Representaciones Funtoriales de Álgebras

Juan Diego Cifuentes Vargas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

Representaciones Funtoriales de Álgebras

Juan Diego Cifuentes Vargas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
M.Sc. Carlos Orlando Ochoa Castillo

Línea de Investigación:
Álgebra

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación
Bogotá, Colombia
2018

A Nohora, mi mamá.

Agradecimientos

Debo agradecer primero que nada y de manera más especial a mi mamá pues ella no solo ha estado a mi lado en todas las etapas de mi vida por buenas o malas que hayan sido, sino que su vida ha sido mi mayor inspiración a lo largo de los años. No solo este trabajo sino todos los logros que he tenido y tendré en mi vida se los debo y se los dedicaré enteramente a ella. Segundo a mi hermana, Andrea, pues ha estado al lado mio apoyándome y dándome ánimo y valor, además nunca ha dejado de creer en mi.

También de manera especial agradezco a Alejandra Rivera, pues sin ella el tránsito por la carrera hubiera sido un gran sinsabor. Su amor y su ejemplo no solo me sacaron del oscuro pozo donde me encontraba sino que me han hecho cambiar radicalmente para bien y gran parte de mis logros académicos y como ser humano en los últimos cuatro años han sido gracias a ella e inspirados en ella.

Por supuesto quiero agradecer al profesor Hernán Giraldo por haber confiado en mi y prácticamente sin conocerme haber accedido a dirigir este trabajo, eso es algo que nunca voy a olvidar y que agradeceré siempre. A la Universidad Distrital por haber sido mi casa durante estos años y a todos los profesores que en este tiempo estuvieron a mi lado, en particular a los que me guiaron en el camino arduo del álgebra; y por último a todos los compañeros con los que compartí pues sin ellos hubiera sido tortuoso y aburrido el tránsito por la carrera.

Resumen

La intención de este trabajo es mostrar desde el punto de vista de la teoría de categorías, el teorema de equivalencia entre la categoría de las representaciones de un carcaj y la categoría de los módulos sobre el álgebra de caminos de ese carcaj. De esta demostración no se encuentran detalles en el trabajo de ningún autor. Al final se dan unas consecuencias de este teorema dentro de la teoría de representaciones de álgebras.

Palabras clave: Carcaj, teoría de representaciones, álgebra, módulos indescomponibles, álgebra de dimensión finita, módulos de dimensión finita, teoría de categorías.

Abstract

The intention of the following work is to present the equivalence theorem between the category of the representation of a quiver and the category of modules over the path algebra of that quiver from a categorical point of view. The details of this proof cannot be found in any know previous work. At the end, some consequences of the theorem within the representation theory of algebras are given.

Keywords: Quiver, representation theory, algebra, indecomposable modules, finite dimensional algebra, finite dimensional modules, category theory.

Contenido

Lista de símbolos

Símbolo	Significado
Λ, A, $B, \cdots$	Anillos, Álgebras.
$\langle I \rangle$	Ideal generado por un subconjunto I de un anillo Λ.
$D[[x]]$	Anillo de polinomios infinitos en la indeterminada x.
$D[x_1, x_2, \cdots, x_n]$	Anillo de polinomios en las indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
M, $N, \cdots$	Módulos.
$\mathcal{C}, \mathcal{G}, \cdots$	Categorías.
$F, G, \cdots$	Funtores.
Γ	Quiver.
Γ_0	Vértices de un quiver.
Γ_1	Flechas de un quiver.
$\mathfrak{B}$	El conjunto de los caminos en Γ (Base de $k\Gamma$).
$k\Gamma$	Álgebra (categoría) de caminos.
R, I	Conjunto admisible de relaciones.
$\mathbf{\Gamma}$	Quiver acotado admisible.
$rep\mathbf{\Gamma}$	Categoría de las representaciones funtoriales de $\mathbf{\Gamma}$.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$	Conjunto de morfismos en la categoría $\mathcal{C}$ entre los objetos X y Y.
$\mathrm{End}\, M$	Anillo (álgebra) de endomorfismos de un módulo M, puede abreviar también $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$ el conjunto de morfismos de la categoría $\mathcal{C}$ de M en M.

Introducción

Clasificar objetos en las distintas ramas de las matemáticas que es uno de los retos más importantes, útiles y muchas veces complicados para los matemáticos, tiene, entre muchas otras, como consecuencia, el desarrollo de las teorías de representación.

En este caso, el estudio y clasificación de las álgebras de dimensión finita se puede hacer a través de sus módulos indescomponibles y homomorfismos entre ellos. Históricamente, la teoría de representaciones de álgebras se desarrolla a partir de dos conjeturas, ya demostradas, formuladas en los años cuarenta que relacionaban el tipo (de representación) de un álgebra y sus módulos indescomponibles finitamente generados, conocidas como las conjeturas de *Brauer-Thrall*. Cabe anotar que, dado un cuerpo k, una k-álgebra de dimensión finita A se dice de tipo representación finita si tiene un número finito de clases de isomorfismo de sus $A-$módulos a derecha indescomponibles de dimensión finita, de otro modo se dice que es de tipo representación infinita. Las conjeturas son las siguientes:

Brauer-Thrall I. Si A es una $k-$álgebra de tipo infinito. Entonces, el conjunto de las dimensiones sobre k de los $A-$módulos indescomponibles finitamente generados, no es acotada.

Brauer-Thrall II. Si A es una $k-$álgebra de tipo infinito (k cuerpo infinito). Entonces existe un número infinito de $k-$dimensiones y para cada dimensión existe un número infinito de módulos indescomponibles no isomorfos.

La primera conjetura fue demostrada con éxito usando técnicas mayormente matriciales por Nazarova y Roiter (1968-1973) quienes además aseguraban haber demostrado la segunda conjetura, demostración que solo ellos podían entender. Después, Gabriel (1972) desarrolló técnicas gráficas ("quivers") y Auslander y Reiten (1975-1977-1978) desarrollaron técnicas homológicas que permitieron a Bautista (1985) demostrar con claridad la segunda conjetura dando un gran avance en el desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras. En particular el trabajo de Auslander y Reiten quienes desarrollaron la noción del carcaj (capítulo IV de [1] fue fundamental para llegar a esta demostración pues a travé sde este concepto es posible representar todas las álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo.

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el primero se presentan algunos resultados básicos necesarios para el entendimiento de la teoría, a saber, definiciones y algunos resultados básicos importantes de la teoría de módulos, álgebras y teoría de categorías. Este primer capítulo se basa en el capítulo I de [1] y en algunos apartados de [11] como definiciones y formas más generales de teoremas que aparecen en [1]. También algunas ideas son tomadas de [2] y [15].

El segundo capítulo muestra de forma rápida la teoría de representaciones desde el punto de vista que usualmente se trata; dando la definición de carcaj, de álgebra de caminos, algunas propiedades y características importantes de esta última, la definición de representación de un carcaj, para al final dar una versión clásica y poco general del teorema de equivalencia.
Por último, el tercer capítulo hace una descripción de la construcción de un carcaj acotado, las representaciones de este como un funtor, cómo estas representaciones forman una categoría y una demostración detallada de las principales características de esta categoría. Muestra cómo esta construcción no solo es equivalente a la presentada en el capítulo 2, sino que la generaliza y permite ampliar el rango de estudio. Seguidamente muestra una demostración con todo detalle del teorema de equivalencia y por último se explican consecuencias de este y se presentan dos ejemplos de estas consecuencias.

1 Preliminares

1.1. Módulos y Álgebras

En este capítulo se darán los conceptos básicos para desarrollar la teoría de representaciones. Inicialmente se darán las nociones de la teoría de módulos y álgebras para posteriormente pasar a las definiciones de la teoría de categorías, con el fin de, en el último capítulo combinar los conceptos vistos y entrar a la teoría de representaciones de álgebras y la teoría de álgebras de caminos desde el punto de vista categórico. Se asume que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de las teorías de grupos, anillos y cuerpos, de no ser así podría revisar [7, 12, 8].

Definición 1.1.1. *Sean M un grupo abeliano y Λ un anillo con unidad, se dice que M es un* ***módulo a izquierda*** *si existe una una operación binaria, $\cdot : \Lambda \times M \to M,\ (a, m) \mapsto am$, que se denomina producto por escalar, tal que para todo $x, y \in M$ y para todo $a, b \in \Lambda$ se cumple:*

1. $a(x + y) = ax + ay.$
2. $(a + b)x = ax + bx.$
3. $(ab)x = a(bx).$
4. $1a = a.$

Nota. La definición de módulo a derecha es análoga; si además Λ es conmutativo, M se denomina simplemente módulo. Las notaciones más usadas durante este texto para los módulos a izquierda (derecha) son Λ-módulo a izquierda (derecha) y ${}_{\Lambda}M$ (M_{Λ}). A la colección de módulos a izquiera (derecha) de Λ se notará por ${}_{\Lambda}\mathbb{M}$ $(\mathbb{M}_{\Lambda})$. Por otra parte si un subconjunto $S \subseteq M$ es también un módulo a izquierda (derecha) con el mismo producto por escalar que se definió para M, entonces se dice que S es un **submódulo a izquierda** (derecha) de M.

Ejemplo 1.1.2. *Se puede comprobar de manera sencilla que Λ es un módulo sobre si mismo, a este módulo que se notará como ${}_{\Lambda}\Lambda$ se le conoce como módulo regular. Los submódulos de este son los ideales de Λ.*

Ejemplo 1.1.3. *Todo grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}$-módulo con el producto por escalar definido para $m \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$ por*

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n\text{-veces}} & n > 0 \\ \underbrace{-g - g - \cdots - g}_{n\text{-veces}} & n < 0 \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.4. *Sea A un anillo con unidad. $\boldsymbol{M}_2(A)$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas 2×2 con entradas en A. $\boldsymbol{M}_2(A)$ es un módulo con el producto por escalar definido por*

$$m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}, \qquad m, a, b, c, d \in A.$$

Este ejemplo se puede extender de forma natural a matrices de tamaño n con entradas en A.

Ejemplo 1.1.5. *Sea D un anillo conmutativo con unidad. Se denota $D[x]$ al anillo de polinomios con coeficientes en D en la indeterminada x. $D[x]$ es un D-módulo con el producto por escalar definido así*

$$m \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} m a_i x^i, \qquad a, m \in D.$$

De la misma manera para $D[[x]]$, el anillo de polinomios infinitos en la indeterminada x y para $D[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, el anillo de polinomios en las indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Nota. Muchos ejemplos y hechos importantes en teoría de anillos y lo que se deriva de esta vienen dados en términos del anillo de polinomios de un anillo o de un cuerpo, para ver una construcción completa de $D[x]$ y $D[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ además de muchas de sus propiedades ver [6].

De ahora en adelante se dirá, a menos que se diga lo contrario, que M es un Λ-módulo si es un Λ-módulo a izquierda. Otra estructura importante es la estructura de bimódulo, es decir si $M \in {}_\Lambda\mathbb{M}$ y $M \in \mathbb{M}_A$ para algún anillo A y además, si $(am)b = a(mb)$ para todo $m \in M$, $a \in \Lambda$ y $b \in A$, se dice que M es un $\Lambda - A$-bimódulo.

Gran parte de los conceptos de la teoría de grupos abelianos se pueden acomodar en la teoría de módulos adaptándolos para hacerlos compatibles con el producto por escalar; se verá a lo largo de este trabajo algunos ejemplos de esto. El primero de estos es el concepto de homomorfismo de módulos.

Definición 1.1.6. *Sean $M, N \in_\Lambda \mathbb{M}$, un homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to N$ se llama un* Λ***-homomorfismo*** *si cumple que $f(ax) = af(x)$ para todo $x \in M$ y todo $a \in \Lambda$. Al conjunto de los Λ-homomorfismos de M a N se le nota como $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ o simplemente $\mathrm{Hom}(M, N)$ si no hay confusión sobre el anillo en el que están definidos los módulos.*

Los conceptos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo se mantienen para los Λ -homomorfismos, de igual forma tanto el kernel como la imagen y el cokernel se definen de la misma manera como en los homomorfismos de grupos.

Tal como ocurre con los grupos abelianos es posible hacer suma directa de módulos (interna y externa) que se define de la misma manera que para grupos y tiene las mismas propiedades, sin embargo vale la pena recordar la siguiente caracterización cuya demostración puede ser encontrada en la sección 4 del capítulo 1 de [11], o de forma más general en el teorema 8.6 del capítulo I de [12].

Teorema 1.1.7. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de un módulo M, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.
2. $M = \sum_{i\in I} M_i$ *y para todo i,* $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{0\}$.
3. $M = \sum_{i\in I} M_i$ *y para todo i,* $M_i \cap \sum_{j< i} M_j = \{0\}$.

Es posible darle estructura de módulo a izquierda (derecha) a la suma directa de módulos definiendo el producto por escalar de la siguiente manera: si $M_1, M_2, \cdots, M_n$ son Λ-módulos, en el grupo abeliano $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ el producto por escalar es, para todo $a \in \Lambda$

$$a(m_1, m_2, \cdots, m_n) = (am_1, am_2, \cdots, am_n),$$

convirtiendo así la suma directa de Λ-módulos en un Λ-módulo.

Definición 1.1.8. *Sea $M \in {}_\Lambda\mathbb{M}$, M se dice* ***indescomponible*** *si no tiene una descomposición en suma directa $M \cong L \oplus N$ con $L, N \in {}_\Lambda\mathbb{M}$ submódulos de M distintos de cero. Por otra parte M se dice simple si no tiene submódulos propios y por último, $N \in {}_\Lambda\mathbb{M}$ se dice semisimple si se puede escribir como suma directa de submódulos simples.*

Ejemplo 1.1.9. *Se puede ver fácilmente que todo módulo simple es indescomponible pero no es cierto que todo módulo indescomponible es simple. ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ es un ejemplo de esto. En efecto ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ no es simple porque $\langle 2\rangle$ es un submódulo no trivial. Ahora los submódulos de ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ son sus ideales; si $m, n \in \mathbb{Z}$, los ideales $\langle m\rangle$ y $\langle n\rangle$ tienen como intersección $\langle k\rangle$ donde k es el mínimo común múltiplo de m y n, luego ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ es un módulo indescomponible.*

Ejemplo 1.1.10. *Del teorema de clasificación de grupos abelianos finitos se puede deducir que un $\mathbb{Z}$-módulo finito M es indescomponible si y sólo si $M \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para algún primo p.*

Uniendo estos últimos ejemplos se puede decir que un $\mathbb{Z}$-módulo es indescomponible si y sólo si es isomorfo a $\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}_{p^k}$. Ahora se va a presentar la definición de álgebra que es el concepto más importante de este trabajo. Como se verá en el capítulo 2, es posible dar estructura de álgebra a un quiver y desde ahí poder relacionar su categoría de módulos con la categoría de las representaciones de ese quiver.

Definición 1.1.11. *Sea k un cuerpo. Se dice que un anillo con unidad Λ es una k-**álgebra** si Λ es un espacio vectorial sobre k y la multiplicación en el anillo es compatible con la estructura de espacio vectorial, es decir se tiene que*

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda, \qquad \lambda \in k, a, b \in \Lambda.$$

Además, se dice que Λ es de dimensión finita si la dimensión de Λ sobre k como k-espacio vectorial es finita ($\dim_k \Lambda < \infty$).

