UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

CLASIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES INDESCOMPONIBLES DE CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS DE ANCHO MENOR O IGUAL QUE DOS

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Juan Esteban López Russi y Juan Sebastián Muñoz Mojica
Dirigido por: Verónica Cifuentes Vargas

Bogotá DC
Agosto de 2022

Índice

Resumen

El objetivo principal de este documento es estudiar el teorema de clasificación de las representaciones matriciales indescomponibles para conjuntos parcialmente ordenados finitos (poset) $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ de ancho menor o igual a dos [5], así como las características mas sobresalientes de estas representaciones, las transformaciones elementales admisibles, la estructura de categoría con la cual es posible dotar estas representaciones denotada mediante $\mathbf{Mat_P}$, la categoría de aditivización asociada a P denotada $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ y la relación que existe entre estas dos categorías.

A partir de la categoría $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ de representaciones vectoriales de quiver [4], cuya construcción se basa en la asociación del quiver que resulta de adicionar un punto maximal $n+1$ al poset P, es posible mostrar con facilidad la estructura de los objetos indescomponibles denotados por $\mathbf{K}(\emptyset)$, $\mathbf{K}(\ i \nearrow \mathbf{0})$ y $\mathbf{K}(\ i\ )$ donde $i \in P$, con el fin de fijar las matrices indecomponibles denotadas mediante $\mathbf{K}^0_{n+1}$, $\mathbf{K}^i_{n+1}$, $\mathbf{K}^i_0$ y $\mathbf{K}^{(s,r)}_{n+1}$ para $i \in P$ y $r, s \in P$ incomparables, en $\mathbf{Mat_P}$ por medio de la relación existente entre las categorías.

Palabras clave: Matriz, representación, indescomponible, matriz vacía, poset, forma canónica, transformación elemental, categoría, quiver,problema matricial.
Clasificación AMS: 15A99

1. Introducción

El estudio de los problemas matriciales y el concepto de representación matricial sobre un campo K de conjuntos parcialmente ordenados, fueron introducidos por Nazarova, Roiter y sus estudiantes en Kiev en 1972 quienes conectaron estas ideas con su estudio adelantado en K-álgebras y módulos indescomponibles. Este estudio tuvo como eje central la caracterización determinados objetos denominados indescomponibles en la categoría de aditivización de $\mathbf{Mat_P}$ denotada $\mathbf{Mat_P^{ad}}$, en la cual cada objeto cuenta con una descomposición única salvo isomorfismo en sumandos indescomponibles [1].

Por otro lado, dentro de la categoría $\mathbf{P-sp}$ de representaciones vectoriales para un poset finito P, el teorema de Kleiner permite clasificar los poset en tipo representación finita o infinita, dependiendo de que P contenga por completo o no algunos de los llamados subposet críticos de Kleiner:

Teorema 1. *(Teorema 10.1, [5]) Sea $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ un poset finito con una relación de orden parcial $\leq$ y sea K un anillo de división. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) La categoría $\mathbf{P-sp}$ es de tipo representación finita.

*(2) El poset P no contiene por completo alguno de los siguientes subposet, denominados los **críticos de Kleiner** y denotados mediante $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$ y $\mathcal{K}_5$.*

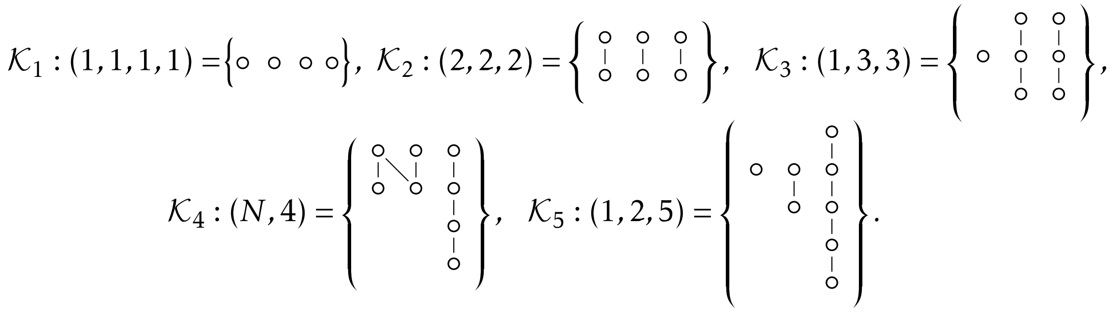


Figura 1: Subposet críticos de Kleiner

Nótese que en cada subposet crítico de Kleiner situado en la Figura 1, es posible encontrar ternas de elementos incomparables entre si, por tanto, no es posible que aquellos poset de ancho menor o igual que dos contengan alguno de los críticos del Teorema 1, con lo cual estos serán de tipo representación finita. Sin embargo es importante considerar que el teorema se sitúa en las representaciones vectoriales de poset y que este no muestra explícitamente la forma de las representaciones indescomponibles para estos casos. El objetivo principal de esta monografía es precisamente caracterizar la forma de estos objetos indescomponibles para el caso matricial en la categoría $\mathbf{Mat}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{ad}}$ cuando el ancho del poset, denotado $\omega(P)$ sea máximo dos.

2. Preliminares

2.1. Problemas matriciales

El objetivo de esta sección es presentar la estructura de los problemas matriciales a partir de nociones fundamentales del álgebra lineal, como las transformaciones elementales a filas y columnas de una matriz, la matriz asociada a una transformación lineal y recíprocamente la transformación lineal asociada a una matriz, el concepto abstracto de la matriz vacía, etc.

Sea K un campo arbitrario y $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ el espacio vectorial de matrices con entradas en K de m filas y n columnas.

Definición 1. Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una matriz y sus filas denotadas por A_j para $1 \leq j \leq m$ se definen las **transformaciones elementales en filas** de A de la siguiente manera

a) Multiplicar por escalares no nulos. Dado $a \in K-\{0\}$, substituir en A la j-ésima fila A_j por aA_j.

b) ***Intercambio de filas.*** La transposición (intercambio) de las filas A_i y A_j.

c) ***Sumar múltiplos escalares de otras filas.*** Reemplazar en A la j-ésima fila A_j por $A_j + aA_i$ con $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$ y $a \in K$.

Análogamente se definen las **transformaciones elementales en columnas** de A.

Nota 1. Cada una de las transformaciones anteriores es definible desde un punto de vista matricial, multiplicando por izquierda de la matriz A una matriz invertible determinada, concretamente:

a') $(I_m + (a-1)E_{jj})A$ equivale a aplicar **a**).

b') $P_{ji}A$ equivale a aplicar **b**) donde $P_{ij} = I_m - E_{jj} - E_{ii} + E_{ij} + E_{ji}$.

c') $(I_m + aE_{ji})A$ equivale a aplicar **c)**.

En donde E_{ij} representa la matriz elemental de tamaño m donde en la posición ij es $1 \in K$ y 0 en las demás entradas de la matriz. De forma análoga, para las transformaciones sobre columnas, está dado el símil matricial que equivale a multiplicar por la derecha de A las matrices $(I_n + (a-1)E_{jj})$, $Q_{ij} = (I_n - E_{jj} - E_{ii} + E_{ij} + E_{ji})$ y $(I_n + aE_{ij})$ respectivamente.

Lema 1. *(Lema 1.1, [3]) Cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ puede reducirse por medio de la aplicación de las transformaciones elementales a filas y columnas a una matriz de la siguiente forma*

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

donde I_r es la identidad de tamaño r y los símbolos 0 representan bloques matrices nulas.

Proposición 1. *(Proposición 3.4.1, [2]) Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo K de dimensiones n y m respectivamente, $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Entonces existe una (única) matriz con entradas en K denominada* ***matriz asociada a la transformación*** *T de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ denotada por $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ y que cumple que lo siguiente:*

Para todo $v \in V$, si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $T(v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j$ entonces se satisface que $[v]_B = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[T(v)]_{B'}$ en donde $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ y $[T(v)]_{B'} = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in K^m$.

Proposición 2. *(Proposición 3.4.3, [2])* ***Transformación asociada a la matriz.*** *Sean V y W dos K-espacios vectoriales con dimensiones n y m respectivamente. Dadas bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ para V y W respectivamente y $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una matriz. Existe una única transformación $T : V \longrightarrow W$ tal que $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M$.*

Nota 2. En conclusión cada matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ induce una transformación lineal. Si V y W son K-espacios vectoriales con $dim_K V = n$ y $dim_K W = m$ con bases prefijadas en cada espacio, se tiene el siguiente isomorfismo de K-espacios vectoriales

$$\mathcal{M}_{m\times n}(K) \cong Hom_K(V,W)\ ,$$

sin embargo esto ultimo ocurre plenamente cuando $n,m \geq 1$, de donde será necesario analizar los casos en los cuales $n = 0$ o $m = 0$.

