Procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo: una experiencia en torno a la actividad matemática asociada a la estructura multiplicativa

Angie Viviana Moreno Cuéllar

Hernán Oswaldo Vargas Hernández

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, 2020

Procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo: una experiencia en torno a la actividad matemática asociada a la estructura multiplicativa

Angie Viviana Moreno Cuéllar

20181184006

Hernán Oswaldo Vargas Hernández

20181184011

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación

Director

Rodolfo Vergel Causado

Doctor en Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, 2020

Tabla de contenido

Lista de figuras 5
Lista de tablas 6
Resumen analítico en educación (RAE) 9
Introducción 14
Capítulo I. El Problema 17
1.1 Planteamiento del problema 17
1.2. Formulación de la pregunta de investigación 25
1.3. Objetivos de la investigación 25
1.3.1 Objetivo general 25
1.3.2 Objetivos específicos 25
1.4 Justificación 25
Capítulo II. Marco Teórico 29
2.1 Teoría de objetivación (TO) 29
2.1.1 .Medios semióticos de objetivación para elaborar significados 31
2.1.1.1 El gesto como medio semiótico 32
2.1.2 Nodos semióticos 32
2.1.3 Procesos de objetivación 33
2.1.3.1 Iconicidad 35
2.1.3.2 Contracción semiótica 35
2.1.3.2.1 Procesos de generalización 36
2.2 Estructura multiplicativa 37
2.2.1 Multiplicación como suma abreviada 37
2.2.2 Modelos para la multiplicación 38
2.2.3 Estructura multiplicativa 40
2.2.4 Representaciones semióticas del objeto matemático de la estructura multiplicativa 41
2.2.4.1 El isomorfismo de medidas 41
2.2.4.2 Caso de un solo espacio de medidas 42
2.2.5 Didáctica para la enseñanza de la estructura multiplicativa 43
Capitulo III. Marco Metodológico 44
3.1 Enfoque multisemiótico 44
3.2 Población y muestra de estudio 45
3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos 46
3.3.1 Estructura de las tareas en la teoría de la objetivación 47
3.4 Validez y confiabilidad de los datos 48
3.5 Técnica de análisis de los datos 49

3.6 Procedimiento de la investigación 49
Capítulo IV. Análisis de los resultados 51
4.1 Categorías de análisis 52
4.2 Resultados obtenidos 53
Conclusiones 77
Recomendaciones 81
Referencias Bibliográficas 83
Anexos 88
Anexo 1 88
Anexo 2 90
Anexo 3 94

Lista de figuras

Figura 1. Socialización a los estudiantes de tarea I 53
Figura 2. Orientaciones en la Tarea I 54
Figura 3. Tarea I. Movilización de medios semióticos 55
Figura 4. Desarrollo del primer punto de Tarea I por parte del grupo que conforman Laura, Alexandra y Anyifer 58
Figura 5. Coordinación multimodal MSO movilizados por el grupo de Harold (costos VS beneficios) 58
Figura 6. Dialogo y comunicación en el método escogido para la solución del punto 4 de la Tarea I 60
Figura 7. Movilización de medios semióticos de objetivación 60
Figura 8. Identificación de Nodos semióticos 62
Figura 9. Labor conjunta entre el grupo de estudiantes y la profesora 63
Figura 10. Coordinación multimodal de MSO movilizados por Ángel y David al relacionar costos de los pasajes más los impuestos 63
Figura 11. Movilización de medios semióticos 64
Figura 12. Respuestas de uno de los grupos de estudiantes de 702 en la tarea II 68
Figura 13. Menús de los diferentes platos, ejercicio propuesto Tarea II 70
Figura 14. Tipos de menús, tarea II 71
Figura 15. Respuestas de un grupo de estudiantes 71
Figura 16. Punto 3B. Tarea 2 73
Figura 17. Respuestas de un grupo de estudiantes 74

Lista de tablas

Tabla 1. Categorías de análisis 52

Tabla 2. Tipos de vuelo Bogotá – San Andrés - Bogotá, ida y vuelta por persona 56

Tabla 3. Punto N° 4 parte A. de la tarea 1 59

Tabla 4. Oferta de los hoteles Tarea 2 66

Angie Viviana Moreno Cuéllar y Hernán Vargas Hernández *Procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo: una experiencia en torno a la actividad matemática asociada a la estructura multiplicativa.* Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación. Modalidad Profundización. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación. Maestría en Educación. Énfasis en Educación Matemática. Bogotá, 2020.

Resumen

La presente investigación se ubica en el área de la Teoría de la Objetivación y estructura multiplicativa. Plantea como objetivo general, identificar procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa, utilizando el método cualitativo, multisemiótico (Radford & Sabena, 2015), basado en un enfoque multimodal como proceso interpretativo de indagación, donde se examina y conduce el estudio de una situación natural. El marco teórico lo constituyeron los postulados de autores como Radford (2008 - 2018), Vergel (2018), Pantano (2014), Carpio (2013), Lerman (2006). Morse (2005), Escolano (2001), Lamon (2012), entre otros, quienes brindan un valioso aporte al Marco teórico del estudio, trabajando contenidos de la teoría de la objetivación y los procesos de la estructura multiplicativa en estudiantes de grado séptimo en la resolución de tareas.

Palabras Claves: Teoría de la objetivación, procesos de objetivación, estructura multiplicativa, resolución de tareas, labor conjunta.

Angie Viviana Moreno Cuéllar and Hernán Vargas Hernández "Processes of objectification in seventh grade students: a learning experience associated to the multiplicative structure in Mathematics". Degree work to apply for the Master's Degree in Education. Deepening Modality University Francisco Jose de Caldas. Faculty of Science and Education. Master of Education. Emphasis in Mathematics Education. Bogota, 2020.

Abstract

This research is located in the area of Objectification Theory and Multiplicative Structure. As a general objective, it identifies the processes of objectification in seventh grade students: A learning experience associated to the multiplicative structure in Mathematics, using the qualitative and semiotic method (Radford & Sabena, 2015), based on a multimodal approach as an interpretative process of inquiry, in which the study of a natural situation is examined and conducted. The theoretical framework was constituted by the quotes from authors such as Radford (2008 - 2018), Vergel (2018), Pantano (2014), Carpio (2013), Lerman (2006), Morse (2005), Escolano (2001), Lamon (2012), et al. They provide a valuable contribution to the theoretical framework of the study, clarifying contents with regards the theory of objectification and multiplicative processes in seventh grade students based on problem solving.

Keywords: Objectification theory, objectification processes, multiplicative structure, task resolution, joint work.

Resumen analítico en educación (RAE)

1. DESCRIPCIÓN

Esta investigación está sustentada en la Teoría de la Objetivación de Luis Radford y en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas inspirada en la teoría Vygostskiana; la cual percibe el aprendizaje como un proceso social–histórico–cultural donde el estudiante se posiciona, es crítico y reflexiona en los procesos de objetivación. Apoyados en este pensamiento, donde se replantea la categoría de enseñanza y aprendizaje como actividad entre alumnos y profesores, se pretende identificar las características de los procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa.

Palabras claves: Teoría de la objetivación, procesos de objetivación, estructura multiplicativa, resolución de tareas, labor conjunta.

Objetivo general

Identificar características de los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa.

Objetivos específicos

1. Describir los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado séptimo cuando se enfrentan a tareas de estructura multiplicativa.
2. Identificar y describir la evolución de los nodos semióticos de objetivación.

2. FUENTES

D'Amore, B., & Radford L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (192 p.).

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. *A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. For the Learning of Mathematics, 22(2),* 14-23.

Radford, L. (2003). Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5(1),* 37-70.

Radford, L. (2006). Communication, apprentissage et formation du je communautaire. *In B. D'Amore & S. Sbaragli (eds), 20th Italian National Conference Incontri con la Matematica,* Bologna, November 3-5, 2006, pp. 65-72.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9*(Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático,* pp. 7-21.

Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA, 3*(1), 1-18.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 111 – 126.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2-7.

Radford, L. (2010a). *Formas elementales de pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes*. En MF Pinto. & TF Kawasaki (Eds.). Actas de la 34ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática, vol. 4, págs. 73-80. Belo Horizonte, Brasil: PME.

Radford, L. (2013). Tres conceptos clave de la teoría de la objetivación: conocimiento, conocimiento y aprendizaje. *Revista de Investigación en Educación Matemática, 2* (1), 7-44.

Radford, L. (2013a). En torno a tres problemas de la generalización [Concerning three problems of generalization] Rico, L, Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. & Segovia, I. (Eds), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* Homenaje a Encamación Castro. Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150

Radford, L. (2015a). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, v. 8*(18), 547-567

Radford, L. (2015b). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *PNA, 9*(3), 129-141.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA, 12*(2), 61-80.

Sabino, C. (2002). *El Proceso de Investigación: Una introducción teórico-práctica.* Caracas: Panapo.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años).* Tesis Doctoral. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en educación primaria.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. & Rojas, P. (2018) *"Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula".* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

3. CONTENIDOS

La investigación se ha organizado en cuatro capítulos de la siguiente manera:

El Capítulo I, denominado El problema, muestra la problemática que se presenta en las instituciones educativas, incluyendo una descripción de la problemática, la formulación de una pregunta de investigación, los objetivos de investigación, seguido de la justificación e impacto de la investigación. El capítulo II, denominado Fundamentación teórica de la investigación, incluye las bases teóricas, investigativas y conceptuales de la investigación, que soportan de forma teórica y conceptual a las categorías de análisis de esta investigación: procesos de objetivación y estructura multiplicativa. El capítulo III, denominado Aspectos metodológicos de la investigación, incluye el enfoque, método, tipo y diseño de investigación, unidades de estudio, técnicas e instrumentos de recolección de datos, validez y credibilidad de los instrumentos y las

técnicas de analisis de los datos. El Capítulo IV denominado Análisis de resultados, muestra el procesamiento cualitativo de los datos, la discusión de resultados, las conclusiones y recomendaciones. Finalmente, el capítulo V donde se desarrollará las referencias bibliograficas y anexos.

4. METODOLOGÍA

La metodología de la investigación está relacionada con un enfoque multisemiótico (Radford & Sabena, 2015), con base en una visión multimodal como proceso interpretativo de indagación, donde se examina y conduce el estudio de una situación natural (Creswell, 1998). Esta manera de investigar es considerada como una forma de pensar, más que como colección de estrategias técnicas. Los métodos cualitativos, como un tipo de investigación constituyen un modo particular de acercamiento a la indagación: una forma de ver y una manera de conceptualizar (Morse, 2005).

5. CONCLUSIONES

Se plantea una respuesta a la pregunta de investigación, teniendo en cuenta la articulación de los objetivos planteados inicialmente, los supuestos teóricos de la teoría de la objetivación y el análisis multimodal.

Los investigadores observaron cómo los alumnos comunicaban sus razonamientos, dudas, aciertos, esto a través de los medios semióticos de objetivación que lograron la transformación del objeto matemático en partes de la totalidad, aplicando la reflexión, que media entre el estudiante y el objeto matemático. Cabe destacar otro aspecto relevante como la evolución de nodos semióticos de Objetivación, al evidenciarse en varios apartados donde los estudiantes minimizan y utilizan cada vez menos recursos

semióticos para conjeturar y actualizar el saber.	
ELABORADO POR:	Moreno Cuéllar, Angie Vargas Hernández, Hernán
REVISADO POR:	Dr. Vergel Causado, Rodolfo

.**FECHA DE ELABORACIÓN DEL RESUMEN**			2020

Introducción

El trabajo de investigación se desarrolló en la Institución Educativa Distrital Diego Montaña Cuéllar ubicada en la localidad de Usme, barrio Monte blanco; el colegio es de carácter público, tiene como misión contribuir a la formación de sus estudiantes a partir de estrategias pedagógicas interdisciplinares y la vivencia de valores; presta sus servicios educativos en los niveles de preescolar, primaria, básica secundaria y media fortalecida en convenio con la institución de educación superior ECCI.

En particular, se desarrolló este trabajo de investigación con en el curso 702, conformado por 36 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 11 y 15 años, estos jóvenes tienen un nivel socioeconómico bajo (estratos 1 y 2 regularmente). El grupo presenta un rendimiento académico bajo, teniendo en cuenta que según Shapiro (2018) el bajo rendimiento académico es habitual y es generado por diferentes causas como las variaciones que lo caracterizan; se articulan principalmente en las áreas de funcionamiento cognitivo, académico y conductual. En este caso, De manera que en el grupo observado, el bajo rendimiento reside mayormente en el área de matemáticas, de igual modo se ven reflejados inconvenientes a la hora de trabajar en equipo, prevaleciendo el individualismo y la competencia[1].

La Institución Educativa Distrital Diego Montaña Cuéllar presenta un limitado número de herramientas didácticas, debido a esto, los docentes utilizan regularmente para sus procesos de enseñanza recursos como: el tablero, los textos y el discurso del maestro; lo cual genera desinterés y desmotivación en los estudiantes hacia la clase de matemáticas. A lo dicho, Carpio (2013) expone que el fracaso en el aprendizaje de matemática es ocasionado

[1] Información referida por los docentes que imparten en el área de matemáticas, al curso 702 de la Institución Educativa Diego Montaña Cuellar.

regularmente por que los alumnos apelan a la memorización como táctica para aprender matemáticas.

Esto representa que los alumnos se dedican a aprender (de memoria) sólo el ejercicio que les explica el docente en la sesión de clase, repitiendo los ejemplos una y otra vez hasta que los retienen; esto en cambio de emprender aplicaciones prácticas y entender a cabalidad lo que se estudia. Es ahí, donde resulta crucial que los actores educativos no impongan su punto de vista, sino que tomen conciencia de otras perspectivas y formen una interacción social, asignando la responsabilidad de identificar y expresar las estrategias más funcionales a partir de su experiencia. Esto permitirá elevar los niveles motivacionales y a nivel cognitivo podrá generar mayor impacto.

En ese orden de ideas, este proyecto de grado, pretende identificar y describir los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes de grado séptimo al momento de resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa, asumiendo los postulados de Radford (2006) quien plantea que los procesos matemáticos son "patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos" (p.124) además que este "no podrá ser percibido, sino es a través de la actividad reflexiva misma" (p. 115). En el mismo apartado cuanto a la multiplicación, el autor refiere que puede entenderse, como una sofisticada elaboración conceptual de conteos, por lo que se da el establecimiento de relaciones o comunicaciones semióticas corporalmente intervenidas, las cuales establecen una representación de acción y una reflexión con las cantidades, que pueden pertenecer a un estado de significación de la multiplicación; con el propósito de comprender el estudio, el documento se ha organizado en cuatro capítulos a saber.

El capítulo I, denominado El problema, muestra la problemática que se presenta en las instituciones educativas, incluyendo una descripción de la problemática, la formulación de la

pregunta, los objetivos de investigación, seguido de la justificación e impacto de la investigación.

El capítulo II, denominado Fundamentación teórica de la investigación, incluye las bases teóricas, investigativas y conceptuales de la investigación, que soportan un cuerpo teórico y conceptual de las categorías de análisis de esta investigación: procesos de objetivación y estructura multiplicativa.

El capítulo III, denominado Aspectos metodológicos de la investigación, incluye el enfoque, método, tipo y diseño de investigación, unidades de estudio, técnicas e instrumentos de recolección de datos, validez y credibilidad de los instrumentos y las técnicas de analisis de los datos.

Finalmente, el capítulo IV denominado Análisis de resultados, muestra el procesamiento cualitativo de los datos, la discusión de resultados, las conclusiones y recomendaciones.

Capítulo I. El Problema

1.1 Planteamiento del problema

El propósito de las matemáticas en la educación escolar no es solamente que los estudiantes asimilen las operaciones básicas de las matemáticas (sumar, restar, multiplicar y dividir) y unas generalidades geométricas, la base de esta enseñanza radica en la resolución de problemas, así como emplear nociones y destrezas matemáticas para aplicarlas en la vida diaria.

En torno a este tema ya existe una serie de antecedentes de trabajo académico, basados en los postulados de Luis Radford (2014) sobre la teoría de la objetivación en las que varias investigaciones han incursionado en el estudio de este proceso, así como en los múltiples factores que intervienen en el mismo.

Tal es el caso de González (2016) en la tesis titulada "Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento probabilístico por parte de estudiantes de décimo grado". La investigación lleva por objetivo general: Describir y analizar los procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de grado décimo al abordar tareas referidas a asignación de probabilidad de un evento. En dicho estudio se permiten concordar apreciaciones sobre los procesos de objetivación seguidos por los maestrantes en las prácticas docentes, quienes por un lado intentan presentar las visiones inscritas a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y por el otro, el progreso de las experiencias de los alumnos en el aula de clases, a través, de la producción de resultados, situando al maestro, frente al conocimiento y comprensión de los problemas que vivencian los estudiantes cuando emprenden situaciones circunstanciales y la forma progresiva de evolución en las diferentes etapas de aprendizaje.

Por otro lado, Moreno (2014) en el documento "Proceso de objetivación de la derivada en estudiantes para profesor de matemáticas". El objetivo general está dirigido a describir y

analizar los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes para profesor de matemáticas cuando se enfrentan a tareas sobre los enfoques variacional y geométrico de la derivada. En cuanto al aporte ofrecido esta investigación, se destaca que la TO, como soporte teórico, ha sido manejada fundamentalmente en el área del pensamiento algebraico temprano (early algebra).

