

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ACERCA DE LOS AUTOMORFISMOS HIPERBÓLICOS DEL TORO

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICA
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Natalia Vásquez Cala
Dirigido por: Carlos Orlando Ochoa Castillo

Bogotá DC
Febrero 2021

Resumen

El objetivo general de este trabajo es estudiar algunos elementos de la dinámica de los automorfismos hiperbólicos del toro. Se busca identificar la construcción del toro como cociente, distinguir algunas aplicaciones definidas del plano al toro y del toro en sí mismo. Como resultado del estudio de los temas mencionados se puede concluir que el toro puede representarse mediante el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y que los automorfismos hiperbólicos del toro son transformaciones lineales definidas en $\mathbb{R}^2$ proyectadas a T que son caóticas en todo T.

Palabras clave: automorfismos hiperbólicos, relación de equivalencia, sistemas dinámicos.

Clasificación AMS: 37D40

Agradecimientos: Quiero agradecer a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por formarme, a mi familia por su apoyo incondicional y a mis compañeros con quienes compartí buenas experiencias en este maravilloso camino.

1. Introducción

En este trabajo se presentan algunos automorfimos hiperbólicos del toro, teniendo como base un conocimiento en sistemas dinámicos, geometría diferencial y álgebra lineal; está basado en un tema tratado del libro An Introduction to Chaotic Dynamical Systems de Robert Devaney.

La geometría hiperbólica se da con el estudio a través del tiempo del quinto postulado de Euclides (330 a.C - 275 a.C) plasmado en su obra llamada Elementos, desarrollada con el fin de presentar la teoría de sólidos de Platón (427 a.C - 347 a.C) y la de los números irracionales de Teeteto (417 a.C - 369 a.C), considerada como el primer tratado científico de la humanidad.

Muchos matemáticos intentaron resolver el problema de las paralelas sin tener éxito. Es hasta el siglo XIX que Carl Gauss (1777-1855) se enfrenta directamente a dicho problema después de haberlo estudiado durante 40 años, creando así lo que hoy conocemos como geometría no euclidiana o geometría hiperbólica.

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque estan descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el

tiempo. Los sistemas dinámicos son de suma importancia puesto que permiten realizar la modelación de distintos fenómenos físicos y con ello, fortalecer el avance de diferentes teorías que impliquen modelamientos físicos.

Para comenzar, es importante hacer ciertas distinciones que nos permiten reconocer de manera correcta lo que se busca trabajar.

Cuando hablamos del toro inmediatamente viene a nuestra mente una dona o incluso una taza de café pero se debe saber que esta construcción generalmente viene dotada de la topología producto, la cual geométricamente se representa como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el producto de dos circunferencias.

En este trabajo veremos la construcción del toro dotado de la topología cociente, para esto consideramos el plano euclideano y una relación de equivalencia definida sobre él.

2. El toro como cociente

Consideremos como idénticos todos los puntos del plano que difieren por enteros, es decir, el punto (α, β) en el plano, debe ser considerado como el mismo que los puntos $(\alpha + 1, \beta)$, $(\alpha, \beta - 1)$, $(\alpha + 3, \beta + 5)$ y en general $(\alpha + M, \beta + N)$ donde M, $N \in \mathbb{Z}$. Dejamos que $[\alpha, \beta]$ denote la clase de equivalencia del punto (α, β).

Para abordar el tema de manera mas formal, se define la siguiente relación

de equivalencia, $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $x - x' \in \mathbb{Z}$ y $y - y' \in \mathbb{Z}$, es decir, $(x - x', y - y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así obtenemos el toro como el conjunto de todas las clases de equivalencia bajo esta relación.

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en el plano $\mathbb{R}^2$.

Para probar la propiedad reflexiva veamos que

$$(x, y) \sim (x, y) \Leftrightarrow x - x \in \mathbb{Z} \wedge y - y \in \mathbb{Z},$$

lo que es verdadero ya que $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, por tanto la relación es reflexiva.