Definición 2. **Matrices Vacías**. Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita tales que $dim_K V = n$ y $dim_K W = m$ con $m,n \in \mathbb{Z}^+$. Por convención se introducen de forma abstracta las matrices vacías $I_{m,0}$, $I_{0,n}$ e $I_{0,0}$ definidas de la siguiente manera

1. $I_{m,0}$ tiene m filas y 0 columnas es inducida por la transformación $T_{m,0} : 0 \longrightarrow W$.
2. $I_{0,n}$ tiene 0 filas y n columnas es inducida por la transformación $T_{0,n} : V \longrightarrow 0$.
3. $I_{0,0}$ tiene 0 filas y 0 columnas es inducida por la transformación $T_{0,0} : 0 \longrightarrow 0$.

Ahora bien para cada $a,b \in K$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ estas matrices satisfacen las siguientes propiedades:

1. $aI_{m,0} + bI_{m,0} = I_{m,0}$; $aI_{0,n} + bI_{0,n} = I_{0,n}$.
2. $I_{0,m}A = I_{0,n}$; $AI_{n,0} = I_{m,0}$.
3. $I_{m,0}I_{0,n} = O \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
4. $I_{0,n}I_{n,0} = I_{0,0}$.

Por lo tanto, al incluir las matrices vacías y en complemento con las propiedades anteriores, se verifica el isomorfismo establecido en la Nota 2.

Se denota por Mat al conjunto de todas las matrices finitas con coeficientes en K.

Definición 3. Dadas $A,B \in Mat$ se define la suma directa de A y B notada $A \oplus B$ como

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

en donde 0 representa bloques nulos de los tamaños correspondientes.

Definición 4. Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las transformaciones elementales en filas y columnas de matrices en Mat. Se dice que A es $\mathcal{G}$-**equivalente** a B, denotado mediante $A \sim_{\mathcal{G}} B$, si es posible obtener B a partir de A aplicando una serie de transformaciones de $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$.

Nota 3. Equivalentemente, se dice que $A \sim_{\mathcal{G}} B$ si existen matrices invertibles C y D (de acuerdo a la Nota 1) tales que $B = CAD$. De lo anterior, se evidencia que la relación $\sim_{\mathcal{G}}$ es de equivalencia.

Definición 5. Una clase $A/\sim_{\mathcal{G}}$ representada por $A \in Mat$, se denomina descomponible, si existe una matriz $B \in Mat$ de la forma $B = C \oplus D$ tal que $A \sim_{\mathcal{G}} B$ para algún par de matrices $C, D \in Mat$ distintas a la matriz vacía $I_{0,0}$.

Por otra parte, una clase $A/\sim_{\mathcal{G}}$ se denomina indescomponible si A no es $\sim_{\mathcal{G}}$-equivalente a la matriz nula y $A/\sim_{\mathcal{G}}$ no es descomponible.

Definición 6. Se denomina **problema matricial**, al problema de clasificación de las clases indescomponibles en el conjunto de clases $Mat/\sim_{\mathcal{G}}$ y se denota como $(Mat, \mathcal{G})$. Es equivalente a una reducción de cualquier matriz en Mat su forma canónica aplicando transformaciones de $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$.

Definición 7. El problema matricial $(Mat, \mathcal{G})$ es de **representación finita** si el conjunto de clases indescomponibles en Mat es finito.

2.2. Representaciones matriciales de conjuntos parcialmente ordenados

El objetivo principal de esta sección será presentar el problema matricial de la Definición 6 para el caso de conjuntos parcialmente ordenados (poset) y concretar el concepto de representación matricial, así como explorar la estructura de suma directa a partir de las matrices por bloques y la $\mathcal{G}_P$-equivalencia entre representaciones. En este orden de ideas, la información que proporciona la relación de orden parcial en el poset P determinará el mecanismo mediante el cual actúan las transformaciones admisibles dentro de este nuevo problema matricial asociado al poset.

Definición 8. Sea P un conjunto y $\preceq$ una relación en P. Se dice que $\preceq$ es un orden parcial sobre P si esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. A $(P, \preceq)$ se le denomina conjunto parcialmente ordenado o **Poset**. El poset se denomina finito si P es finito.

Nota 4. Por simplicidad, es posible referirse al poset $(P, \preceq)$ como P.

Definición 9. Sea $(P, \preceq)$ un poset finito, un **Diagrama de Hasse** es una representación gráfica de P en donde los elementos de $P = \{1, \ldots, n\}$ se representan con puntos $i\circ$ y la relación $i \prec j$ se representa mediante una flecha $i\circ \longrightarrow \circ j$ o simplemente con una línea de i a j como en el Teorema 1.

2.2.1. Problema matricial asociado al poset

Definición 10. Sea K un campo (anillo de división) y $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ un poset. Una **representación matricial** de P, es una matriz por bloques de la siguiente forma

$$A = \Big[\underbrace{\ A_1\ }_{s_1} \Big| \underbrace{\ A_2\ }_{s_2} \Big| \cdots \Big| \underbrace{\ A_n\ }_{s_n} \Big] \Big\} s_{n+1} \ ,$$

siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matrices con coeficientes en K, $s_i \geq 0$ el número de columnas de cada bloque A_i con $i \in P$ y $s_{n+1} \geq 0$ el número de filas de la representación (mismo número para cada bloque).

Se denota por Mat_P al conjunto de todas las representaciones matriciales de P.

Definición 11. Sea $A \in Mat_P$ una representación matricial de un poset P, se define el **vector coordenado** de A de tal manera que $\mathbf{cdn}(A) = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. También se denotan las componentes del vector coordenado con $(\mathbf{cdn}A)_j = s_j$.

Definición 12. Sean $A, B \in Mat_P$ representaciones matriciales del poset $P = \{1, 2, \ldots, n\}$, se define la suma directa de A y B denotada por $A \oplus B$ como

$$A \oplus B = \left[\begin{array}{c:c|c|c:c} A_1 & 0 & \cdots & A_n & 0 \\ \hdashline 0 & B_1 & \cdots & 0 & B_n \end{array}\right].$$

Nota 5. Nótese que $A \oplus I_{0,0} = I_{0,0} \oplus A = A$, con la matriz $I_{0,0}$ acorde a la Definición 2 vista como la representación matricial de P en donde cada bloque es vacío.

Definición 13. Dado un poset finito P y A una representación matricial de P, $A = [\ A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_n\ ]$. Se denota por $\mathcal{G}_P$ al conjunto de composiciones (secuencias finitas) de **transformaciones elementales admisibles** de los siguientes tipos:

(1) Todas las transformaciones elementales simultáneas a filas según la Definición 1.

(2) Todas las transformaciones elementales a columnas dentro de cada bloque A_i, con $i \in P$ de acuerdo con la Definición 1.

(3) Cada vez que $i \preceq j$ para $i, j \in P$, se admite sumar múltiplos escalares de cualquier columna del i-ésimo bloque A_i sobre las columnas del j-ésimo bloque A_j en este orden estricto.

Se denota el problema matricial asociado al poset P, mediante $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$.

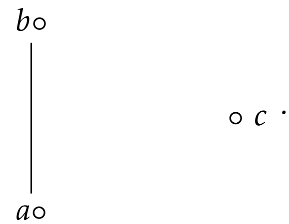
Definición 14. Se dice que P es de **representación finita** si $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$ es un problema matricial de tipo representación finita según la Definición 7.

Nota 6. A partir de la Definición 13 es importante resaltar lo siguiente:

✓ De acuerdo con las transformaciones de tipo (3), se concluye con facilidad que es posible operar las columnas de la representación por fuera de los bloques siempre y cuando los puntos asignados a esos bloques se relacionen, con mayor exactitud, es admisible sumar múltiplos escalares de cualquier columna del bloque A_i a cualquiera de las columnas del bloque A_j siempre que $i \preceq j$ en P.

✓ Para las transformaciones de tipo (1), es posible concluir que el tratamiento para las filas es independiente de los bloques y por tanto las transformaciones a filas se realizan sobre la representación, pues se considera a la representación como una matriz propiamente, donde la m-ésima fila de la representación está constituida por la m-ésima fila de cada uno de los bloques A_i con $i \in P$.