Esto lleva a determinar que en Colombia se han ejecutado varios trabajos de investigación referentes a la TO, lo cual deja ver la preocupación de los docentes sobre la posibilidad de brindar ayuda a los estudiantes a partir de la utilización de sus recursos intrínsecos, igualmente el análisis de los medios semióticos de objetivación que surgieron en la tarea, predominando los procesos de contracción semiótica y organización icónica, reconociendo la importancia de la representación de otros medios semióticos para solucionar problemas; sin embargo, se reconoce que los estudiantes usan medios semióticos semejantes.

Así mismo, se revisó la tesis de Cadavid & Quintero (2011) presentada en la Universidad de Antioquia, Medellín. Departamento de educación avanzada. Titulada "Función: proceso de objetivación y subjetivación en clases de matemáticas", con el principal objeto de analizar el proceso de objetivación del concepto de función en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural. La contribución que dejó a este estudio surge del conocimiento relacionado con la significación, dentro del aula de clases, del proceso de objetivación del concepto de función. Donde se entiende claramente la objetivación propuesta por Radford (2008) como un proceso donde la comprensión no viene solo de elementos externos, sino también de la interacción social como factor indispensable para proceso de aprendizaje, así como a la naturaleza del mismo sujeto; de manera que la comprensión y la manera como los estudiantes acceden a esa comprensión, hacen parte de lo que el mismo estudiantes, representa.

Otro aspecto indagado tiene que ver con los antecedentes de la variable -estructura multiplicativa-, para lo cual se revisó la tesis presentada por Trejos & Paz (2017) titulada: "Secuencia didáctica para el aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la formulación y resolución de problemas". El propósito de ese trabajo de grado fue diseñar una frecuencia didáctica que origine el aprendizaje de estructuras multiplicativas a partir de la enunciación y resolución de problemas, con la finalidad de optimizar la calidad de la acción del aprendizaje de las matemáticas desarrollando competencias numéricas para lograr la eficiencia de las pruebas nacionales e internacionales: ICFES y PISA.

En la investigación se asume la enseñanza de las estructuras multiplicativas como el motor principal del pensamiento y la consecución del sistema numérico. Se determinó que la secuencia didáctica planteada, con base en la experiencia de la cotidianidad de los estudiantes se demostró que pocos de ellos, fueron capaces de usar cálculo mental para constituir el valor agregado o llegar a la agrupación de cantidades. Otros, no encontraron la forma de plantear los términos apropiados para multiplicar o dividir, utilizando dispositivos para ejecutar esas acciones. Igualmente, algunos alumnos, no pudieron simbolizar en números, el ejercicio de división. Otros alumnos le concedieron mayor importancia a la multiplicación por encima de la división.

En seguida se presenta la tesis realizada por Medina (2017), titulada: "Propuesta didáctica para el aprendizaje de la estructura multiplicativa". El objetivo general, refiere a la Evaluación del efecto producido por una secuencia pedagógica, fundada en la TSD, además del aprendizaje significativo en alumnos de las escuelas públicas, relacionado con la estructura multiplicativa partiendo de la adición.

A partir de eso se estableció la importancia de efectuar reformas en el diseño curricular de las matemáticas, lo cual contribuye no solo a la perspectiva constructivista, sino también

aporta técnicas de aprendizaje que benefician el estudio del contenido matemático en el aula de clases como conceptual, procedimental y actitudinal, ayudando a los alumnos, a desarrollar el pensamiento crítico y analítico.

Finalmente se presenta la tesis de Quiceno (2016), titulada: ¨Diseño de una propuesta metodológica para fortalecer los procesos de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos entorno a las operaciones propias de la estructura multiplicativa¨. Donde Se plasman prácticas pedagógicas que comprenden la estructura multiplicativa, presentadas a los alumnos durante un periodo escolar, sin embargo, esas enseñanzas estuvieron conformadas por un enfoque simbólico, limitando el conocimiento a técnicas mecánicas y rutinarias. Así, el educando practica ejercicios significativos que le permiten mayor afinidad con lo estudiado, porque, al ser enfrentado a procesos de análisis y razonamientos más complicados, se le dificulta mayormente la realización de las tareas multiplicativas.

El creador de la teoría de la objetivación, Luis Radford, hace referencia a una serie de principios que identifican la Teoría de la objetivación (Dimensiones ontológica, epistemológica, educativa y ética). De la misma forma Radford (2014), indica que el principio esencial de la teoría es la idea de labor:

> "*El principio central de la teoría de la objetivación está basado en el materialismo dialéctico hegeliano y su idea fundamental de la constitución dinámica y recíproca entre ser y cultura. Los individuos crean la cultura y la cultura crea sus individuos*" (p.137).

Radford además puntualiza que es a través de la labor que se encuentran la estructura de las ideas de la cultura: "sistemas de ideas científicas, legales, artísticas", etc. Asimismo, por medio de la labor se encuentran "formas culturales de ser" (p.138).

Radford (2013) se refiere al término “labor” como “Trabajo, labor, actividad son, en efecto tres nombres que hacen referencia a una misma entidad cultural: una serie de acciones guiadas por un fin común que individuos realizan en conjunto” (p.5). De manera que, los cuatro principios con la categoría principal de la teoría, aplican dentro de un complicado entramado denominado sistemas semióticos de significación cultural, una superestructura teórica de significados fundados por las propias personas en el marco de una cultura (Radford, 2006a; Radford, en prensa; Vergel, 2014).

Para entender por qué surgen estas dificultades se deben aplicar los términos referidos a esta disciplina, las habilidades necesarias para asimilarla, cómo se adquieren, qué métodos cognoscitivos yacen de la práctica matemática. Solamente con conocer lo básico de estos procesos se consigue crear procedimientos de estimación y de intervención apropiados. Teniendo en cuenta que las matemáticas elementales, unidas a la lectoescritura, establecen los aprendizajes de instrumentos básicos que efectúan los alumnos en la primera infancia en la escuela. De manera que la comprensión matemática les sirve para tener mayor desenvolvimiento en cualquier contexto, social, educativo y familiar, por ser utilizado en diferentes actividades cotidianas como ir al mercado, comprar en la misma escuela los alimentos, marcar los números telefónicos, entre otros. Sin embargo, el fracaso en el aprendizaje de esta ciencia sigue prevaleciendo en las escuelas (Radford, 2008).

Basado en el conocimiento de las dificultades que representa el aprendizaje de las matemáticas, es que en los últimos años, se han realizado diversas investigaciones referidas a esta situación, algunas de ellas enfocadas hacia el desarrollo de teorías, generando múltiples y variados trabajos de corte cognitivo, semiótico, antropológico, sociocultural, entre otros; como lo reseña De Castro (2016, p. 87) cuando manifiesta que el proceso de comprensión de las matemáticas desde sus operaciones más elementales, siempre ha representado un gran

problema tanto para los docentes que aplican las estrategias como para los alumnos que deben asimilarlas, lo cual conlleva a que tantos especialistas se interesen en entender el motivo que ocasiona el bloqueo para el aprendizaje de esta disciplina tan importante en la vida de las personas.

Ahora bien, algunas de las teorías abordan procesos de enseñanza y aprendizaje que se encuentran enmarcados en corrientes racionalistas e idealistas, que invocan teorías individualistas centradas en los conocimientos o en seres autónomos alejados socialmente de su contexto. Contrario a estas, las teorías socioculturales en educación matemática surgen precisamente del énfasis en una concepción del conocimiento matemático como proceso social y cultural (Lerman, 2006). Tal es el caso de la Teoría de la objetivación, descrita por Radford, como la que reconoce proyectar el aprendizaje como un proceso social (es decir un proceso no individual) de encuentro con métodos de pensamiento ya en la cultura, ya que la objetivación:

"*son los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes se encuentran frente a formas de pensamiento y acción histórica y culturalmente constituidas y se familiarizan gradualmente con ellas, de una manera crítica*" (Radford, 2018, p. 67).

Por otro lado, el interés por el estudio en la Teoría de la Objetivación (TO), surge al ver cómo esta Teoría nace de la necesidad de un pensamiento divergente hacia el aprendizaje de las matemáticas y un cambio hacia las aproximaciones individualistas que dominan la educación de este tiempo, como el constructivismo, el cual promueve la autonomía del individuo o la teoría de situaciones (Radford, 2014, p. 72), donde el saber se deriva de la situación. No obstante, la TO se fundamenta en el principio de la idea de labor (constitución dinámica y recíproca entre ser y cultura) en el sentido que le dieron Hegel, Marx, Leont'ev y

el materialismo dialéctico. Aquí los individuos crean la cultura y la cultura crea a sus individuos (Radford, 2014).

Otro de los aportes al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se le atribuye a los psicólogos cognitivos quienes han indagado por años sobre las instancias epistémicas de las tareas matemáticas, cómo se simboliza interiormente el conocimiento, la secuencia evolutiva del aprendizaje y además han dado explicaciones minuciosas de las técnicas que usan las personas en el cálculo y en la solución de problemas aritméticos. En la actualidad se admite que el desarrollo de la matemática sigue un curso lento y gradual, que va desde lo concreto y específico a lo abstracto y general y que las acciones concretas y manipulativas con los objetos forman el cimiento de esta construcción (Morse, 2005, p.53).

En la actualidad el proceso educativo es considerado como la esencia para solucionar problemas cuyo primordial propósito sería proporcionar la construcción de aptitudes y destrezas que favorezcan el desarrollo cognitivo de los estudiantes en todos los niveles, lo cual por supuesto incluye el aprendizaje de las matemáticas. Se puntualiza la educación como la fuente que proporcionan una descripción de las etapas generales por las que transitan los estudiantes en la cimentación de cualquier destreza compleja; las fases del aprendizaje de las matemáticas serían: interés inicial, dominio, mantenimiento, generalización a diferentes contextos y aplicación o ajuste de la lógica matemática a las dificultades concretas que se presenten (De Castro 2016).

Basados en la premisa descrita anteriormente, la TO, señala que el proceso de enseñanza-aprendizaje se percibe desde la evolución de los medios semióticos que surgen en las practicas matemáticas; estos medios semióticos se entienden como los recursos a los que apela el estudiante para entender o darle significado a las operaciones de matemática para conseguir una forma sólida de entender conscientemente lo que está ejecutando, además de

comprobar sus propósitos, organizar sus ejercicios y lograr las metas propuestas (Radford, 2003).

En este sentido, ciertas señas, gestos e indicaciones, movimientos, acentos en el sonido de la voz, entre otros, utilizados por los alumnos dejan percibir que:

> "*una reflexión subjetiva sobre la realidad concreta en el curso de la cual tomamos sensibilidad de las formas culturales que nos permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, de nosotros mismos y de nuestro mundo*" (Radford, 2013 p. 27).

Es decir, una toma gradual de conciencia que confluye en un perfeccionamiento hacia formas de comunicación más sofisticadas.

Otro de los factores presentes en el problema detectado en los estudiantes, con relación al estudio de las matemáticas, es la ejecución de la estructura multiplicativa, en lo cual, muchos autores han investigado centrándose en estrategias usadas por los alumnos para solucionar problemas de este tipo. Al respecto, se ha observado que los estudiantes para resolver las dificultades multiplicativas apelan a ciertas estrategias como la modelización con conteo regularmente con los dedos, la representación de cantidades del problema; también estarían contenidos los conteos siguiendo un patrón, entre otros, sustituyendo progresivamente las estrategias de modelización por las de conteo, lo cual revela que emplear el conteo en los problemas de estructura multiplicativa es más difícil que en los de estructura aditiva.

De manera que es una gran responsabilidad la que los docentes tienen como agentes trasmisores del conocimiento, en brindarle a los estudiantes la posibilidad de liberar toda esa simbología que les ayuda a superar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Basados en esta concepción, es precisamente que surge la Teoría de la objetivación donde los

procesos de aprendizaje de las matemáticas implican "*un momento poético: un momento creativo, que consiste en volver algo visible al ámbito de la atención y del entendimiento. Es el aparecimiento del objeto en la conciencia del sujeto",* (Radford, 2018, p. 67).

1.2. Formulación de la pregunta de investigación

En atención a la problemática planteada, esta investigación busca responder la siguiente interrogante:

¿Cuáles son las características de los procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Identificar características de los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa.

1.3.2 Objetivos específicos

- Describir los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado séptimo cuando se enfrentan a tareas de estructura multiplicativa.
- Identificar y describir la evolución de los nodos semióticos de objetivación.

1.4 Justificación

A pesar de los esfuerzos realizados por el Ministerio de Educación Nacional, la educación colombiana no ha logrado erradicar el rechazo existente desde hace mucho tiempo atrás por los estudiantes de diferentes niveles educativos hacia el estudio de las matemáticas. Con desilusión tanto los docentes ven como los niños y jóvenes fracasan al tratar de lograr las

competencias propias del área de las matemáticas. Esto es debido en parte por la forma en que se han aplicado las estrategias de enseñanza de esta disciplina, desde las primeras clases en niveles primarios hasta los más avanzados.

Es habitual que los maestros se pregunten por qué los estudiantes fracasan en matemáticas si desde muy temprana edad se les ha ido preparando para su aprendizaje con estrategias que deberían conducirlos a la asimilación y comprensión de la matemática, desconociendo que la desmotivación muchas veces obedece a las estrategias que no captan la atención de los jóvenes; por lo que en el campo educativo esta investigación tiene una notable relevancia ya que las herramientas que ofrece para el aprendizaje de la matemática viene dada desde la práctica de los mismos estudiantes cuando sin saberlo aplican la objetivación pues crean sus propios métodos para resolver problemas, apelando a cuanto recurso externo les sirve para tal fin, volviéndolo una representación interna.

Dada la relevancia señalada en los fines de la educación básica, la consecuencia en el progreso de competencias matemáticas, y la carencia de los estudiantes, de la escuela en particular, por tener la oportunidad de obtener herramientas eficaces y eficientes para solucionar problemas ubicados en un contenido inmediato, esta alternativa pedagógica pretende transformar las falencias de los estudiantes en el ámbito matemático, que de no ser así, continuaría teniendo las carencias del pasado saturados de formulismo y planes de estudio que solo le dan trabajo a los docentes y a los estudiantes los dejan con un gran vacío de aprendizaje.

Por otra parte, la importancia y relevancia de la presente investigación está basada en las observaciones realizadas a los estudiantes que conformaron la muestra poblacional, quienes se a través de la aplicación del objeto matemático y basados en la resolución de problemas con instrucciones que los guían al razonamiento, demostraron que aplican las operaciones

básicas, entienden la multiplicidad, aplicando la objetivación a través de los gestos, conteo, lenguaje oral y escrito, señalamientos.

Lo dicho también quedó demostrado en los resultados de la prueba SABER en matemática, el 2014 arrojaron que los estudiantes de grado quinto el 43% de los niños tiene un nivel insuficiente, el 29% mínimo, el 16% satisfactorio y tan solo el 12% avanzado, estos estudiantes, que en 2018 ya se encuentran cursando el grado noveno continúan con las mismas dificultades de aprendizaje de las matemáticas, esto con respecto a la secundaria, ya que más de la mitad de los estudiantes de noveno tienen un desempeño mínimo en un 44%, seguido de insuficiente un 22%.

Igualmente el beneficio se puede extender al máximo a los estudiantes de grado Séptimo, que se sienten frustrados por no poder resolver problemas matemáticos simples, dado los contextos en que se desarrollan las clases, desde donde surgió el interés hacia el análisis de los procesos legítimos de aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Dichos procesos pueden vincularse a la escuela a partir de una visión social y a los estudiantes, como una comunidad de aprendizaje donde la interrelación entre los alumnos y el educador, en ejercicios cooperativos y con planes de formación los cuales facilitan acercamientos fluidos a las instrucciones escolares.

La pertinencia de este proyecto viene dada no sólo por el momento histórico que viven los estudiantes sino también por los resultados que hasta ahora se ha obtenido en la escuela en el transcurso de la investigación. Se considera un momento oportuno para seguir aplicando los conocimientos y ventajas de la teoría de la objetivación, ya que esta se dirige hacia la discusión y reconstrucción en conjunto del conocimiento como una interacción entre los participantes (Radford, 2018). Se planteó expresar cómo los alumnos a partir de la capacidad

creativa y el lenguaje, alcanzan a construir conceptos matemáticos desde un aspecto social; en consecuencia, se aborda la matemática según el contexto socio-cultural para romper así con los prejuicios y resistencias que la escuela representa sobre las matemáticas.

Finalmente, la investigación, es relevante por cuanto aborda la estructura multiplicativa que aplican los estudiantes al momento de resolver tareas a través de la mediación semiótica, a partir la representación histórico-cultural, o conjunto de todos aquello procedimientos propios de la Teoría de la objetivación La utilización de estos medios semióticos se da en el territorio del artefacto como lo denomina Voloshinov 1973 citado por Radford (2006) como "*aquel espacio en donde la subjetividad y la objetividad convergen, y por lo tanto, el pensamiento encuentra un campo de acción*" (p. 63).

Lo anterior se puede ver en lo corporal, más concretamente en las expresiones gestuales y los movimientos kinestésicos, cuando en el lapso de las acciones que van en pro de la actividad se revelan de manera clara, entrando a colación la correlación que hay entre las matemáticas y la toma de conciencia. De manera que los investigadores contemplan ofrecer este material para su aplicación en los futuros cursos de séptimo grado.

Capítulo II. Marco Teórico

La investigación que se lleva a cabo en el campo del proceso de objetivación que desarrollan los estudiantes de grado séptimo, al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa, esto puede tener diversas implicaciones y matices por la gran variedad y amplitud de campos que se pueden abordar. Estos aspectos son relevantes de ser analizados y considerados de manera detallada en cuanto a lo relacionado con el proceso de objetivación y estructura multiplicativa.