En el ejemplo 1.1.4 si A es una k-álgebra entonces $\mathbf{M}_n(A)$ es también una k-álgebra, además $\dim_k \mathbf{M}_n(A) = n^2$. En el ejemplo 1.1.5 si $D = k$ entonces $D[x]$ y $D[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ son k-álgebras de dimensión infinita. Si el lector desea ver más ejemplos interesantes y útiles de k-álgebras puede encontrarlos en [1]. Por supuesto todos los conceptos, propiedades y elementos de la teoría de anillos unitarios se aplican a las k-álgebras en particular se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1.12. *Sea Λ una k-álgebra. M se dice un **módulo** sobre Λ sí $M \in {}_\Lambda\mathbb{M}$, M es un k-espacio vectorial y además*

$$a(\lambda m) = (a\lambda)m = \lambda(am), \qquad m \in M, a \in \Lambda, \lambda \in k.$$

EL siguiente lema, si bien tiene una demostración sencilla es de gran utilidad dentro de la teoría de módulos.

Lema 1.1.13 (Schur). *Sean $S, S' \in {}_\Lambda\mathbb{M}$ y $f : S \to S'$ un Λ-homomorfismo no nulo, entonces*

1. *Si S es simple, f es un monomorfismo.*
2. *Si S' es simple, f es un epimorfismo.*
3. *Si S y S' son simples, f es un isomorfismo.*

Corolario 1.1.14. *Si $S \in {}_\Lambda\mathbb{M}$ es simple, entonces $k \cong \operatorname{End} S$.*

Demostración. Como S es simple, $\operatorname{End} S$ es un anillo de división por el lema de Schur. S es cíclico, porque de no ser así el generado de uno de sus generadores sería un submódulo propio y entonces S no sería simple, así S es de dimensión finita de la misma manera que $\dim_k \operatorname{End} S$. Ahora, si $\varphi \in \operatorname{End} S$, los elementos $id, \varphi, \varphi^2, \cdots, \varphi^m, \cdots$ son linealmente dependientes sobre k, por lo tanto existe un polinomio no nulo $f \in k[x]$ tal que $f(\varphi) = 0$. Como se supone que k es algebráicamente cerrado, f debe ser de grado 1 y por lo tanto φ actúa en S como la multiplicación por el escalar $\lambda_\varphi \in k$. La función que asigna a φ el escalar λ_φ, es un isomorfismo de K-álgebras entre $\operatorname{End} S$ y k. $\square$

Proposición 1.1.15. $\mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda) \cong \Lambda^{op}$

Demostración. Se definen las aplicaciones f_x como $f_x(y) = yx$ para todo $x \in \Lambda$. Estas aplicaciones son endomorfismos de ${}_\Lambda\Lambda$, en efecto.

$$f_x(ry) = (ry)x = r(yx) = rf_x(y),$$

y además

$$f_x(y+z) = (y+z)x = yx + zx = f_x(y) + f_x(z).$$

Sea $\phi \in \mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)$, si $\phi(1) = x$ para algún $x \in \Lambda$, entonces $\phi(k) = \phi(k1) = k\phi(1) = kx$. Es decir todo endomorfismo ϕ de ${}_\Lambda\Lambda$ es igual a f_x para algún $x \in \Lambda$; se puede ver que el homomorfismo identidad es f_1. Se define ahora la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda) &\longrightarrow \Lambda^{op} \\ f_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Se tiene primero que $\rho(f_1) = 1$. Ahora

$$(f_x + f_y)(z) = f_x(z) + f_y(z) = zx + zy = z(x+y) = f_{x+y}(z),$$

por otra parte

$$f_x f_y(z) = f_x(zy) = zyx = f_{yx}(z).$$

Con esto se concluye que ρ es un homomorfismo de anillos con unidad. Ahora si $x = y$, $rx = ry$ para todo $r \in \Lambda$ con lo cual ρ es inyectivo y como la imagen de ρ es claramente todo Λ, con esto se concluye la prueba. $\square$

Nota. Este resultado se tiene en general para anillos con unidad, además si se cambia al módulo regular a derecha y se define $f_x(y) = xy$, se tendrá entonces el isomorfismo $\mathrm{End}(\Lambda_\Lambda) \cong \Lambda$, además si Λ es conmutativo, en particular un cuerpo, se tiene $\mathrm{End}(\Lambda_\Lambda) \cong \Lambda \cong \mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)$.

Definición 1.1.16. *Un elemento e de un anillo Λ se dice **idempotente** si $e^2 = e$, se dice que además e es **primitivo** si no existen idempotentes no triviales e_1 y e_2 tales que $e = e_1 + e_2$ y por último, e se dice **central** si e pertenece al centro de Λ.*

Definición 1.1.17. *Un álgebra A se dice **conexa** si no se puede escribir como el producto de dos álgebras, o de forma equivalente si sus únicos idempotentes centrales son 0 y 1.*

Tiene también esta definición mucho de similar con la definición de conjunto conexo en topología, puesto que en la última, se tiene que no se puede escribir como unión de dos abiertos disyuntos y en la primera como suma directa de álgebras. Para reforzar esta intuición se tiene el siguiente resultado cuya prueba está en la sección 2.1 de [1].

Lema 1.1.18. *Sea A una álgebra asociativa con identidad y asuma que $e_1 \cdots e_n$ es un conjunto finito completo de idempotentes primitivos ortogonales. Entonces A es un álgebra conexa si y solo si no existe una partición de $1, 2, \cdots, n$ en dos conjuntos no vacíos disyuntos I, J tales que si $i \in I$ y $j \in J$ implica que $e_i A e_j = 0 = e_j A e_i$.*

La última parte de esta sección está dedicada a la demostración del teorema de Krull-Schmidt para módulos (de dimensión finita) y dar una caracterización del anillo de endomorfismos de estos a través de un tipo particular de anillos llamados anillos (álgebras) locales. Pero para esto, es necesario presentar el radical de un anillo. Si A un anillo, a la intersección de todos los ideales maximales a derecha se le conoce como el **radical** de A y se denota por $\operatorname{rad} A$. Por supuesto, el radical de un anillo es un ideal pues es intersección de ideales. Si bien esta definición es sencilla, $\operatorname{rad} A$ es un ideal sumamente importante pues a través de este se pueden caracterizar y estudiar propiedades no solo del anillo, sino también de sus módulos. El siguiente lema da una importante característica del radical de un álgebra de dimensión finita, la prueba se realiza por inducción fuerte sobre la cantidad de generadores de M y se puede encontrar en [1].

Lema 1.1.19 (Nakayama)**.** *Sean Λ una k-álgebra, M un módulo finitamente generado de Λ e $I \subseteq \operatorname{rad} \Lambda$ un ideal bilátero de Λ. Si $MI = M$ entonces $M = 0$.*

Proposición 1.1.20. *Toda álgebra de dimensión finita Λ es artiniana.*

Demostración. Sea Λ un álgebra de dimensión finita, si se considera la siguiente cadena de ideales de Λ

$$\Lambda = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

Como Λ es un espacio vectorial, sus ideales son subespacios; además la contenencia $I_j \subseteq I_i$ implica que $\dim_k I_j \leq \dim_k I_i$ y como Λ es de dimensión finita, la cadena

$$\dim_k \Lambda \geq \dim_k I_1 \geq \dim_k I_2 \geq \cdots \dim_k I_n \geq \cdots$$

solo puede tener un número finito de desigualdades estrictas, con lo que eventualmente desde un cierto $m \in \mathbb{N}$, $\dim_k I_m = \dim_k I_k$, lo que implica que $I_m \cong I_k$ para todo $k \geq m$. □

Corolario 1.1.21. *Si Λ es un álgebra de dimensión finita, entonces el radical de Λ es nilpotente.*

Demostración. Como la dimensión de Λ es finita, por la proposición anterior, la siguiente cadena de ideales se detiene

$$\Lambda \supseteq \operatorname{rad} \Lambda \supseteq (\operatorname{rad} \Lambda)^2 \supseteq \cdots \supseteq (\operatorname{rad} \Lambda)^n \supseteq \cdots$$

Es decir, para algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(\operatorname{rad} \Lambda)^m = (\operatorname{rad} \Lambda)^{m+1} = (\operatorname{rad} \Lambda)^m \operatorname{rad} \Lambda$ y por el lema de Nakayama se concluye que $(\operatorname{rad} \Lambda)^m = 0$. □

Definición 1.1.22. *Un anillo A se dice* ***local*** *si posee un único ideal maximal a derecha.*

La siguiente es una caracterización sumamente útil de los anillos (álgebras) locales a través de su radical. Se presentará para anillos en general y su demostración está en la proposición 10.1.1 de [11].

Teorema 1.1.23. *Las siguientes son condiciones equivalentes para un anillo A con radical* $\operatorname{rad} A$.

1. *A es local.*
2. $\operatorname{rad} A$ *es el único ideal maximal a derecha de A.*
3. *Todos los elementos no invertibles de A forman un ideal.*
4. $\operatorname{rad} A$ *es el conjunto de todos los elementos no invertibles de A.*
5. *El anillo cociente $A/(\operatorname{rad} A)$ es un anillo de división.*

Nota. Se puede probar además que $\operatorname{rad} A$ es el único ideal maximal a izquierda. También es equivalente que para cualquier elemento a de A o bien a es invertible o bien $1 - a$ lo es (lema I.1.3 de [1] y numeral 4 del teorema anterior) y que 0 y 1 son los únicos idempotentes de A. Por último si A es una k-álgebra de dimensión finita, el anillo cociente del numeral 5 del teorema anterior es también una k-álgebra y más aún es isomorfa a k.

Ejemplo 1.1.24. *Si A es un anillo local, entonces ${}_AA$ es indescomponible. En efecto, dado que A sólo tiene un único ideal izquierdo maximal, todos sus submódulos (ideales) están contenidos en este, entonces la intersección de dos de ellos no nulos, es de nuevo un ideal no nulo.*

El siguiente corolario será de gran utilidad pues permitirá más adelante dar una característica importante de la categoría de los módulos de dimensión finita sobre un álgebra.

Corolario 1.1.25. *Sean Λ una k-álgebra y M un módulo sobre Λ. Entonces se tiene que:*

1. *Si el álgebra* $\operatorname{End} M$ *es local, entonces M es indescomponible.*
2. *Si M es de dimensión finita e indescomponible, entonces el álgebra* $\operatorname{End} M$ *es local y todo Λ-endomorfismo de M es nilpotente o es un isomorfismo.*

Nota. El numeral dos del corolario indica que para un módulo M de dimensión finita sobre un álgebra es equivalente que $\operatorname{End} M$ sea local a que M sea indescomponible.

Demostración. 1. Si End M no es indescomponible, entonces existen dos submódulos M_1 y M_2 de M no nulos tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Si p_i es la proyección de M a M_i $(i = 1, 2)$ y u_i es la inyección de M_i en M $(i = 1, 2)$, se tiene que $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_M$ pero como ni u_1p_1 ni u_2p_2 son invertibles, entonces pertenecen a $\operatorname{rad}\Lambda$ pero eso implicaría que $1_M \in \operatorname{rad}\Lambda$ lo que es una contradicción pues $\operatorname{rad}\Lambda$ es propio.

2. Si End Λ no es local, de la nota del teorema 1.1.23 dos idempotentes no nulos e_1 y $e_2 = 1 - e_1$ de tal forma que $M = Im\, e_1 \oplus Im\, e_2$, en efecto, si $x \in M$, $x = 1_M(x) = e_1(x) + e_2(x)$ con lo que $M = Im\, e_1 + Im\, e_2$. Ahora, si $a \in Im\, e_1 \cap Im\, e_2$, existe $x \in M$ tal que $a = e_1(x) = e_2(x)$, entonces $e_1(x) = 1_M(x) - e_1(x)$, ahora

$$\begin{aligned} e_1(x) + e_1(x) &= 1_m(x) = x \\ e_1(e_1(x) + e_1(x)) &= e_1(x) \\ e_1(x) + e_1(x) &= e_1(x) \\ e_1(x) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $e_1(x) = e_2(x) = 0$ y entonces $M = Im\, e_1 \oplus Im\, e_2$. Y como se supuso que tanto e_1 como e_2 no son 1_M, entonces existe una descomposición no trivial de M lo cual es una contradicción, entonces End M es local. Por otra parte, como M es de dimensión finita, End M también lo es (End M es isomorfo a las matrices de orden $\dim_k M$, teorema VII.1.2 de [12]) y por lo tanto si $f \in \operatorname{End} M$ es no invertible, pertenece a $\operatorname{rad}(\operatorname{End} M)$ que por el corolario 1.1.21 es nilpotente; luego f también lo es.

□

Existe otra forma de demostrar el numeral 2 del corolario anterior haciendo uso del lema de Fitting (proposición 3.8.1 de [11]) tal demostración puede encontrarse en [11] o en [2] (proposición 3.13). El siguiente teorema, el teorema de Jordan-Hölder, es importante tanto en teoría de módulos como en teoría de grupos pues establece la unicidad salvo isomorfismo de las series de composición de un grupo (módulo) y es uno de los primeros lugares donde se ve la importancia de conocer una clasificación completa de los grupos simples finitos que es uno de los mayores retos no solo de la teoría de grupos sino de la matemática en general. Primero se da la definición de serie de composición para módulos. Para un tratamiento general para grupos no necesariamente abelianos del teorema de Jordan-Hölder revisar la sección 8 del capítulo II de [12] (Normal and subnormal series).

Definición 1.1.26. *Una cadena de submódulos de un módulo M*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

*se dice una **serie de composición** para el módulo M si todos los módulos cocientes M_{i+1}/M_i son simples $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. Estos módulos cociente se llaman los **factores de composición** de la serie y el número n se conoce como la **longitud** de la serie. Por conveniencia el módulo nulo tiene una serie de composición de longitud cero sin factores de composición.*

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [11] (teorema 3.1.2)

Teorema 1.1.27 (Jordan-Hölder). *Si un módulo M tiene dos series de composición*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M,$$

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M.$$

Entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \cdots, m\}$ tal que para todo $j = 0, 1, \cdots, m-1$ los factores de composición de una serie son isomorfos con los de la otra, es decir $M_{j+1}/M_j \cong N_{\sigma(j+1)}/N_{\sigma(j)}$.

Este último teorema es útil pues caracteriza todos los módulos de dimensión finita sobre un álgebra permitiéndolos escribir en todos los casos como suma directa de módulos indescomponibles siendo esta suma directa única.

Teorema 1.1.28 (Krull-Schmidt). *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Todo módulo $M \in {}_{\Lambda}\mathbb{M}$ tiene una descomposición $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, donde $M_1, \cdots M_m$ son módulos indescomponibles y las K-álgebras $\operatorname{End} M_i$ son locales para todo $i = 1, 2, \cdots, m$.*

2. *Si $M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, donde M_i y N_i son indescomponibles, entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \cdots n\}$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \cdots n$.*

Demostración. Primero, si M es indescomponible no hay nada que mostrar. Si no lo es y como en particular M es un k-espacio vectorial de dimensión finita pues Λ es de dimensión finita, M es libre y por la proposición 1.5.2 de [11]

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} k = k^n.$$

Y como k es indescomponible (como espacio vectorial sobre sí mismo), se tiene la existencia de tal descomposición. Ahora, por el numeral 2 del corolario 1.1.25 se ha terminado de probar (1).