Para la propiedad de simetría supongamos que

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z},$$

por tanto, es posible afirmar que $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ y $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$, así $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ y la relación es simétrica.

Para la propiedad transitiva supongamos que

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$$

es decir $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ y $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$ y $x_2 - x_3 \in \mathbb{Z}$ y $y_2 - y_3 \in \mathbb{Z}$, así

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) = x_1 - x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) = y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$$

por tanto la relación es transitiva, pues $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Asi, se ha probado que la relación definida anteriormente es una relación de equivalencia, esta relación genera el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Geométricamente este proceso puede ser visualizado de la siguiente manera, consideremos el cuadrado unitario en el plano $0 \leq x, y \leq 1$.

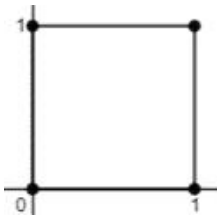


Figura 1: Cuadrado unitario.

Por la relación anteriormente definida, se sabe que los puntos de la gráfica estan relacionados entre sí, al diferir por enteros; de esta forma, los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$ están relacionados igual que los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, es decir, pertenecen a la misma clase de equivalencia, pues

$$(0,1) \sim (1,1) \Leftrightarrow 0-1=-1 \in \mathbb{Z} \wedge 1-1=0 \in \mathbb{Z}$$

$$(0,0) \sim (1,0) \Leftrightarrow 0-1=-1 \in \mathbb{Z} \wedge 0-0=0 \in \mathbb{Z}$$

Bajo este procedimiento, el segmento superior del cuadrado $y=1$ puede ser considerado lo mismo que el segmento inferior del cuadrado $y=0$ y similarmente los segmentos del cuadrado $x=0$ y $x=1$ pueden ser identificados. Así el cuadrado se convierte en un cilindro y luego en un toro.

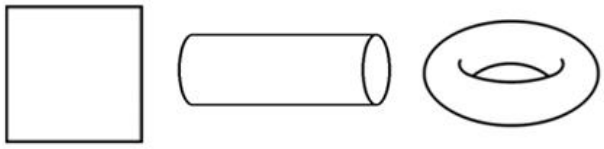


Figura 2: Construcción del toro a partir del cuadrado.

Relación de la pendiente de las rectas

Ahora consideremos el comportamiento de las funciones lineales en el plano euclideo y luego su proyección en el toro. Uno de los aspectos importantes a considerar de las funciones lineales es el valor de su pendiente, pues este determina su inclinación en el plano euclideo y de esta forma su comportamiento en el toro.

La pendiente de una recta puede ser de manera general un valor entero, racional o irracional, y puesto que los enteros son un subconjunto de los racionales, tendremos unicamente consideración de estos dos casos, las rectas con pendiente racional o irracional.

Volvamos al cuadrado $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. Para ilustrar la forma en la que influyen las pendientes de las rectas veamos primero un par de ejemplos.

La recta $y = 4x$ tiene pendiente racional y el siguiente comportamiento en el toro, pues los puntos de los segmentos del cuadrado $y = 0$ y $y = 1$ coinciden como se muestra en la gráfica, generando una curva cerrada que da

cuatro vueltas en el toro, debido a que luego de hacer corresponder los ejes, en un momento se vuelve al punto $(0, 0)$ y se repite el mismo procedimiento.

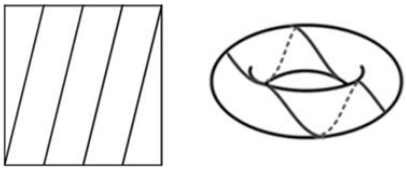


Figura 3: Recta $y = 4x$ en el cuadrado y su proyección en el toro.

Veamos la recta $y = \frac{1}{5}x$, también tiene pendiente racional pero por su inclinación genera otro tipo de curva en el toro, pues aunque también es una curva finita y cerrada, en el toro tiene otra orientación. En este caso se corresponden inicialmente los segmentos del cuadrado $x = 0$ y $x = 1$.