2.1 Teoría de objetivación (TO)

La TO pertenece a una representación semiótica cultural que admite explicar los métodos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en el salón de clases, considerando a los estudiantes, como sujetos culturales e históricamente situados en el momento que se despliega una tarea conjunta, partiendo de cuatro principios:

1) Epistemológico: admite que conocer es una parte del saber,

2) Ontológico: da cuenta de la divergencia entre lo permitido y lo actual, el conocimiento es un suceso, y el saber es la actualización del conocimiento,

3) Educativo: la instrucción es un proceso cultural de objetivación,

4) Ético: el estudiante, es visto como el producto de un conjunto de relaciones sociales (Radford, 2015).

De esa manera, la primordial condición real, pertenece a la naturaleza de la Labor o actividad perfeccionada por Hegel, Marx, Leontiev y la escuela del materialismo dialéctico (Radford, 2013). Aquí, el movimiento es un proceso social donde los individuos se comprometen a alcanzar un objeto, encuadrado dentro de la cultura circundante.

Específicamente, el proceso de enseñanza y aprendizaje es una cuestión social, igualmente, la acción epistémica que en ella se despliega. El pensamiento, expuesto como actividad cognoscitiva, deja de ser entonces una concepción mental, Radford (2006), lo puntualiza como "una reflexión mediatizada del mundo, de acuerdo con la forma o modo de la actividad"

Al ser una experiencia social, el pensamiento es delineado como un recurso semiótico producto del medio cultural que los subyace. Es decir, el pensamiento es influido por los recursos semióticos surgidos en el transcurso de la acción y que al estar sumergidos en una cultura, aparecen repletos de los significados propios de ella. Esto se traduce en el hecho de que el pensamiento es adsorbido por la cultura al mismo tiempo que la produce. La acción analítica del pensamiento es la que simplifica los objetos matemáticos, entendidos como *"patrones fijos de actividad reflexiva incrustada en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos"* (Radford, 2006, p. 111).

Al mismo tiempo se registran como elementos del objeto en la acción reflexiva, lo cual conduce a una concientización gradual de la acción que se está llevando a cabo. Lo dicho es conocido como "proceso de objetivación", una producción activa de significados; sin embargo, no es únicamente un objeto de conocimiento lo producido en el dinamismo de enseñanza y aprendizaje. Teniendo claro, que esto es un solo proceso, no una actividad separada desarrollando una labor conjunta, de donde deriva un sujeto en perenne constitución, en un constante razonamiento en el que al tiempo que está conociendo (knowing), también se está transformando continuamente (becoming) (Radford, 2013a).

Continuando con lo dicho, es un sujeto fruto de las relaciones sociales, un individuo que se encuentra intrínseco a las experiencias culturales que lo establecen, con eso el proceso de objetivación se instituye a partir de dos fuentes de producción de significados: la interacción

social, donde el individuo se constituye a través del discurso (Vergel 2014) y la interacción con los artefactos (objetos, instrumentos o sistemas de signos), formando lo que en la TO se conoce como recursos semióticos (Radford 2010), que tienen un conocimiento histórico-cultural, consignado a ellos y, al influir, la actividad, se transforma en medios semióticos de objetivación. Las anteriores diferencias muestran un "aprendizaje, fundamentalmente social de objetivación, influido por una actividad semiótica multisistémica" (Radford 2006).

2.1.1 .Medios semióticos de objetivación para elaborar significados

Como se dijo anteriormente, el aprendizaje se forma desde la interacción social del individuo y los recursos semióticos que intervienen en el proceso de la actividad. La interacción social reconoce dos elementos clave, conocidos en la TO, como Togethering, y el espacio de interacción conjunta. (Radford & Roth, 2010, p. 6). Ya en esta parte, se necesita diversificar entre "actividad" y "tarea". Luis Radford, especifica que la actividad, pertenece al problema que el alumno trata de resolver y la tarea, forma parte de la actividad, teniendo como rol, ser el dispositivo que lanza la discusión, el elemento a partir del cual se forma la práctica reflexiva de la actividad. También aquí se manifiesta el propósito educativo que el docente busca destacar correspondiente al objeto de la actividad.

Para el argumento mencionado, el objeto pertenece al hecho del pensamiento variacional y numérico del objeto matemático derivado. También, los medios semióticos de objetivación (objetos, gestos, sistemas de signos), son instrumentos que tienen una gran historicidad cultural en el proceso de objetivación, permitiendo "una forma estable de conciencia" para hacer aparecer la intencionalidad de la labor y organizar las acciones que desarrollan para lograr el objetivo de la misma (Radford, 2010a). Lo expuesto destaca el hecho de que el pensamiento tiene una representación multisemiótica, es decir, se muestra a través de

distintos recursos como lo escrito, lo hablado, lo gestual, y lo kinestésico, se acogen como partes constitutivas del proceso cognitivo y por ende del pensamiento (Radford, 2009).

2.1.1.1 El gesto como medio semiótico

Entre los medios semióticos enunciados es notable el lugar que le corresponde al gesto, este pone de manifiesto la intencionalidad del sujeto, la hace visible, principalmente cuando estos se encuentran unidos al discurso, evidenciándose como gesticulaciones (Kendon citado por Vergel 2015). Por otro lado, expresa un conocimiento acerca de un objeto cultural, o una relación entre objetos, cuando otro sistema semiótico, es insuficiente para comunicarse (Radford, citado por Vergel 2014). Esta virtud, los procesa como intermediarios de una conciencia frente a algo, es decir, como medios semióticos de objetivación. Al respecto se dice: "Los gestos, son elementos necesarios en el proceso de objetivación del conocimiento de los alumnos. Los gestos ayudan a los educandos a dejar ver sus propósitos, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos" (Radford citado por Vergel 2014, p. 74).

2.1.2 Nodos semióticos

Radford (2018) expresa que a los procesos de objetivación contribuyen múltiples medios semióticos para construir un saber, como el aula de clase que se convierte en un espacio multisemiótico, en el cual la comunicación verbal, los gestos, los procedimientos, entre otros, ayudan para que el objeto matemático sea visible surgiendo gradualmente. Esta presencia no se da de forma aislada, sino que se originan de manera compartida ante la necesidad de hacer clara una intensión. La combinación de medios semióticos de objetivación de distintas naturalezas se denomina nodo semiótico, es decir, es "una pieza de la actividad semiótica de

los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber" (Radford, 2009a, p. 2).

En este contexto la escritura no representa la única manera de presentar los resultados del aprendizaje o de la toma de conciencia, las representaciones de los conocimientos obtenidos involucran otras formas físicas y socioemocionales de objetivación que dan "una forma tangible y corpórea al conocimiento" (Radford, 2003, p. 5). Por otro lado, Miranda (2007), resalta la importancia de las acciones sensuales mediante las cuales los estudiantes llegaron a una formula algebraica de una generalización de patrones; esto a través de "una sutil coordinación de palabras, signos, dibujos de figuras, gestos, percepción y ritmicidad" (Radford, 2002, p. 6); creando procedimientos corpóreos de pensamiento algebraico, es decir formulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo (Radford, 2010a).

Igualmente se destaca que el uso de nodos semióticos no es lo único que representa un proceso de objetivación. En este sentido, "la objetivación de la estructura matemática detrás de un patrón que fue mediado por las palabras y los gestos pueden ser profundizado por una actividad mediada a través de otros tipos de señales" (Radford, 2010) incorporadas a la creación de significados nuevos derivados de exploraciones fundadas en otros sistemas semióticos que el alumno ya había dominado anteriormente.

2.1.3 Procesos de objetivación

Para la teoría de la objetivación "el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. Es lo que llamaremos un proceso de objetivación" Radford (2006, p. 113)

Radford reflexiona sobre el hecho de que no se debe confundir objetivación en el sentido de objektivierung, o "construir" un objeto y hacer su reificación, su cosificación; de manera que con la idea de objetivación que propone Radford situada en el sentido de vergegenständlichung: "un proceso que incluye el trabajo o esfuerzo en aprehender (to grasp) un objeto (objekt) ya allí; proceso en el que se plasma y expresa el sujeto a través precisamente del trabajo o esfuerzo que hace por aprehender el objeto (objekt)" (Radford, 2018, p.12).

Además argumenta el autor que la objetivación del saber se logra cuando los nodos semióticos se desarrollan. Una forma de ver esa evolución, es cuando se toman partes de trabajos anteriores que permiten clarificar la labor actual, o si se toman gestos o intenciones de otros sujetos para convertirlos en propios, este proceso se conoce en la teoría como iconicidad.

Otra forma de evolución de los nodos semióticos (y por tanto de objetivación), pertenece a una minimización en la cantidad de recursos semióticos utilizados a medida que se completan, agrupando los significados. Este proceso se conoce como contracción semiótica (Radford, 2008b). Se puede apreciar este proceso cuando el discurso es más corto y mejor coordinado, seguido de gestos más puntuales, o produciendo simbolismos donde los gestos se expresan en un sistema alfanumérico (Radford, 2008b); ambas reconocen que en el sujeto se está originando una renovación psíquica que "lleva al sujeto a una toma de conciencia del objeto cultural" (Vergel, 2014, p. 76).

2.1.3.1 Iconicidad

La iconicidad es descrita por Gustin (2017) como el nivel de semejanza que la imagen tiene con la realidad. Existe progresión en la iconicidad, partiendo desde el grado más alto, la fotografía, hasta el más bajo, la palabra que refiere al objeto. En palabras de Luis Radford (2013a), la iconicidad, es parte del otro proceso de objetivación, que se convierte en otra parte de la actividad matemática, en donde los alumnos usan una serie de formas de acción, expresión y reflexión, para llevar a cabo una tarea, tanto que los mismos parten de similitudes, asociaciones y orientaciones para llevar a cabo la instrucción.

En este proceso de objetivación, surge un subproceso, la organización icónica, en el cual los alumnos formulan y reformulan los trabajos, gestos, signos, movimientos, palabras y tonos, los términos e intenciones de alguien. Esta guía es calificada icónica porque las formulaciones de las expresiones (verbales, escritas o gestuales), del alumno, muestran rasgos parecidos a los de otros estudiantes o la misma maestra. De igual forma, es una guía, porque esta reformulación es calificada, más allá de una simple copia, ya que permite objetivar el conocimiento, el saber hacer, da señales del objeto cultural con el cual se identifica el estudiante

2.1.3.2 Contracción semiótica

Pasando por diferentes niveles de objetivación relacionados por la conformación y el progreso de los nodos semióticos, los alumnos deben trabajar en la disminución de las maneras de expresarse frente a la labor realizada con el objeto matemático. Haciéndose imprescindible la selección o toma de decisiones considerando relevante y lo que no, lo cual implica que los alumnos deben ser selectivos para descartar las acciones que ya no son notables y aquellas que consigan llevar a un nivel más profundo de conciencia.

La clasificación de los signos que forman el nodo semiótico no es imparcial ni autónoma, (D'Amore, 2006) se requiere una moderación que es asignada al sujeto que se está expresando; es decir, *"se debe compensar la reducción de los recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos a través del cual ahora se expresa la generalización"* (Radford, 2010a, p. 15); este progreso de los medios semióticos se nombra contracción semiótica. En este sentido, la evolución de la generalización a través de la evolución de los nodos semióticos hasta llegar a múltiples contracciones semióticas suministra a los alumnos la adquisición de formas superiores de generalidad algebraica, haciéndose necesario dentro del proceso como un componente fundamental para lograr el saber (Radford, 2008a).

La contracción semiótica es entonces un proceso de objetivación del conocimiento, donde una vez ejecutada la síntesis de un procedimiento, se lleva a una expresión concisa, con frases mejor relacionadas con menos gestos o de gestos mejor modulados (Radford 2002). Así, en un primer momento de contracción se lleva a cabo un reconocimiento más corto a partir de gestos más precisos. Un segundo tipo equivale a las fórmulas simbólicas producto de contracciones de experiencias vividas y objetivadas a través del habla a medida que se desarrollan habilidades, esa contracción incrementa (Radford, 2008).

2.1.3.2.1 Procesos de generalización

Los procesos de generalización no son un proceso exclusivo de un objeto matemático particular; según Radford (2015a) forman parte del proceso educativo, pues se usan de forma tácita. Especialmente, en la exploración de variables, se presta atención a los rasgos principales de un proceso, o de un objeto, y la educación se vale de ello: las ideas de difusión

que interna externamente se adoptan en las prácticas educativas" (Radford, 2015a, p. 130). Aceptado esto, todo proceso educativo involucra una generalización.

A partir de los planteamientos de Radford (2006) lo principal en el aula de clases de matemáticas es ser con otros (Radford, 2006a) donde se considera que más que libertades, el estudiante debe pertenecer a una comunidad. Además, el autor plantea una estructura como base para la ejecución de las clases, compuesta por tres periodos:

1. Realizar las tareas en grupos, preferiblemente compuesto por tres o cuatro alumnos (Radford, 2004) y mientras los estudiantes trabajan, se sugiere que el docente se les acerque para ir discutiendo con ellos, sobre la acción que están ejecutando.

2. Intercambio entre pequeños grupos, esto significa que las deliberaciones elaboradas por unos estudiantes sean cotejadas y corregidas (de ser necesario) por los otros alumnos.

3. Discusiones generales. Finalmente, al culminar la tarea; el docente lo aprovecha para aclarar cualquier duda. Cabe destacar que siendo una actividad matemática, es mediada por diversos medios semióticos, el aula de clase se transforma en un aula multi-semiótica (Radford, 2010).

2.2 Estructura multiplicativa

2.2.1 Multiplicación como suma abreviada

La multiplicación es definida por Vergel (2014) tradicionalmente como la forma de resumir una cantidad demasiado elevada de números para sumar, y al sumarse todos se extiende demasiado el total, sin embargo, una de las ventajas de este procedimiento, es que, si se adelanta el contenido de la multiplicación, el niño no dominará los algoritmos de la multiplicación o no retiene las tablas de multiplicar, lo cual le impide realizar y lograr la

solución al problema que está resolviendo. Tomando en cuenta que, los sistemas numéricos, desarrollan las estructuras psíquicas de los individuos y transcienden al sujeto que piensa, por tanto, se deben diseñar tareas coherentes con estos procesos multiplicativos que potencien el aprendizaje significativo.

2.2.2 Modelos para la multiplicación

Otra parte esencial en el proceso de enseñanza aprendizaje de los procedimientos aritméticos radica en la identificación de los modelos característicos de problemas que se corresponden con ellas, a partir de lo dicho se presentan algunos elementos representativos para la multiplicación de números naturales (Vergel, 2014, p. 32). Se da entonces la multiplicación como razón, que según Pantano (2014), está referido a la relación (razón) entre dos números de diferente naturaleza, es decir, una cantidad de naturaleza "A" (multiplicando) y otra de naturaleza "B" (multiplicador-Razón), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicador, además, la multiplicación como combinación, referida a la multiplicación desde dos cantidades de distinta naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por el número de combinaciones posibles (producto). Resulta de mucha utilidad plantear problemas a los estudiantes que impliquen el uso de combinaciones para que identifiquen situaciones asociadas con el producto y además fijen la definición.

Se debe agregar que Espinosa (2011) plantea en el proceso multiplicativo que los estudiantes deben entender, modelizar, desarrollar y adaptar, aplicar, interpretar y formular. Para entender, debe estar claro en cuanto al contenido en el que se encuentra el problema. Al modelizar, identifica, construye y reflexiona sobre un patrón definitivo; para desarrollar y adaptar identifica y construye tácticas para empezar el problema: heurísticas de

razonamiento. Luego, emplea la habilidad acogida; después de lograr la respuesta, interpreta el resultado en procesos del contenido y puede responder satisfactoriamente.

Finalmente, expresa el problema desde unas circunstancias dadas. Por lo tanto, tomando en cuenta los procedimientos propuestos por Polya (1965), el concepto de matematización mostrado por la OCDE y los procesos matemáticos formulados por Espinoza, para el proceso general de solucionar problemas con el objeto matemático de estructura multiplicativa, se trabaja con los siguientes procesos específicos:

- Para la comprensión del problema: comprender.
- Para la concepción de un plan: representar.
- Para la ejecución del plan: resolver (modelizar o matematizar).
- Para la visión retrospectiva: argumentar (responder, verificar) y formular.

De manera que comprender está referido al proceso de leer, examinar el texto y pensar en cada una de las relaciones mostradas en la información del problema planteado. Cuando un alumno manifiesta con su léxico lo que está leyendo, identifica los fundamentos numéricos correspondientes, halla puntos claves que le suministran una mayor información, está suministrando evidencias del nivel de comprensión verbal que posee, es decir que está recopilando.

García (2015) afirma que la codificación "concierne al procesamiento inicial de los estímulos o elementos informativos, que genera una representación mental de los mismos" (p.68). Para este procedimiento, se efectúa una lectura particular y después se destina una discusión grupal, con interrogaciones guiadas donde el alumno plantea un problema de su entorno, y de las matemáticas, es decir, que decodifica el problema. Concibiendo esta

expresión como el contenido que transfiere los datos suministrados por el contexto problema a otro símbolo o lenguaje sencillo que ayude con la solución. (García et. al, 2015).

2.2.3 Estructura multiplicativa

Actualmente las nuevas propuestas didácticas hacen referencia a la palabra: objetos matemáticos, para referirse a los viejos contenidos de una forma integral. Chevallard (como se citó en Godino & Batanero, 1994), define un objeto matemático como

> "*un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito"(*p.6).