Ahora, si $M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, por el primer teorema de isomorfía de módulos (teorema 1.3.1 de [11]) se tiene que

$$0 \subseteq M_1 \subseteq M_1 \oplus M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = M,$$

$$0 \subseteq N_1 \subseteq N_1 \oplus N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n = M,$$

son dos series de composición de M pues M_i y N_i son indescomponibles (simples) y por el teorema de Jordan-Hölder tienen la misma longitud, luego $m = n$. De nuevo por el teorema de Jordan-Hölder existe una permutación σ, tal que los factores de composición son isomorfos. De este hecho, y de nuevo por el primer teorema de isomorfía de módulos se tiene que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \cdots n$. $\square$

Esta prueba se puede hacer de forma constructiva sin usar el teorema de Jordan-Hölder tal como aparece en el teorema I.4.10 de [1]. Una versión general para teoría de grupos se presenta en la sección 3 del capítulo II de [12].

1.2. Teoría de Categorías

La teoría de categorías fue introducida en 1942 por S. Eilenberg y S. MacLane en el artículo *Natural isomorphisms in group theory*, con la intención de estudiar y entender los procesos que preservan las estructuras matemáticas. Esta teoría puede verse como el estudio abstracto de las estructuras matemáticas, tales como las algebráicas, las de orden o las topológicas.

En la teoría de categorías, no es importante la naturaleza de los objetos que se estudian, si no como se relacionan entre sí, de esta manera es posible encontrar relación entre ramas de la matemática que en principio parecería que no tienen nada en común; un ejemplo bien conocido de este tipo de interacción es la que sucede en topología algebráica cuando a un espacio topológico se le asigna un grupo o una cadena de grupos y homomorfismos con la intención de clasificarlo, haciendo uso de los isomorfismos de grupos que puedan haber entre el grupo que se le asigna, y el que se le asigna a otros espacios.

Si bien en principio la definición de categoría no especifica de forma explícita las relaciones que existen entre los objetos a estudiar, esta está diseñada de tal forma que en la práctica, estas relaciones son las que respetan la estructura de los objetos, como por ejemplo los homomorfismos de grupos; que no son funciones cualquiera entre un par de conjuntos, si no que son funciones que preservan la estructura de grupo del conjunto de salida y la plasman en el conjunto de llegada.

En esta sección no se estudiará a fondo toda la teoría de categorías, solamente las definiciones necesarias para comprender los métodos que usarán en los capítulos 2 y 3.

Definición 1.2.1. *Se dice que $\mathcal{C}$ es una* ***categoría*** *si $\mathcal{C}$ consiste de:*

1. *Una clase notada con $Ob\,\mathcal{C}$, cuyos elementos se llaman* ***objetos*** *de $\mathcal{C}$.*

2. *Un conjunto denotado por $\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}$, cuyos elementos se denominan los* ***morfismos*** *de $\mathcal{C}$.*

3. *Para cada morfismo f de $\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}$ existe una pareja ordenada (X, Y) de objetos de $\mathcal{C}$ y se dice que f es un morfismo de el objeto X al objeto Y y se nota como $f : X \to Y$. El conjunto de todos los morfismos de X en Y se denota como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o simplemente $\mathrm{Hom}(X, Y)$ si no existe confusión sobre la categoría en estudio.*

4. *Para todo $X, Y, Z \in Ob\,\mathcal{C}$ y todo morfismo $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ está definido un único morfismo $gf : X \to Z$ que se denomina la* ***composición*** *o* ***producto*** *de f y g. La composición de morfismos se representa mediante el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "gf"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

5. *La composición de morfismos es asociativa, es decir $h(gf) = (hg)f$, en tanto las composiciones sean posibles.*

6. *Si $X \neq X'$ o $Y \neq Y'$, entonces* $\mathrm{Hom}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}(X', Y') = \emptyset$.

7. *Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ existe un morfismo $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ tal que $f1_X = f$ y $1_X g = g$, para todo $f : X \to Y$ y $g : Z \to X$.*

No es difícil probar que el morfismo 1_X es único para cada objeto X de $\mathcal{C}$. Además se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña si tanto $Ob\,\mathcal{C}$ como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}$ son conjuntos. A las categorías pequeñas es posible estructurarlas como una categoría llamada **Cat**. De la anterior definición se puede interpretar que en algunas categorías, los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones y si bien eso es cierto en algunas ocasiones, no siempre es así, los siguientes son ejemplos de ambos casos.

Ejemplo 1.2.2. 1. *La clase de todos los conjuntos junto con las funciones donde la composición de morfismos es la composición usual de funciones, son una categoría denotada con* ***Set****.*

2. *Los grupos junto con los homomorfismos de grupos forman una categoría que se suele notar por* ***Gr****. De igual forma se puede formar la categoría de los anillos* ***Ring****, y la de los módulos de un anillo Λ,* $\boldsymbol{\Lambda}$***-Mod****.*

3. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría se puede definir la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ donde $Ob\,\mathcal{C}^{op} = Ob\,\mathcal{C}$ y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

4. *Si G es un monoide (o un grupo), se puede definir la categoría $\mathcal{G}$ donde $Ob\,\mathcal{G} = G$ y cada elemento de $a \in G$ es un morfismo; la composición de morfismos es la operación del monoide y el morfismo identidad es la identidad del monoide.*

Se pasará ahora a definir tres tipos importantes de objetos y uno de morfismos. Estos son generalizaciones de conceptos comunes tales como homomorfismo trivial, grupo o módulo trivial y conjunto vacío.

Definición 1.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, un objeto X se dice* ***inicial*** *si $|\mathrm{Hom}(X, Y)| = 1$ para todo objeto Y de $\mathcal{C}$. Por otra parte si $|\mathrm{Hom}(Y, X)| = 1$ de nuevo para todo $Y \in Ob\,\mathcal{C}$ se dice que X es un objeto* ***final****.*

Definición 1.2.4. *Un objeto X de una categoría $\mathcal{C}$ se dice* ***objeto cero*** *si es inicial y final.*

Definición 1.2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ se dice* ***cero a izquierda*** *si para todo $Z \in Ob\mathcal{C}$ y todo $g, h \in \mathrm{Hom}(Z,X)$, $fg = fh$. De manera similar un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ se dice* ***cero a derecha*** *si para todo $Z \in Ob\mathcal{C}$ y todo $g, h \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$, $gf = hf$. Por último, si f es un morfismo cero a derecha e izquierda, se dice que es un* ***morfismo cero*** *y se nota por 0_{XY}.*

De la propiedad asociativa de morfismos se puede deducir que la composición de dos morfismos cero 0_{XY} y 0_{YZ} es el morfismo cero 0_{XZ}. Una forma equivalente de definir un morfismo cero en una categoría con objeto cero es diciendo que $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ lo es, si y sólo si es posible factorizarlo a través del objeto cero. Es decir, si 0 es el objeto cero de $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Una prueba de lo anterior se puede ver en la demostración de la proposición 1.3.5 de [13].

Nota. Si f y g son dos morfismos tales que $gf = 0$, no necesariamente uno de los dos es cero. Por ejemplo, en **Gr** sea $f \in \mathrm{End}\,\mathbb{Z}_4$ descrito de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[uur] & 2 \\ 3 \arrow[ur] & 3 \end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que $f^2 = 0$ pues $f(n) = 0, 2$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ y en cualquiera de los dos casos al volver a evaluar da 0, que es elemento cero de la categoría de los grupos, pero $f \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
1 \arrow[dr] & 1 \arrow[dr] & 1 \\
2 \arrow[uur] & 2 \arrow[uur] & 2 \\
3 \arrow[ur] & 3 \arrow[ur] & 3
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.2.6. *1. En **Set** el elemento inicial es el conjunto vacío, si f es una función que tiene por dominio el conjunto vacío y por codominio algún conjunto A, f puede ser vista como un subconjunto del producto cartesiano $\emptyset \times A$ que es de nuevo el conjunto vacío, que al ser único prueba que f es la única función del conjunto vacío al conjunto A. Los elementos finales de **Set** son los conjuntos de un elemento. En este caso **Set** no tiene objeto cero.*

*2. En **Ring**, la categoría de los anillos con unidad, $\mathbb{Z}$ es el objeto inicial, en efecto sean R un anillo con identidad y $f : \mathbb{Z} \to R$ definida así*

$$\begin{cases} f(n) = \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{n\text{-veces}} & n > 0 \\ f(n) = \underbrace{-1_R - 1_R - \cdots - 1_R}_{n\text{-veces}} & n < 0 \\ f(n) = 0_R & n = 0. \end{cases}$$

*Se ve que en efecto f es un homomorfismo de anillos con identidad, basta probar que es único. Sea $g : \mathbb{Z} \to R$ un homomorfismo de anillos con identidad; entonces $g(1) = 1_R$ y $g(0) = 0_R$, además $g(-1) = -1_R$, esto muestra que $f = g$. Luego f es único y $\mathbb{Z}$ es el objeto inicial de **Ring**. El objeto final de esta categoría es el anillo trivial.*

*3. El objeto cero de la categoría **Gr** es el grupo trivial. De la misma manera,fijando un anillo con unidad Λ, la categoría Λ-**Mod** tiene objeto cero, el módulo trivial.*

Se puede ver hasta ahora que lo importante en una categoría no son los objetos o la naturaleza de estos, sino los morfismos. Una noción útil en la teoría de categorías es la de propiedad universal, un objeto de una categoría el cual sus morfismos tienen una cierta propiedad cumple con una propiedad universal si para cualquier otro objeto para el cual sus morfismos cumplen con la misma propiedad que el primero, existe un único morfismo que los relaciona compatible con tal propiedad en común. A lo largo del trabajo se usarán algunos ejemplos de objetos con propiedades universales: el kernel de un morfismo, el cokernel, la suma directa de objetos y el producto de objetos.

Definición 1.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ se dice* ***monomorfismo*** *si para $g, h \in \operatorname{Hom}(Z, X)$, se tiene que si $fg = fh$, entonces $g = h$. Por otra parte, $f' \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ se dice* ***epimorfismo*** *si para $g', h' \in \operatorname{Hom}(Y, Z)$, si $g'f' = h'f'$, entonces $g' = h'$.*

Ejemplo 1.2.8. *La nota de la definición 1.2.5 dice que en general, si la composición de dos morfismos es el morfismo cero, puede que ninguno de los dos morfismos sea cero. Lo último se cumple, siempre y cuando el primer morfismo que actúe sea un epimorfismo. En efecto, si $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ es un epimorfismo no cero, tal que $gf = 0$, entonces se tiene que $gf = 0f$, pero como f es un epimorfismo, entonces $g = 0$.*

Una prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en las páginas 24 y 27 de [4].

Proposición 1.2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, entonces:*

1. *Todo morfismo identidad es epimorfismo y monomorfismo.*
2. *La composición de dos monomorfismos es monomorfismo y la composición de dos epimorfismos es epimorfismo.*
3. *Si la composición $k \circ f$ es monomorfismo, entonces f lo es. Si la composición $k \circ f$ es epimorfismo, entonces k lo es.*

Definición 1.2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sean $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, $g \in \operatorname{Hom}(Y, X)$. Si $gf = 1_X$, entonces f se dice que es una* ***sección*** *de g y g se dice que es una* ***retracción*** *de f.*

La siguiente proposición es una consecuencia directa de la proposición 1.2.9.

Proposición 1.2.11. *Toda sección es un monomorfismo y toda retracción, un epimorfismo.*

Definición 1.2.12. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$; f se dice un* ***isomorfismo*** *si existe $g \in \operatorname{Hom}(Y, X)$ tal que*

$$gf = 1_X, \quad fg = 1_Y.$$

A g se le llama el ***inverso*** *de f y viceversa, además en este caso se dice que X es* ***isomorfo*** *a Y.*

Se puede ver que dos objetos iniciales, finales o cero (si existen) son isomorfos. En efecto, sean I_1 y I_2 dos objetos iniciales, se tiene de la definición 1.2.1 que cada conjunto $\operatorname{Hom}(X, X)$ debe tener al menos un elemento, 1_X; como tanto I_1 como I_2 son iniciales, entonces el único morfismo de I_1 en I_1 es justamente 1_{I_1}, de igual manera para I_2; entonces si $f \in \operatorname{Hom}(I_1, I_2)$ y $g \in \operatorname{Hom}(I_2, I_1)$, $gf = 1_{I_1}$ y $fg = 1_{I_2}$, luego 1_{I_1} y 1_{I_2} son isomorfos. De igual manera se procede para objetos finales y objetos cero.

Proposición 1.2.13. *Si $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ tiene inverso, este es único.*

Demostración. Sean $g, h \in \text{Hom}(Y, X)$ inversos de f, entonces

$$g = 1_X g = hfg = h1_Y = h.$$

$\square$

Se puede ver que algunas de las propiedades de las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas son iguales a las de los monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos respectivamente, y más aun, para algunas categorías, como por ejemplo **Gr**, **Λ-Mod** y **Set**, los conceptos respectivos son equivalentes. Pero este no siempre es el caso. Por ejemplo, si bien los homomorfismos sobreyectivos de anillos son epimorfismos, no todo epimorfismo en **Ring** es sobreyectivo, tal es el caso de la inclusión $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Para una prueba de esto, leer los ejemplos 1.7.7 y 1.8.5 de [4] y la sección 1.2 de [13].

Definición 1.2.14. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$, a la pareja (E, η) se le llama **igualador** de f y g, donde E es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\eta \in \text{Hom}(E, X)$ es tal que $f\eta = g\eta$ que cumplen además con la siguiente propiedad universal. Si $E' \in Ob\,\mathcal{C}$ y $\eta' \in \text{Hom}(E', X)$ cumplen también que $f\eta' = g\eta'$ entonces existe un único morfismo $\lambda \in \text{Hom}(E', E)$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ E' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\eta'"'] & & \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.15. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$, a la pareja (C, υ) se le llama **coigualador** de f y g, si C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\upsilon \in \text{Hom}(Y, C)$ tales que $\upsilon f = \upsilon g$ y cumplen con la siguiente propiedad universal: si $C' \in Ob\,\mathcal{C}$ y $\upsilon' \in \text{Hom}(Y, C')$ cumplen también que $\upsilon' f = \upsilon' g$ entonces existe un único morfismo $\mu \in \text{Hom}(C, C')$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[dr, "\upsilon'"'] & C \arrow[d, "\mu"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.16. *Sea $f \in \text{Hom}(X, Y)$ un morfismo en $\mathcal{C}$, el **kernel** de f es el igualador (K, κ) de f con el morfismo cero. De manera dual, el **cokernel** de f es el coigualador (Ck, κ') de f con el morfismo cero.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{XY}"'] & Y \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{XY}"'] & Y \arrow[r, "\kappa'"] & Ck \end{tikzcd}$$

Nota. En lo que sigue, cuando se hable de kernel o cokernel se hace referencia indistintamente, dependiendo del contexto, al objeto o al morfismo que los componen.

Definición 1.2.17. *Un monomorfismo se dice **normal**, si es el kernel de algún morfismo y un epimorfismo se dice **conormal** si es el cokernel de algún morfismo.*

Cabe anotar que las definiciones anteriores no son garantía de que tales morfismos y objetos existan. Los ejemplos de categorías donde existen morfismos sin kernel no hacen parte de las que en este trabajo se estudian (categoría de fibrados tangentes, categoría de módulos proyectivos), sin embargo, a continuación se dan ejemplos de las definiciones anteriores.

Ejemplo 1.2.18.