Ejemplo 1. Dado el poset $P = \{a, b, c : a \prec b\}$ representado con el siguiente diagrama de Hasse acorde a la Definición 9



Supóngase $A \in Mat_P$ la siguiente representación matricial de P

$$A = [\ A_a \mid A_b \mid A_c\ ] = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

con vector coordenado $\mathbf{cdn}(A) = (2, 3, 1, 3)$, se realiza la reducción de esta matriz por bloques aplicando las transformaciones elementales admisibles; como $a \prec b$ es posible realizar transformaciones de tipo (3) según la Definición 13 de las columnas del primer bloque (asociado a a) sobre las columnas del segundo bloque (asociado a b) por tanto, se tiene que

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim^{(1)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & 2 & -15 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -11 & -13 \end{array}\right] \sim^{(2)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & 2 & -15 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -11 & -13 \end{array}\right]$$

$$\sim^{(2)(1)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -15 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \sim^{(3)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\sim^{(2)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \sim^{(2)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 126 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim^{(1)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{(3)}_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Después del proceso de reducción se llega a que A es $\mathcal{G}_P$-equivalente a la forma canónica anterior. Ahora bien, si se realiza exactamente el mismo paso a paso anterior pero mediante productos matriciales, teniendo en cuenta que cada transformación elemental admisible en la Definición 13 equivale a multiplicar la representación A por una matriz invertible ya sea por derecha o por izquierda acorde a la Nota 1. Se obtiene, finalmente, un par de matrices invertibles F y C de la siguiente forma

$$F = \left[\begin{array}{ccc} -4 & -25 & 35 \\ 14 & 91 & -126 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{array}\right] \text{ y } \ C = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} 1 & \frac{2}{7} & -1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -1 & -\frac{11}{5} & -\frac{91}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right],$$

estas matrices, a su vez cumplen que

$$FAC = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathcal{G}_P} A.$$

3. La categoría de representaciones matriciales de poset y su categoría de aditivización

A lo largo de esta sección se pretende dotar las representaciones matriciales de poset con estructura de categoría, así como estudiar la categoría de representaciones de quiver por medio de la aditivización del poset, con el fin de analizar las propiedades categóricas que permitirán describir los objetos indescomponibles en ambas categorías a través de una inyección con propiedades de equivalencia entre dichos objetos.

3.1. Categoría $\mathbf{Mat_P}$

Para ampliar el estudio desarrollado hasta el momento, se definirá una nueva categoría cuyos elementos serán las representaciones matriciales del poset P y sus morfismos serán definidos mediante los productos matriciales que representan las cadenas de transformaciones elementales admisibles de la Definición 13 según la Nota 1.

Definición 15. Se define la categoría de representaciones matriciales de un poset P, denotada $\mathbf{Mat_P}$, en donde los objetos de la categoría son matrices por bloques $B \in Mat_P$ con $\mathbf{cdn}(B) = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1})$ y los morfismos son pares de matrices $f = (F, C)$ tales que

$$f(B) := FBC \ ,$$

donde $F \in Gl(s_{n+1}, K)$ mientras que $C \in Gl(s_1 + s_2 + .. + s_n, K)$ y representan productos de matrices asociadas a las transformaciones elementales dadas en la Nota 1, donde $Gl(s, K)$ es el grupo lineal de orden s con entradas en K; F representa las cadenas de transformaciones admisibles de tipo (1) y C representa las transformaciones de tipo (2) y (3) en la Definición 13.

Nota 7. De la definición de morfismo $f = (F, C)$ en la categoría $\mathbf{Mat_P}$ nótese que dada una enumeración apropiada del poset P, la matriz C será triangular superior por bloques y de tal manera que

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & C_{nn} \end{bmatrix},$$

en la cual, $C_{ii} \in Gl(s_i, K)$ y si $i \nless j$ para $i, j \in P$ el bloque C_{ij} es nulo acorde a la Nota 1.

3.2. Categoría $\mathbf{Mat_P^{ad}}$

Con el fin de analizar los objetos indescomponibles en $\mathbf{Mat_P}$, en esta sección se introducirá la categoría de representaciones de quiver, más específicamente sobre un quiver Q_P que resulta ser a grosso modo una "**extensión**" del poset P mediante un punto maximal $n+1$, a esta estructura se le denomina **aditivización de Mat$_\mathbf{P}$** y sus objetos son colecciones de K-espacios vectoriales de dimensión finita y transformaciones lineales entre ellos; por otra parte, los morfismos no serán definidos de forma natural (Definición 1.3, [4]), en su lugar se tendrá una forma especial en la cual la conmutatividad de los diagramas dependerá de las matrices asociadas a las transformaciones entre los K-espacios vectoriales.

Definición 16. Un quiver es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ que consiste en: Q_0 un conjunto de vértices, Q_1 un conjunto de flechas entre los vértices y dos funciones $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ tales que para cada flecha en Q_1, s asigna el vértice de salida mientras que t asigna el vértice de llegada.

Nota 8. Generalmente, las estructuras de quiver se representan con grafos dirigidos, mediante el uso de puntos $i\bullet$ para cada vértice $i \in Q_0$ y flechas $\alpha : s(\alpha)\bullet \longrightarrow \bullet t(\alpha)$ para cada $\alpha \in Q_1$.

Definición 17. Sea $P = \{1, 2, \ldots, j, \ldots, n\}$ un poset finito. Añadiendo a P un punto maximal denotado por $n+1$, se asocia a $P \bigcup \{n+1\}$ el quiver denotado Q_P representado en la siguiente figura

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \bullet \arrow[ddr] & \\
 & \vdots & \\
Q_P : & j \bullet \arrow[r] & \bullet\, n+1 \\
 & \vdots & \\
 & n \bullet \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2: Quiver Q_P

Definición 18. Se define la categoría de aditivización de $\mathbf{Mat_P}$, denotada $\mathbf{Mat_P^{ad}}$, en donde los objetos son colecciones

$$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}, t_1, t_2, \ldots, t_n)\ ,$$

de K-espacios vectoriales V_i de dimensión finita, en donde cada t_i es una transformación lineal tal que $t_i : V_i \longrightarrow V_{n+1}$ para cada $i \in P$. Por otra parte, los morfismos en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ de una representación vectorial $V' = (V'_1, \ldots, V'_n, V'_{n+1}, t'_1, \ldots, t'_n)$ a una representación $V = (V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ son pares (g, g_{n+1}) tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \arrow[r, "{[t_i]}"] & V_{n+1} \\
V'_1 \oplus V'_2 \oplus \cdots \oplus V'_n \arrow[u, "g"'] \arrow[r, "{[t'_i]}"] & V'_{n+1} \arrow[u, "g_{n+1}"']
\end{tikzcd},
$$

Figura 3: Diagrama de (g, g_{n+1})

donde

$$[t_i] = [\ t_1 \mid \cdots \mid t_n\ ]\ ,$$
$$[t'_i] = [\ t'_1 \mid \cdots \mid t'_n\ ],$$

además, g tiene asociada una matriz triangular superior por bloques de la siguiente manera

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{bmatrix},$$

en la cual g_{ij} representa la matriz asociada a $g_{ij} : V'_j \longrightarrow V_i$ una transformación lineal así como en la Definición 2 y cumplen que $g_{ij} = 0$ si $i \not\preceq j$ en el poset P. La ley de composición en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ se define de forma natural.

Nota 9. Es importante resaltar que:

✓ Las colecciones $V = (V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ en la Definición 18 se denominan representaciones vectoriales del quiver Q_P según la Definición 17.

✓ De la Definición 18 es importante resaltar que al reinterpretar el poset P la información proporcionada por la relación de orden $\preceq$ y que a su vez determina las transformaciones admisibles en la Definición 13, queda inmersa en la matriz asociada a la transformación g, por esta razón, cuando $i \not\preceq j$ no es posible realizar transformaciones de tipo (3) de las columnas del bloque asociado a i sobre las columnas del bloque asociado a j, lo cual implica que los bloques g_{ij} que representan estas transformaciones según la Nota 1 son nulos.

Lema 2. *(Lema 2.0, [5]) Un morfismo $(g, g_{n+1}) : V \longrightarrow V'$ en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ es un isomorfismo si y solo si $g_{11}, \ldots, g_{nn}, g_{n+1}$ son isomorfismos de K-espacios vectoriales.*

Definición 19. Dada $V = (V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ una representación vectorial de Q_P acorde a la Definición 18, se define el **vector dimensión** de la representación o **vector coordenado** de V de la siguiente forma

$$\mathbf{dim}(V) = (dim_K V_1, \ldots, dim_K V_n, dim_K V_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

Definición 20. Se define la suma directa de dos representaciones vectoriales V y V' de Q_P, en donde $V = (V_1, \dots, V_n, V_{n+1}, t_1, \dots, t_n)$ y $V' = (V'_1, \dots, V'_n, V'_{n+1}, t'_1, \dots, t'_n)$, de la siguiente forma

$$V \oplus V' = \left\{ V_1 \oplus V'_1, \dots, V_{n+1} \oplus V'_{n+1}, \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t'_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} t_n & 0 \\ 0 & t'_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Nota 10. Se denota por 0 a la representación vectorial de Q_P de la forma $0 = (V_1, \dots, V_n, V_{n+1}, t_1, \dots, t_n)$ que consta de espacios triviales $V_i = 0$ para $i \in P \cup \{n+1\}$ y transformaciones lineales nulas t_j entre ellos, con $j \in P$.

Definición 21. Se dice que una representación vectorial $V \neq 0$ de Q_P es **indescomponible** si cada vez que $V \cong L \oplus S$ para $L, S \in \mathbf{Mat}_\mathbf{P}^\mathbf{ad}$ entonces $S = 0$ o $L = 0$.