Estos argumentos corresponden también, a lo planteado por Vergnaud (1990), sobre el objeto matemático de la estructura multiplicativa, que enmarca solamente los contenidos multiplicativos, sino también de la división, desglosándose en los disímiles registros semióticos antes mencionados. Esta estructura demanda de gran atención, porque estar calificada dentro del grupo de operaciones básicas. Tomando en cuenta que su aprendizaje comienza en el grado segundo, muchos alumnos llegan al conjunto de grados (cuarto y quinto), y muchas veces a los grados (sexto y séptimo), con severas confusiones. Por otra parte, se debe profundizar sobre la idea de la estructura multiplicativa para ser conscientes de la enseñanza de la misma.

2.2.4 Representaciones semióticas del objeto matemático de la estructura multiplicativa

El objeto matemático de la estructura multiplicativa, necesita ser representado semióticamente, para beneficiar su enseñanza. El estudiante, apela (sin saber) a las representaciones semióticas para exteriorizar su pensamiento, es decir que cuando utiliza la simbología semiótica, revela el nivel de aprendizaje de las matemáticas y los procesos mentales que esto representa (Radford 2013a). De manera que para concretar el aprendizaje de la estructura multiplicativa y teniendo determinado el proceso general a trabajar, es imperante precisar la clasificación del tipo de situaciones que propiciaran el aprendizaje de la estructura multiplicativa.

Dicha clasificación, es expresada por autores como Vergnaud (1991), Maza (1991), Segovia y Rico (2013), entre otros, quienes han desarrollado estudios investigativos sobre los procesos matemáticos, planteando análisis teóricos, sobre las estructuras aditiva y multiplicativa, promoviendo la adquisición de concepciones y relaciones comprometidas con dichas estructuras.

Estos acercamientos teóricos sobre el aprendizaje multiplicativo han brindado grandiosos aportes: Vergnaud (1991), detalla de forma clara y coherente, los tipos de problemas multiplicativos que él, ha especificado demostrando que incluso en las operaciones de multiplicación, interviene una sistematización relacional concerniente a cuatro cantidades y varios tipos de operaciones.

2.2.4.1 El isomorfismo de medidas

Según Vergnaud (1991) el isomorfismo de medida posee una proporción cuaternaria entre cuatro montos, de diferentes tipos de parejas. Esta relación se logra manifestar a través de problemas de distintos conflictos y temas que al ser simbolizados a partir de los cuatro

montos existentes, son comprendidos expeditamente por los estudiantes. Para resolver estos problemas, conviene usar un diseño de tabla de correspondencia entre dos cantidades y se separan los cuatro montos específicos.

La segunda proposición de Vergnaud (1991) es el producto de medida, en este caso la relación se da de manera ternaria, es decir entre tres cantidades, siendo una de ellas el producto de las restantes en dos planos, el numérico y el dimensional. Igualmente, diferencia tres importantes representaciones de problemas multiplicativos: es allí donde surgen problemas de isomorfismo de medidas, es decir que de un solo espacio de medidas y producto de medidas, cuyo análisis y tratamiento solicitan diferentes tipos de conocimientos, operaciones y representaciones que están conectados entre sí. Para ser más específico, el autor explica de manera sencilla que el isomorfismo representa problemas de multiplicación, de búsqueda del valor unitario y de búsqueda de la cantidad de unidades. Cada uno de ellos se subdivide en otras subclases según se manipulen números enteros pequeños, números grandes, valor unitario decimal, números decimales, valor unitario inferior a 1 y números de unidades inferior a 1.

2.2.4.2 Caso de un solo espacio de medidas

Partiendo de los postulados de Olarte (2016), es una manera de relacionar operaciones multiplicativas, intervenidas por una relación de dos cantidades donde solo existe una condición de medidas en el que un operador-escalar es escogido personalmente por la palabra “veces”. Ejemplo: Hacen falta dos metros de tela para hacer una falda; hacen falta tres veces más para hacer un conjunto. ¿Cuánta tela se necesita para hacer un conjunto? Se precisan dos metros de tela para una falda, seis metros para un conjunto. ¿Cuántas veces más requiere un conjunto?

2.2.5 Didáctica para la enseñanza de la estructura multiplicativa

Para lograr una coyuntura afín entre los aspectos curriculares que se fraccionan en procesos generales y específicos y la perspectiva didáctica, se hace imprescindible, el diseño de tareas concretas que lleven al progreso y logro del proceso general de resolución y formulación de problemas, tratando de conseguir competencias matemáticas de calidad que favorezcan los efectos de las pruebas saber en Colombia, prueba Luz en Venezuela y cada prueba censal en diferentes países latinoamericanos. Dichas tareas deben ser planificadas teniendo en cuenta los procesos específicos propuestos y hacen parte de la perspectiva didáctica del área de matemáticas.

Ahora, siguiendo los planteamientos de Vergnaud (1991), se hace una breve conceptualización, caracterización y descripción de la perspectiva didáctica de la estructura multiplicativa: hace referencia a dos aspectos esenciales: la correlación entre competencia matemática – actividad matemática de aprendizaje del alumno donde se le concede mayor valor a la calidad de la actividad matemática del educando, es decir al aprendizaje y no tanto a la enseñanza; y el otro aspecto son las dos expectativas de aprendizaje que conviven y se mejoran en el perfeccionamiento de las competencias: las perspectivas a corto plazo coherentes con los objetivos de las tareas matemáticas de la clase, de la unidad o del período académico; y de otro lado, las perspectivas de aprendizaje a largo plazo que se refieren al desarrollo mismo de las competencias matemáticas del estudiante (García et al., 2015).

Capitulo III. Marco Metodológico

En la presente investigación el enfoque se basa en la metodología multisemiótica.

3.1 Enfoque multisemiótico

Este enfoque se presenta en el pensamiento Vigotskiano como un procedimiento objetando que un método no es un instrumento o una mera secuencia de acciones a seguir. La idea de método a considerar está orientada a transmitir una visión de la realidad que brinde doctrinas sobre entes o fenómenos que pueden ser investigados. Así, las doctrinas establecen principios teóricos, intrínsecamente de un lenguaje y su significado individual, con el cual se pueden formular las interrogantes de investigación. Para Radford (2015), esta es la razón por la cual las metodologías funcionan en secuencias, con los principios teóricos y propuestas de investigación, además que una teoría logra considerarse como una triangulación interrelacionando principios, metodología e investigación.

Habría que decir también que el propósito de este articulado es ofrecer una perspectiva amplia y operativa del enfoque multisemiótico, considerando una conceptualización sobre ello. La perspectiva amplia puede inscribir en la proposición de estudiar la significación de un fenómeno social y la perspectiva operativa en la de explicar esa acción. De esta manera, la semiótica puede importarle a los investigadores de los fenómenos sociales para explicar la significación, socialmente atribuida a tales fenómenos, mientras enfocan esta exploración de un modo riguroso, que explique las conclusiones, pero no en forma intuitiva sino que se comprenda, pero cuya razón de ser se desconoce o sin que se pueda implantar por qué se considera que es ésa significación la que debe atribuírsele a tal fenómeno y no a cualquier otro. (Blasco y Pérez, 2007, p. 77).

Por tanto, cualquier profesional en el contexto de las ciencias sociales necesita de la semiótica como herramienta estructuradora para la solidez y el rigor de sus estudios e investigaciones. Lo dicho se basa en que todos estos profesionales tienen como centro de conocimiento de sus disciplinas relativas a otros tantos objetos semióticos, o sea a fenómenos sociales que ya tienen atribuido un determinado significado. De manera que todos ellos, son beneficiarios viables, de la semiótica, en la medida en que comprendan que la semiótica puede brindarles los procedimientos necesarios para construir una explicación básica de la significación que tiene en un momento dado, en una sociedad determinada, en un determinado fenómeno que están investigando y en la medida en que los estudiosos de la semiótica pretenden construir y plantear las operaciones analíticas pertinentes.

Finalmente, se presenta un análisis frente a la importancia de reconocer en la resolución de las tareas, los medios semióticos de objetivación (MSO), los procesos de objetivación y la evolución de los nodos semióticos de objetivación, ya que pueden ser utilizados por los investigadores, a través de la observación para dar cuenta del objeto matemático. Lo anterior se alcanza partiendo de los descubrimientos hechos, a través de las tareas realizadas por los estudiantes, los elementos teóricos de la TO y confrontándolos con las experiencias que tienen los investigadores en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles.

3.2 Población y muestra de estudio

En este escenario el término población de estudio comprende la enumeración y análisis de la totalidad del estudio; el cual está representado por el curso 702, conformado por 36 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 11 y 15 años, en este sentido las muestras estuvieron representadas por la totalidad de la población; por tratarse de un grupo finito de estudiantes.

Así mismo, los sujetos de investigación son considerados como un censo poblacional, el cual es definido por Sabino (2002) como el análisis de todas y cada una de las unidades que conforman el universo de estudio. Cabe destacar que la población es finita ya que el universo que se estudió es igual o inferior a cien mil unidades, y según su función, la población es accesible ya que al ser reducida en tamaño y al estar ubicada en un área geográfica susceptible de ser abordada por la investigadora, fue posible desarrollar el estudio sobre la totalidad de los miembros del universo.

3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Una vez seleccionado el tipo y diseño de investigación adecuado, y la población apropiada, la siguiente etapa radica en puntualizar el proceso de recolección de los datos pertinentes sobre la variable incluida en la investigación, a lo cual Chávez (2007) considera que las técnicas son los medios empleados para recoger la información y que los instrumentos los maneja el investigador para medir el comportamiento o atributos de las variables. Así la técnica utilizada en esta investigación es de campo por cuanto el problema es extraído del mismo sitio donde suceden los hechos, es decir el curso 702, empleándose como instrumento 2 tareas, con el objeto de controlar la calidad de las respuestas y disminuir el riesgo de las omisiones y documentación de las mismas, a través de video.

Para el caso de esta investigación se organizaron 2 tareas (ver anexos) con propuestas seguidas de interrogantes alusivas a los contenidos de elaboración propia que según Bavaresco (2008) es un procedimiento estimado como tradicional en las ciencias sociales para la obtención y registro de datos, preparado sistemática y cuidadosamente sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación o evaluación, y que puede ser aplicado en formas variadas, entre las que destacan su administración a grupos o su envío por correo.

Además, las tareas admiten su utilización como instrumento de investigación y de evaluación de los estudiantes, para ello se tomaron en cuenta las bases teóricas de la investigación.

Esta investigación está sustentada en la Teoría socio cultural de la Objetivación de Luis Radford, teoría de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, inspirada en la teoría Vygostskiana; la cual percibe el aprendizaje como un proceso social – histórico – cultural donde el estudiante se posiciona, es crítico y reflexiona en los procesos de objetivación. Apoyados en este pensamiento, donde se replantea la categoría de enseñanza y aprendizaje como actividad entre estudiantes y profesores, se pretende identificar y describir los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes de grado séptimo a través de la resolución de tareas asociadas a la estructura multiplicativa mediada por la labor conjunta.

3.3.1 Estructura de las tareas en la teoría de la objetivación

Las tareas formuladas bajo los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación deben apoyar las áreas de interacción social donde los estudiantes se incluyan en la solución de las tareas planteadas, se mantengan en constante innovación, soportando el uso de medios semióticos de objetivación. Además, han de manifestar el propósito educativo del maestro o investigador, en un conjunto de acciones que permitan cotejar las tareas, identificando varias probabilidades:

1. Emergencia de medios semióticos: esto se comprueba en la conducción de las tareas.

2. Problema que refute el alumno y al cual se resista: partiendo de experiencia de las tareas realizadas en la presente investigación, relacionadas con un viaje vacacional de un grupo de amigos, se propusieron alternativas multiplicativas en contextos gráficos.

3. Propuestas de interacción y discusión: lo cual se comprueba en el pilotaje de las tareas; además, la disposición de la clase, refuerza esta característica.

4. Emergencia de objetos matemáticos: Se comprueba al inicio de la realización de la tarea, pero, la actividad puede evitar que surja el objeto matemático.

5. Objetivación: Las tareas deben propiciar una actividad reflexiva continua.

6. Organización pedagógica: se organiza una actividad que genere discusión sobre la idea de buscar, presupuestos para el viaje de los amigos, en diferentes hoteles que prestan diferentes servicios, en la tarea 1, la tarea 2, se amplía, buscando costos de viajes, calculando la distancia del hotel a la playa, elaborando alternativas de menú acorde a las necesidades de los amigos, proponiendo un acercamiento al objeto matemático señalado como saber cultural.

3.4 Validez y confiabilidad de los datos

Buscando que el instrumento utilizado cumpla con su objetivo, es necesario que el mismo sea validado. Según Hurtado (2006) la validez en términos generales, se refiere al grado en que un instrumento efectivamente mide la variable o categorías que pretende medir. Por tanto, para determinar la validez del contenido de los instrumentos aplicados en la presente tesis, se sometió a la revisión de expertos, relacionados con el tópico planteado; los cuales revisaron la pertinencia o no de las tareas.

En este sentido la determinación de la validez y confiabilidad del instrumento se llevará a cabo utilizando el método de juicio de expertos con una población de tres (3) especialistas del área de matemática, a fin de determinar si el instrumento utilizado en este estudio se presenta acorde a los planteamientos de los autores consultados. La versión inicial del instrumento durante la evaluación realizada por los expertos, estuvo sujeta a modificaciones en los aspectos formales, tales como redacción en función de adecuar su

formulación para considerar un mayor volumen de información dando así mayor libertad a los entrevistados para enunciar sus respuestas y facilitar la recolección de los datos, obteniendo como resultados la versión modificada del instrumento.

Por otra parte, se solicitaron las debidas autorizaciones por parte de la institución educativa y los padres de familia o representantes legales de los estudiantes para la realización de la documentación a través de fotografías, video y audio.

3.5 Técnica de análisis de los datos

El análisis de los datos permite identificar e interpretar los resultados a partir de los procesos analíticos. En función de lo cual, para llevar a cabo dicho estudio se utilizó el enfoque multimodal, presentando la constitución del dato de investigación y la manera como serán analizados éstos a través de una concepción multimodal del pensamiento.

3.6 Procedimiento de la investigación

La investigación se inició cuando se observaron problemas que necesitaban soluciones tales como: identificar y describir los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado séptimo, al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa, a fin de brindarle una solución de forma metódica, lo que significa que se deben seguir ciertos pasos los cuales conduzcan al investigador a obtener los resultados de forma idónea. A continuación se presentan los pasos que surgieron para la ejecución de la presente tesis.

- Se observaron los estudiantes de grado séptimo, en las clases que sirven de práctica docente a los investigadores.

-Se hizo una revisión bibliográfica a fin de plantear el problema.

-Se formularon las interrogantes, de donde surgieron el objetivo general y los objetivos específicos.

-Se delimitó el problema con el área y la línea de investigación, así como los autores que sustentarán el estudio con las teorías.

-Se revisaron diferentes tesis como antecedentes de las categorías en estudio, Nacionales e Internacionales, de las cuales se tomaron ciertos aspectos que sirvieron de aporte a esta investigación.

-Se presentaron y analizaron parte de las bases teóricas y conceptos que estuviesen acordes con la realización del instrumento de recolección de datos.

-Se sustentó la metodología de la investigación basándose en algunos autores que han escrito al respecto.

-Se aplicó el instrumento (tareas I y II), a la población objeto de estudio, acompañado de documentación a través de video.

-Se realizaron las matrices de análisis correspondientes.

-Se interpretaron y discutieron los resultados.

-Se conformaron las conclusiones y recomendaciones.

-Se elaboraron las referencias bibliográficas.

-Se hizo el informe preliminar.

-Se hizo el informe final.

-Se presentó la Investigación.

Capítulo IV. Análisis de los resultados

Luego de aplicar el instrumento creado por los investigadores a los estudiantes de grado séptimo en la Institución Educativa Distrital Diego Montaña Cuéllar, constituido por 2 tareas para la resolución de problemas asociados a la estructura multiplicativa, basados en la concepción multimodal del pensamiento humano, las categorías de análisis, la observación y los postulados de Radford y otros autores, se presenta a continuación el análisis de los resultados surgidos de las respuestas obtenidas, la observación de los docentes y la revisión teórica.

Para dar inicio al análisis y organizar la información de la investigación, se procedió al estudio de los datos emergentes obtenidos siguiendo el enfoque metodológico de la TO. En este sentido, y siguiendo ideas de Radford, (2010), se devela el saber propio de los alumnos recursos cognoscitivos, físicos y perceptuales en el abordaje de ideas matemáticas, a partir de la concepción multimodal del pensamiento humano, como vinculo de la comunicación de significados.

Hodge y Kress (1988) para describir la concepción multimodal reformulan la significación de semiótica social y demandan que la reconstrucción de significado deje de limitarse al carácter lingüístico. Estos autores examinan cómo la cultura se programa a través de diferentes procedimientos semióticos como las imágenes, los gestos, la mirada, la postura, entre otros disponibles para el individuo permitiéndoles construir significados y participar en contextos sociales y culturales específicos. Por su parte Kress y van Leeuwen (2001) dicen que la concepción multimodal se basa en el uso de diferentes sistemas semióticos para la construcción de significado y el diseño de productos o eventos semióticos en contextos específicos.

Los postulados de Radford (2010) enriquecen la definición de concepción multimodal del pensamiento humano, la cual, según el autor comprende una serie de influencias, procesos y productos especificando que el sistema matemático es conformado por representaciones, signos o formas que consienten la codificación simbólica de la información. Además, los sistemas semióticos pueden combinar ciertos recursos o dispositivos llamados artefactos multisemióticos cuya presencia permite la comunicación efectiva del conocimiento.