1. *En la categoría **Set** (como en algunas de las categorías concretas) el igualador de dos funciones $f, g : A \to B$ es el conjunto $I = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$, de hecho el nombre de igualador se inspira en este ejemplo.*

2. *Todo kernel es un monomorfismo, en efecto, sea (K, κ) el kernel de un morfismo $f : X \to Y$, y suponga que existen $g, h : C \to K$ tales que $\kappa g = \kappa h$, se tiene entonces por definición de kernel que $(f\kappa)g = 0 = (f\kappa)h$. Como $\kappa g, \kappa h : C \to X$ de la propiedad universal de (K, κ) se tiene que existe un único $p : C \to K$ tal que $\kappa p = \kappa g = \kappa h$ y se concluye entonces por la unicidad de p que $g = p = h$.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{XY}"'] & Y \\ C \arrow[u, shift left, "g"] \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, "\kappa g = \kappa h"'] & & \end{tikzcd}$$

   De manera más general y utilizando los mismos argumentos, se puede probar que todo igualador es un monomorfismo. Más aún, y de forma dual se tiene que todo coigualador es un epimorfismo y en particular, todo cokernel es un epimorfismo.

3. *En la categoría de los grupos (y algunas que se desprenden de esta) el kernel y el cokernel de homomorfismos concuerdan con las definiciones acá dadas de estos conceptos desde el punto de vista de la teoría de categorías, excepto claro en los casos no conmutativos.*

4. *La normalidad y conormalidad de los morfismos viene de la categoría de los grupos porque en esta, el cokernel es posible solo si la imagen de un homomorfismo $f : G \to H$ es un subgrupo normal de H, (los homomorfismos de grupos no preservan normalidad). Esta restricción se desvanece en las categorías cuyos objetos son grupos abelianos.*

Definición 1.2.19. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y suponga que se tiene una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{Hom}(X, Y)$ para todo $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}$ que satisface:*

1. *Si $f \sim g$ entonces $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.*

2. *Si $f \sim g$ y $h \sim r$, y además fh está definido, se tiene que $fh \sim gr$.*

Entonces la ***categoría cociente*** *$\mathcal{Q} = {}^{\mathcal{C}}/_{\sim}$ es una categoría donde los objetos son los mismos de $\mathcal{C}$ y los morfismos, para X, Y son las clases de equivalencia de los morfismos de X a Y en $\mathcal{C}$.*

En efecto $\mathcal{Q}$ es una categoría; la composición de dos morfismos $[f]$ y $[g]$ es $[f][g] = [fg]$ donde $[f], [g]$ son las clases de equivalencia de f y g respectivamente. Se puede seguir directamente de la definición anterior que un grupo cociente es en verdad la categoría cociente de la categoría definida en el ítem 4 del ejemplo 1.2.2. Más aun, existe un funtor (definición 1.2.20) que a cada objeto lo envía en sí mismo y a cada morfismo lo envía en su clase de equivalencia, este funtor es pleno, en el sentido de la definición 1.2.28. El homomorfismo canónico en teoría de grupos, es una versión de este funtor.

Definición 1.2.20. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$ categorías. Un* ***funtor covariante*** $\mathbf{F}$ *es una asignación $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ que satisface:*

1. *Si $X \in \mathcal{C}$ entonces $\mathbf{F}(X) \in \mathcal{G}$.*

2. *Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ entonces $\mathbf{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathbf{F}(X), \mathbf{F}(Y))$.*

3. *Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ entonces $\mathbf{F}(gf) = \mathbf{F}(g)\mathbf{F}(f)$.*

4. $\mathbf{F}(1_X) = 1_{\mathbf{F}(X)}$.

Nota. Si un funtor F es tal que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ entonces $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(Y), F(X))$ y si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ entonces $F(gf) = F(f)F(g)$, F se conoce como **funtor contravariante**.

Definición 1.2.21. *Una categoría $\mathcal{C}$ se dice una categoría* ***preaditiva*** *si para cada par de objetos X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ tiene estructura de grupo abeliano y además a composición de morfismos es bilineal es decir, si $f, f' \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ y $g, g' \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$:*

$$g(f + f') = gf + gf' \quad y \quad (g + g')f = gf + g'f.$$

De forma más general se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría ***Λ-lineal*** *si para cada par de objetos X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ tiene estructura de Λ-módulo y la composición de morfismos es Λ-bilineal.*

Definición 1.2.22. *Una categoría preaditiva se dice* ***aditiva*** *si:*

1. *Posee sumas directas y productos finitos de objetos (biproductos).*

2. *Tiene objeto cero.*

Nota. Es posible probar (proposición 1.2.4 de [5]) que si una categoría preaditiva tiene sumas directas finitas, entonces tiene productos finitos, es decir tiene biproductos finitos, luego el ítem 1 de la definición anterior puede ser reemplazado con solamente sumas directas finitas. De la misma manera se puede proceder si se parte de una categoría Λ-lineal.

Definición 1.2.23. *Una categoría aditiva se dice **abeliana**, si*

1. *Cada morfismo tiene kernel y cokernel.*
2. *Todos los monomorfismos son normales y los epimorfismos conormales.*

Definición 1.2.24. *Una categoría aditiva Λ-lineal $\mathcal{C}$ con Λ un anillo conmutativo se dice **krull-Schmidt** si cada objeto no cero se descompone en suma directa de objetos que tienen anillos locales de endomorfismos.*

Nota. Si se supone que $\Lambda = k$, un cuerpo, entonces $\mathrm{Hom}(X, Y)$ es un espacio vectorial y los objetos en los que se descompone un objeto A tienen ahora álgebras locales de endomorfismos. En algunos textos se agrega la condición que $\mathrm{Hom}(X, Y)$ debe ser finitamente generado (de dimensión finita si $\Lambda = k$ un cuerpo).

Ejemplo 1.2.25. *No es difícil verificar que la categoría de los módulos finitamente generados de un álgebra Λ, $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ es una categoría aditiva, más aún, gracias al corolario 1.1.25 y al teorema de krull-Schmidt (1.1.28) se verifica que $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ es una categoría krull-Schmidt.*

Definición 1.2.26. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$ dos categorías preaditivas, un funtor F covariante se dice **aditivo** si para cada par de objetos X, Y, el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(X), F(Y))$ es un homomorfismo de grupos.*

Definición 1.2.27. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ covariante, se dice que F es **fiel**, si para cada par de objetos X, Y, el homomorfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(X), F(Y))$ es inyectivo.*

Definición 1.2.28. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ covariante, se dice que F es **pleno**, si para cada par de objetos X, Y, el homomorfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(X), F(Y))$ es sobreyectivo.*

Definición 1.2.29. *Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ se dice **denso**, si para cada $Y \in \mathcal{G}$ existe un $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong Y$.*

Definición 1.2.30. *Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ dos funtores, una **transformación natural** $\Phi : F \to G$, es una familia $\Phi = \{\Phi_X\}_{X \in \mathcal{C}}$ de morfismos $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ en $\mathcal{G}$ tal que para cualquier $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.31. *Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$ se dicen **equivalentes** (isomorfas) si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ y $G : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ tales que $FG \cong 1_{\mathcal{G}}$ y $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$.*

La siguiente proposición es una caracterización de los funtores equivalencia, que relaciona su definición con las definiciones de funtor fiel, pleno y denso. Su demostración se puede encontrar en [1].

Proposición 1.2.32. *Un funtor covariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ *es una equivalencia categórica si y solo si es fiel, pleno y denso*

2 Teorema de Equivalencia, forma clásica

Este capítulo está dedicado a presentar la teoría clásica de representaciones de álgebras: las definiciones y resultados básicos, pero principalmente el teorema de equivalencia entre la categoría de los módulos a derecha de un álgebra de caminos de un cierto carcaj y la categoría de representaciones de ese mismo carcaj. Este capítulo se basa en su totalidad en los capítulos II y III de [1] y las secciones 2 y 3 de [10], algunas demostraciones son omitidas.

2.1. Definiciones básicas

El propósito del presente capítulo es hacer una introducción rápida y eficiente de la teoría clásica de representaciones. Si el lector desea profundizar en esta teoría y ver con detalle cada demostración es bueno que lea [10], [1] y [15] para tal propósito. Se empieza definiendo objetos básicos de la teoría y algunas de sus propiedades y caracterizaciones más importantes.

Definición 2.1.1. *Un **carcaj** (quiver en inglés) es una cuádrupla $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ donde Γ_0 se denomina **conjunto de vértices** y Γ_1,conjunto de flechas, $s, t : \Gamma_1 \to \Gamma_0$ son funciones tales que a cada flecha α, s asigna el vértice donde esta "empieza" (source) y t, donde "termina" (target).*

Nota. De la definición anterior se puede deducir que un carcaj describe de manera formal un grafo orientado. No se usa esta denominación aquí para evitar mezclar conceptos y resultados de la matemática discreta, además la definición de carcaj no restringe entre número de vértices, de flechas entre los vértices o existencia de ciclos, conceptos que están restringidos en el concepto tradicional de grafo orientado. Por otra parte y haciendo uso de la intuición de grafo, si una flecha α une dos vértices a, b es posible representarla así:

$$\alpha : a \longrightarrow b$$

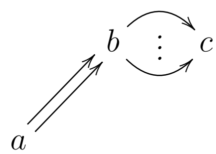
Y es más sencillo de esta forma ver las imágenes de s y t que en este caso son: $s(\alpha) = a$ y $t(\alpha) = b$.

Ejemplo 2.1.2. *1.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 4 \end{tikzcd}$$

Acá $\Gamma_0 = \{1,2,3,4\}$*,* $\Gamma_1 = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ *y, por ejemplo* $s(\gamma) = 2 = t(\gamma)$*.*

2.



Acá $\Gamma_0 = \{a,b,c\}$*, y existen infinitas flechas que unen al vértice* b *con* c*.*

Definición 2.1.3. *Un* ***subcarcaj*** $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, s', t')$ *de un carcaj* Γ*, es un carcaj tal que* $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$*,* $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma_1$ *y las restricciones de* s t *a* Γ'_1 *son justamente* s' *y* t'*. Por otra parte,* Γ' *se dice* ***pleno*** *si para cada vértice* α *en* Γ'_0 *empiezan y terminan la misma cantidad de flechas que lo hacen viendo a* α *como vértice en* Γ_0*.*

Se dice también que un carcaj es **finito** si tanto Γ_0 como Γ_1 lo son. Buena parte de la teoría se centra en carcajes finitos, o al menos localmente (en algunos casos) ya que estos se utilizan para representar álgebras de dimensión finita. Por otra parte, se denota por $\bar{\Gamma}$ al **carcaj subyacente**, que corresponde al grafo no orientado.

El primer concepto central dentro de la teoría de representaciones de álgebras es el de álgebra de caminos, para esto, se introduce el concepto de camino en un carcaj que recuerda al de caminata en teoría de grafos y que permite dotar a las flechas de un carcaj y sus composiciones con estructura de álgebra, este mismo concepto se usa más adelante para definir la categoría de caminos (definición 3.1.1) y poder transcribir los resultados que se presentan en este capítulo a la teoría de categorías.

Definición 2.1.4. *Sea* Γ *un carcaj, un* ***camino*** *es una sucesión de flechas* $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_1$ *tales que* $t(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ *para* $1 \leq t \leq n-1$*.*

Si bien es posible, dependiendo del carcaj, considerar sucesiones infinitas de flechas, se verá más adelante que tiene más sentido tomar sucesiones finitas, esto con el fin de poder dotar al carcaj y los caminos de la estructura de álgebra. Ya con esto, se dice que un camino es de longitud n si está compuesto de n flechas; de donde se deduce que toda flecha de Γ es un camino de longitud 1. Por otra parte, de nuevo por cuestiones técnicas, se considera que existe por cada vértice x de Γ un camino de longitud cero ϵ_x, que no se representa gráficamente cuando se dibuja el carcaj, esto para evitar confusiones con los posibles caminos de longitud 1 que parten y llegan de los vértices, como sucede con el vértice 2 en el carcaj del numeral 1 del ejemplo 2.1.2.

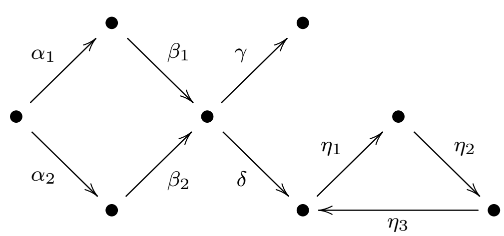
Si $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_1$ se pueden generalizar las funciones s y t de la definición 2.1.1 diciendo que $s(\alpha) = s(\alpha_1)$ y $t(\alpha) = t(\alpha_n)$. También, si p es un camino de longitud positiva donde $s(p) = t(p)$ se dice que p es un **ciclo orientado**. Por último Γ se dice conexo si el carcaj subyacente lo es.

Definición 2.1.5. *Sean Γ un carcaj y k un cuerpo, una **relación** σ es una combinación lineal formal de caminos de al menos longitud dos $p_1, \cdots, p_n$ con coeficientes en k*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i.$$

*Donde $s(p_1) = s(p_2) = \cdots = s(p_n)$ y $t(p_1) = t(p_2) = \cdots = t(p_n)$. Si $I = \{p_1, \cdots, p_n\}$, entonces a la pareja (Γ, I) se le conoce como un **carcaj con relaciones**.*

Ejemplo 2.1.6. *Sea Γ el siguiente carcaj:*



Si por ejemplo $k = \mathbb{R}$, las siguientes son relaciones en Γ: $3\beta_1\alpha_1 + 8\beta_2\alpha_2$, $2\eta_2\eta_1 - \eta_2\eta_1\eta_3\eta_2\eta_1$. Por otra parte $5\gamma + 3\alpha_2\beta_2$, no es una relación en Γ.

La siguiente es la definición central no solo de este capítulo sino de todo el trabajo, a partir de esta se permite poder representar toda álgebra de dimensión finita.

Definición 2.1.7. *Sean Γ un carcaj finito, k un cuerpo y $\mathfrak{B}$ el conjunto de todos los caminos de Γ, se denota por $k\Gamma$ el k-espacio vectorial cuya base es $\mathfrak{B}$. Ahora se define el producto de elementos de $\mathfrak{B}$ de la siguiente manera, si $\sigma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ y $\rho = \beta_s \cdots \beta_1$ son caminos en Γ, entonces:*

$$\sigma\rho = \begin{cases} \beta_s \cdots \beta_1 \alpha_n \cdots \alpha_1, & \text{si } t(\sigma) = s(\rho) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nota. La multiplicación en $k\Gamma$ no es más que la concatenación de caminos en tanto puedan ser concatenados, es decir si σ y ρ son caminos y además el vértice donde acaba σ es el mismo donde empieza ρ ($t(\sigma) = s(\rho)$), su producto es el camino formado desde donde empieza σ hasta donde termina ρ, si eso no ocurre, su producto es cero. Por otra parte es inmediato que ϵ_x, para todo $x \in \Gamma_0$ es idempotente.