3.3. Relación entre las categorías $\mathbf{Mat}_\mathbf{P}$ y $\mathbf{Mat}_\mathbf{P}^\mathbf{ad}$

En las secciones previas, se realizó un estudio de estructura categórica en $\mathbf{Mat}_\mathbf{P}$ y en $\mathbf{Mat}_\mathbf{P}^\mathbf{ad}$, ahora se establecerá la relación existente entre la teoría de representaciones matriciales de poset y la teoría de representaciones vectoriales finitas de quiver en la aditivización por medio de una inyección entre las categorías de la siguiente forma.

Definición 22. Se define la inyección $\mathbf{q} : \mathbf{Mat}_\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Mat}_\mathbf{P}^\mathbf{ad}$ de tal manera que, para cada representación $A = [\ A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n\ ] \in \mathbf{Mat}_\mathbf{P}$ con $\mathbf{cdn}(A) = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1})$, se asocia la representación vectorial $\mathbf{q}(A)$ del quiver Q_P definida como

$$\begin{tikzcd}
 & K^{s_1} \arrow[ddr, "A_1"] & \\
 & \vdots & \\
\mathbf{q}(A): & K^{s_j} \arrow[r, "A_j"] & K^{s_{n+1}}, \\
 & \vdots & \\
 & K^{s_n} \arrow[uur, "A_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Imágen de A por $\mathbf{q}$

en donde $A_i : K^{s_i} \longrightarrow K^{s_{n+1}}$ es la transformación lineal inducida por el bloque A_i en las bases canónicas según la Proposición 2 y la Nota 2.

Nota 11. Es posible concluir con facilidad que:

✓ $\mathbf{q}(I_{0,0}) = 0$.

✓ De las Definición 12 y la Definición 20 de sumas directas tanto en representaciones matriciales de poset como en representaciones vectoriales de quiver, es claro que se tiene la siguiente relación $\mathbf{q}(A \oplus B) \cong \mathbf{q}(A) \oplus \mathbf{q}(B)$.

Lema 3. *(Lema 2.2. [5]) La inyección entre categorías* $\boldsymbol{q}$ *tiene las siguientes propiedades:*

(a) Dos matrices por bloques $A, B \in \mathbf{Mat_P}$ *son* $\mathcal{G}_P$*-equivalentes si y solo si* $\boldsymbol{q}(A) \cong \boldsymbol{q}(B)$.

(b) Una representación $A \in (Mat_P, \mathcal{G}_P)$ *es indescomponible si y solo si* $\boldsymbol{q}(A)$ *es indescomponible en* $\mathbf{Mat_P^{ad}}$.

(c) Mediante $\boldsymbol{q}$ *se establece una correspondencia uno a uno entre las clases de* $\mathcal{G}_P$*-equivalencia indescomponibles en* $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$ *y las clases de isomorfismo de objetos indescomponibles en* $\mathbf{Mat_P^{ad}}$*. Además, para cada* $A \in \mathbf{Mat_P}$ *se tiene que* $\boldsymbol{cdn}(A) = \boldsymbol{dim}[\boldsymbol{q}(A)]$.

Demostración. Sea $(P, \preceq)$ un poset finito, $\mathbf{Mat_P}$ y $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ definidas como en 15 y 18 respectivamente:

(a) Sean $A, B \in \mathbf{Mat_P}$ tales que $A \sim_{\mathcal{G}_P} B$ según la Definición 13 con $\mathbf{cdn}(A) = \mathbf{cdn}(B) = (s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$. Existen matrices F y C según la Nota 3 tales que $B = FAC$, con $F \in Gl(s_{n+1}, K)$ y $C \in Gl(s_1 + s_2 + .. + s_n, K)$ como indica la Definición 15, F representando las transformaciones admisibles de tipo (1) y C las transformaciones de tipo (2) y (3). Además, a través de una reenumeración apropiada de P se tiene que

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \vdots \\ & & & C_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $C_{ii} \in Gl(s_i, K)$ y $C_{ij} = 0$ cuando $i \npreceq j$ para $i, j \in P$ según indica la Nota 7. Por lo tanto, haciendo g la transformación inducida por C y g_{n+1} la inducida por F^{-1} en las bases canónicas y en virtud del Lema 2, como $F^{-1}B = AC$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} K^{s_1} \oplus K^{s_2} \oplus \cdots \oplus K^{s_n} \arrow[r, "A"] & K^{s_{n+1}} \\ K^{s_1} \oplus K^{s_2} \oplus \cdots \oplus K^{s_n} \arrow[r, "B"] \arrow[u, "g"] & K^{s_{n+1}} \arrow[u, "g_{n+1}"'] \end{tikzcd}.$$

Mediante el Lema 2 se asegura que la transformación g es un isomorfismo y como la matriz asociada a g_{n+1} es invertible g_{n+1} también lo es, lo cual indica que $\mathbf{q}(A) \cong \mathbf{q}(B)$.

Recíprocamente si se asume que $\mathbf{q}(A) \cong \mathbf{q}(B)$ se garantiza la existencia de un par de transformaciones (g, g_{n+1}) invertibles (así como sus matrices asociadas), para las cuales el diagrama anterior conmuta, haciendo C la matriz asociada a g y F la asociada a g_{n+1} en las bases canónicas según la Definición 2. La conmutatividad del diagrama garantiza que $B = FAC$ y acorde a la Nota 3 se llega a que $A \sim_{\mathcal{G}_P} B$.

(b) Supóngase que $\mathbf{q}(A)$ es una representación indescomponible, si $A \sim_{\mathcal{G}_P} T \oplus T'$ para $T, T' \in \mathbf{Mat_P}$ entonces por *(a)* y la Nota 11 se tiene que $\mathbf{q}(A) \cong \mathbf{q}(T \oplus T') \cong \mathbf{q}(T) \oplus \mathbf{q}(T')$ y por la Definición 21, $\mathbf{q}(T) = 0$ o bien $\mathbf{q}(T') = 0$ lo cual implica nuevamente por *(a)* que $T = I_{0,0}$ o $T' = I_{0,0}$, demostrando que A es indescomponible según la Definición 5.

Recíprocamente supóngase que $A = [\ A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n\ ]$ es una matriz indescomponible y tal que $\mathbf{cdn}(A) = (s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$. Si $\mathbf{q}(A) \neq 0$ es tal que $\mathbf{q}(A) \cong V \oplus V'$, para $V, V' \in \mathbf{Mat_P^{ad}}$, donde $V = (V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}, t_1, \ldots, t_n)$ y $V' = (V'_1, \ldots, V'_n, V'_{n+1}, t'_1, \ldots, t'_n)$, de la Definición 20 se tiene que $K^{s_i} \cong V_i \oplus V'_i$, para $i \in P \cup \{n+1\}$ y por tanto $v_i + v'_i = s_i$, donde $v_i = dim_K V_i$ y $v'_i = dim_K V'_i$. Por otra parte, de la Definición 22 y la Definición 20, se tiene que $A_i = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t'_i \end{bmatrix}$ para $i \in P$.

Sean $T = [\ t_1 \mid \cdots \mid t_n\ ]$ y $T' = \left[\ t'_1 \mid \cdots \mid t'_n\ \right]$ con $\mathbf{cdn}(T) = (v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ y $\mathbf{cdn}(T') = (v'_1, \ldots, v'_n, v'_{n+1})$, se cumple que $\mathbf{q}(T) \cong V$ y $\mathbf{q}(T') \cong V'$, entonces por la Nota 11, $\mathbf{q}(A) \cong \mathbf{q}(T \oplus T')$ y mediante *(a)* se sigue que $A \sim_{\mathcal{G}_P} T \oplus T'$; en virtud de la Definición 5 se tiene que $T = I_{0,0}$ o $T' = I_{0,0}$ y se deduce de la Nota 11 que $V = 0$ o bien $V' = 0$.

(c) De *(a)* y *(b)* se demuestra la existencia de una correspondencia uno a uno entre las clases de $\mathcal{G}_P$-equivalencia indescomponibles en $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$ y las clases de isomorfismo de representaciones indescomponibles en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$. Además por construcción es evidente que $\mathbf{cdn}(A) = \mathbf{dim}[\mathbf{q}(A)]$.

□

4. Teorema de clasificación de los poset de ancho dos

Teniendo ya definidas las categorías $\mathbf{Mat_P}$ y $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ así como la relación que existe entre estas por medio de la inyección $\mathbf{q}$, se tienen todas las herramientas necesarias para clasificar las clases indescomponibles para poset finitos con determinadas estructuras y así demostrar el teorema central de este estudio.

4.1. Representaciones indescomponibles

Una vez definida la inyección $\mathbf{q}$ entre las categorías fijadas en las secciones anteriores, es natural considerar su inyección inversa en virtud de las propiedades señaladas en el Lema 3. Seleccionando determinados objetos en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ es posible obtener objetos de interés para el análisis en la categoría de representaciones matriciales del poset P. El objetivo de esta sección será definir ciertos objetos que representan isoclases indescomponibles en la categoría de adivitización y sus correspondientes representaciones indescomponibles en $\mathbf{Mat_P}$ a traves de $\mathbf{q^{-1}}$.