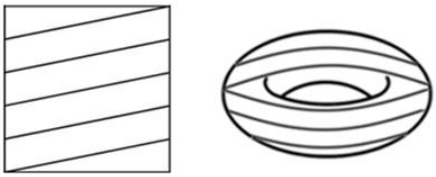


Figura 4: Recta $y = \frac{1}{5}x$ en el cuadrado y su proyección en el toro.

Ahora consideremos las rectas de pendiente irracional, lo que sucede con este tipo de rectas es que a diferencia del caso anterior, en ningún momento se vuelve a coincidir en el punto $(0, 0)$, de esta manera, se generan infinitas

rectas, obteniendo así, curvas no cerradas en el toro que se van acumulando, pues como se puede observar en la gráfica, el cuadrado unitario se va ocupando y así mismo, el toro.

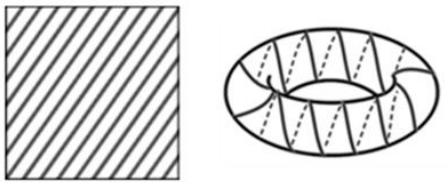


Figura 5: Recta $y = \sqrt{2}x$ en el cuadrado y su proyección en el toro.

3. Automorfismos hiperbólicos del toro

Ciertos sistemas dinámicos en el toro pueden ser descritos mas eficientemente en el plano y luego ser proyectados en el toro. Para esto, consideramos automorfismos en el plano que mediante la relación de equivalencia se proyectan en el toro y así se puede construir un automorfismo del toro en sí mismo. Este razonamiento puede ser observado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T & \xrightarrow{\hat{F}} & T \end{array}$$

Definición 3.1. $L(x) = A \cdot x$ donde A es una matriz de 2×2 y x un vector

2×1. A este tipo de transformaciones se les conoce como **transformaciones matriciales**.

Definición 3.2. La recta generada por un vector característico de una transformación lineal $T : V \to V$ se denomina **subespacio T-invariante** o simplemente **subespacio invariante**. [3]

Los automorfismos que demandan nuestra atención son funciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $L(x) = A \cdot x$ donde A es la matriz de representación cuyo tamaño es 2×2 y satisface las siguientes condiciones

1. Todas las entradas de A son enteras.
2. $det(A) = \pm 1$
3. A es hiperbólica (una función lineal invertible es hiperbólica si ninguno de sus eigenvalores tienen valor absoluto 1.)

La información anterior es suficiente para definir un automorfismo hiperbólico toral, pues la función inducida en el toro por la matriz A denotada por L_A se llama un automorfismo hiperbólico toral. L_A es diferenciable ya que su matriz jacobiana es simplemente la matriz A. Además ya que $det(A) = \pm 1$, la inversa de A es tambien una matriz con entradas enteras hiperbólica, asi A^{-1} induce también un automorfismo hiperbólico toral el cual es la invesa de L_A. Tambien es posible afirmar que L_A es un difeomorfismo en T.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T & \xrightarrow{L_A} & T \end{array}$$

A continuación se presentan conceptos inherentes a los automorfimos del toro tales como son la densidad y la estabilidad.

Proposición 3.1. *El conjunto de todos los puntos periódicos de L_A es denso en T.*

Prueba. Sea p un punto en T con coordenadas racionales, asumimos que p es de la forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ donde α, β y k son enteros. Tales puntos son claramente densos en T porque podemos tomar k arbitrariamente grande. Afirmamos que p es periódico con periodo menor o igual que k^2.

Para ver esto, notemos que hay exactamente k^2 puntos en T de la forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ con $0 \leq \alpha, \beta \leq k$. Sin embargo, la imágen de algún punto bajo L_A también puede ser escrita en esta forma ya que las entradas de A son enteras. Esto indica que L_A permuta estos puntos. Por lo tanto, existen enteros i y j tales que $L_A^i(p) = L_A^j(p)$ y $|i - j| \leq k^2$. Aplicando L_A^{-i} a esta ecuación probamos que p es periódico de periodo menor o igual que k^2.