De la definición anterior se ve que el producto de elementos de $\mathfrak{B}$ es un elemento de $\mathfrak{B}$, además, extendiendo ese producto por linealidad a los elementos de $k\Gamma$ se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.1.8. *Sea Γ un carcaj. Tomando el producto como en la definición anterior, $k\Gamma$ es un álgebra con unidad (la unidad se tiene si Γ es finito) no necesariamente conmutativa, que se denomina* ***álgebra de caminos sobre*** *k o solamente álgebra de caminos.*

Demostración. La verificación de las propiedades del producto en $k\Gamma$ es sencilla pero tediosa, los detalles no se harán acá. Lo que se va a probar es, que en efecto si Γ es finito existe unidad la cual es:

$$1 = \sum_{x \in \Gamma_0} \epsilon_x.$$

Para tal propósito sea $w \in \mathfrak{B}$ tal que $s(w) = x$ y $t(w) = y$, se tiene entonces que $\epsilon_y w = w$ y $\epsilon_z w = 0$ si $z \neq y$, entonces:

$$\begin{aligned} 1w &= \sum_{z \in \Gamma_0} \epsilon_z w \\ &= \epsilon_y w + \sum_{\substack{z \in \Gamma_0 \\ z \neq y}} \epsilon_z w \\ &= \epsilon_y w + 0 \\ &= w. \end{aligned}$$

De forma similar se prueba que $w\epsilon_x = w$ y $w\epsilon_z = 0$ si $z \neq x$. Se extiende la prueba a todo elemento de $k\Gamma$ por linealidad. $\square$

El teorema no es válido si el carcaj no es finito, pues si suponemos que Γ es infinito y $1w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$, con $\lambda_i \in k$, se tiene entonces que existen a lo más m diferentes vértices de partida de los caminos w_i, es decir el conjunto Γ_0' de los vértices que son salida de estos caminos, es finito y si $x \in \Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$, entonces $1\epsilon_x = 0$ lo que es una contradicción. En $k\Gamma$ existen otros elementos idempotentes diferentes de los triviales. Por ejemplo si $\alpha \in \Gamma_1$ y $s(\alpha) \neq t(\alpha)$, $\epsilon_x + \alpha$ es un idempotente, en efecto:

$$\begin{aligned} (\epsilon_x + \alpha)^2 &= \epsilon_x^2 + \epsilon_x \alpha + \alpha \epsilon_x + \alpha^2 \\ &= \epsilon_x + 0 + \alpha + 0 \\ &= \epsilon_x + \alpha. \end{aligned}$$

2.2. Propiedades y características de $k\Gamma$

Esta sección está dedicada a presentar las características más importantes del álgebra de caminos de un carcaj. Las pruebas de los resultados presentados se encuentran con detalle en [1], acá se presentarán las ideas de ellas. Lo importante de esta sección y de este capítulo en general es presentar el alcance teórico de $k\Gamma$, entre otras cosas porque con esta álgebra es posible, bajo ciertas condiciones, caracterizar todas las álgebras de dimensión finita, además el estudio de los módulos de $k\Gamma$ es de una gran riqueza teórica y por último, las representaciones de Γ tienen una conexión estrecha con $k\Gamma$ y con sus módulos y son en algún sentido las extensiones de los resultados que se presentarán en esta sección.

Proposición 2.2.1. *Sea Γ un carcaj y $k\Gamma$ su álgebra de caminos. Entonces $k\Gamma$ es de dimensión finita si y solo si Γ es acíclico y finito.*

Demostración. Si Γ_0 es infinito, entonces existen infinitos caminos triviales, por lo tanto la base de $k\Gamma$ será infinita, esto es, $k\Gamma$ será de dimensión infinita. Por otra parte, si existe un ciclo $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, p^n es de nuevo un camino no cero en Γ y de nuevo la base de $k\Gamma$ es infinita.
Ahora, si Γ es acíclico y finito, existen entonces un número finito de caminos y por tanto $k\Gamma$ es de dimensión finita. $\square$

El siguiente es un resultado que une los conceptos de álgebra conexa (definición 1.1.17) y carcaj conexo.

Lema 2.2.2. *Sea Γ un carcaj, $k\Gamma$ es conexo si y solo si Γ lo es.*

Teorema 2.2.3. *Sean Γ un carcaj conexo y finito y A una k-álgebra asociativa con identidad, para cualquier par de funciones $\phi_0 : \Gamma_0 \to A$ y $\phi_1 : \Gamma_1 \to A$ que satisfacen las siguientes condiciones*

1. $1 = \sum_{x \in \Gamma_0} \phi_0(x)$, $\phi_0(x)^2 = \phi_0(x)$ *y* $\phi_0(x)\phi_0(y) = 0$ *si* $x \neq y$.

2. *Si* $\alpha : x \to y$, *entonces* $\phi_1(\alpha) = \phi_0(y)\phi_1(\alpha)\phi_0(x)$.

Entonces existe un único homomorfismo de k-álgebras $\phi : k\Gamma \to A$ tal que $\phi(\epsilon_x) = \phi_0(x)$ y $\phi(\alpha) = \phi_1(\alpha)$.

En pocas palabras, el teorema anterior dice que $k\Gamma$ cumple con una especie de propiedad universal dentro de la categoría de las álgebras de un cuerpo k. De todo lo anterior se puede decir que $k\Gamma$ es un álgebra conexa, de dimensión finita, básica y que el ideal generado por las flechas es su radical (proposición II.1.10 de [1]). Se tiene también el siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Sea Γ un carcaj finito y acíclico. Sea $\Gamma_0 = \{1, 2, \cdots, n\}$ una numeración de los vértices de Γ tal que $j \leq i$ en tanto exista un camino de i a j en Γ. Entonces $k\Gamma$ es isomorfa a la siguiente álgebra triangular de matrices*

$$\begin{pmatrix} 1_1(k\Gamma)1_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1_2(k\Gamma)1_1 & 1_2(k\Gamma)1_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1_n(k\Gamma)1_1 & 1_n(k\Gamma)1_2 & \cdots & 1_n(k\Gamma)1_n \end{pmatrix}$$

Este lema da una expresión explícita para $k\Gamma$, con solo mirar el carcaj (en tanto cumpla las condiciones del lema). Se tienen entonces los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.5. 1. *Si Γ no tiene múltiples flechas, es decir, de cada vértice entra o sale (que se cumplan los dos casos es permitido) a lo más un flecha como en este carcaj*

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$$

entonces $\dim 1_i(k\Gamma)1_j = 1$ para todo $i, j = 1, 2, 3$ pues las flechas intermedias del camino de 3 a 1 no son de la forma $1_i(a)1_j$ con $a \in k\Gamma$, luego en este caso $k\Gamma \cong \mathbb{T}_3(k)$. Esto se puede ampliar a carcajes de la forma anterior con un número n de vértices y en ese caso $k\Gamma \cong \mathbb{T}_n(k)$.

2. *De existir múltiples flechas de un vértice a otro, la dimensión de $1_i(k\Gamma)1_j$ es entonces el conteo de caminos de un vértice a otro haciendo al teorema anterior de gran utilidad práctica pues escribir el álgebra de matrices a la cual $k\Gamma$ es isomorfo se reduce a hacer conteo de caminos, en tanto claro, Γ cumpla con las condiciones del lema. Por ejemplo si Γ es el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] & 4 \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

Entonces

$$k\Gamma \cong \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ k^2 & k^2 & k & k \end{pmatrix}$$

El lema anterior es útil en el estudio de conjuntos parcialmente ordenados pues, si son finitos es posible estudiar varias propiedades de estos e incluso tiene repercusión en aplicaciones sabiendo la forma en que se puede escribir $k\Gamma$ pues en este caso los conjuntos parcialmente ordenados (si son árboles) cumplen con las condiciones del teorema anterior o al menos sub-posets conexos.

2.3. Representaciones de un carcaj

Para concluir este capítulo, se dará la definición de representación de un carcaj y se enunciará el teorema de equivalencia. En este caso no se dará la demostración pero puede ser encontrada con todo detalle en la sección 3 de [10].

Definición 2.3.1. *Sea Γ un carcaj no necesariamente finito, una* ***representación*** *de Γ es una colección de k-espacios vectoriales $\{V_x\}_{x\in\Gamma_0}$ junto con una colección de transformaciones lineales $\{f_\alpha : V_x \to V_y\}$ para toda flecha $\alpha : x \to y$. Además se dice que una representación es de* ***dimensión finita*** *si para todo $x \in \Gamma_0$, $\dim_k V_x < \infty$.*

Definición 2.3.2. *Un* ***morfismo*** *entre dos representaciones (V, f) y (V', f') es una colección de transformaciones lineales $\{\phi_x : V_x \to V'_x\}_{x\in\Gamma_0}$ tales que para cada $\alpha \in \Gamma_1$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & V'_x \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V_y \arrow[r, "\phi_y"'] & V'_y \end{tikzcd}$$

Es sencillo probar que la colección de todas las representaciones (de dimensión finita) de un carcaj finito forman una categoría que se denomina $rep\Gamma$.

Ejemplo 2.3.3. *1. Sea Γ el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "\alpha"] & \\ y \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & & z \\ & w \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Si $k = \mathbb{R}$, se puede, por ejemplo, asignar a los vértices x y y el espacio vectorial $\mathbb{R}$ y a los vértices z y w el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Si además, a las flechas de Γ se le asignan las transformaciones lineales como se muestra en el siguiente diagrama, una representación de Γ puede ser

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "{[8]}"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}"'] & & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbb{R}^2 \arrow[ur, "\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$

2. Sea ahora Γ el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & y \end{tikzcd}$$

y además se considera la siguiente representación M

$$\begin{tikzcd} k^3 \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, "\left[\begin{smallmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right]"'] & k^3 \end{tikzcd}$$

Donde la matriz J es nilpotente y se toma en este caso la base canónica de k^3. Para encontrar un morfismo de esta representación en sí misma se deben encontrar transformaciones lineales f_1 y f_2 tales que los siguientes diagramas conmuten

$$\begin{tikzcd} k^3 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "J"] & k^3 \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "J"] \\ k^3 \arrow[r, "f_2"'] & k^3 \end{tikzcd}$$

Es decir matrices 3×3 que cumplan: $f_1 \cdot 1 = 1 \cdot f_2$ y $f_1 \cdot J = J \cdot f_2$. La primera igualdad implica que $f_1 = f_2$; de forma explícita se puede decir que

$$f_1 = f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ya con esto, la segunda igualdad se puede simplificar de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

De donde se puede concluir que $b = c = f = 0$, $a = e = i$ y $d = h$, por lo tanto todo morfismo de M en sí mismo es un par de matrices 3×3 f_1, f_2 de la forma

$$f_1 = f_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$$

Donde $a, d, g \in K$.

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en la sección 3.2, teorema 3.1 y proposición 3.1 de [10].

Teorema 2.3.4. *Sea Γ un carcaj finito y conexo. Entonces las categorías $rep\Gamma$ y $mod\, k\Gamma$ son equivalentes, donde $mod\, k\Gamma$ es la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita.*

Se dan por último un par de definiciones, la primera concierne a la idea de un carcaj donde se consideran también las flechas en sentido opuesto y la segunda es la de ideal admisible que es de amplia utilidad en lo que se trata en el siguiente capítulo.

Dado un carcaj Γ se puede definir un carcaj doble $\bar{\Gamma}$ de la siguiente manera:

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^{-1},$$

donde Γ^{-1} es de nuevo un carcaj de manera tal que $\Gamma_0^{-1} = \Gamma_0$ y $\Gamma_1^{-1} = \{\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_1\}$. Acá, α^{-1} es una flecha tal que $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ y $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$, es decir Γ^{-1} es un carcaj tal que tiene los mismos vértices de Γ y sus flechas son las mismas de Γ pero con sentido inverso. Se define también $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ y se extiende esta inversión de flechas de forma natural a los caminos en $k\Gamma$ de manera tal que $(w'w'')^{-1} = w''^{-1}w'^{-1}$ para caminos w' y w'' de largo positivo que puedan ser concatenados y además $\alpha_i^{-1}(w) = (\alpha_i(w))^{-1}$ si w es un camino de largo positivo e $i = 1, \cdots, l(w)$. Luego si Σ es un conjunto de caminos de largo positivo entonces se define $\Sigma^{-1} = \{\sigma^{-1} : \sigma \in \Sigma\}$.

Un camino ρ en Γ es una relación si $\rho \in \langle\Gamma_1\rangle^2$ (el ideal generado por las flechas de Γ),o de forma equivalente si es suma finita de concatenaciones de dos o más flechas seguidas. Un conjunto de relaciones R en $k\Gamma$ se dice admisible si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle\Gamma_1\rangle^n \subseteq \langle R\rangle \subseteq \langle\Gamma_1\rangle^2$.

Proposición 2.3.5. *Un ideal $I \subseteq \langle\Gamma_1\rangle^2$ es admisible si y solo si, para todo ciclo ρ en Γ existe $n \geq 1$ tal que $\rho^n \in I$.*

Demostración. Si I es admisible, entonces las contenencias $\langle\Gamma_1\rangle^n \subseteq I$ y $\langle\Gamma_1\rangle^k \subseteq \langle\Gamma_1\rangle^l$ si $k \geq l$ implican que para todo ciclo ρ en Γ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^m \in I$.

Ahora, si para todo ciclo ρ en Γ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^n \in I$, basta probar que $\langle \Gamma_1 \rangle^n \subseteq I$ para algún $n \geq 2$. En efecto, como se supone a Γ finito, si Γ_1 se compone únicamente de bucles, el resultado ya se tiene, si no, entonces existe un camino α que no sea un ciclo de longitud máximo $l \geq 1$, se tiene que $\langle \Gamma_1 \rangle^{l+1}$ se compone únicamente de combinaciones lineales de potencias de ciclos y por tanto $\langle \Gamma_1 \rangle^h \subseteq I$, siendo $h \geq l + 1$ lo suficientemente grande. $\square$

Nota. La hipótesis de que $I \subseteq \langle \Gamma_1 \rangle^2$ es necesaria para garantizar que I sea admisible, porque por ejemplo, en el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "\alpha"'] & & \\
b \arrow[dr, "\beta"'] & & d \arrow[ul, "\delta"'] & e \arrow[l, "\epsilon"'] \\
& c \arrow[ur, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si $I = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$, I contiene a todas las potencias de los ciclos del carcaj pero $I \nsubseteq \langle \Gamma_1 \rangle^2$.

Definición 2.3.6. *Sean A una k-álgebra de dimensión finita conexa y básica y $\{e_1, \cdots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de A. El **carcaj (ordinario)** de A denotado por Γ_A se define de la siguiente manera.*

1. *Los vértices de Γ_A son los números $1, 2, \cdots, n$ que están en correspondencia biyectiva con los idempotentes $e_1, \cdots, e_n$.*

2. *Dados dos vértiecs a y b de Γ_A, las flechas $\alpha : a \to b$ están en correspondencia biyectiva con los vectores en la base del espacio vectorial $e_a(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_b$.*

Como A se supone de dimensión finita, todos los espacios $e_a(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_b$ también lo son, por lo tanto $k\Gamma_A$ es de dimensión finita. Ahora, se tiene el siguiente teorema de representación de álgebras como las de la definición anterior cuya demostración se encuentra en el teorema I.3.7 de [1].

Teorema 2.3.7. *Sea A un álgebra con las condiciones de la definición anterior. Existe entonces un ideal admisible I de $k\Gamma_A$ tal que $A \cong k\mathbf{\Gamma}_A$.*

3 Representaciones Funtoriales

Este capítulo está dedicado al objetivo principal del presente trabajo, desarrollar la teoría de representaciones de álgebras desde un punto de vista categórico. Para esto se hace una reconstrucción de los objetos estudiados en el capítulo 2 pero desde la teoría de categorías, luego de esto se revisarán las propiedades categóricas de estos objetos, y para finalizar, se da una versión nueva del teorema 2.3.4. La esencia de este capítulo se encuentra en la sección 1 de [3] y los detalles de las demostraciones son del autor si bien las ideas de esas demostraciones se encuentran, entre otros lugares, en el capítulo III de [1], en [15] y en [2].

3.1. Categoría de Caminos y el Funtor Representación

Para iniciar, se dan los detalles de la construcción de los conceptos de álgebra de caminos y representación de un carcaj finito desde la teoría de categorías, construcción que está basada en la que se presenta en la sección 1 de [3]. En lo que sigue, un carcaj Γ se supone finito y conexo.