4.1 Categorías de análisis

Tabla 1. Categorías de análisis

CATEGORÍAS	SUB CATEGORÍAS	INDICADORES
PROCESOS DE OBJETIVACIÓN	**Contracción semiótica**	• **Se evidencian disminución de medios semióticos (evolución)** • **Se evidencian expresiones concisas** • **Se evidencian procesos de generalización**
	Iconicidad	• **Toma parte de trabajos anteriores para clarificar la labor actual** • **Toma gestos de otros para convertirlos en propios** • **Identifica semejanzas en las interrogantes**
MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN		• **Gestual**
		• **Hablado: se evidencia**
		• **Kinestésico**
		• **Escrito**

4.2 Resultados obtenidos

Se considera necesario exponer un ejemplo de los ejercicios realizados por los estudiantes, para demostrar que la objetivación planteada por Radford y su correlación con los instrumentos de análisis, benefician la asimilación de nuevas posibilidades de desarrollar habilidades que les permitan la solución de problemas a los estudiantes. Los instrumentos por sí solos no se forman en intermediarios, se requiere del maestro y del uso del lenguaje. Así que debe brindarse a los alumnos oportunidades de aprendizaje sobre la razón, de forma que a partir de dinamismos o situaciones influidas por instrumentos y artefactos puedan objetivar acepciones multiplicativas.

En el siguiente apartado se presenta una serie de fotografías extraídas de los videos que hacen una reseña desde el momento en que los investigadores le presentan la Tarea 1 a los estudiantes dándole instrucciones para su posterior ejecución en el aula de clases. En el análisis la interpretación se funda en los medios semióticos de objetivación, (gestos, conteo, lenguaje oral y escrito, señalamientos), procesos de objetivación (PO), (contracción semiótica, iconicidad) los cuales se pusieron de manifiesto.



Figura 1. Socialización a los estudiantes de tarea I

Tarea 1

En la presente tarea se explica a los estudiantes de grado séptimo que tres amigos (Sofía, Alejandra y Pablo) estudian en la misma universidad, residen en Bogotá y van a realizar un viaje de vacaciones a la Isla de San Andrés (Colombia) para celebrar su graduación. Para ello, deben planificar los costos de modo que sean accesibles para poder cubrirlos con el dinero que poseen para tal fin. Los amigos han cotizado algunas propuestas de transporte hospedaje y planes turísticos en varias agencias de viajes.

De manera que frente a las propuestas que han indagado deben escoger la que les favorezca en cuanto a movilidad, hotel y las actividades que realizarán en la Isla. El ideal de ellos es poder ejecutar el mayor número de actividades allí. En la medida que los amigos iban obteniendo respuesta de las agencias, los estudiantes, debían presentar la mejor opción aplicando las operaciones necesarias para ayudarlos a decidir cuál de las propuestas les convenía más por bajos costos de movilidad, hospedaje, alimentación, diversión y acceso a la playa. Una vez que los estudiantes reciben orientaciones del Maestrante, proceden a realizar los ejercicios que aparecen en la Tarea 1.



Figura 2. Orientaciones en la Tarea I

Siguiendo el esquema metodológico propuesto desde la TO denominado multisemiótico, se considera el aprendizaje como un proceso semiótico social en donde *"acciones sensuales, perceptuales, kinestésicas, gestuales, lingüísticas y simbólicas"* (Radford, 2015a, p.561), surgen en las actividades siempre en movimiento y brindan una explicación psicológica de los signos (que pueden ser escritos y orales, como también signos encarnados como los gestos y la postura del cuerpo), poniendo de relieve la simbolización de los signos pasando a ser herramientas de reflexión que permiten a los individuos planificar sus acciones (Radford y Sabena, 2015) en tiempo y espacio.



Figura 3. Tarea I. Movilización de medios semióticos

En la fotografía se observa que una vez recibidas las instrucciones los estudiantes procedieron a ejecutar las tareas, analizadas desde la perspectiva micro genética observada por los investigadores en detalle, destacando en algunos espacios de tiempo la movilización de MSO (registro de lengua natural, gestos, expresiones faciales, manipulación de herramientas, etc., Radford, 2015). Se determinaron los recursos semióticos manifestados en la labor conjunta de los alumnos e investigador que sustentaran a su vez los PO desarrollados, procurando acercar una interpretación de lo acontecido en contraste con la TO y elementos de la reflexión matemática, frente a cómo se produce la emergencia de estas formas de pensamiento en la labor.

El vuelo ideal…

Seguidamente en la misma tarea 1 se les brinda información a los estudiantes sobre la cotización recibida: El vuelo de Bogotá – San Andrés – Bogotá, con tres aerolíneas. Cada una de ellas ofrece diferentes beneficios como: costo, tiempo de viaje y calidad del servicio (Tipo de avión), los cuales son bien especificados en el cuadro de "Ofertas de Aerolíneas".

Tabla 2. Tipos de vuelo Bogotá – San Andrés - Bogotá, ida y regreso por persona

Aerolínea	Tipo de vuelo	Tiempo de vuelo	Costo por persona
LATAM*	Directo	2h 6m	$350.000
	Una escala	4h 13m	$290.000
VIVA AIR**	Directo	2h 6m	$300.000
	Una escala	4h 13m	$240.000
AVIANCA***	Directo	2h 6m	$450.000

Igualmente se les ofrecen orientaciones a los estudiantes sobre términos que deben conocer para que la búsqueda de soluciones sea sencilla y práctica, además una nota aclaratoria.

Escala: Vuelo que obliga a los pasajeros a cambiar de un avión a otro antes de llegar a su destino final. **Snacks:** Aperitivos y comestibles gratis. **h:** Horas. **m:** Minutos.

"Recuerden que el grupo de amigos (Sofía, Alejandra y Pablo) debe viajar en la misma aerolínea. No olvidemos realizar todos los procesos, procedimientos y dudas que tengan necesarias en las hojas y no dejar alguna pregunta sin responder. Discutimos dentro del grupo de trabajo y llegamos a un acuerdo para responder" (Tarea 1).

1. ¿Por cuál aerolínea van a viajar? y ¿Cuáles fueron los motivos para esta elección?
2. Según la aerolínea escogida ¿Cuánto cuestan los Tiquetes de Sofía, Alejandra y Pablo?
3. Si dos amigos más los acompañarán ¿Qué costo tendrían todos los tiquetes?

El investigador (I) se acerca a uno de los grupos donde se está generando mayor discusión acerca de las ventajas o desventajas que pueden tener a la hora de escoger alguna de las aerolíneas. Se presenta el siguiente dialogo entre Laura, Alexandra y Angyfer:

I: *¿Qué aerolínea van a escoger?*

Alexandra*: yo escogería Avianca porque si es la más cara es la mejor.*

Laura*: no deberíamos escoger otra, Avianca es muy caro*

Alexandra*: Si pero tiene muchas cosas, podemos comer y también ir más cómodas.*

I: *¿Tú qué piensas Angyfer? ¿Crees que el argumento de Alexandra las convenza en la elección?*

Angyfer*: no profe, yo creo que con lo que nos gastamos en los tiquetes podemos comprar más cosas en el paseo.*

Alexandra*: Si, pero tenemos un viaje cómodo y además viene con snacks gratis y si escogemos otra aerolínea nos costaría más los alimentos.*

Laura*: bueno en eso tienes razón, no tendríamos que comprar más, comeríamos mucho.*

En este apartado va más allá de la simple discusión, se ve como se co-producen subjetividades en el aula de matemáticas, se observa formas de colaboración, compromiso de trabajo conjunto, un cuidado del otro y asumen una responsabilidad hacía los otros, llegando a acuerdos para responder y dar explicaciones sobre lo decidido, dejando ver el propósito comunicativo de los alumnos, convirtiéndose en integrantes del acto cognoscitivo que "posiciona al objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social" (Radford, 2006, p.125).

En la ejecución de la Tarea 1, en el punto 2 y 3, los investigadores, observaron que en algunos momentos los estudiantes optan por sumas reiteradas o por la multiplicación para resolver la tarea.

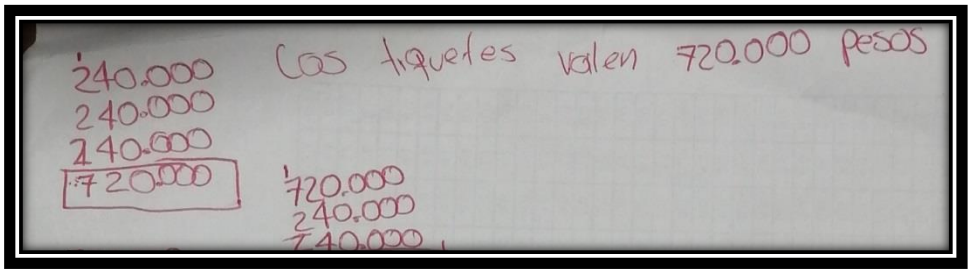


Figura 4. Desarrollo del primer punto de Tarea I por parte del grupo que conforman Laura, Alexandra y Anyifer

Es el caso de Harol, David y Miguel, que escogieron la opción de VIVA AIR con una escala desde una actitud que intuye el aprendizaje y la enseñanza desde una configuración semiótico cultural de la matemática, dándole sentido a lo expuesto por Radford (2006), ya que los estudiantes respaldaron "una concepción no mentalista del pensamiento y una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados"(p.103).



Figura 5. Coordinación multimodal MSO movilizados por el grupo de Harold (costos VS beneficios)

Cabe destacar que de manera pragmática la TO propone estar atentos de los medios semióticos de objetivación, utilizados por los estudiantes al resolver tareas matemáticas, *"en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales"* (Radford, 2006, p. 125). Tomando en cuenta que los estudiantes para determinar ¿Cuánto cuestan los Tiquetes de Sofía, Alejandra y Pablo?, y en el caso de que dos amigos más los acompañarán ¿Qué costo tendrían todos los tiquetes?, utilizaron medios semióticos de objetivación, por cuanto, manejaron objetos, materiales, recursos lingüísticos y signos para la construcción de significados, a fin de alcanzar una forma sólida de conciencia, haciendo axiomático sus propósitos, y llevando a cabo una evolución de tareas para lograr el objetivo (Radford, 2003, 2010).

Tabla 3. Punto 4 parte A. tarea 1

Número de Tiquetes	**3**	**5**	**8**	**10**	**15**	**22**	**30**
Costo de los Tiquetes							

En el cuarto punto de la tarea 1 referido a continuación, se les pide a los estudiantes, primero, encontrar una serie de costos dependiendo el número de pasajes.



Figura 6. Dialogo y comunicación en el método escogido para la solución del punto 4 de la Tarea I

En la parte B. del punto 4 los estudiantes proponen una o varias maneras de generalizar el costo de una cantidad cualquiera de pasajes utilizando sus propias palabras o símbolos.



Figura 7. Movilización de medios semióticos de objetivación

En uno de los grupos, encuentran una regularidad entre los resultados que han obtenido, con el mismo hayan el resultado de otros valores que se les pregunta en la tabla. A continuación, se presenta el siguiente dialogo entre los estudiantes: Julián, David y Ángel:

Julián*: Aquí podemos hacer lo que hicimos en otro ejercicio. Miren si sumamos lo que nos dio en el 5 (valor de 5 tiquetes), dos veces tenemos lo del 10 (valor de 10 tiquetes). Ustedes que dicen.*

Ángel*: No sé, yo creo que debemos hacer lo mismo.*

I: *Para ti ¿qué es lo mismo?*

Ángel*: multiplicar por 10 y ya.*

David*: pero también podemos hacer el 8 (valor de 8 tiquetes), si sumamos el 3 (valor de 3 tiquetes) y el 5 (valor de 5 tiquetes).*

Ángel*: Sigo diciendo que es más fácil multiplicar.*

I*: Háganlo con ambos métodos y revisamos cuál de los dos se nos facilita más*

Al cabo de unos minutos...

Ángel*: Si profe da lo mismo con el 8 (valor de 8 tiquetes).*

En este episodio se observa la movilización de varios medios semióticos, que sirven para ayudar a encontrar el resultado de una situación problema, simultáneamente podría llegar a considerarse como un proceso de iconicidad en tanto los estudiantes están retomando experiencias anteriores para resolver la tarea, además a partir de lo que afirman (utilizar dos resultados anteriores para hallar otro resultado) también se podría inferir un proceso de contracción semiótica. Otro aspecto que generó la confianza de los estudiantes en lo que movilizaban, fue el interrogante propuesto por el investigador, en donde se les pidió comprobar los resultados obtenidos de las dos maneras que proponían, al convencerse que el dato obtenido, efectivamente es el mismo generan la confianza de opinar tener en cuenta al otro.

4. ¿Cuál es la diferencia económica entre LATAM vs Avianca, LATAM vs Vive Air, Avianca vs Vive Air en la compra de los tres tiquetes?
5. Supongamos que se destina $ 1.250.000 para los tres tiquetes ¿Qué aerolínea sería la escogida? Justifiquemos la respuesta.

6. Para ingresar a la Isla se debe cancelar un impuesto que tiene un valor de $112.500 por persona. ¿Cuál sería el costo final de los tiquetes más los impuestos de entrada a San Andrés, de Sofía, Alejandra y Pablo con la Aerolínea escogida al inicio de la Tarea?



Figura 8. Identificación de Nodos semióticos

Entre los signos utilizados visibles en la conducta de los estudiantes durante la resolución de la Tarea 1 captados en la foto se encontraron los gestos, movimientos, símbolos, el lenguaje, el dialogo con los pares cuando en el punto 4 A y B completaron la tabla teniendo en cuenta la aerolínea escogida, en la parte 5 explicaron la forma de encontrar el valor total de un número de tiquetes cualquiera, además, especificaron la diferencia económica entre LATAM vs Avianca, LATAM vs Vive Air, Avianca vs Vive Air en la compra de los tres tiquetes, también en el punto 6 justificaron la respuesta sobre la línea que debía ser escogida, en el 7 expusieron el costo final de los tiquetes, más los impuestos de entrada a San Andrés de los tres amigos, con la Aerolínea escogida al inicio de la Tarea.

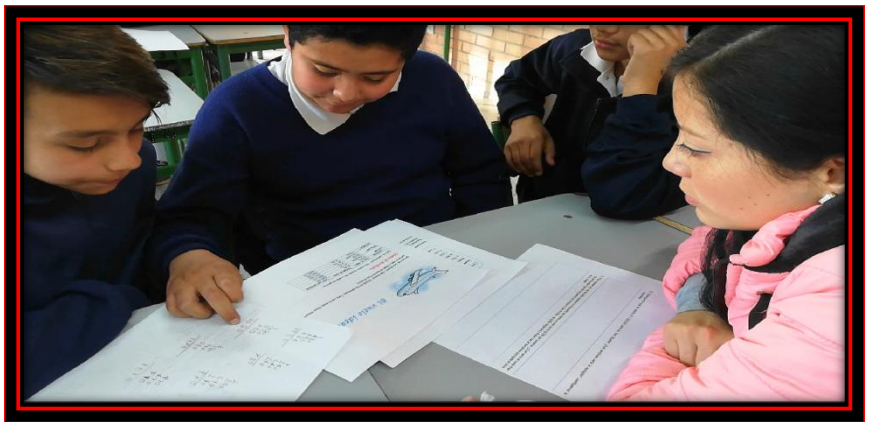


Figura 9. Labor conjunta entre el grupo de estudiantes y la profesora

Otro aspecto a destacar en la resolución de la tarea 1, por los estudiantes de grado séptimo, es que se observó el proceso de iconicidad ya que los estudiantes hicieron una transferencia de los conocimientos previos para la resolución de estos nuevos, es decir que se acumuló la información recibida a través de los sentidos, se da entonces la organización de dicha información y su acumulación en la memoria a mediano y largo plazo, posteriormente el estudiante puede recuperarla cuando así lo quiera, hecho que le concede un valor sucesivo a la iconicidad o correlación de aspectos relativos entre la propia imagen y su referente. La concepción de iconicidad formula pues, la naturaleza y niveles de relación de una imagen, con el icono, de un objeto real (Álvarez, 2010, p. 8).

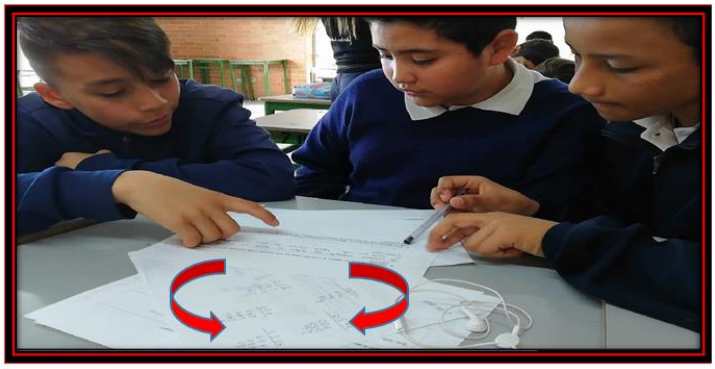


Figura 10. Coordinación multimodal de MSO movilizados por Ángel y David al relacionar costos de los pasajes más los impuestos

Ahora bien, los investigadores desarrollaron el instrumento de recolección de datos (Tarea 1 y tarea 2) basados en la estructura multiplicativa. Cada uno de dichos instrumentos incluye uno de los tres tipos de problemas multiplicativos: a) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; b) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra veces, y c) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

En este aspecto se debe subrayar que para trabajar la multiplicación desde la resolución de problemas, se elige la conceptualización ofrecida por Vergnaud (1995) quien sitúa los problemas multiplicativos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa. El autor estima las relaciones, operaciones y otras concepciones creando la noción de campo conceptual: *"un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados"* (Vergnaud, 1995, p. 127).