Proposición 3.2. *Suponga que $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene todos sus eigenvalores menores que uno en valor absoluto. Entonces $L^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.*

Corolario 3.1. *Suponga que $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal y que todos los eigenvalores de L tienen valor absoluto mayor que 1. Entonces $L^n(x) \to 0$ cuando $n \to -\infty$.*

Ahora veamos el caso de los eigenvalores combinados algunos con valor absoluto mayor que uno y otros con valor absoluto menor que 1.

Proposición 3.3. *Suponga que los eigenvalores de $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son λ_1, λ_2 y λ_3 con*

1. $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$
2. $|\lambda_3| > 1$

Entonces hay un plano W^s y una recta W^u en donde

- *si $x \in W^s$, entonces $L(x) \in W^s$ y $L^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*
- *si $x \in W^u$, entonces $L(x) \in W^u$ y $L^{-n}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*
- *si $x \notin W^u \cup W^s$ entonces $|L^n(x)| \to \infty$ cuando $n \to \pm\infty$.*

Prueba. La forma estandar de $L(x) = A \cdot x$ puede ser

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad o \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

donde $*$ es cualquier positivo (si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2$) o cero. (En el primer caso, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$). De esta forma, W^s es el plano xy y W^u es el eje z. La aplicación de la proposición 3.2 y su corolario a cualquiera de estos subespacios produce el resultado.

Definición 3.3. W^s se conoce como el **subespacio estable** de L; W^u el **subespacio inestable**.

Dado que A es una matriz 2×2 representa una transformación lineal en el plano, A es hiperbólica con determinante ± 1, los eigenvalores deben ser ambos reales. Además uno de los eigenvalores, λ_s debe satisfacer $|\lambda_s| < 1$ y el otro, λ_u debe satisfacer $|\lambda_u| > 1$, así los subespacios estables e inestables W^s y W^u son rectas que inciden el origen en $\mathbb{R}^2$. Sea $[x, y] \in T$ y sean l_s y l_u rectas en $\mathbb{R}^2$ que se intersectan en (x, y) y las cuales son paralelas a W^s y W^u respectivamente.

Se denotan las proyecciones de estas rectas en T por

$$W^s[x, y] = \pi(l_s)$$

$$W^u[x, y] = \pi(l_u)$$

La prueba de los dos teoremas que se presentan a continuación se encuentra en la página 193 del libro An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Second Edition. Robert L. Devaney.[4]

Proposición 3.4. *$W^s[x,y]$ es el conjunto estable asociado a $[x,y]$, esto es, si $[x',y'] \in W^s[x,y]$ entonces $d(L_A^n[x',y'], L_A^n[x,y]) \to 0$ cuando $n \to \infty$ donde d es la distancia en T inducida por la distancia euclidea a lo largo del conjunto estable. Similarmente, $W^u[x,y]$ es el conjunto inestable asociado a $[x,y]$.*

Proposición 3.5. *$W^s[x,y]$ y $W^u[x,y]$ son densos en T para cada $[x,y] \in T$.*

4. Caos

A continuación se presentan conceptos inherentes al caos de un automorfismo hiperbólico toral.

L_A es caótica en todo el toro. Destacamos este hecho como un teorema.

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to X$ es **topológicamente transitiva** si para todo par de intervalos abiertos no vacíos de X, U y V, existe un número natural n, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definición 4.2. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un sistema dinámico $f : X \to X$ tiene **dependencia sensible con respecto a las condiciones iniciales** si existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x,y) < \epsilon$ mientras que para algún $n_0 \geq 0$ se cumple que $d(f^{n_0}x, f^{n_0}y) > \delta$.[5]

Definición 4.3. Sea $[x,y] \in T$ un punto periódico de L_A. Un punto homo-

clinico a $[x, y]$ es un punto $p \neq [x, y]$ que pertenece a $W^s[x, y] \cap W^u[x, y]$.