Definición 3.1.1. *Sea Γ un carcaj, la **categoría de caminos** de Γ, $k\Gamma$, es tal que:*

- *$Ob\, k\Gamma = \Gamma_0$.*
- *Si $x', x'' \in \Gamma_0$, $\mathrm{Hom}(x', x'')$ son todas las combinaciones k-lineales de caminos que empiezan en x' y terminan en x''.*

Nota. De ahora en adelante se denotará a $k\Gamma$ como una categoría y no como un álgebra.

En efecto, $k\Gamma$ es una categoría, donde la composición de morfismos está inducida por la composición de caminos en Γ y el morfismo identidad es el camino trivial de longitud cero 1_{x_0} definido para todo $x_0 \in \Gamma_0$. De nuevo, como en el capítulo 2, se definen relaciones en $k\Gamma$, y en particular un tipo especial de ellas llamadas admisibles; estas permiten adaptar la teoría de categorías de una manera adecuada a la teoría de representaciones de carcajes.

Un morfismo ρ en Γ es una relación si $\rho \in \langle \Gamma_1 \rangle^2$ (el ideal generado por las flechas de Γ), es decir, si pertenece al generado al cuadrado de las flechas de Γ como ideal de $k\Gamma$, o de forma equivalente si es suma finita de concatenaciones de dos o más flechas seguidas. Un conjunto de relaciones R en $k\Gamma$ se dice admisible si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle \Gamma_1 \rangle^n \subseteq \langle R \rangle \subseteq \langle \Gamma_1 \rangle^2$. Ahora se sigue con la construcción de una categoría denotada por $k\mathbf{\Gamma}$ con la se reconstruye el teorema (2.3.4) que es el objetivo principal de este trabajo.

Definición 3.1.2. *Sea Γ un carcaj y R un conjunto de relaciones admisible en $k\Gamma$. $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, R)$ es un* ***carcaj acotado*** *(admisible) y se denota por $k\mathbf{\Gamma}$ a la respectiva categoría cociente ${}^{k\Gamma}/_{\langle R \rangle}$.*

Ejemplo 3.1.3. *Sea Γ el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

El ideal $I_1 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ es admisible, en efecto para $n \geq 2$, $\langle \Gamma_1 \rangle^n = 0 \subseteq I_1$.

Se definen a continuación los caminos en $k\mathbf{\Gamma}$, para dar paso a la definición de representación funtorial.

Si $\rho \in \mathrm{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x', x'')$ se denota $s(\rho) = x'$ y $t(\rho) = x''$, también, se dice que $\mathbf{\Gamma}$ es monomial si R consiste de caminos. Suponga que $k\mathbf{\Gamma}$ es monomial, un camino σ en $\mathbf{\Gamma}$ es un camino en $k\Gamma$ que no pertenece a $\langle R \rangle$. Por último, si $x', x'' \in \Gamma_0$, $\mathrm{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x', x'')$ se define como el subespacio de $\mathrm{Hom}_{k\Gamma}(x', x'')$ generado por los caminos en $\mathbf{\Gamma}$ que empiezan en x' y terminan en x''.

Definición 3.1.4. *Un camino σ en $\mathbf{\Gamma}$ se dice* ***maximal*** *si no existen caminos σ', σ'' diferentes a σ en $\mathbf{\Gamma}$ tales que:*

1. *$s(\sigma') = t(\sigma)$ y $s(\sigma') = t(\sigma'')$.*
2. *$\sigma''\sigma\sigma'$ es un camino en $\mathbf{\Gamma}$.*
3. *$l(\sigma') + l(\sigma'') > 0$.*

Nota. Un camino es maximal si no puede ser *cubierto* por dos caminos no triviales. Debido a que se supone a Γ sin vértices aislados, se tiene que $l(\sigma) > 0$ para cualquier camino maximal σ en $\mathbf{\Gamma}$, es decir todos los caminos maximales son no triviales.

Ejemplo 3.1.5. *1. Sea Γ el siguiente carcaj:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, "\lambda"] & & 2 \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Si se toma $\sigma = \delta\gamma$. $\sigma' = \lambda$ *y* $\sigma'' = \alpha$ *se puede ver que* σ *no es un camino maximal.*

2. *Sea* Γ *el siguiente carcaj:*

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

En este caso, todos los caminos no triviales de sigma son maximales.

De ahora en adelante $\mathbf{\Gamma}$ es un carcaj acotado admisible. Se pasa ahora a definir lo que es una representación en $\mathbf{\Gamma}$ y a diferencia de como se hace en el capítulo 2, acá una representación es un funtor de la categoría $k\mathbf{\Gamma}$ a la categoría de los espacios vectoriales de k. Desde este punto es donde empieza a tomar sentido la construcción previa pues es necesario que $k\mathbf{\Gamma}$ tenga la estructura que tiene para que el funtor sea compatible con las propiedades esperadas descritas en el capítulo anterior.

Definición 3.1.6. *Una* ***representación*** *de* $\mathbf{\Gamma}$ *es un funtor* $M : k\mathbf{\Gamma} \to \operatorname{Mod} k$*, donde* $\operatorname{Mod} k$ *es la categoría de los* k*-espacios vectoriales. Este funtor es tal que* $M(x_0) \neq 0$ *sólo para un número finito de* $x_0 \in \Gamma_0$.

Nota. El hecho de que $M(x_0) \neq 0$ para un número finito de vértices de Γ es irrelevante si se toma a Γ finito. Además no se restringe que los espacios vectoriales sean de dimensión finita.

Se puede ver que una representación queda únicamente definida tanto por la colección $(M(x_0))_{x_0 \in \Gamma_0}$ de k-espacios vectoriales como por la colección $(M(\alpha))_{\alpha \in \Gamma_1}$ de transformaciones lineales; cabe recordar que los morfismos en $k\mathbf{\Gamma}$ son combinaciones lineales de caminos (que no están en $\langle R \rangle$) que a su vez están compuestos de flechas, luego para M es necesario asignar a cada flecha una transformación lineal conveniente y de esa manera M puede asignar a caminos en $k\mathbf{\Gamma}$, transformaciones lineales. Por otra parte una pareja de tales colecciones determina una representación en $\mathbf{\Gamma}$ si y sólo si $M(\rho) = 0$ para todo $\rho \in \langle R \rangle$.

Al igual que en la teoría clásica, las representaciones (en este caso las de $\mathbf{\Gamma}$) pueden ser vistas como una categoría a la que se notará por $Rep\mathbf{\Gamma}$ donde los objetos son los funtores representación y $\operatorname{Hom}(M, N)$ son las transformaciones naturales de M en N (definición 1.2.30), cabe anotar que como Γ se supone finito, $k\mathbf{\Gamma}$ es una categoría pequeña, y $Rep\mathbf{\Gamma}$ está bien definida (aclaración de la definición 1.3.1 y proposición 1.3.2 de [4]).

La composición de morfismos en $Rep\mathbf{\Gamma}$ está bien definida, en efecto, sean $F, G, H \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$, $\phi \in \operatorname{Hom}(F, G)$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}(G, H)$, se tiene entonces por definición el siguiente diagrama donde cada uno de los dos cuadrados es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[r, "\Theta_x"] \arrow[d, "G(f)"] & H(x) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(y) \arrow[r, "\Phi_y"'] & G(Y) \arrow[r, "\Theta_y"'] & H(y)
\end{tikzcd}$$

$x, y \in \Gamma_0$ y f es un camino de $k\mathbf{\Gamma}$, es decir una combinación lineal formal de caminos en $k\Gamma$ que empiezan en X y terminan en Y que no pertenece a $\langle R\rangle$. De la conmutatividad de cada cuadrado se tiene que

$$\begin{aligned}\Theta_y\Phi_y F(f) &= \Theta_y G(f)\Phi_x \\ &= \Theta_x\Phi_x H(f).\end{aligned}$$

Luego la composición de morfismos en $Rep\mathbf{\Gamma}$ es de nuevo un morfismo.

3.2. Categoría de Representaciones Funtoriales

En esta sección se presentan propiedades importantes de $Rep\mathbf{\Gamma}$ que darán paso a la demostración del teorema de equivalencia entre esta y la categoría $\operatorname{Mod} k\mathbf{\Gamma}$, que es el objetivo del presente trabajo.
En la sección anterior se mostró que $Rep\mathbf{\Gamma}$ es una categoría, eso implica que la composición de dos transformaciones naturales, es de nuevo una transformación natural, esto es de gran utilidad en lo que sigue. De ahora en adelante, se notará un morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ como $\phi = \{\phi_x\} = \{\phi_x\}_{x\in Ob\, k\mathbf{\Gamma}}$ o solamente ϕ, entendiendo que este es una familia de morfismos en k-mod, uno por cada objeto en $k\mathbf{\Gamma}$, es decir uno por cada punto del carcaj original Γ.

Sean $\varphi = \{\varphi_x\}$ y $\theta = \{\theta_x\}$ dos morfismos de F a G en $Rep\mathbf{\Gamma}$. Se define la suma de estos como

$$\varphi + \theta = \{\varphi_x + \theta_x\}.$$

Esta suma así definida es de nuevo un morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$, en efecto dado el siguiente diagrama para todo $x, y \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y $f \in \operatorname{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x, y)$

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\varphi_x+\theta_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "\varphi_y+\theta_y"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que para todo $a \in F(x)$

$$\begin{aligned}(\varphi_y + \theta_y)F(f)(a) &= \varphi_y(F(f)(a)) + \theta_y(F(f)(a)) \\ &= G(f)(\varphi_x(a)) + G(f)(\theta_x(a)) \\ &= G(f)(\varphi_x(a) + \theta_x(a)) \\ &= G(f)(\varphi_x + \theta_x)(a).\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que la suma de dos morfismos de $Rep\mathbf{\Gamma}$ está bien definida. Más aún, esta suma convierte a $\mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F,G)$ en un grupo abeliano para todo $F,G \in Rep\mathbf{\Gamma}$. Efectivamente, como para cada $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, φ_x es una transformación lineal y en particular un homomorfismo de grupos abelianos, la asociatividad entonces está ya garantizada para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y por lo tanto si $\varphi, \theta, \phi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F,G)$, $\varphi + (\theta + \phi) = (\varphi + \theta) + \phi$.

No es difícil mostrar que $0 = \{0_x\}$ donde 0_x es la transformación lineal nula de $F(x)$ en $G(x)$ es en efecto un morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ y además $\varphi + 0 = \varphi$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F,G)$. Ahora, se define $-\varphi = \{-\varphi_x\}$. Esta familia de transformaciones lineales es de nuevo un morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ (sabiendo que $(-f)(a) := -f(a)$ si f es un homomorfismo de grupos) y además $\varphi + (-\varphi) = 0$ para todo morfismo φ en $Rep\mathbf{\Gamma}$.

Sean ahora $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F,G)$ y $\theta, \theta' \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(G,H)$, entonces para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y todo $a \in F(x)$

$$\begin{aligned}\theta_x(\varphi_x + \varphi'_x)(a) &= \theta_x(\varphi_x(a) + \varphi'_x(a)) \\ &= \theta_x(\varphi_x(a)) + \theta_x(\varphi'_x(a)) \\ &= (\theta_x\varphi_x + \theta_x\varphi'_x)(a).\end{aligned}$$

De la misma forma $(\theta_x + \theta'_x)\varphi_x(a) = (\theta_x\varphi_x + \theta'_x\varphi_x)(a)$. Con todo lo anterior se ha probado la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *$Rep\mathbf{\Gamma}$ es una categoría preaditiva.*

Nota. Además, se tiene que $Rep\mathbf{\Gamma}$ es una categoría k-lineal. Cabe recordar que al tomar f un morfismo en $k\mathbf{\Gamma}$ nos referimos a una clase de equivalencia y además que si $f \in \langle R \rangle$, $F(f) = 0$ (como transformación lineal) para toda representación F, luego el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "0"'] & G(x) \arrow[d, "0"] \\ F(y) \arrow[r, "\varphi_y"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

es trivialmente conmutativo y por tanto estas transformaciones naturales está bien definidas sobre $Rep\mathbf{\Gamma}$ al no presentar inconvenientes con $\langle R \rangle$ y de hecho con ninguna otra clase de equivalencia.

Sean F, G dos representaciones de $\mathbf{\Gamma}$ se define su *suma directa* así:

$$F \oplus G(x) = F(x) \oplus G(x),$$
$$F \oplus G(f) = \begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}$$

No es difícil ver que en efecto $F \oplus G$ es una representación; $F(x) \oplus G(x)$ es un espacio vectorial y $F \oplus G(f)$ es en realidad la familia de parejas $\{(F(f), G(f))\}$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x, y)$ y como $F(f)$ y $G(f)$ son transformaciones lineales cada miembro de esta familia lo es. Por último la composición de morfismos se comporta de manera natural a través de la multiplicación de matrices y el morfismo identidad no es más que la matriz de las transformaciones identidad. Cabe recordar que tanto $F(f)$ como $G(x)$ quedan únicamente determinados por $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ para toda flecha α.

Se puede definir ahora la inclusión ι_F de F en $F \oplus G$ como

$$\iota_F = \{\iota_{F_x}\},$$

donde ι_{F_x} es la inclusión del espacio vectorial $F(x)$ en el espacio vectorial $F(x) \oplus G(x)$, es una cuenta rutinaria mostrar que en efecto $\iota_F \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F, F \oplus G)$ para todo $F, G \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$. Se muestra ahora que en efecto $F \oplus G$ es una suma directa.

Sea $S \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ junto con los morfismos $\phi_F = \{\phi_{F_x} : F(x) \to S(x)\}$ y $\phi_G = \{\phi_{G_x} : G(x) \to S(x)\}$. Se define ahora $\phi : F \oplus G \to S$ tal que $\phi = \{\phi_{F_x} + \phi_{G_x}\}$. Como tanto ϕ_{F_x} como ϕ_{G_x} son morfismos en k-mod para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, ϕ_x también lo es.