Figura 11. Movilización de medios semióticos

Tradicionalmente la operación multiplicativa, se ha enseñado, como una proporción triple a x b = c. Pero para Vergnaud se trata de una correlación cuaternaria, es decir, entre 4

cantidades y dos tipos de medidas. Dos cantidades pertenecen a medidas de cierto prototipo (por ejemplo, número de objetos) y las otras dos, son medidas de otro prototipo (por ejemplo, su precio). Este análisis fue considerado para la resolución de las tareas, para determinar los espacios de medida que se establecen y las relaciones entre las cantidades.

Habría que decir también que en el punto 4 de la tarea 1 se observa la contracción semiótica ya que el punto "A" hace que el estudiante vea una regularidad y en el punto "B" intente llegar a la generalidad. Además también está enmarcada en uno de los 3 problemas que categoriza Vergnaud, el isomorfismo de medidas o una "estructura que radica en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas, medida uno (M1) y medida dos (M2) (Vergnaud, 1995, p. 197). En el punto 6 de la tarea 1 también se ve el isomorfismo de medidas, pero con el problema de división mediada. Prosiguiendo con el tema, en el punto 7 de la tarea 1 es observable la estructura multiplicativa ya que en la transición del problema planteado a los estudiantes, a la resolución del mismo, pudieron diferenciar las situaciones que enfrentaron los tres amigos para decidir con cual agencia de turismo podían contratar para lograr las vacaciones ideales, resolviendo la situación planteada con un razonamiento proporcional, pues pudieron determinar que entre las cantidades concurre una relación multiplicativa, mostrando la destreza de entender cuándo se utiliza la estructura multiplicativa o no para disponer del pensamiento multiplicativo.

Además, los estudiantes demostraron un aumento del uso de métodos multiplicativos para poder obtener nueva información sobre lo que realmente le conviene a Sofía, Alejandra y Pablo en las vacaciones de Grado. Los alumnos se enfrentaron a situaciones donde se debía emplear la estructura multiplicativa, los problemas planteados que debían afrontar los amigos, a la vez se dividieron en contextos donde las cantidades incluidas eran continuas (por ejemplo, la diferencia económica entre LATAM vs Avianca, LATAM vs Vive Air, Avianca

vs Vive Air en la compra de los tres tiquetes) o discretas (por ejemplo, el costo final de los tiquetes más los impuestos de entrada a San Andrés, de Sofía, Alejandra y Pablo con la Aerolínea escogida al inicio de la Tarea).

En la tarea 2 (ver anexo 3) se le presenta a los estudiantes una proposición para que determinen lo que les conviene más a al grupo de amigos (Sofía, Alejandra y Pablo), que quieren realizar un viaje de vacaciones a la isla de San Andrés (Colombia), pero deben planificar los costos, por lo que deciden cotizar propuestas de transporte, hospedaje y planes turísticos en diferentes agencias de viaje. Se les muestran varias alternativas donde los alumnos deben aplicar la estructura multiplicativa para saber cuál de los planes presentados les favorece.

Frente a las propuestas que han indagado, deben escoger la que les favorezca en cuanto a movilidad, hotel y las actividades que realizarán en la Isla. En esta sesión se analizan las opciones recomendadas para elegir el hotel de los tres amigos. A la hora de elegir donde hospedarse, se debe tener en cuenta que es uno de los aspectos importantes en un viaje, ya que este normalmente representa el 50% o más de los gastos de todo el viaje. Y de esto depende que la estadía de las personas sea inolvidable para bien o para mal.

Oferta de Hoteles

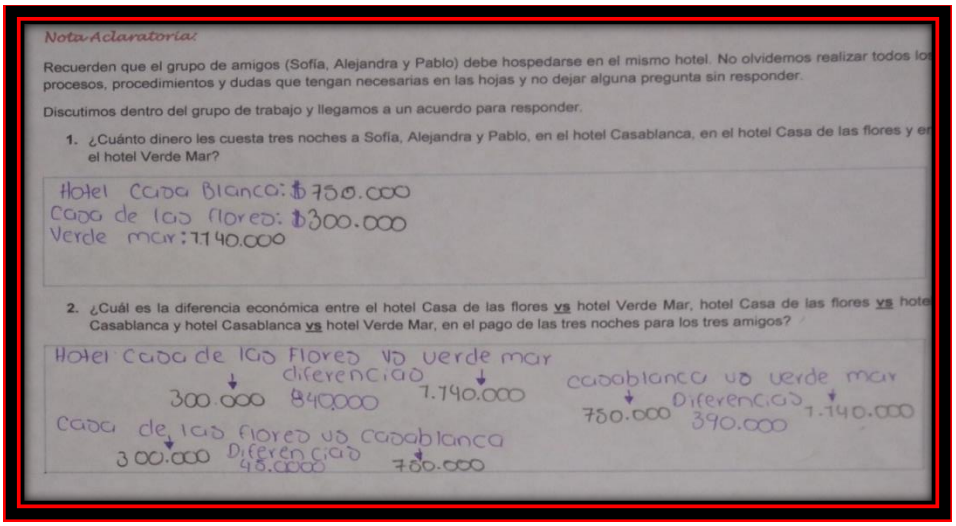
Tabla 4. Oferta de hoteles Tarea II

Hotel	Distancia de la playa	Servicios adicionales	Costo por persona cada noche
Casablanca	3 km	Desayuno y piscina	$ 250.000
Casa de las flores	11 km	No tiene adicionales	$ 100.000
Verde Mar	Junto a la playa	Incluye desayuno, almuerzo, piscina y	$ 380.000

		bebidas gratuitas	

Se cotizó en la Isla de San Andrés tres hoteles con diferentes servicios que representan alternativas de respuesta para los estudiantes como costo, servicios adicionales y distancia a la playa. A partir del establecimiento de la equivalencia entre los dispositivos se pretende que los alumnos adquirieran argumentos para que realicen operaciones de manera individual basados en la estructura multiplicativa y la unidad de análisis, aplicados a la distancia de la playa, servicios adicionales y costos por persona cada noche, donde los jóvenes deben aplicar el razonamiento.

En este sentido, se manifiesta lo expuesto por Pantano (2014) quien advierte que "el pensamiento es considerado una actividad reflexiva y sensible de una realidad (formas de acción, reflexión y expresión) constituida histórica y culturalmente" (p. 14). Además agrega que es transformada de acuerdo a las paráfrasis y sentidos personales de los estudiantes, y que por consiguiente al resolver este tipo de actividades los alumnos se expresan a través de la corporeidad "de las acciones, de signos (escritos, verbales o gestuales), y artefactos, por esta razón el pensamiento es observable y puede materializarse en la actividad desarrollada por las personas" (Pantano 2014, p.14). Al igual que la Tarea 1 se presentan orientaciones a los estudiantes para guiarlos en la resolución de la tarea, identificando la información como una Nota aclaratoria.


Nota Aclaratoria:

Recuerden que el grupo de amigos (Sofía, Alejandra y Pablo) debe hospedarse en el mismo hotel. No olvidemos realizar todos los procesos, procedimientos y dudas que tengan necesarias en las hojas y no dejar alguna pregunta sin responder.

Discutimos dentro del grupo de trabajo y llegamos a un acuerdo para responder.

1. ¿Cuánto dinero les cuesta tres noches a Sofía, Alejandra y Pablo, en el hotel Casablanca, en el hotel Casa de las flores y en el hotel Verde Mar?

Hotel Casa Blanca: $750.000
Casa de las flores: $300.000
Verde mar: 7140.000

2. ¿Cuál es la diferencia económica entre el hotel Casa de las flores vs hotel Verde Mar, hotel Casa de las flores vs hotel Casablanca y hotel Casablanca vs hotel Verde Mar, en el pago de las tres noches para los tres amigos?

Hotel Casa de las Flores vs verde mar
300.000 diferencia 840.000 7.740.000
casablanca vs verde mar
750.000 Diferencia 390.000 7.140.000
Casa de las flores vs casablanca
300.000 Diferencia 45.000 750.000

Figura 12. Respuestas de uno de los grupos de estudiantes de 702 en la tarea II

En este ejercicio, los estudiantes deben plasmar en el recuadro de la pregunta todos los procesos, procedimientos y dudas sin dejar ninguna pregunta sin resolver. Luego se les da una serie de preguntas que deberán ir resolviendo progresivamente basados en los datos proporcionados por los investigadores para determinar cuánto les cuesta a los amigos pasar la noche en cada uno de los hoteles iniciando por el hotel Casa Blanca, seguido por el Hotel Casa de las flores y finalmente el Hotel Verde Mar.

En esta parte se pone de manifiesto la teoría de la objetivación, pues se observa cómo los alumnos del grado séptimo, dan lugar al pensamiento, influido y conformado por el uso de artefactos, herramientas o gestos, estos tienen lugar cuando el alumno está en relación con los pares, a través de interacciones específicas como las explicaciones y la negociación, proveniente de la actividad cultural. Teniendo en cuenta, lo dicho por Radford (2016) “La objetivación se define como un proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (p. 116).

La Tarea II permitió identificar las categorías de análisis, medios semióticos de objetivación (MSO) y Procesos de objetivación (PO) ya que los estudiantes manifiestan la presencia de medios semióticos de objetivación, pues hacen señales para contar, escritos para hacer repartos y signos lingüísticos que reconocen un acercamiento a lo semiótico de lo multiplicativo. La indicación para revelar conteos, aludiendo a la práctica cultural de efectuar conteos con los dedos representando conteos simples o múltiples, aprehendiendo la lógica de la multiplicación como conteos de grupos iguales.

Lo dicho en el párrafo anterior relaciona las categorías de análisis con la Tarea resuelta porque describen el proceso de objetivación en la conceptualización multiplicativa cuando los alumnos resuelven las preguntas planteadas sobre la mejor cotización del viaje vacacional, discutiendo, expresando y señalando a partir de la labor conjunta desde el marco de la situación presentada por la tarea, evidenciando intereses, prioridades y emociones en la ruta hacia la elaboración de las respuestas.

Lo indicado cobra mayor fuerza soportado en los postulados de Pantano (2016) ya que asegura que "*este proceso requiere de acciones intencionadas y dirigidas a hacer visible algo (objetos culturales matemáticos y la lógica cultural de éstos), estas acciones se ven reflejadas en los gestos, en el movimiento kinestésico, en el uso de los signos y los artefactos, convirtiéndose en acción reproducible que transforman al individuo y a su conciencia*", (p. 6). De manera que los estudiantes, además de aplicar la estructura multiplicativa, apelan también a la razón, reflexión y a los medios semióticos de objetivación, cuando utilizan los signos lingüísticos para solucionar la tarea de la diferencia económica entre hoteles, permitiendo demostrar la apropiación de la lógica de correspondencia entre elementos de un hotel y otro en este tipo de problemas.

Otra de las preguntas de la Tarea II (Nº 3) es la suposición de que Sofía, Alejandra y Pablo, se hospedan en el hotel Casa de las flores. Este no tiene la posibilidad de ofrecer servicios adicionales como desayuno y almuerzo. Por lo tanto, los tres amigos deben buscar un restaurante para su alimentación. Cerca de este hotel, está el restaurante Sal y pimienta que brinda los siguientes productos en diversos tipos de menús:



Figura 13. Menús de los diferentes platos, ejercicio propuesto Tarea II

Los datos numéricos que los estudiantes necesitan para aplicar la estructura multiplicativa, aparecen al inicio del ejercicio, y en cada acción, se proporcionan nuevas alternativas por Hotel. En la actividad se da la contracción semiótica, pues en los procesos explicativos de los alumnos se aprecia al utilizar la clasificación de los signos matemáticos, cómo los gestos y el lenguaje escrito, dan cuenta de reconocimiento de la tarea 1 para la resolución de la tarea 2, además, se evidencia una disminución de los medios semióticos movidos por los estudiantes que permiten que trascienda el pensamiento a niveles más complejos (Radford, 2008).

Tipos de Menús

Menú tipo 1: una carne, un acompañamiento y un tipo de ensalada…… **$15.000**

Menú tipo 2: dos carnes, dos acompañamientos y un tipo de ensalada…… **$25.000**

Menú tipo 3: tres carnes, todos los acompañamientos y ensaladas que desee... **$40.000**

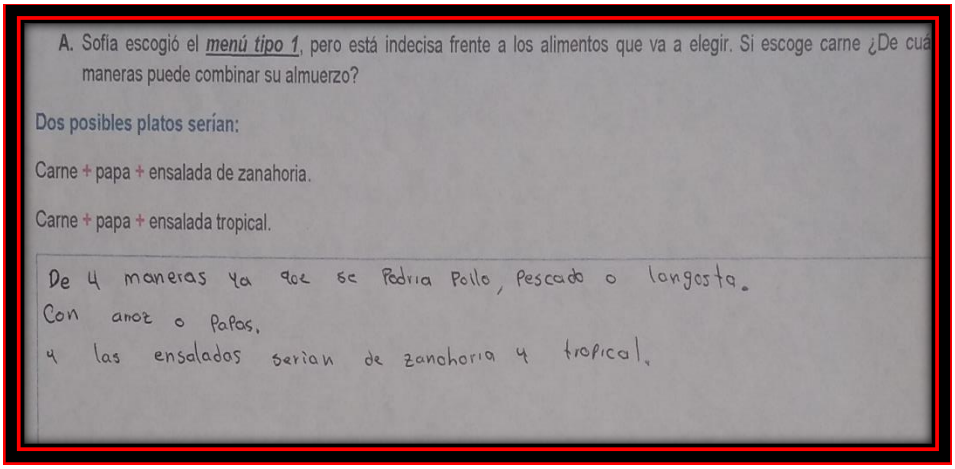
Figura 14. Tipos de menús, tarea II

A. Sofía escogió el ***menú tipo 1*** pero está indecisa frente a los alimentos que va a elegir. Si escoge carne ¿De cuántas maneras puede combinar su almuerzo?

Dos posibles platos serían:

Carne + papa + ensalada de zanahoria.

Carne + papa + ensalada tropical.


A. Sofia escogió el menú tipo 1, pero está indecisa frente a los alimentos que va a elegir. Si escoge carne ¿De cua maneras puede combinar su almuerzo?

Dos posibles platos serían:

Carne + papa + ensalada de zanahoria.

Carne + papa + ensalada tropical.

De 4 maneras ya que se Podria Pollo, Pescado o langosta.
Con arroz o Papas,
y las ensaladas serian de zanahoria y tropical.

Figura 15. Respuestas de un grupo de estudiantes

Adicional a lo referido también se les muestra una lista de restaurantes con diferentes menús y sus respectivos costos. En esta parte los estudiantes establecen la función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario Vergel (2018, P. 155).

Lo expresado puede establecerse cuando los estudiantes se enfrentan a los diferentes menús con diferentes costos y alimentos.

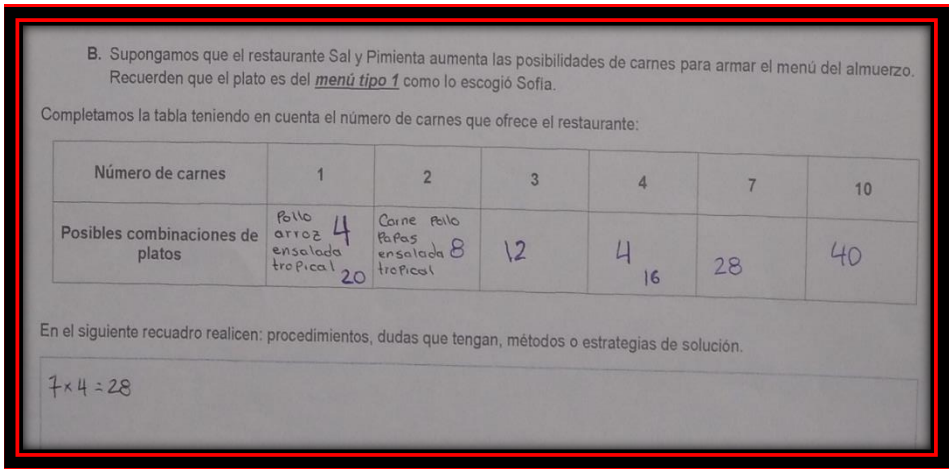
Por un lado los educandos pueden aplicar la estructura multiplicativa para realizar modificaciones de procedimiento cuando determinan de cuantas maneras puede combinar Sofía el almuerzo y el costo por cada combinación que haga. Estas innovaciones son precisas para constituir la equivalencia sintáctica de los términos, con posibilidad de articular diversos sentidos concedidos a las expresiones dadas.

Igualmente concurre una predisposición a anclarse en contextos determinados, planteados en el contenido de la tarea propuesta por los investigadores donde se evidencia una expresión fundamentalmente icónica de las expresiones de los estudiantes ya que relacionaron las imágenes del menú con el consumo diario de alimentos y la posibilidad de adquirirlos con el menor presupuesto, para no afectar los recursos económicos de Sofía.

La alternativa “B” se presentó de la siguiente manera:

B. Supongamos que el restaurante Sal y Pimienta aumenta las posibilidades de carnes para armar el menú del almuerzo. Recuerden que el plato es del ***menú tipo 1*** como lo escogió Sofía.

Completamos la tabla teniendo en cuenta el número de carnes que ofrece el restaurante:



B. Supongamos que el restaurante Sal y Pimienta aumenta las posibilidades de carnes para armar el menú del almuerzo. Recuerden que el plato es del ***menú tipo 1*** como lo escogió Sofía.