Definición 23. Sea $P = \{1, 2, \dots, n\}$ un poset. Para $j, i \in P$, se definen los objetos indescomponibles $\mathbf{K}(\emptyset)$, $\mathbf{K}(\ j \nearrow \mathbf{0})$ y $\mathbf{K}(\ i\ )$ en la categoría $\mathbf{Mat_P^{ad}}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{K}(\emptyset): \begin{tikzcd} 0 \bullet \arrow[ddrr] & & \\ \vdots & & \\ 0 \bullet \arrow[rr] & & \bullet K, \\ \vdots & & \\ 0 \bullet \arrow[uurr] & & \end{tikzcd} \quad \mathbf{K}(\ j \nearrow \mathbf{0}): \begin{tikzcd} 0 \bullet \arrow[ddrr] & & \\ \vdots & & \\ K \bullet \arrow[rr] & & \bullet 0, \\ \vdots & & \\ 0 \bullet \arrow[uurr] & & \end{tikzcd} \quad \mathbf{K}(\ i\ ): \begin{tikzcd} 0 \bullet \arrow[ddrr] & & \\ \vdots & & \\ K \bullet \arrow[rr, "id"] & & \bullet K. \\ \vdots & & \\ 0 \bullet \arrow[uurr] & & \end{tikzcd}$$

Figura 5: Representaciones $\mathbf{K}(\emptyset)$, $\mathbf{K}(\ j \nearrow \mathbf{0})$ y $\mathbf{K}(\ i\ )$

Por otra parte, dados elementos incomparables dos a dos $i_1, \dots, i_r$ en $(P, \preceq)$ es posible definir un objeto indescomponible notado $\mathbf{K}(i_1, \dots, i_r) \in \mathbf{Mat_P^{ad}}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}(i_1, \dots, i_r)_j = \begin{cases} K, & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_r, n+1\} \\ 0, & j \in P - \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}$$

En donde la transformación lineal $t_j : \mathbf{K}(i_1, \dots, i_r)_j \to \mathbf{K}(i_1, \dots, i_r)_{n+1}$ será la identidad si $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$, mientras que t_j será nula en otro caso.

De este modo se definen las siguientes matrices indescomponibles en $\mathbf{Mat_P}$ en virtud de la Definición 2 y el Lema 3.

Definición 24. Sean $\mathbf{K}(\emptyset)$, $\mathbf{K}(\ j \nearrow \mathbf{0})$, $\mathbf{K}(\ i\ )$ y $\mathbf{K}(r,s)$ para $j,i \in P$ y r,s elementos incomparables en P como en la Definición 23. Se definen las matrices indescomponibles $\mathbf{K}^0_{n+1}$, $\mathbf{K}^j_0$, $\mathbf{K}^i_{n+1}$ y $\mathbf{K}^{(r,s)}_{n+1}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^0_{n+1} &= \mathbf{q}^{-1}[\mathbf{K}(\emptyset)] = [\ I_{1,0} \mid \cdots \mid I_{1,0} \mid \cdots \mid I_{1,0}\ ]\ ,\\
\mathbf{K}^j_0 &= \mathbf{q}^{-1}[\mathbf{K}(j \nearrow 0)] = [\ I_{0,0} \mid \cdots \mid I_{0,1} \mid \cdots \mid I_{0,0}\ ]\ ,\\
\mathbf{K}^i_{n+1} &= \mathbf{q}^{-1}[\mathbf{K}(i)] = [\ I_{1,0} \mid \cdots \mid 1 \mid \cdots \mid I_{1,0}\ ]\ ,\\
\mathbf{K}^{(r,s)}_{n+1} &= \mathbf{q}^{-1}[\mathbf{K}(r,s)] = [\ I_{1,0} \mid \cdots \mid 1 \mid \cdots \mid 1 \mid \cdots \mid I_{1,0}]\ ,
\end{aligned}$$

en donde $\mathbf{q}$ es la inyección de la Definición 22.

Definición 25. Sea $A \in \mathbf{Mat_P}$ una representación según la Definición 10, con vector coordenado $\mathbf{cdn}(A) = (s_1,\ldots,s_n,s_{n+1})$ y sean $\mathbf{K}^0_{n+1}$, $\mathbf{K}^i_{n+1}$, $\mathbf{K}^i_0$ y $\mathbf{K}^{(r,s)}_{n+1}$ las matrices indescomponibles dadas en la Definición 24 para $i = 1,\ldots,n \in P$ y para cualquier par (r,s) de elementos incomparables de P, entonces se definen las siguientes sumas directas

$$A \oplus \mathbf{K}^0_{n+1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & A_1 & & & \cdots & & & A_n & \\ \hdashline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right] \tag{1}$$

$$A \oplus \mathbf{K}^i_0 = \left[\begin{array}{c|c|c:c|c|c}
 & & & 0 & & \\
A_1 & \cdots & A_i & \vdots & \cdots & A_n \\
 & & & 0 & &
\end{array}\right] \tag{2}$$

$$A \oplus \mathbf{K}^i_{n+1} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc:c|c|ccc}
 & & & & & & & 0 & & & & \\
 & A_1 & & \cdots & & A_i & & \vdots & \cdots & & A_n & \\
 & & & & & & & 0 & & & & \\ \hdashline
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right] \tag{3}$$

$$A \oplus \mathbf{K}^{(r,s)}_{n+1} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc:c|c|ccc:c|c|ccc}
 & & & & & & & 0 & & & & & 0 & & & & \\
 & A_1 & & \cdots & & A_r & & \vdots & \cdots & & A_s & & \vdots & \cdots & & A_n & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & 0 & & & & \\ \hdashline
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right] \tag{4}$$

Ejemplo 2. Dado el poset P y la representación A como en el Ejemplo 1. El quiver asociado a P según la Definición 17 está dado de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
 & a \bullet \arrow[dr] & \\
Q_P : & b \bullet \arrow[r] & \bullet\, d\ , \\
 & c \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura 6: Quiver asociado a P en $\mathbf{Mat_P^{ad}}$

donde d representa el punto maximal en la reinterpretación del poset P acorde a la Definición 17, ya que

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

aplicando 3 de la Definición 25 se llega a que

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_d^a \oplus \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{K}_d^a \oplus \mathbf{K}_d^a \oplus \left[\begin{array}{c|c:c:c|c} I_{0,1} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Mediante la suma directa en 2 de la Definición 25 se tiene que

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_d^a \oplus \mathbf{K}_d^a \oplus \mathbf{K}_0^b \oplus \mathbf{K}_0^b \oplus \left[\begin{array}{c|c|c} I_{0,1} & 1 & 1 \end{array}\right],$$

finalmente, tras aplicar 4 de la Definición 25 se llega a una descomposición en representaciones indescomponibles de la siguiente manera

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_d^a \oplus \mathbf{K}_d^a \oplus \mathbf{K}_0^b \oplus \mathbf{K}_0^b \oplus \mathbf{K}_d^{(b,c)} = (\mathbf{K}_d^a)^2 \oplus (\mathbf{K}_0^b)^2 \oplus \mathbf{K}_d^{(b,c)}\ .$$

Lema 4. *Si B es una matriz indescomponible tal que B es $\mathcal{G}_P-$equivalente a una de las formas de la Definición 25 entonces B es $\mathcal{G}_P-$equivalente a $\boldsymbol{K}_{n+1}^0$, $\boldsymbol{K}_0^j$, $\boldsymbol{K}_{n+1}^i$ y $\boldsymbol{K}_{n+1}^{(r,s)}$ respectivamente con $i,j \in P$ y r,s incomparables de P.*

Demostración. Supóngase que $B \in \mathbf{Mat_P}$ es indescomponible y es tal que $B \sim_{\mathcal{G}_P} A \oplus \mathbf{K}^0_{n+1}$, como $\mathbf{K}^0_{n+1} \neq I_{0,0}$ de la Definición 5 se tiene que $A = I_{0,0}$ y mediante la Nota 5 se tiene que $A \oplus \mathbf{K}^0_{n+1} = \mathbf{K}^0_{n+1}$ y por tanto $B \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}^0_{n+1}$. De manera análoga se demuestra para $\mathbf{K}^j_0$, $\mathbf{K}^i_{n+1}$ y $\mathbf{K}^{(r,s)}_{n+1}$ respectivamente. $\square$

Lema 5. *Sea $P = \{1, 2, \dots n\}$ un poset. Si A es un representante de una clase indescomponible en $\mathbf{Mat_P}$ tal que $\boldsymbol{cdn}(A) = (s_1, \dots s_n, 0)$ entonces A es $\mathcal{G}_P$-equivalente a alguna de las matrices $\boldsymbol{K}^1_0, \dots, \boldsymbol{K}^n_0$ según la Definición 24.*