Se tiene que $\phi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F \oplus G, S)$, en efecto, para todo $x, y \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y todo $f \in \mathrm{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x, y)$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \oplus G(x) \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}"'] & S(x) \arrow[d, "S(f)"] \\
F \oplus G(y) \arrow[r, "\phi_y"'] & S(y)
\end{tikzcd}$$

Este diagrama conmuta, sean $a \in F(x)$, $b \in G(x)$. Entonces como ϕ_F y ϕ_G están ya dados se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_y F \oplus G(f)(a,b) &= \phi_y(F(f)(a), G(f)(b)) \\
&= \phi_{F_y}(F(f)(a)) + \phi_{G_y}(G(f)(b)) \\
&= S(f)(\phi_{F_x}(a)) + S(f)(\phi_{G_x}(b)) \\
&= S(f)(\phi_{F_x}(a) + \phi_{G_x}(b)) \\
&= S(f)\phi_x(a,b).
\end{aligned}$$

Se obtiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & S & \\
G \arrow[ur, "\phi_G"] \arrow[r, "\iota_G"'] & F \oplus G \arrow[u, "\phi"] & F \arrow[ul, "\phi_F"'] \arrow[l, "\iota_F"]
\end{tikzcd}$$

Es decir, para todo $x, y \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ se tiene el siguiente diagrama, solo para F en este caso, para G el diagrama tiene la misma estructura

$$\begin{tikzcd}
F \oplus G(x) \arrow[d, "F\oplus G(f)"'] \arrow[rr, bend left, "\phi_x"] & F(x) \arrow[l, "\iota_{F_x}"'] \arrow[r, "\phi_{F_x}"] \arrow[d, "F(f)"'] & S(x) \arrow[d, "S(f)"'] \\
F \oplus G(y) \arrow[rr, bend right, "\phi_y"'] & F(y) \arrow[l, "\iota_{F_y}"] \arrow[r, "\phi_{F_y}"'] & S(y)
\end{tikzcd}$$

Se hace la prueba para F, para G es de manera análoga. Sean $w \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y $a \in F(x)$ arbitrarios fijos

$$\begin{aligned}
\phi_w \iota_{F_w}(a) &= \phi_w(a, 0) \\
&= \phi_{F_w}(a) + \phi_{G_w}(0) \\
&= \phi_{F_w}(a).
\end{aligned}$$

Luego

$$\phi\iota_F = \phi_F.$$

Sea ahora $\psi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F \oplus G, S)$ tal que

$$\psi\iota_F = \phi_F \quad \psi\iota_G = \phi_G.$$

Entonces para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ y $a \in F(x)$, $b \in G(x)$

$$\begin{aligned}\phi_x(a,b) &= \phi_x(\iota_{F_x}(a)+\iota_{G_x}(b))\\ &= \phi_x\iota_{F_x}(a)+\phi_x\iota_{G_x}(b)\\ &= \phi_{F_x}(a)+\phi_{G_x}(b)\\ &= \psi_x\iota_{F_x}(a)+\psi_x\iota_{G_x}(b)\\ &= \psi_x(\iota_{F_x}(a)+\iota_{G_x}(b))\\ &= \psi_x(a,b).\end{aligned}$$

Luego ϕ es único. En consecuencia, $F \oplus G$ tal como se definió es la suma directa de F y G en $Rep\mathbf{\Gamma}$, más aun, $F \oplus G$ está determinado salvo isomorfismo en el sentido de la definición de isomorfismo del cap 1 (teorema 1.7.5 de [12]).

Sea en $Rep\mathbf{\Gamma}$ el objeto Z definido de tal forma que $Z(x) = 0$, el espacio vectorial cero y $Z(f) = 0$, la transformación lineal cero. Se tiene inmediatamente que el único morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ de Z a cualquier otro objeto F es $0 = \{0_x\}$ (que es claramente el morfismo cero en el sentido de la definición 1.2.5), el módulo de la suma en $\mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(Z, F)$, convirtiendo así a Z en el objeto inicial de la categoría de las representaciones funtoriales. Se puede dar paso entonces a la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2. *$Rep\mathbf{\Gamma}$ es una categoría aditiva.*

Demostración. Como se probó la existencia de la suma directa de dos objetos de $Rep\mathbf{\Gamma}$ y la existencia de un objeto inicial, la proposición se sigue de las proposiciones 1.2.3 y 1.2.4 de [5] y la de definición 1.2.22. □

Es de notar que un morfismo ω de $Rep\mathbf{\Gamma}$ es un monomorfismo (epimorfismo) si y solo si para cada $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, ω_x lo es. Ahora se va a mostrar otra propiedad importante de $Rep\mathbf{\Gamma}$, para esto es necesario mostrar que cada morfismo tiene kernel y cokernel. Para lo primero sean $F, G \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ y $\phi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F, G)$, como para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, tanto $F(x)$ como $G(x)$ son espacios vectoriales y como la inclusión de un espacio en otro es una transformación lineal, tiene entonces sentido la definición del siguiente objeto de $Rep\mathbf{\Gamma}$, K

$$K(x) = \{a \in F(x) : \phi_x(a) = 0\}.$$

Se sabe que este conjunto (que es justamente el kernel de la transformación lineal ϕ_x en $k-$mod) es un espacio vectorial, además $K(x) \subseteq F(x)$ para cada $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$. Ahora, $K(f)$ es la restricción de $F(f)$ a $K(x)$ y se define $\kappa = \{\kappa_x : K(x) \to F(x)\}$ donde cada κ_x es la inclusión del espacio $K(x)$ en el espacio $F(x)$. Se tiene que κ es un morfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$, en efecto, hay que verificar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K(x) \arrow[r, "\kappa_x"] \arrow[d, "K(f)"'] & F(x) \arrow[d, "F(f)"] \\
K(y) \arrow[r, "\kappa_y"'] & F(y)
\end{tikzcd}$$

Para esto primero hay que ver que efectivamente la imagen de $K(x)$ bajo $K(f)$ está contenida en $K(y)$. Como $K(x) \subseteq F(x)$ y además $\phi_y F(f) = G(f)\phi_x$, sea $a \in K(x)$, entonces por definición de $K(x)$ se tiene que $G(f)\phi_x(a) = 0 = \phi_y F(f)(a)$, es decir $F(f)(a) \in K(y)$ y por tanto la imagen de $K(f)$ está contenida en $K(y)$. Ya con esto se ve inmediatamente que el anterior diagrama conmuta y entonces κ está bien definido.

De nuevo por definición de κ, $\phi\kappa = \{\phi_x\kappa_x = 0_x\}$, por tanto $\phi\kappa$ es el morfismo cero de K en F. Sean ahora $K' \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ y $\kappa' \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(K', F)$ tales que $\phi\kappa' = 0$. Para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, $Im(\kappa'_x) \subseteq Im(\kappa_x)$; para esto, sea $b \in Im(\kappa'_x) \subseteq F(x)$, por lo tanto existe $a \in K'(x)$ tal que $\kappa'_x(a) = b$; del supuesto de K' y κ' se tiene que

$$\phi\kappa'_x(a) = \phi(b) = 0,$$

pero como $b \in F(x)$, entonces $b \in K(x)$ y como κ es la inclusión, $b \in Im(\kappa_x)$. Ya con esto se puede definir $\psi = \{\psi_x : K'(x) \to K(x)\}$ de la siguiente manera: $\psi_x(a) = b$, donde b es tal que $\kappa'_x(a) = \kappa_x(b) = b$. Inmediatamente se puede ver que $\kappa\psi = \kappa'$.

Se tiene que ψ está bien definido como morfismo de $Rep\mathbf{\Gamma}$, en efecto supongamos que $u = v$ elementos de $K'(x)$, como κ'_x se supone bien definido, entonces $\psi_x(u) = \kappa'_x(u) = \kappa'_x(u) = \psi_x(v)$. Ahora si $a, b \in K'(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_x(a+b) &= \kappa'_x(a+b) \\
&= \kappa'_x(a) + \kappa'_x(b) \\
&= \kappa_x\psi_x(a) + \kappa_x\psi_x(b) \\
&= \kappa_x(\psi_x(a) + \psi_x(b)) \\
&= \psi_x(a) + \psi_x(b).
\end{aligned}$$

Además si $p \in K$

$$\begin{aligned}
\psi_x(pa) &= \kappa'_x(pa) \\
&= p\kappa'_x(a) \\
&= p\kappa_x\psi_x(a) \\
&= p\psi_x(a).
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K'(x) \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "K'(f)"'] & K(x) \arrow[d, "K(f)"] \\
K'(y) \arrow[r, "\psi_y"'] & K(y)
\end{tikzcd}$$

Pero esto es inmediato dado que $\psi_x(u) = \kappa'_x(u)$ para todo $u \in K'(x)$ y κ' se supone bien definido. Se probó entonces que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\kappa"] & F \arrow[r, "\phi"] & G \\
K' \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\kappa'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es decir para cada $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K(x) \arrow[r, "\kappa_x"] \arrow[d, "K(f)"] & F(x) \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "F(f)"] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\
K(y) \arrow[r, "\kappa_y"] & F(y) \arrow[r, "\phi_y"'] & G(y) \\
K'(x) \arrow[uu, bend left, "\psi_x"] \arrow[uur, "\kappa'_x"] \arrow[d, "K'(f)"] & & \\
K'(y) \arrow[uu, bend left, "\psi_y"] \arrow[uur, bend right, "\kappa'_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por último, sea $\psi' \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(K', K)$ tal que $\kappa\psi' = \kappa'$, como cada κ_x es un monomorfismo en k-mod al ser inyectivos, κ es un monomorfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ y se tiene que $\kappa' = \kappa\psi' = \kappa\psi$ implica que $\psi = \psi'$. Con esto se cumple entonces que la pareja (K, κ) es en efecto el kernel de ϕ de acuerdo con las definiciones 1.2.14 y 1.2.16.

Siguiendo argumentos duales se puede probar que si $\phi : F \to G$ es un morfismo de $Rep\mathbf{\Gamma}$, este tiene un cokernel en el sentido de las definiciones 1.2.15 y 1.2.16. Este cokernel es la pareja (C, c) donde $C(x) = \{a + Im\,\phi_x : a \in G(x)\} = G(x)/Im\,\phi_x$ y $C(f)$ es tal que $C(f)(a + Im\phi_x) = G(f)(a) + Im\,\phi_x$, además $c = \{c_x\}$ es el homomorfismo canónico de $G(x)$ a $G(x)/Im\,\phi_x$. Los detalles que demuestran que en efecto (C, c) es el cokernel de ϕ se hacen de manera dual a como se procedió antes; en este caso debe tenerse en cuenta que c es un epimorfismo en $Rep\mathbf{\Gamma}$ porque cada c_x es sobreyectivo, o sea un epimorfismo en k-mod y si se suponen (C', c') tales que $\phi c' = 0$ entonces el único morfismo $\delta = \{\delta_x\}$ en $Rep\mathbf{\Gamma}$ de C a C' se define como $\delta_x(a + Im\,\phi_x) = c'(a)$. En pocas palabras se tiene, para todo $x \in k\mathbf{\Gamma}$ que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[rr, "c_x"] \arrow[d, "G(f)"'] \arrow[drrr, "c'_x"'] & & C(x) \arrow[d, "C(f)"'] \arrow[dd, bend left, "\delta_x"] \\
F(y) \arrow[r, "\phi_y"'] & G(y) \arrow[rr, "c_y"] \arrow[ddrr, "c'_y"'] & & C(y) \arrow[dd, bend left, "\delta_y"] \\
 & & & C'(x) \arrow[d, "C'(f)"'] \\
 & & & C'(y)
\end{tikzcd}
$$

Ya por último, siguiendo con los mismos argumentos ya expuestos es posible probar que si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F, G)$ es un monomorfismo, es kernel de $\rho \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(G, H)$ donde $H(x) \cong G(x)/Im\,\varphi_x$ y si φ es epimorfismo, es entonces el cokernel de $\omega_x \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(N, F)$ donde $N(x) = \{n \in F(x) : \varphi_x(n) = 0\}$. De hecho esto prueba de manera particular que en $Rep\mathbf{\Gamma}$ todo monomorfismo es kernel de su cokernel y todo epimorfismo es cokernel de su kernel. Ya con esto $Rep\mathbf{\Gamma}$ verifica la definición 1.2.23 y por tanto se probó la siguiente proposición.

Teorema 3.2.3. *$Rep\mathbf{\Gamma}$ es una k-categoría abeliana.*

3.3. Teorema de equivalencia

Esta última sección está dedicada a la demostración del teorema de equivalencia (teorema 2.3.4) pero desde el punto de vista que se ha venido manejando a lo largo de este capítulo.

Teorema 3.3.1. *Existe una equivalencia k-lineal entre las categorías* $\mathrm{Mod}\,k\mathbf{\Gamma}$ *y* $Rep\mathbf{\Gamma}$

Demostración. Se construye el funtor $F : \mathrm{Mod}\,k\mathbf{\Gamma} \to Rep\mathbf{\Gamma}$ de la siguiente manera. Sea M un $k\mathbf{\Gamma}$-módulo, entonces, para todo $x \in Ob\,k\mathbf{\Gamma}$, $\bar{\epsilon}_x$ es su clase de equivalencia en $k\mathbf{\Gamma}$, se define entonces $M_x = \bar{\epsilon}_x M$. Ahora, si $\varphi \in \Gamma_1$ es una flecha de x a x' y $\bar{\varphi}$ denota su clase de equivalencia, se define $f_\varphi : M_x \to M_{x'}$ así: $f_\varphi(a) = \bar{\varphi}a = \bar{\epsilon}_{x'}\bar{\varphi}\bar{\epsilon}_x a$. Como M es un módulo, entonces cada f_φ es un homomorfismo de módulos (k-espacios vectoriales). Ahora, sea $\rho \in R$ donde R es el ideal admisible de $k\Gamma$ que da paso a $k\mathbf{\Gamma}$, una relación que va del vértice y al vértice y', luego

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i,$$

donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in k$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son caminos de longitud al menos dos de y a y', es decir

$$\alpha_i = \beta_{i_k} \cdots \beta_{i_2} \beta_{i_1},$$

entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
f_\rho(a) &= \left(\overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i}\right) a \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\beta_{i_k}} \cdots f_{\beta_{i_2}} f_{\beta_{i_1}}(a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\beta_{i_k}} \cdots \overline{\beta_{i_2}\beta_{i_1}} a \\
&= \left(\overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_{i_k}, \cdots \beta_{i_2}, \beta_{i_1},}\right) a \\
&= \overline{\rho} a \\
&= 0a \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Luego $F(M)$ es en efecto un funtor de $k\mathbf{\Gamma}$ a k-mod, es decir una representación de $k\mathbf{\Gamma}$. Sea ahora $\phi : M \to M'$ un homomorfismo de $k\mathbf{\Gamma}$-módulos y sea $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$, si $b \in M_x \subseteq M$, entonces $b = \overline{\epsilon}_x a$ con $a \in M$, se tiene que

$$\phi(a) = \phi(\overline{\epsilon}_x a) = \phi(\overline{\epsilon}_x \overline{\epsilon}_x a) = \overline{\epsilon}_x \phi(\overline{\epsilon}_x a) \in \overline{\epsilon}_x M' = M'_x.$$

Es decir, la restricción de ϕ a M_x está bien definida como homomorfismo de M_x a M'_x, esto es

$$\phi_x = \phi|_{M_x} : M_x \longrightarrow M'_x.$$

Se puede entonces definir $F(\phi) = \{\phi_x\}_{x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}}$. $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(F(M), F(M'))$, en efecto para todo $x, y \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ se tiene el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M_x \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "f_\sigma"'] & M'_x \arrow[d, "f'_\sigma"] \\
M_y \arrow[r, "\phi_y"'] & M'_y
\end{tikzcd}
$$

Si $a \in M_x$, entonces

$$\begin{aligned} f'_\sigma \phi_x(a) &= f'_\sigma(\overline{\epsilon}_x \phi_x(a)) \\ &= \overline{\sigma}\overline{\epsilon}_x \phi(a) \\ &= \overline{\epsilon}_y \overline{\sigma}\phi(a) \\ &= \overline{\epsilon}_y \phi(\overline{\sigma} a) \\ &= \phi_y(\overline{\sigma} a) \\ &= \phi_y f_{\overline{\sigma}}(a). \end{aligned}$$

Luego F es en efecto un funtor (k-lineal). Se define ahora $G : Rep\mathbf{\Gamma} \rightarrow \operatorname{Mod} k\mathbf{\Gamma}$ de la siguiente manera. Si $X \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$

$$G(X) = \bigoplus_{x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} X(x).$$

A $G(X)$ se le puede dar estructura de $k\mathbf{\Gamma}$-módulo así. Si ϵ_x es el camino trivial del vértice x y si $a = (a_x)_{x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \in G(X)$ se define el siguiente producto

$$\epsilon_x a = a_x.$$

De forma general, si σ es un camino de x a x' ($\sigma = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$) y sabiendo que $X(\sigma) = X(\alpha_n)X(\alpha_{n-1}) \cdots X(\alpha_1)$, se define la siguiente acción

$$\sigma a = (0, \cdots, \underbrace{X(\sigma)(a_x)}_{\text{x'-ésima}}, \cdots, 0) = X_{xx'}(\sigma)(a_x).$$

