el cual se caracterizan todas las matrices infinitas que aplican un espacio l^p dentro de un espacio Cesàro ces_p.

Referencias

[1] F. Albiac, N. J. Kalton *Topics in Banach Space Theory.*Graduate Text in Mathematics. vol 233, New York: Springer, 2006.

[2] L. Debnath *Hilbert Spaces with Applications.* Elsevier Academic Press, San Diego, 1990.

[3] J. Diestel, H. Jarchow , A. Tonge *Absolutely Summing Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] D. Foroutannia and H. Roopaei. Bounds for the norm of lower triangular matrices on the Cesàro weighted sequence space. *J. Inequal. Appl.* **2017**, 67 (2017), 11 pp.

[5] M. M. Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Matem. Palermo* **22** (1906) 1–72.

[6] B. Grahame. *Factorizing the Classical Inequalities*, vol. 576. Am. Math. Soc., Providence 1996.

[7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Bilinear forms bounded in space [p,q], *Quart. J. Math.* **5** (1934) 241–254.

[8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya. *Inequalities, 2nd edn.* 1934.

[9] D. Hilbert. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleic.* Chelsea Publishing Company, New York, 1953.

[10] G. J. O. Jameson and R. Lashkaripour. Norms of certain operators on weighted l_p spaces and Lorentz sequence spaces. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **31** (2002), 1-38.

[11] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and sons, Nueva York, 1978.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I and II.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] M. Mastyło, and P. Mleczko. Norm estimates for matrix operators between Banach spaces. *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), no. 3, 986-1001.

[14] B. Osikiwicz and A. Tonge. An interpolation approach to Hardy–Littlewood inequalities for norms of operators on sequence spaces, *Linear Algebra Appl.* **331** (2001), 1–9.

[15] J. Pečarić, I. Perić and R. Roki. On bounds for weighted norms for matrices and integral operators.*Linear Algebra Appl.* **326** (2001), 121-135.

[16] F. Riesz. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen. *Mathematische Annalen* **69** (1910), no. 4, 449–497.

[17] F. Riesz. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires. *Atti congress. internaz. mathematici (Bologna* 3 (1928), 143–148.

[18] I. Schur. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen.*J. Reine Angew. Math.* **140** (1911), 1-28.

[19] J. J. Williams and Q. Ye. Infinite matrices bounded on weighted l^1 spaces. *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), no. 12, 4689—4700.