Teorema 4.1. *Sea L_A un automorfismo hiperbólico toral de T. Entonces*

1. *Los puntos periódicos de L_A son densos en T.*

2. *L_A es topoligicamente transitiva.*

3. *L_A tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.*

Prueba. La primera condición fue probada con anterioridad. Sean U y V dos conjuntos abiertos de T, por definición, las preimágenes bajo π de U y V son abiertos en $\mathbb{R}^2$. Se encontrará un punto $[p] \in U$ y un entero k tal que $L_A^k[p] \in V$. Podemos seleccionar puntos $[r] \in U$ y $[s] \in V$ que son homoclinicos a $[0]$.

Ahora sea $\epsilon > 0$. Elegimos un intervalo abierto I_u de longitud $\delta > 0$ en $W^u[0]$ que contenga a $[r]$. Similarmente, elegimos I_s en $W^s[0]$ que contenga a $[s]$. L_A^n expande I_u por un factor de $|\lambda_u|^n$ y L_A^{-n} expande I_s por el mismo factor. Ahora, elegimos n lo suficientemente grande tal que

1. $d(L_A^n[r], 0) < \frac{\epsilon}{2}$

2. $d(L_A^{-n}[s], 0) < \frac{\epsilon}{2}$

3. $|\lambda|^n \delta > \epsilon$

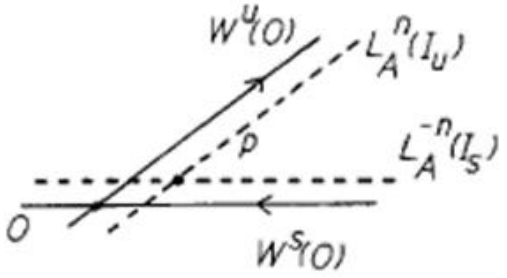


Figura 6: $L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s)$

Donde d es la distancia euclidea definida en una vecindad de [0]. Ya que $L_A^n(I_u)$ y $L_A^{-n}(I_s)$ son paralelas a $W^u[0]$ y $W^s[0]$ respectivamente, se sigue que $L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s) \neq \emptyset$. Sea $[q]$ un punto en esta intersección. Entonces $[p] = L_A^{-n}[q] \in U$ y $L_A^n[q] \in V$. Consecuentemente $L_A^{2n}[p] \in V$, generando el punto requerido.

Finalmente veamos que L_A tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Por supuesto, si $[p] \in T$ and $[q] \in W^u[p]$ entonces cada iteración de L_A alarga la distancia entre las imágenes de $[p]$ y $[q]$, al menos a lo largo de $W^u[p]$. De esta forma se puede concluir que L_A es caótica en todo T. [3]

5. Conclusiones

1. La relación de equivalencia definida en el plano genera el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que representa al toro.

2. La pendiente de las rectas determina el comportamiento de la proyección de $\mathbb{R}^2$ a T.

3. Los automorfismos hiperbólicos del toro son transformaciones lineales definidas en $\mathbb{R}^2$ proyectadas a T; estas transformaciones lineales cumplen la condición de tener una matriz asociada de tamaño 2x2 que es hiperbólica, con determinante ± 1 y cuyas entradas son todas enteras.

4. Un automorfismo hiperbólico toral es caótico en todo T.

Referencias

[1] Churchill, Ruel V. and Brown., Complex variables and applications, New York, McGraw-Hill Book Co, 1984.

[2] James Cannon, William Floyd, Richard Kenyon y Walter Parry, Hiperbolic Geometry, NewMSRI Publications, Vol. 31, pág 115, 1997.

[3] Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos, Elsevier Academic Press, Oxford, UK, 2004.

[4] Devaney Robert, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, Canada, Addison Wesley, 1989.

[5] Abellán Zapata Virginia, Caos, Linealidad y Dimensión, Universidad de Murcia, España, 2015.