Demostración. Supóngase que $P = \{1, 2, \dots n\}$ es un poset y A es una representación indescomponible de P tal que $\mathbf{cdn}(A) = (s_1, \dots s_n, 0)$ entonces A tiene la siguiente forma,

$$A = \left[\ I_{0,s_1} \mid I_{0,s_2} \mid \cdots \mid I_{0,s_n} \ \right],$$

por lo tanto $\mathbf{q}(A)$ es la siguiente representación del quiver asociado Q_P, la cual consta de transformaciones nulas

$$\begin{tikzcd} & K^{s_1} \bullet \arrow[ddr] & \\ & \vdots & \\ \mathbf{q}(A): & K^{s_j} \bullet \arrow[r] & \bullet\ 0, \\ & \vdots & \\ & K^{s_n} \bullet \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

Figura 7: Imagen bajo $\mathbf{q}$ de la representación sin filas

de la Definición 23 se obtiene que que

$$\mathbf{q}(A) \cong [\mathbf{K}(\ \mathbf{1} \nearrow \mathbf{0})]^{s_1} \oplus [\mathbf{K}(\ 2 \nearrow \mathbf{0})]^{s_2} \oplus \cdots \oplus [\mathbf{K}(\ \mathbf{n} \nearrow \mathbf{0})]^{s_n}$$

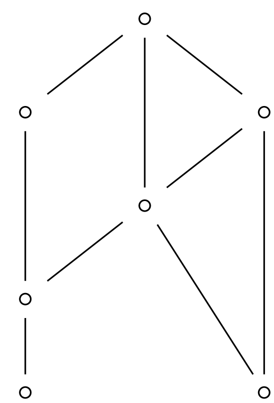
y mediante el Lema 3*(a)*, la Nota 11 y la Definición 24 se llega a la forma

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} [\mathbf{K}^1_0]^{s_1} \oplus [\mathbf{K}^2_0]^{s_2} \oplus \cdots \oplus [\mathbf{K}^n_0]^{s_n} \ .$$

Como A es indescomponible, en virtud del Lema 4 se tiene que existe $i \in P$ con $s_i = 1$ y tal que para todo $j \neq i$ se tiene que $s_j = 0$, con lo cual $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}^i_0$, en conclusión A es $\mathcal{G}_P$-equivalente a alguna de las matrices $\mathbf{K}^1_0, \mathbf{K}^2_0, \dots, \mathbf{K}^n_0$. $\square$

Definición 26. Sea $(P, \leq)$ un poset finito. Se dice que el ancho de P es $k \in \mathbb{N}$, denotado por $\omega(P) = k$, si existe una k-tupla $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ de elementos incomparables $t_i \in P$ con $1 \leq i \leq k$. Además, para toda $k+1$-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ de elementos de P, existen r, s tales que $x_r \leq x_s$, con $1 \leq r, s \leq k+1$. Se dice que $\omega(P) = 1$ si P es una cadena.

Ejemplo 3. Sea P el poset representado con el siguiente diagrama de Hasse



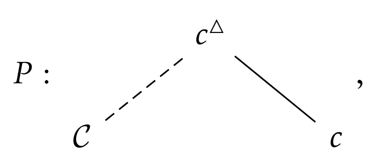
si se toman cualesquiera 3 puntos en P, al menos dos de ellos estarán relacionados en el poset, sin embargo si es posible hallar parejas incomparables, por ejemplo los minimales. Entonces $\omega(P) = 2$.

Proposición 3. *Dado* $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un poset finito con* $\omega(P) = 2$, *tal que* 1 *y* c *son minimales en* P. *Si* $A = [\ A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n\ ]$ *representa una clase indescomponible en* $\mathbf{Mat_P}$ *con* $A_1 \neq 0$ *y* $A_c \neq 0$ *entonces* A *es* $\mathcal{G}_P$*−equivalente a* $\boldsymbol{K}_{n+1}^{(1,c)}$.

Demostración. Sea $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ un poset finito con $\omega(P) = 2$ y tal que 1 y c son elementos minimales de P. Se construye la cadena $\mathcal{C}$ de elementos de P que no son comparables con c, mediante un reordenamiento apropiado de P se tiene que

$$\mathcal{C} : 1 \circ \longrightarrow \circ\ 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ\ c-2 \longrightarrow \circ\ c-1,$$

entonces P tiene la siguiente forma



donde $c^{\triangle} = \{i \in P : \ c \prec i\}$ y la línea punteada de $\mathcal{C}$ a $c^{\triangle}$ representa las relaciones entre la cadena y los demás elementos de P si dichas relaciones y elementos existen. Ahora bien, sea A una representación matricial de P según la Definición 10 que representa una clase indescomponible de $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$ y tal que $A_1 \neq 0$ y $A_c \neq 0$, entonces la representación A tiene la siguiente forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \cdots & A_{c-1} & A_c & A_{c+1} & \cdots & A_n \end{array}\right],$$

como A_1 tiene un elemento no nulo aplicando transformaciones admisibles en filas y columnas de tipo (1) y (2) según la Definición 13 es posible ubicar la identidad $1 \in K$ en la posición a_{11} y 0 en las demás componentes de la primera fila del bloque A_1. Como $1 \prec 2, \ldots, c-1$ mediante transformaciones de tipo (3) como en la Definición 13 sobre los bloques $A_2, \ldots, A_{c-1}$ de A se llega a la matriz A' tal que $A' \sim_{\mathcal{G}_P} A$ y es de la siguiente forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \cline{2-8} 0 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & \mathbf{A'_{11}} & & \cdots & & \mathbf{A'_{1c-1}} & & \mathbf{A'_c} & \mathbf{A'_{c+1}} & \cdots & \mathbf{A'_n} \\ 0 & & & & & & & & & & & \end{array}\right].$$

Ahora bien, realizando transformaciones de tipo (1) y (2) a A'_c para llevar la submatriz bajo la primera fila de este bloque a la forma canónica de acuerdo con el Lema 1, se obtiene un bloque identidad de tamaño t. En conclusión se llega a la representación $A'' \sim_{\mathcal{G}_P} A'$ en donde los elementos de la primera fila de A''_c se denotan con $x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_l$ con $l = s_c$, esta representación es tal que

$$A'' = \underbrace{\left[\begin{array}{c:ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A''_{11}} & \\ 0 & & & \\ \hdashline \mathbf{0} & & \mathbf{A''_{12}} & \end{array}\right.}_{A''_1} \underbrace{\begin{array}{|ccc}0 & \cdots & 0 \\ \hdashline & & \\ & \mathbf{A''_{21}} & \\ & & \\ \hdashline & \mathbf{A''_{22}} & \end{array}}_{A_2''} \begin{array}{|c|}\cdots \\ \hdashline \\ \cdots \\ \\ \hdashline \\ \end{array} \cdots \underbrace{\begin{array}{ccc:ccc}x_1 & \cdots & x_t & x_{t+1} & \cdots & x_l \\ \hdashline 1 & \cdots & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hdashline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{array}}_{A_c''} \begin{array}{|c|}\\ \hdashline \\ \cdots \\ \\ \hdashline \\ \end{array} \cdots \underbrace{\left.\begin{array}{c}\mathbf{A''_{nf_1}} \\ \hdashline \\ \mathbf{A''_{n1}} \\ \\ \hdashline \mathbf{A''_{n2}} \end{array}\right]}_{A_n''} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} t, \\ \\ \end{array}$$

mediante transformaciones admisibles en filas (de tipo (1) en la Definición 13) se anulan las entradas $x_1, \ldots, x_t$ y, a su vez, al ser estas transformaciones simultáneas es posible haber afectado la primera fila de los bloques $1, 2, \ldots, c-1$ en donde existían ceros, con la excepción de la posición $a_{11} = 1 \in K$ con la cual es posible recuperarlos mediante transformaciones del tipo (3).