Completamos la tabla teniendo en cuenta el número de carnes que ofrece el restaurante:

Número de carnes	1	2	3	4	7	10
Posibles combinaciones de platos	Pollo arroz ensalada tropical 4 20	Carne Pollo Papas ensalada tropical 8	12	4 16	28	40

En el siguiente recuadro realicen: procedimientos, dudas que tengan, métodos o estrategias de solución.

7×4=28

Figura 16. Punto 3B. Tarea 2

En la figura 16 podemos apreciar los procesos de objetivación enunciados en las categorías de análisis de la presente investigación referente a la iconicidad, en la medida en que luego de los ejercicios relacionados anteriormente se reducen los pasos a seguir o hay una disminución de los medios semióticos para resolver el problema, y paralelamente evidenciando contracción semiótica al identificar la generalidad apoyándose en la multiplicación para el diligenciamiento de la tabla , es así que al inicio de la misma tuvieron la necesidad de utilizar el medio semiótico de la escritura con números y letras, pero al final solo emplearon números.

El numeral 3 C de la tarea 2 pretende que los estudiantes lleguen a la respuesta realizando la operación inversa de lo presentado en el punto 3 B, es decir que en dicho ítem llegaron a la conclusión de que debían multiplicar, y en este se requiere que a través de discusiones grupales e interacción con la tarea, identifiquen que la operación requerida es una división.

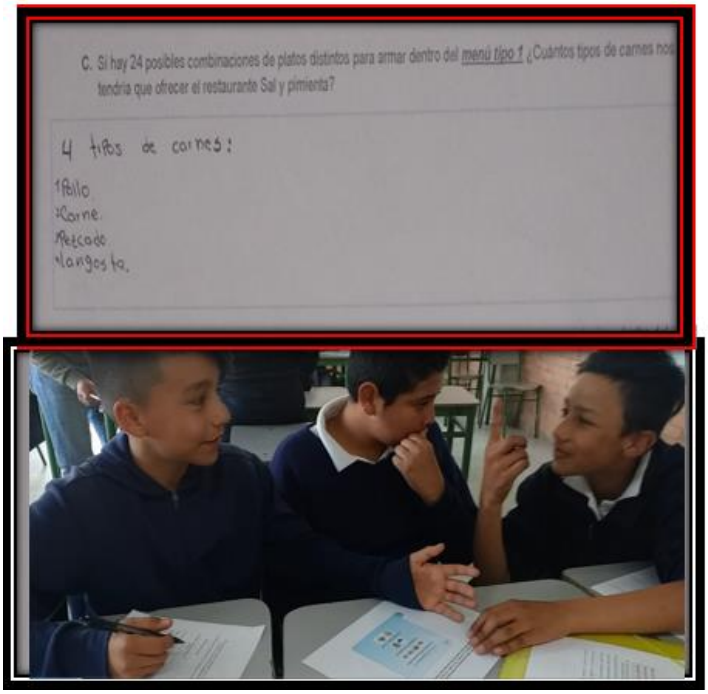


Figura 17. Respuestas de un grupo de estudiantes

*P*odemos apreciar que el grupo de estudiantes no llegó a la respuesta correcta solicitada por el instrumento, sin embargo a través de la discusiones grupales y medios semióticos de objetivación como la gestualidad y lo escrito se visibiliza evolución de nodos semióticos, al unir gestos como señalar, tomar apuntes, acentuar la voz, y llegar a acuerdos independientemente del resultado, que sería aclarado con apoyo de los maestros investigadores.

En los numerales del 5 al 8 de la tarea 2 se pretende abordar uno de los problemas descritos por Vergnaud citado por Ivars, P., & Fernández, C. (2016) que hace referencia a un solo espacio de medidas en el cual se tratan problemas que abarcan las escalas como la relación de proporción entre las dimensiones reales de un objeto y las que un dibujo lo representa.

Los estudiantes evidenciaron comprensión del objeto matemático a través del dialogo con sus pares y los docentes investigadores, utilizando medios semióticos de objetivación

como los kinestésicos, al usar sus manos para medir, contar (además de lo que se había observado en ejercicios anteriores que era el señalar) y durante los procesos de análisis.

En estos puntos de la tarea también se visibilizó mayor interacción con los artefactos a través de la manipulación de pliegos de papel kraft, reglas, tijeras, marcadores y la guía escrita, lo cual generó la potenciación del saber, permitiendo mayor comprehensión del objeto matemático evidenciándolo a través de la socialización y los desempeños al resolver las preguntas.

Por último, los estudiantes luego de resolver paso a paso los problemas planteados llegaron a una conclusión, la mayoría determinó que la mejor opción para los amigos es hospedarse en el Hotel Casa Blanca por brindar mejores beneficios a menor costo. Al lado de ello queda revelado que las dificultades que se reportan en el aprendizaje de las matemáticas bien pueden ser concernientes con la organización curricular en lo referente a la comunicación de las ideas a otros.

Este punto se puede destacar que en la resolución de la tarea cuando se les solicita a los alumnos que piensen y razonen una respuesta sobre el viaje de los amigos y que a la vez discutan los resultados de su pensamiento a sus pares, de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y categóricos. Cuando los educandos, escuchan los esclarecimientos de otros estudiantes, tienen oportunidad de ampliar sus propias interpretaciones, los diálogos a través de los cuales, las ideas matemáticas se estudian desde diferentes perspectivas ayudan a los participantes a ajustar el pensamiento y hacer vínculos (Pantano 2014).

Por otra parte, como afirma Vergel (2018) cuando los estudiantes participan en intercambio de ideas en las que deben razonar sus soluciones -principalmente cuando hay divergencias- mejoran la comprensión matemática, al tratar de persuadir a los compañeros de

puntos de vista diferentes. Ese dinamismo también favorece a los alumnos a desarrollar un leguaje para formular ideas matemáticas y los vuelve reflexivos, en cuanto a la necesidad de usar un lenguaje preciso. Los estudiantes que gozan de oportunidades, inducción y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas tienen un doble beneficio: corrigen el aprendizaje matemático a la vez que aprenden a comunicarse de manera matemática.

Conclusiones

Los resultados se analizaron a partir de la experiencia de los investigadores y autores del presente estudio, los cuales fueron obtenidos durante el ejercicio docente con estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Distrital Diego Montaña Cuéllar. Luego del análisis de resultados de esta investigación, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

La capacidad que tiene este grupo de estudiantes para realizar ejercicios matemáticos mejora desde la libertad que poseen de utilizar los medios semióticos de objetivación (gestos, conteo, lenguaje oral y escrito, señalamientos) lo cual les permite potencializar el saber.

Dichos MSO observados se relacionan con el primer objetivo planteado, que pretende describir los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado séptimo cuando se enfrentan a tareas de estructura multiplicativa. A continuación se irán identificando y detallando aquellos que emergieron un mayor número de veces en comparación con otros:

La gestualidad a lo largo de todo el proceso fue dando cuenta de que los estudiantes se sentían motivados; por ejemplo la mirada constante hacia la información que debían analizar, la sonrisa en ocasiones evidenciaba una identificación con la historia presentada (viaje), satisfacción al llegar a acuerdos grupales y al acertar con las respuestas.

Los tonos de la voz fueron un medio semiótico que movilizó en varias ocasiones a los estudiantes en la medida en que los ejercicios sugerían la necesidad de llegar a acuerdos y se requería de la persuasión y la expresión de sus puntos de vista pues en ocasiones subían el tono de voz para expresar sus opiniones intereses o desacuerdos.

Los señalamientos fueron protagonistas durante la actividad debido a que la interacción constante con artefactos como la guía, los lápices o los esferos se veía mediada

durante el análisis de las diversas situaciones para encontrar las respuestas. Se observaban métodos de conteo, agrupación y estrategias para no confundirse durante la ejecución de procesos solicitados, por ejemplo, las combinaciones de menús en el caso de la tarea II.

La toma de apuntes se convirtió en el medio semiótico principal, ya que todo el tiempo necesitaban apoyarse en el proceso de escritura para organizar la información durante la ejecución de las tareas, esto permitía a los estudiantes recordar y en ocasiones ejercitar su pensamiento concreto antes de hacer abstracciones, por ejemplo cuando debían combinar platos, inicialmente hacían una lista de los mismos para posteriormente descubrir que podían llegar a la respuesta a través de una multiplicación.

Durante todo el desarrollo de las tareas se vio la combinación de los medios semióticos anteriormente descritos, es decir que los estudiantes utilizaron nodos semióticos como mecanismos de expresión de sus procesos mentales, emocionales y motivacionales, es así que se observó como en constantes ocasiones señalaban algo escrito en la hoja y lo acompañaban de un tono de voz contundente o ponían su dedo en la boca guardando silencio para luego hacer una pregunta.

En cuanto al segundo objetivo específico que busca identificar y describir la evolución de los nodos semióticos de objetivación, se observó que evolucionaron durante las sesiones de clase en la medida en que los estudiantes lograron refinar los recursos semióticos que iban movilizando mientras abordaban las diversas tareas propuestas.

Cuando los estudiantes se enfrentan a la tarea II se evidencia una reducción de las formas de expresión frente a las labores realizadas en torno al objeto matemático de las estructuras multiplicativas, pues hacían más efectivas la ejecución de las tareas descartando

acciones innecesarias, por ejemplo los apuntes menos extensos y los tonos de voz más contundentes a la hora de transmitir una respuesta evidenciando menor inseguridad.

Asimismo, hubo mejor comprensión del objeto matemático dado que en el comienzo de las tareas se observaba una mayor necesidad de pasos para la resolución de problemas, debido a la utilización del pensamiento concreto y a medida que se avanzaba en las intervenciones, los estudiantes evidenciaban a través de su gestualidad seguridad y consistencia a la hora de dar las respuestas, lo que da cuenta del avance hacia la abstracción.

Al no coartar o direccionar de manera impositiva los medios semióticos en los estudiantes, se permitió a los mismos potencializar el saber a través de la interacción con los artefactos, con los pares y docentes motivados por la expresión de sus intereses y falencias.

En algunos apartes de la labor conjunta ciertos estudiantes utilizaron gestos y comportamientos similares a los de sus compañeros y de los docentes investigadores, con el fin de alcanzar una apropiación del objeto matemático. Se dio el caso en uno de los grupos en el desarrollo de la tarea II (combinaciones de diversos platos) en el cual surgió la necesidad de emplear las manos para el conteo y el papel (al tiempo) con el fin de no olvidar la cantidad de conjugaciones que podían crear. Otro de los grupos al observar que el método de sus compañeros funcionaba lo adoptaron como propio.

Finalmente, según el problema que originó la pregunta de investigación, *¿Cuáles son las características de los procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa?,* es posible afirmar que estas características están asociadas al encuentro de los estudiantes con formas histórico y culturales de pensamiento sobre la estructura multiplicativa.

Dicho encuentro se realiza a través de la movilización de medios semióticos de objetivación que se visibilizan en la medida en que se establecen relaciones comunicativas en la labor conjunta entre pares, mediado por el apoyo que brinda el docente investigador a través de la planeación de las tareas que permitieron que emergieran medios semióticos como la gestualidad, tonos de la voz, señalamientos, conteo, procesamiento de información por escrito y estrategias de persuasión entre pares.

Durante experiencias de enseñanza y aprendizaje diseñadas desde la TO se propician espacios que fortalecen la transferencia de conocimientos previos para la adquisición de nuevos aprendizajes, lo que permite a los estudiantes organizar y seleccionar la información, formular y reformular gestos, signos, palabras, tonos, entre otros apoyado en ocasiones de los medios utilizados por sus pares y docentes lo que se denomina iconicidad y su subproceso de organización icónica.

La implementación de la teoría de la objetivación en el aula de clase regular es factible en la medida en que permite al docente reflexionar sobre su praxis y su rol en el proceso educativo, además permite a los estudiantes acceder a nuevos aprendizajes de una manera más consiente y potenciando el pensamiento crítico.

Se genera reflexión también frente a los modelos de evaluación en las instituciones educativas que en la actualidad priorizan lo escrito como mecanismo que da cuenta de procesos de aprendizaje, desde la teoría de la objetivación se demuestra que a través de otros recursos semióticos se pueden evidenciar procesos de fortalecimiento del saber.

Así mismo, se puede decir que los estudiantes se sienten más confiados en un ambiente de aprendizaje cuyo diseño se fundamenta en la teoría de la objetivación con respecto a un ambiente de aprendizaje de acuerdo con las teorías tradicionales, porque en la

primera tienen la libertad de utilizar recursos propios del mismo estudiante tal como gestos, señalamientos, la iconicidad, las representaciones en la realización de las tareas propuestas por los investigadores, entre otras; mientras que en la segunda se limitan a memorizar y aprender sin razonar el procedimiento. Lo dicho, da fe de la pertinencia del estudio de la teoría de objetivación.

Recomendaciones

A través del desarrollo de las tareas propuestas y las estructuras de clase planteadas desde la teoría de la objetivación, se considera que la socialización es una parte fundamental en los diferentes espacios académicos y particularmente en las matemáticas, ya que a través de la enunciación, ya sea oral o escrita, las ideas van a ser centros de reflexión, discusión, investigación y progreso, tomando en cuenta que la comunicación ayuda a construir significado y estabilidad para las ideas permitiendo hacerlas públicas (Vergel, 2018).

Es necesario resaltar que el enfoque sociocultural (Vygotsky, 1982) es de relevante importancia en el estudio ya que refiere al individuo como un ser social y a sus conocimientos como producción social que establece el desarrollo del pensamiento de los niños; destaca la representación sociocultural del conocimiento y plantea la existencia de las situaciones psicológicas naturales y culturales. Las primeras se revelan en las funciones cognitivas del niño durante el lapso de su desarrollo y en la madurez. En la segunda, considera que la civilización humana intercede convirtiendo las funciones naturales en culturales, evolución que se origina bajo el predominio de herramientas materiales y simbólicas mediante una serie de representaciones de comunicación interpersonal.

Desde la teoría de objetivación se pueden formular intervenciones desde temprana edad para prevenir dificultades en el área de matemáticas, debido a que abordando diversos

objetos matemáticos desde el dialogo e interacción además de motivación y apoyo de los pares y docentes se consolidan procesos de aprendizaje y se potencia el saber. Esta recomendación se basa en el hecho de que durante la ejecución del presente proyecto se detectaron dificultades en bases conceptuales de algunos estudiantes que no tenían consolidados conceptos esperados para su edad y ciclo escolar.

Se podría fortalecer el diseño y utilización de artefactos para la superación de dificultades que prevalecieron durante el desarrollo de las sesiones, por ejemplo la identificación de operaciones inversas en el marco de situaciones problémicas como multiplicación versus división. Por ello, la importancia de propiciar más investigaciones que procuren el estudio de las estructuras multiplicativas enfocándose hacia la división en la resolución de problemas.

Referencias Bibliográficas

Blasco, J y Pérez, J. (2007). Metodologías de investigación en las ciencias de la actividad física y el deporte: ampliando horizontes. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/12270/1/blasco.pdf

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990.* (Vol. 19). Springer Science & Business.

Cadavid. S. (2011). El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos. En G. García (Ed). Memorias del 12 Encuentro colombiano de matemática educativa. 779-787. Armenia: Gaia.

Carpio, J. (2013). El primer problema con las matemáticas es que no se entiende lo que se lee. Recuperado de https://www.rtve.es/noticias/20131209/primer-problema-matematicas-no-se-entiende-se-lee/8125610.shtml.

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, *28*(1), 9-38.

Creswell, J. (1998). Five qualitative traditions of inquiry. *Qualitative traditions and research design.* Choosing among five traditions, 47 - 72.

Cuicas, M. (1999). Procesos Metacognitivos desarrollados por los alumnos cuando resuelven problemas matemáticos. *Enseñanza de la Matemática, 8*(2), 21-29.

D'Amore, B., & Radford L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (192 p.).

De Castro, C. S. (2016). Algunos apuntes sobre un enfoque socio-cultural en la enseñanza de las matemáticas. *Tarbiya: revista de Investigación e Innovación Educativa*, (44), 87 – 104.

Edwards, L., Radford, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational studies in mathematics, 70*(2), 91 – 95.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Espinosa, M. (2011). *Sentido y significado de la multiplicación y división de fracciones en problemas contextualizados.* Tesis de maestría. Universidad Nacional. Medellín. Colombia.

Fraser, I. (1998). *Hegel, Marx and the concept of need*. Edinburgh University Press.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zdm, 39*(1-2), 127-135.

Gómez, J. (2013). El pensamiento algebraico, algo más que letras. Una mirada desde la perspectiva semiótica cultural. *Revista científica. Educación científica y tecnológica*, pp, 229 – 233.

González, L. (2016). *Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento probabilístico por parte de estudiantes de décimo grado.* Tesis de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia.

Gustin, J. & Ladino, T. (2017). Algunos medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al abordar tareas de generalización de patrones: el caso de una secuencia figural con apoyo tabular. *II Congreso de educación matematica de América central y del Caribe*, pp, 1 – 13.

Hodge, B. & Kress, G. (1988). *Social Semiotics.* Cambridge: Polity.

Hurtado, J. (2006). *Proyecto de investigación: metodología de la investigación holística.* Bogotá: Quirón ediciones.

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, *28*(1), 9-38.

Kress, G, & van Leeuwen T. (2001). *Multimodal discourse: The Modes and Media of Contemporary Communication.* London: Routledge.

Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: The developing 'strong'social turn. In *New mathematics education research and practice* (pp. 171-188). Brill Sense.