Es claro que si $\rho \in R$ el ideal admisible de $k\mathbf{\Gamma}$, $\rho a = 0$. Ahora, si $\overline{\sigma} \in \operatorname{Hom}_{k\mathbf{\Gamma}}(x, x')$ la acción de módulo se define así:

$$\overline{\sigma} a = \sigma a,$$

donde σ, un camino de x a x' es el representante de la clase de equivalencia. Se mostrará ahora que este producto por escalar está bien definido; sean $\overline{\sigma} = \overline{\sigma'}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} a &= \sigma a \\ &= X_{xx'}(\sigma)(a_x) \\ &= X_{xx'}(\sigma')(a_x) \\ &= \sigma' a \\ &= \overline{\sigma'} a. \end{aligned}$$

Las propiedades de módulo se tienen por linealidad (sabiendo que $\lambda\overline{\sigma} = \overline{\lambda\sigma}$), por lo tanto $G(M)$ es en efecto un $k\mathbf{\Gamma}$-módulo. Sea ahora $\varphi = \{\varphi_x\}$ un morfismo de X a Y en $Rep\mathbf{\Gamma}$, se define

$$G(\varphi) = \bigoplus_{x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \varphi_x : G(X) \longrightarrow G(Y).$$

Esto es, la imagen de un elemento $(a_x)_{x\in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \in G(Y)$ es $(\varphi_x(a_x))_{x\in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \in G(X)$. Como cada φ_x es una transformación lineal, la linealidad de $G(\varphi)$ se tiene. Por otro lado, sea $\overline{\sigma}$ un camino de x a x' en $k\mathbf{\Gamma}$, entonces

$$\begin{aligned} G(\varphi)(\overline{\sigma}a) &= G(\varphi)(X_{xx'}(\overline{\sigma}(a_x))) \\ &= \varphi_{x'}X_{xx'}(\overline{\sigma}(a_x)) \\ &= Y_{xx'}(\overline{\sigma})\varphi_x(a_x) \\ &= \overline{\sigma}\varphi_x(a_x) \\ &= \overline{\sigma}G(\varphi)(a). \end{aligned}$$

Y por lo tanto, $G(\varphi)$ es en efecto un homomorfismo de $k\mathbf{\Gamma}$-módulos. Por último, falta comprobar que efectivamente $FG \cong 1_{Rep\mathbf{\Gamma}}$ y $GF \cong 1_{\mathrm{Mod}\, k\mathbf{\Gamma}}$. Para esto, sea primero $X \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ y $G(X)$ su imagen bajo G; para todo $x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}$ se tiene que $FG(X)(x) = \overline{\epsilon}_x G(X)$, el lado derecho de la igualdad es, por definición de la acción del módulo isomorfo a M_x pues $\overline{\epsilon}_x a$ es la proyección a la a-ésima componente. Por otra parte, si σ es un camino de x a x', F asigna a σ la transformación lineal $f_\sigma(a) = \overline{\sigma}a$. Como M_x es isomorfo al submódulo de $G(X)$ formado por todas las tuplas que tienen todas sus entradas nulas excepto la entrada x-ésima, entonces

$$\begin{aligned} f_\sigma(a) &= \overline{\sigma}a \\ &= \sigma a \\ &= X_{xx'}(\overline{\sigma})(a). \end{aligned}$$

Entonces $f_\sigma(a) = X(\sigma)$ y por lo tanto $FG(X) = X$. Sea ahora $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Rep\mathbf{\Gamma}}(X, Y)$ y $G(\varphi)$ su imagen bajo G; $FG(\varphi)$ es una colección de homomorfismos de $k\mathbf{\Gamma}$-módulos (k-espacios vectoriales), uno por cada objeto de $k\mathbf{\Gamma}$ definidos de la siguiente manera

$$\phi_x = \varphi|_{M_x} = \overline{\epsilon}_x\varphi(\overline{\epsilon}_x a),$$

que no es más que la entrada x-ésima de $G(\varphi)$, es decir $\phi_x = \varphi_x$ con lo que $FG \cong 1_{Rep\mathbf{\Gamma}}$.

Por otro lado, sean $M \in \mathrm{Mod}\, k\mathbf{\Gamma}$ y $F(M)$ su imagen bajo F, se tiene que $FG(M) = \oplus_{x\in Ob\, k\mathbf{\Gamma}}\overline{\epsilon}_x M$; primero, se puede ver que

$$M = \overline{1}M = \sum_{x\in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \overline{\epsilon}_x M.$$

La suma anterior es directa, para esto sea $a \in \overline{\epsilon}_x M \cap \sum_{y\neq x} \overline{\epsilon}_y M$, entonces

$$a = \overline{\epsilon}_x a_x = \sum_{y\neq x} \overline{\epsilon}_y a_y,$$

ahora, como cada $\overline{\epsilon}_z$ es idempotente y son todos ortogonales, entonces

$$a = \overline{\epsilon}_x a_x = \overline{\epsilon}_x^2 a_x = \sum_{y \neq x} \overline{\epsilon}_x \overline{\epsilon}_y a_y = 0,$$

por lo tanto la suma es directa y $GF(M) = M$. Por último, sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de $k\mathbf{\Gamma}$-módulos y $F(f)$ su respectiva imagen bajo F; como $\oplus_{x \in Ob\, k\mathbf{\Gamma}} \overline{\epsilon}_x M = M$, $F(f)$ son restricciones bien definidas en el sentido que

$$f(0, 0, \cdots, \underbrace{a}_{\text{x-ésima}}, \cdots, 0) = (0, 0, \cdots, \underbrace{f_x(a)}_{\text{x-ésima}}, \cdots, 0),$$

y entonces la suma (directa) de cada restricción $F(f)$ es de nuevo f, es decir $GF(f) = f$. Con lo anterior y de acuerdo con la definición 1.2.31 se tiene que $\mathrm{Mod}\, k\mathbf{\Gamma} \cong Rep\mathbf{\Gamma}$ que era lo que se quería probar. □

Nota. Si solo se consideran representaciones de dimensión finita, esto es, $\dim X(x) < \infty$ para todo vértice x entonces su suma directa es también de dimensión finita, es más, como se considera que Γ es finito la suma directa de los $X(x)$ es de dimensión finita si cada espacio vectorial lo es, entonces las restricciones de F y G a espacios de dimensión finita están bien definidas y las subcategorías correspondientes también son equivalentes.

3.4. Consecuencias y conclusiones

Este teorema es el primer gran paso dentro de la teoría de representaciones de álgebras pues da una caracterización explícita sobre como están estructuradas las representaciones de un carcaj; el hecho de que estas dos categorías sean equivalentes dice que las representaciones de un carcaj (finito) se comportan estructuralmente de la misma manera que lo hacen los módulos sobre una cierta álgebra, en este caso la de caminos. Es decir, todas las propiedades categóricas de la categoría de los módulos de un álgebra, en este caso de $k\mathbf{\Gamma}$, aplican y son las mismas que las de $Rep\mathbf{\Gamma}$.

Esto significa una gran ventaja en el estudio de la clasificación de las álgebras de dimensión finita, pues el estudio de las representaciones del carcaj, que son las que permiten realizar esta clasificación, se puede trasladar al estudio de los módulos de $k\mathbf{\Gamma}$ que es una teoría mucho más conocida. En lo que sigue de la teoría se hablará sobre representaciones proyectivas, inyectivas, indescomponibles, entre otras, términos que se desprenden de la teoría de módulos y que son propiedades categóricas de estos, además se empezará a hablar de las representaciones de manera indistinta como funtores y como módulos, pues en últimas sus propiedades son las mismas, a saber, entre otras cosas: descomposición en sumas directas, homologías, resoluciones, entre otras. En este trabajo solo se mencionan ejemplos de lo primero.

Ahora se justifica que algunas demostraciones y definiciones presentadas en este capítulo y el anterior se parezcan a las existentes en la teoría de módulos y que algunos teoremas parezcan adaptaciones de teoremas ya conocidos. Lo interesante es que si bien se pudo presentar el teorema anterior justo después de haber dado la definición de $Rep\mathbf{\Gamma}$ y haber obviado la larga prueba de que es una categoría abeliana (la proposición se hubiera reducido a un corolario y la demostración hubiera sido inmediata: al ser categorías equivalentes, si una es abeliana, inmediatamente la otra también lo es), no se hizo pues es de gran utilidad en lo que sigue de la teoría conocer explícitamente como son las sumas directas en $Rep\mathbf{\Gamma}$ y ya con este teorema poder clasificar elementos indescomponibles que son de grandísima utilidad en la clasificación de las álgebras de dimensión finita. Todo esto se puede ver de forma explícita en la sección III.2 de [1].

Definición 3.4.1. *Sea $F \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ diferente del objeto cero. Se dice que F es* ***indescomponible*** *si el hecho de que existan $G, H \in Ob\, Rep\mathbf{\Gamma}$ tales que $F = G \oplus H$ implica que $G = 0$ o $H = 0$.*

Se tiene ahora, para cada $x \in \Gamma_0$ las siguientes representaciones F_x

$$F_x(y) \begin{cases} k, & x = y \\ 0, & x \neq y, \end{cases}$$

$$F_x(f) = 0.$$

Lema 3.4.2. *Las representaciones F_x son elementos indescomponibles de $Rep\mathbf{\Gamma}$.*

Demostración. Las representaciones F_x son indescomponibles pues no es posible descomponer a el cuerpo k, visto como espacio vectorial en sí mismo como suma directa de dos espacios vectoriales no nulos. Además $F_x(f) = 0$, entonces no es posible separar en suma directa las transformaciones lineales que asigna F. □

Si bien se han caracterizado una familia importante de representaciones indescomponibles no quiere decir que sean las únicas que lo sean. Haciendo uso del teorema de equivalencia y como las representaciones se pueden comparar con módulos, usando el corolario 1.1.25 toda representación cuyo anillo de endomorfismos sea local es indescomponible. Por ejemplo la representación en el numeral 2 del ejemplo 2.3.3 es indescomponible. En efecto se mostró que el anillo de endomorfismos de M es

$$\mathrm{End}(M) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} : a, b, c \in k \right\}.$$

Por otro lado, el ideal

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} : b, c \in k \right\}$$

Cumple que $I^3 = 0$ pues multiplicar tres elementos cualquiera (no necesariamente diferentes) de I da como resultado la matriz cero. Ahora, los elementos en la clase de equivalencia en $\mathrm{End}(M)/I$ de una matriz de $\mathrm{End}(M)$ siempre tiene en su diagonal un único elemento $a \in k$, por lo tanto hay tantas clases de equivalencia como elementos tiene k. Luego $\mathrm{End}(M)/I \cong k$, es decir, I es un ideal maximal de $\mathrm{End}(M)$ y por el corolario I.1.4 de [1] se tiene que $I = \mathrm{rad}(\mathrm{End}(M))$, es decir $\mathrm{End}(M)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}(M)) \cong k$ y por el numeral 5 de 1.1.23 se tiene que $\mathrm{End}\, M$ es local y por el corolario 1.1.25 M es indescomponible.

En el mismo orden de ideas, se puede probar que las representaciones F_x son indescomponibles comprobando que su álgebra de endomorfismos es local, para tal efecto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.4.3. $\mathrm{End}(F_x)$ *es un álgebra local para todo* $x \in \Gamma_0$.

Demostración. $\mathrm{End}(F_x) \cong \mathrm{End}(k)$, en efecto si $\varphi \in \mathrm{End}(F_x)$ entonces por definición de F_x se tiene que $\varphi_y = 0$ excepto tal vez para $y = x$, el cual puede ser cualquier endomorfismo de k, esto debido a que el siguiente diagrama siempre conmuta sin importar que endomorfismo sea asignado a φ_x

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "F_x(f)=0"'] & k \arrow[d, "F_x(f)=0"] \\ F_x(y) = 0 \arrow[r, "0"'] & F_x(y) = 0 \end{tikzcd}$$

Luego se tiene por cada endomorfismo de k un endomorfismo de F_x en $Rep\mathbf{\Gamma}$, esta asignación es claramente un homomorfismo de k-módulos y por tanto $\mathrm{End}(F_x) \cong \mathrm{End}(k)$ como se quería. Ahora, de la proposición 1.1.15 y como k es en particular un álgebra conmutativa $\mathrm{End}(F_x) \cong k$. □

Ya como última consecuencia del teorema de equivalencia se tiene que la categoría de las representaciones de dimensión finita sobre un carcaj acotado es Krull-Schmidt. Esto es gracias a que la equivalencia G restringida a las representaciones de dimensión finita induce una equivalencia con los módulos de dimensión finita sobre $k\mathbf{\Gamma}$ y en el ejemplo 1.2.25 se mostró que esta última es Krull-Schmidt y por tanto la categoría representaciones de dimensión finita de $\mathbf{\Gamma}$ también lo es. Esto es de gran importancia porque, si bien solo se consideran las dimensiones finitas, el saber que cualquier representación de ese estilo se puede descomponer en suma directa de representaciones indescomponibles, sabiendo además cómo se comporta la suma directa en $Rep\mathbf{\Gamma}$ se puede trabajar de manera más cómoda y práctica las representaciones de un carcaj acotado, además se permite en muchos casos identificar de qué tipo de representación es $k\mathbf{\Gamma}$ como álgebra (definición I.4.11 de [1] o de forma similar a como se define una representación de grupos en la sección 11.5 de [11]).

De acá en adelante la teoría se concentra en describir las propiedades homológicas de las representaciones de carcajes, tales como representaciones inyectivas, proyectivas, libres, resoluciones, envolturas, entre otras; propiedades que no tendrían soporte si no fuera por el teorema de equivalencia, pues es este el que permite hacer este tipo de traducciones de una teoria a la otra. La importancia de este teorema radica entonces en que este no solo da herramientas para trabajar las representaciones de álgebras de una manera códoma a través de las tecnicas ya conocidas para trabajar sobre módulos sino que además da todo el sustento teórico que permite que estas herramientas tengan cocherencia.

Bibliografía

[1] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006.

[2] Michael Barot. *Introduction to the Representation Theory of Algebras*. Springer, 2015.

[3] Grzegorz Bobiński. The almost split triangles for perfect complexes over gentle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(4):642–654, 2011.

[4] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Basic Category Theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1994.

[5] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Categories and Structures*, volume 2. Cambridge University Press, 1994.

[6] Ivan Castro. *Temas de teoría de cuerpos, teoría de anillos y números algebraicos. Tomo 1*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia, 2 edition, 2005.

[7] David Steven Dummit and Richard M Foote. *Abstract Algebra*. Wiley Hoboken, 3 edition, 2004.

[8] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.

[9] Javier Giovanni Rivera Galindo. Calculo de triángulos de auslander-reiten en la categoría derivada de Álgebras gentiles. Master's thesis, Universidad de Antioquia, Enero 2016.

[10] Hernan Giraldo. Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras. *Lecturas Matemáticas*, 36(1):33–67, 2015.

[11] Michiel Hazewinkel, Nadiya Gubareni, and Vladimir V Kirichenko. *Algebras, rings and modules*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2004.

[12] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 73. Springer-Verlag New York, 1 edition, 1974.

[13] Oswaldo Lezama. *Cudernos de Álgebra, No. 7: Categorías.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1 edition, 2014.

[14] Oswaldo Lezama. *Cudernos de Álgebra, No. 8: Álgebra Homológica.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1 edition, 2014.

[15] Ralf Schiffler. *Quiver representations.* Springer, 1 edition, 2014.