Más aún, para los elementos $c+i \in P$ tales que $1 \leq c+i$ con $1 \leq i \leq c-n$, es posible anular la primera fila de los bloques A''_{c+i} mediante transformaciones de tipo (3) en la Definición 13. En resumen, se ha anulado la primera fila de todos los bloques A_j cuyos elementos asignados $j \in P$ son comparables con el minimal 1 a excepción de la primera componente $a_{11} = 1 \in K$. (★)

Por otra parte como $c \prec c+1, c+2, \ldots, n$ haciendo uso de la identidad de tamaño t formada en el paso anterior y mediante transformaciones admisibles de tipo (3), se anulan las filas $2, \ldots, t+1$ de los bloques $A''_{c+1}, A''_{c+2}, \ldots, A''_n$ consiguiendo la matriz $\overline{A}$ de la siguiente forma

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{c:c|c|c|c:c|c|c}
1 & 0\ \cdots\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & \cdots & 0\ \cdots\ 0 & x_{t+1}\ \cdots\ x_l & & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{nf_1}}\\ \hdashline
\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}} & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{21}} & \cdots & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ &\ddots& \\ 0&\cdots&1\end{matrix} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline
\mathbf{0} & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{12}} & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{2n}}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}t \\ \\ \end{array}.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\overline{A_1}}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\overline{A_2}}\ \cdots\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\overline{A_c}}\ \cdots\ \underbrace{\qquad}_{\overline{A_n}}$$

a) Si alguno de los $x_{t+1}, \ldots, x_l$ es no nulo; sin pérdida de generalidad suponiendo a $x_{t+1} \neq 0$. Multiplicando la columna de x_{t+1} por $x_{t+1}^{-1} \in K$, esto es una transformación de tipo (2) en la Definición 13, se obtiene $1 \in K$ en la posición de x_{t+1} y mediante transformaciones tipo (2) y (3) se anula el resto de la primera fila en los bloques $A''_c, A''_{c+1}, \cdots, A''_n$ con lo cual se llega a la matriz $\overline{A'}$ de tal manera que

$$\overline{A} \sim_{\mathcal{G}_P} \overline{A'}=\left[\begin{array}{c:c|c|c:c:c|c|c}
1 & 0\ \cdots\ 0 & \cdots & 0\ \cdots\ 0 & 1 & 0\ \cdots\ 0 & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline
\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \overline{\mathbf{A'}}_{\mathbf{11}} & \cdots & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ &\ddots& \\ 0&\cdots&1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \hdashline
\mathbf{0} & \overline{\mathbf{A'}}_{\mathbf{21}} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \overline{\mathbf{A'}}_{\mathbf{n2}}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}t \\ \\ \end{array},$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\overline{A'_1}}\ \cdots\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\overline{A'_c}}\ \cdots\ \underbrace{\qquad}_{\overline{A'_n}}$$

de donde $\overline{A} \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^{(1,c)} \oplus D$, y como A es indescomponible, se tiene que $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^{(1,c)}$ a causa del Lema 4 y la Definición 25 (4) demostrando esta proposición. Se probara que el resto de casos conducen a una contradicción.

b) Ahora, si se supone que $x_{t+1} = \ldots = x_l = 0$ entonces $\overline{A}$ tiene columnas nulas y la Definición 25(2), indica que $\overline{A}$ cuenta con sumandos de tipo $\mathbf{K}_0^c$ y por tanto $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_0^c$ acorde al Lema 4. Como $A_1 \neq 0$ lo anterior implicaría que

$$1 \leq cdn(A)_1 = cdn(\overline{A})_1 = cdn(\mathbf{K}_0^c)_1 = 0 \ ,$$

lo cual es una contradicción.

c) De lo anterior se tiene que $t = l$ y por tanto $\overline{A}_c$ se reduce puesto que ahora se supone que las columnas $t+1, \ldots, l$ no existen.

Se ha supuesto que el bloque A'_c es no vacío y no nulo, entonces $t > 0$. Se define el conjunto $\mathcal{J}$ que consta de los puntos en P mayores que c y que no son comparables con el minimal 1, es decir,

$$\mathcal{J} := (P - \{c\}) - \{s \in P : \ 1 \leq s\} \ .$$

En caso de que $\mathcal{J} = \emptyset$ o si cada bloque $\overline{A}_{c+1}, \ldots, \overline{A}_n$ tiene primera fila nula, la Definición 25(3) indica que $\overline{A} \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^1$, lo cual representa una contradicción de una forma similar a la que se muestra en *b)*, pues $A_c \neq 0$. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es no vacío y debido al ancho de P, $\mathcal{J}$ debe ser una subcadena de c^Δ, por otra parte, debe existir algún bloque $\overline{A}_j$ con primera fila no nula con $j \in P$, más aún $j \in \mathcal{J}$ debido a (★) pues los bloques comparables con el minimal 1 tienen primera fila nula. Se demostrará que estos dos supuestos conducen a una contradicción.

Sea $\alpha \in \mathcal{J}$ el minimal con respecto a la propiedad de la primera fila no nula. Por medio de las transformaciones elementales de tipo (2) se ubica $1 \in K$ en la esquina superior izquierda del bloque $\overline{A}_\alpha$ y se anula el resto de la primera fila dentro del bloque nuevamente con transformaciones elementales de tipo (2). Realizadas estas transformaciones, se llega a una representación $\overline{A''}$ que coincide con $\overline{A}$ pero tal que el bloque $\overline{A''}_\alpha$ es de la forma

$$\overline{A''}_\alpha = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline & & & \\ & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} & \\ & & & \\ \hdashline & & & \\ & \multicolumn{2}{c}{\overline{\mathbf{A''}}_{\alpha 2}} & \\ \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} t \ , \\ \\ \end{array}$$

para cada bloque $\overline{A''}_r$ con $\alpha \prec r$, $r \in \mathcal{J}$ mediante transformaciones de tipo (3) se anula la primera fila. Luego, tomando la matriz $\overline{A''}_{\alpha 2}$ y con transformaciones admisibles llevándola a la forma canónica acorde al Lema 1, se obtiene la representación B equivalente a $\overline{A''}$ com el bloque B_α de la forma

$$B_\alpha = \left[\begin{array}{ccc|ccc} z_1 & \cdots & z_k & y_1 & \cdots & y_s \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \\ \hline 1 & \cdots & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \}\, t\,. \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Lo anterior se debe a que en el proceso el $1 \in K$ de $\overline{A''}_\alpha$ pudo haber alterado su primera fila. Mediante la identidad se eliminan las entradas $z_1, \ldots, z_k$, modificando en el proceso la primera fila de los bloques comparables con el minimal 1 en ($\bigstar$) , los cuales son fácilmente recuperables mediante el $1 \in K$ del primer bloque y transformaciones de tipo (1) y (3). Entonces se llega a la representación $\overline{B}$ que tiene las mismas propiedades de $\overline{A}$, con bloques nulos en las filas $2, \ldots, t+1$ para $\overline{B}_{c+1}, \ldots, \overline{B}_n$ y con el bloque $\overline{B}_\alpha$ de la siguiente forma

$$\overline{B}_\alpha = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & y_1 & \cdots & y_s \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \\ \hline 1 & \cdots & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{array}\right].$$

Por el mismo argumento introducido en *b)* para los elementos $x_{t+1}, \ldots, x_l$ se tiene que $s = 0$, ya que en otro caso se llegaría a una contradicción. Ahora bien, si existe $q \in \mathcal{J}$ tal que $q \preceq \alpha$, entonces $\overline{B}_q$ tiene primera fila nula, pues α es el minimal respecto a esta propiedad, con lo cual la representación $\overline{B}$ cuenta con $b_{11} = 1 \in K$ y $b_{1p} = 0$ para $p \geq 2$ y $b_{u1} = 0$ para $u \geq 2$, concretamente $\overline{B}$ es de la forma

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} \overline{B} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 & \cdots & 0 \quad \cdots \quad 0 & \cdots & 0 \quad \cdots \quad 0 & \cdots & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hdashline 0 & & & \begin{matrix}1&\cdots&0\\&\ddots&\\0&\cdots&1\end{matrix} & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{11}} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \begin{matrix}1&\cdots&0\\&\ddots&\\0&\cdots&1\end{matrix} & \cdots & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{n1}} \\ \vdots & & & & & & & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}\right] \\ \underbrace{\hphantom{\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{11}}\quad\quad}}_{\overline{B}_1} \cdots \underbrace{\hphantom{1\cdots 0\quad}}_{\overline{B}_c} \cdots \underbrace{\hphantom{1\cdots 0\quad}}_{\overline{B}_\alpha} \cdots \underbrace{\hphantom{\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{n1}}\quad}}_{\overline{B}_n} \end{array} ,$$

por lo tanto, en virtud del Lema 4 al ser A indescomponible, se tiene que $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}^1_{n+1}$; sin embargo,

$$1 \leq cdn(A)_c = cdn(\overline{B})_c = cdn(\mathbf{K}^1_{n+1}) = 0 \ ,$$

lo cual es una contradicción, por tanto las suposiciones establecidas en ***b)*** y ***c)*** no son posibles, concluyendo finalmente que $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}^{(1,c)}_{n+1}$. □

Teorema 2. *(Teorema 2.5, [5]) Sea $P = \{1, 2, \ldots n\}$ un poset finito. Si $\omega(P) = 1$ entonces P es de representación finita y cada clase indescomponible en $(Mat_P, \mathcal{G}_P)$ es de alguna de las siguientes formas:* $\boldsymbol{K}^0_{n+1}$, $\boldsymbol{K}^j_0$, $\boldsymbol{K}^i_{n+1}$ *con $i, j \in P$. Para el caso $\omega(P) = 2$, se añade a las matrices anteriores* $\boldsymbol{K}^{(r,s)}_{n+1}$ *para $r, s \in P$ elementos incomparables.*

Demostración. Sea $n = |P|$ mediante inducción sobre la cardinalidad del poset.

Paso base:

Supóngase $|P| = 1$ y sea $M = [M_1]$ una matriz de un solo bloque que representa una clase indescomponible en $(Mat_P, \mathcal{G})$, entonces llevando a M a la forma canónica acorde al Lema 1, se tiene que existe $N = \left[\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ tal que $M \sim_{\mathcal{G}_P} N$, pero

$$N = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & I_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathbf{K}^1_{n+1} \oplus N' \ ,$$

en virtud del Lema 4 y la Definición 25(3), se tiene que $M \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}^1_{n+1}$.

Paso inductivo: Supóngase que $n > 1$ y el teorema se cumple para todos los posets cuya cardinalidad es menor a n.

Sea $A \in Mat_P$ representante de una clase indescomponible de $\mathcal{G}_P$-equivalencia con vector coordenado $\mathbf{cdn}(A) = (s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$.

✓ Si $s_{n+1} = 0$, entonces la representación A es una matriz vacía, con lo cual A es $\mathcal{G}_P$-equivalente a alguna de las matrices $\mathbf{K}_0^1, \ldots, \mathbf{K}_0^n$ pues se satisfacen las hipótesis del Lema 5 con lo que se verifica el teorema.

Ahora bien, suponiendo que $s_{n+1} \neq 0$ y nombrando 1 un minimal en $(P, \leq)$ entonces.

✓ Si $s_1 = 0$, entonces el primer bloque es una matriz vacía y es posible reinterpretar a A como una representación del subposet $\{2, \ldots, n\} \subseteq P$ y se tiene el resultado por la hipótesis de inducción.

✓ Si A_1 es un bloque nulo entonces

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & A_2 & \cdots & A_n \end{array}\right] \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_0^1 \oplus N \ ,$$

esto último se debe a la Definición 25 (2), por lo tanto, mediante el Lema 4 se tiene que $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_0^1$ verificando el teorema. Si por otra parte, la representación A tiene una fila nula entonces A es $\mathcal{G}_P-$equivalente a la matriz B obtenida aplicando transformaciones admisibles en filas donde

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & A_2' & \cdots & A_n' \\ \hdashline 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & & 0\cdots 0 \end{array}\right] \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^0 \oplus A' \ ,$$

lo anterior se debe a la Definición 25 (1), luego $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^0$ nuevamente en virtud del Lema 4. Ahora se distingue entre dos casos.

i) **Suponiendo que 1 es el único minimal.**

Como $A_1 \neq 0$, A_1 tiene un elemento no nulo, mediante transformaciones de tipo (2) en la Definición 13 (intercambio de columnas dentro del bloque) se ubica la columna de dicho elemento en la primera columna del bloque y mediante transformaciones de tipo (1) en la Definición 13 (intercambio simultaneo a filas) se reubica al elemento en la primera posición del bloque, mediante transformaciones de tipo (2) en la Definición 13 (multiplicar la columna por el inverso del elemento) se llega a que

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} A' = \left[\begin{array}{c:ccc|ccc|c|ccc} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s_1} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2s_2} & \cdots & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ns_n} \\ \hdashline \beta_{21} & & & & & & & & & & \\ \vdots & & A_1' & & & A_2' & & \cdots & & A_n' & \\ \beta_{s_{n+1}1} & & & & & & & & & & \end{array}\right].$$

Al ser 1 el único minimal, se tiene que $1 \prec j$ para $j \in \{2, \ldots, n\}$, se realizan transformaciones de tipo (3) para anular los α_{ji}, $1 \leq i \leq s_j$ y mediante las transformaciones de tipo (2) se anulan los α_{1i}, $2 \leq i \leq s_1$. De igual manera, aplicando transformaciones de tipo (1) para anular los $\beta_2, \ldots, \beta_{s_{n+1}}$ se llega a

$$A \sim_{\mathcal{G}_P} N = \left[\begin{array}{c:ccc|ccc|c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & & & & & & & & \\ \vdots & & N_1' & & & N_2' & & \cdots & & N_n' & \\ 0 & & & & & & & & & & \end{array}\right] = \mathbf{K}_{n+1}^1 \oplus N' \ ,$$

entonces $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^1$ por el Lema 4 y la Definición 25(3) verificando el teorema para los poset con ancho $\omega(P) \leq 2$ con un único minimal.

ii) **Suponiendo que P tiene dos elementos minimales 1 y c.**

Si A_c es nulo o vacío, entonces se considera a A como una representación del subposet $P - \{c\}$ y por la hipótesis de inducción se demuestra el teorema. Por otra parte, si A_c es no nulo se verifican las hipótesis requeridas en la Proposición 3, de donde se concluye que $A \sim_{\mathcal{G}_P} \mathbf{K}_{n+1}^{(1,c)}$.

Finalmente se ha demostrado que en un poset finito P de ancho $\omega(P) \leq 2$, cada clase indescomponible tiene alguna de las formas $\mathbf{K}_{n+1}^0$, $\mathbf{K}_0^i$, $\mathbf{K}_{n+1}^i$ para $i \in P$ o $\mathbf{K}_{n+1}^{(r,s)}$ en el caso $\omega(P) = 2$ con $r, s \in P$ elementos incomparables. $\square$

5. Conclusiones

- ✓ Tras enfocar el resultado del **Teorema de Kleiner** de representaciones vectoriales de poset en dirección de las representaciones matriciales sobre poset con ancho menor o igual a dos, se concluye que estos últimos son de tipo representación finita y es precisamente esta razón la que impulsa la búsqueda de las finitas representaciones indescomponibles.

- ✓ Existe una inyección que permite comparar la teoría de representaciones matriciales de poset con la teoría de representaciones vectoriales finitas de quiver en la aditivización. Así que, a partir de esta relación se construyen los objetos indescomponibles para la categoría $\mathbf{Mat}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{ad}}$ que facilitan la caracterizaron las clases indescomponibles del problema matricial asociado al poset en la categoría $\mathbf{Mat}_{\mathbf{P}}$.

- ✓ Este estudio proporciona un resultado más detallado al mostrar explícitamente la forma de las matrices indescomponibles en $\mathbf{Mat}_{\mathbf{P}}$, pero con la limitante de restricción de ancho, a diferencia de la conclusión del teorema principal de Kleiner que cuenta con independencia del ancho, pero que a su vez genera únicamente una clasificación basada en el tipo de representación finita o infinita.

Agradecimientos

Juan Sebastian Muñoz Mojica

Agradezco a Dios por la fortaleza y suerte con las que me ha bendecido. A mis padres Juan y Nancy por su apoyo y cariño incondicional en todo momento, a mis hermanas Maria y Laura quienes siempre han estado ahí para hacerme reír.

Doy gracias a aquellos profesores que me acompañaron durante mi formación académica, especialmente a Carlos Giraldo y Carolina Mejia quienes despertaron mi amor por las matemáticas y nuestra directora Verónica Cifuentes quien nos acompaño y apoyo, siendo un ejemplo de persona y profesional.

Por ultimo, agradezco a aquellos compañeros y amigos que conocí en este viaje, especialmente a Sayginer, Johan, Aleja, Angie, y por supuesto, a mi compañero de trabajo y gran amigo Juanes. A todos ellos, mil gracias.

Juan Esteban López Russi

Agradezco a mi familia, especialmente a mi madre Saida Russi pues su amor en medio de su propia enfermedad ha sido fundamental para mi, a mi padre Oscar y a mis hermanos Juliana y Wilson, quienes me han apoyado desde que decidí emprender esta travesía, agradezco al señor Federico Echavarría por la confianza que deposito en mi y en nuestra familia en este proceso.

Gracias a aquellos amigos que han estado para mi en las situaciones más difíciles y que han confiado en mis capacidades desde el primer día, especialmente a Joshua, Julián, Camilo y porsupuesto a mi compañero de trabajo y mi mejor amigo Juan. Le agradezco y le deseo lo mejor a los proyectos PCM y LLEEI de la Universidad Distrital por haberme dado la oportunidad de estudiar y ser monitor.

Agradezco a los profesores que me hicieron amar las matemáticas por su ejemplo y su pasión, especialmente a Carlos Giraldo, Carolina Mejía, Gerardo Riscanevo y a nuestra directora de trabajo Verónica Cifuentes, sin ella esto no sería posible. Finalmente agradezco a Dios por el viaje y todo el aprendizaje, que la gloria sea para Él.

Referencias

[1] M. Barot. *Introduction to the Representation Theory of Algebras.* Springer International Publishing, 2015.

[2] F.U. Coelho. *Um Curso de Álgebra Linear, Vol. 34.* EDUSP, 2001.

[3] B. Keller, A.I. Kostrikin, P. Gabriel, A.V. Roiter, and I.R. Shafarevich. *Representations of Finite-Dimensional Algebras.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 1992.

[4] R. Schiffler. *Quiver Representations.* CMS Books in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.

[5] D. Simson. *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories.* Algebra, logic, and applications. Taylor & Francis, 1993.