López Aymes, G. (2012). Pensamiento crítico en el aula. *UCLM, Docencia e Investigación*, (22), pp. 41-60.

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas*. Visor, Madrid.

Medina, L. (2017). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la estructura multiplicativa.* Tesis de maestría. Tecnológico de Monterrey. Bogotá, Colombia.

Miranda, I. Radford, L. & Guzmán, L. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación matemática. 19* (3), 5-30.

Mojica, A. J. (2014). *Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo.* Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Moreira, M. (2002). Vergnauds conceptual fields theory, science education, and research in this area. *Investigações em Ensino de Ciências*, *7*(1), 7-29.

Moreno, P. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico.* Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Morse, J. (2005). *Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa*. España: Universidad de Alicante.

Obando, G. & Múnera, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y pedagogía, 15*(35), 185 – 199.

Olarte, N. & Peña, L. (2016). *Resolución de problemas de estructura multiplicativa desde las teorías de campos conceptuales y cantidades intensivas en ambientes de aprendizaje web.* Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Pólya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: http://revistas.unam.mx/index.php/entreciencias/article/view/62103/54660

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. *A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. For the Learning of Mathematics, 22(2),* 14-23.

Radford, L. (2003). Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5(1),* 37-70.

Radford, L. (2006). Communication, apprentissage et formation du je communautaire. *In B. D'Amore & S. Sbaragli (eds), 20th Italian National Conference Incontri con la Matematica,* Bologna, November 3-5, 2006, pp. 65-72.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9*(Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático*, pp. 7-21.

Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA, 3*(1), 1-18.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2008b). Pensamiento esquemático: notas sobre la semiótica y la epistemología de Peirce. *PNA, 3* (1), 1-18.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 111 – 126.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2-7.

Radford, L. (2010a). *Formas elementales de pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes*. En MF Pinto. & TF Kawasaki (Eds.). Actas de la 34ª Conferencia del

Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática, vol. 4, págs. 73-80. Belo Horizonte, Brasil: PME.

Radford, L. (2013). *En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia, Investigación en didáctica de la matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro (págs. 3-12). Granada, España: Editorial Comares*

Radford, L. (2013a). Tres conceptos clave de la teoría de la objetivación: conocimiento, conocimiento y aprendizaje. *Revista de Investigación en Educación Matemática, 2* (1), 7-44.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2).

Radford, L. & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (pp. 157-182). New York: Springer.

Radford, L. (2015a). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, v. 8*(18), 547-567

Radford, L. (2015b). Introducción: los componentes fenomenológicos, epistemológicos y semióticos de la generalización. *PNA, 9* (3), 129-141.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA, 12*(2), 61-80.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2010). Re/thinking the Zone of Proximal Development (Symmetrically). *Mind, Culture, and Activity,* 17(4), 299-307

Sabino, C. (2002). *El Proceso de Investigación: Una introducción teórico-práctica.* Caracas: Panapo.

Shapiro, B. (2011). Bajo rendimiento escolar: una perspectiva desde el desarrollo del sistema nervioso. *Revista Médica Clínica Las Condes. 22*(2), 218-225.

Thompson, A. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research*. D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching an learning: a project of the national council of teachers of mathematics* (127 – 146). Macmillan publishing Co, inc.

Trejos, S & Paz, E. (2017). *Secuencia didáctica para el aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la formulación y resolución de problemas.* Tesis de Maestría. ICESI. Cali. Colombia.

Quiceno, M. (2016). *Diseño de una propuesta metodológica para fortalecer los procesos de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos entorno a las operaciones propias de la estructura multiplicativa.* Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años).* Tesis Doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2015). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en educación primaria*. Bogotá, Colombia. UD editorial.

Vergel, R. & Rojas, P. J. (2018) *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). Multiplicative structures. *Research agenda for mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades*, 141-161.

Vergnaud, G. (1995). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza en la escuela primaria*. México DF: Trillas.

Vygotsky, L. (1982). *Obras escogidas* (Vol. 2). Madrid: Visor Distribuciones.

Anexos

Anexo 1

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE DERECHOS DE IMAGEN SOBRE Y DE PROPIEDAD INTELECTUAL ACREDITACIÓN DE RECEPCIÓN DE CONSENTIMIENTOS INFORMADOS DE LOS PADRES DE FAMILIA O ACUDIENTES, PARA TOMA DE REGISTROS FOTOGRÁFICOS Y FIJACIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO PÚBLICO.

Yo, _____, mayor de edad con domicilio y residencia en _____, identificado con la cédula de ciudadanía número _____ de _____, actuando en nombre y representación de _____, identificado (a) con el documento de identidad número _____ de _____ en mi calidad de persona natural y acudiente, padre o madre el estudiante, cuya imagen será registrada en fotografías y videos que se utilizarán y publicarán en el trabajo de grado **Procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo: una experiencia en torno a la actividad matemática asociada a la estructura multiplicativa** - *de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, firmo el presente documento de autorización de uso de derechos de imagen sobre fotografía y videos, el cual se regirá por las normas legales aplicables, y en particular por las siguientes clausulas:* ***PRIMERA – AUTORIZACIÓN:*** *Mediante el presente documento autorizo la utilización de los derechos de imagen sobre fotografías y videos, (Reproducción, comunicación pública, transformación y distribución) para fines pedagógicos.* ***SEGUNDA – OBJETO:*** *Por medio del presente documento, autorizo a Hernán Vargas y Angie Moreno para que, de conformidad con las normas internacionales que sobre propiedad intelectual sean aplicables; así como bajo las normas vigentes en Colombia, usen los derechos de imagen sobre fotografías y fijaciones audiovisuales, así como los derechos de propiedad intelectual y sobre derechos conexos que le puedan pertenecer, para ser utilizados.* ***PARÁGRAFO – ALCANCE DEL OBJETO:*** *la presente autorización de uso se otorga a Hernán Vargas y Angie Moreno, para ser utilizada en ediciones impresas y electrónicas, digitales, ópticas y en la Red internet.* ***PARÁGRAFO:*** *Tal uso se realizará por parte de Hernán Vargas y Angie Moreno, para efecto de su publicación de manera directa, o a través de un tercero que se designe para tal fin.*

TERCERA – TERRITORIO: Los derechos aquí a*utorizados se dan sin limitación geográfica o territorial alguna.* ***CUARTA – ALCANCE:*** *La presente autorización se da para formato o soporte material, y se extiende a la utilización en medio óptica, magnética, electrónica, en red, mensajes de datos o similar conocido o por conocer en el futuro.* ***QUINTA – EXCLUSIVIDAD:*** *La autorización de uso aquí establecida no implica exclusividad en favor de Hernán Vargas y Angie Moreno. Por lo tanto, nos*

reservamos y conservaremos el derecho de otorgar directamente u otorgar a cualquier tercero, autorizaciones de uso similares o en los mismos términos aquí acordados.

Dada en Bogotá, a los _____ (__) días del mes de _____ del año 2019.

Firma del acudiente: _____

Nombre del acudiente: _____

C.C. N°: _____

Nombre del estudiante: _____

Anexo 2



Tarea I



Sofía, Alejandra y Pablo son un grupo de amigos de la universidad. Viven en Bogotá y quieren realizar un viaje de vacaciones a la Isla de San Andrés (Colombia)[2], para celebrar su graduación. Por esta razón han decidido planificar los costos necesarios para su viaje. Ellos han cotizado algunas propuestas de transporte, hospedaje y planes turísticos en varias agencias de viajes.

Frente a las propuestas que han indagado, deben escoger la que les favorezca en cuanto a movilidad, hotel y las actividades que realizarán en la Isla. El ideal de ellos es poder ejecutar el mayor número de actividades allí.



El vuelo ideal…

Se cotizó el vuelo Bogotá – San Andrés – Bogotá con tres aerolíneas. Cada una de estas ofrece diferentes beneficios como: costo, tiempo de viaje y calidad del servicio (Tipo de avión).

Ofertas de Aerolíneas

[2] San Andrés es uno de los 32 departamentos que conforman la República de Colombia, ubicado en el mar Caribe, su capital es San Andrés. Está conformado por dos municipios: San Andrés y Providencia y Santa Catalina. Tiene una población de 70.554 habitantes. El idioma oficial es el español y el inglés criollo. Es conocida por los arrecifes de coral y la música reggae. La encendida playa Spratt Bight tiene un paseo costero bordeado de palmeras. En el litoral está el Parque Johnny Cay, una pequeña isla con mangles de cocos y playas de arena blanca. El Parque Regional de Mangle Old Point es un santuario de vida silvestre con cangrejos, iguanas y aves.

Tipos de vuelo Bogotá – San Andrés - Bogotá, ida y vuelta por persona:

Aerolínea	Tipo de vuelo	Tiempo de vuelo	Costo por persona
LATAM*	Directo	2h 6m	$350.000
	Una escala	4h 13m	$290.000
VIVA AIR**	Directo	2h 6m	$300.000
	Una escala	4h 13m	$240.000
AVIANCA***	Directo	2h 6m	$450.000

Convenciones:

Escala: Vuelo que obliga a los pasajeros a cambiar de un avión a otro antes de llegar a su destino final.

Snacks: Aperitivos y comestibles gratis.

h: Horas

m: Minutos

*:** Vuelos permanentes durante todo el día.

: Vuelos únicamente en la noche.

Nota Aclaratoria:

Recuerden que el grupo de amigos (Sofía, Alejandra y Pablo) debe viajar en la misma aerolínea. No olvidemos realizar todos los procesos, procedimientos y dudas que tengan necesarias en las hojas y no dejar alguna pregunta sin responder.

Discutimos dentro del grupo de trabajo y llegamos a un acuerdo para responder.

1. ¿Por cuál aerolínea van a viajar? y ¿Cuáles fueron los motivos para esta elección?

2. Según la aerolínea escogida ¿Cuánto cuestan los Tiquetes de Sofía, Alejandra y Pablo?

3. Si dos amigos más los acompañarán ¿Qué costo tendrían todos los tiquetes?

4. **A.** Completamos la tabla teniendo en cuenta la aerolínea escogida.

Número de Tiquetes	**3**	**5**	**8**	**10**	**15**	**22**	**30**
Costo de los Tiquetes							

En el siguiente recuadro realicen: procedimientos, dudas que tengan, métodos o estrategias de solución.

B. Expliquemos una forma de encontrar el valor total de un número de tiquetes cualquiera.

5. ¿Cuál es la diferencia económica entre LATAM vs Avianca, LATAM vs Vive Air, Avianca vs Vive Air en la compra de los tres tiquetes?

6. Supongamos que se destina $ 1.250.000 para los tres tiquetes ¿Qué aerolínea sería la escogida? Justifiquemos la respuesta.

7. Para ingresar a la Isla se debe cancelar un impuesto que tiene un valor de $112.500 por persona. ¿Cuál sería el costo final de los tiquetes más los impuestos de entrada a San Andrés, de Sofía, Alejandra y Pablo con la Aerolínea escogida al inicio de la Tarea?

Anexo 3







Tarea II

Para recordar:

Sofía, Alejandra y Pablo son un grupo de amigos que quieren realizar un viaje de vacaciones a la Isla de San Andrés (Colombia). Por esta razón han decidido planificar los costos necesarios para su viaje. Ellos han cotizado algunas propuestas de transporte, hospedaje y planes turísticos en varias agencias de viajes.

Frente a las propuestas que han indagado, deben escoger la que les favorezca en cuanto a movilidad, hotel y las actividades que realizarán en la Isla.

En esta sesión vamos a analizar las opciones recomendadas para elegir el hotel de los tres amigos. A la hora de elegir donde hospedarse, debemos tener en cuenta que es uno de los aspectos importantes en un viaje, ya que este normalmente representa el 50% o más de los gastos de todo el viaje. Y de esto depende que la estadía de las personas sea inolvidable para bien o para mal.





Se cotizó el hospedaje en San Andrés en tres hoteles. Cada uno de estos ofrece diferentes beneficios como: costo, servicios adicionales y distancia a la playa.

Ofertas de Hoteles

Hotel	Distancia de la playa	Servicios adicionales	Costo por persona cada noche
Casablanca	3 km	Desayuno y piscina	$ 250.000
Casa de las	11 km	No tiene adicionales	$ 100.000

flores			
Verde Mar	Junto a la playa	Incluye desayuno, almuerzo, piscina y bebidas gratuitas	$ 380.000

Nota Aclaratoria:

Recuerden que el grupo de amigos (Sofía, Alejandra y Pablo) debe hospedarse en el mismo hotel. No olvidemos realizar todos los procesos, procedimientos y dudas que tengan necesarias en las hojas y no dejar alguna pregunta sin responder.

Discutimos dentro del grupo de trabajo y llegamos a un acuerdo para responder.

1. ¿Cuánto dinero les cuesta tres noches a Sofía, Alejandra y Pablo, en el hotel Casablanca, en el hotel Casa de las flores y en el hotel Verde Mar?

2. ¿Cuál es la diferencia económica entre el hotel Casa de las flores **vs** hotel Verde Mar, hotel Casa de las flores **vs** hotel Casablanca y hotel Casablanca **vs** hotel Verde Mar, en el pago de las tres noches para los tres amigos?

3. Supongamos que Sofía, Alejandra y Pablo se hospedan en el hotel Casa de las flores. Este no tiene la posibilidad de ofrecer servicios adicionales como desayuno y almuerzo. Por lo tanto, los tres amigos deben buscar un restaurante para su alimentación. Cerca de este hotel está el restaurante Sal y pimienta que brinda los siguientes productos en diversos tipos de menús:



Tipos de Menús

Menú tipo 1: una carne, un acompañamiento y un tipo de ensalada……**$15.000**

Menú tipo 2: dos carnes, dos acompañamientos y un tipo de ensalada……**$25.000**

A. Sofía escogió el ***menú tipo 1***, pero está indecisa frente a los alimentos que va a elegir. Si escoge carne ¿De cuántas maneras puede combinar su almuerzo?

Dos posibles platos serían:

Carne + papa + ensalada de zanahoria.

Carne + papa + ensalada tropical.

B. Supongamos que el restaurante Sal y Pimienta aumenta las posibilidades de carnes para armar el menú del almuerzo. Recuerden que el plato es del ***menú tipo 1*** como lo escogió Sofía.

Completamos la tabla teniendo en cuenta el número de carnes que ofrece el restaurante:

Número de carnes	**1**	**2**	**3**	**4**	**7**	**10**
Posibles combinaciones de platos						

En el siguiente recuadro realicen: procedimientos, dudas que tengan, métodos o estrategias de solución.

C. Si hay 24 posibles combinaciones de platos distintos para armar dentro del ***menú tipo 1*** ¿Cuántos tipos de carnes nos tendría que ofrecer el restaurante Sal y pimienta?

D. Explique una forma de encontrar las posibles combinaciones de platos con un número de carnes cualquiera dentro del ***menú tipo 1.***

4. Teniendo en cuenta los alimentos (Carnes, acompañamientos y tipos de ensaladas) que ofrece el restaurante Sal y pimienta ¿Qué distintos tipos de combinaciones de platos se podrían formar para el menú tipo 1, el menú tipo 2 y el menú tipo 3?

5. Si se hospedan en el hotel Casa de las flores, Sofía, Alejandra y Pablo deben alquilar o tomar un medio de trasporte para llegar a la playa.

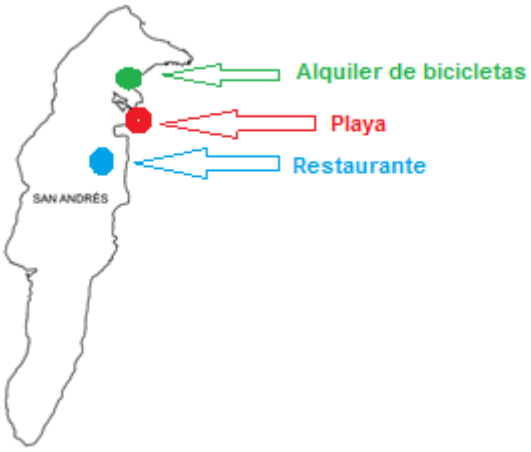
	A pie	Alquiler de bicicleta	Bus
Medios de transporte			
Valor por persona	**$ 0**	**$ 10.000 todo el día**	**$ 2.000 por pasaje**

Ellos quieren visitar la playa en el primer día. Teniendo en cuenta que si toman el bus se gastan 20 minutos en llegar, si alquilan una bicicleta se demorarán el triple de tiempo (tres veces más) que en bus y a pie el doble de tiempo (dos veces más) que en bicicleta ¿Cuánto tiempo se demorarían en llegar a la playa en cada uno de los medios de transporte?

En el siguiente recuadro realicen: procedimientos, dudas que tengan, métodos o estrategias de solución.

6. Si la opción que eligieron como medio de transporte fue el bus ¿Cuánto dinero se gastaron en el recorrido hasta la playa de ida y vuelta por los tres amigos?

7. El siguiente gráfico muestra el croquis de la Isla de San Andrés. Dibujen en el pliego de papel craf la silueta de la Isla, ubiquen los tres hoteles teniendo en cuenta los puntos de referencia del mapa y las distancias descritas en la tabla de las ofertas de los hoteles respecto a la playa:



A. El restaurante está ubicado entre la playa y el hotel Casa de las flores (en línea recta).
B. El alquiler de bicicletas está ubicado entre la playa y el hotel Casablanca (en línea recta).

Nota: **del alquiler de bicicletas a la playa hay 1 km y del restaurante a la playa hay 2 km.**

8. ¿En qué hotel se van a hospedar? y ¿Cuáles fueron los motivos para esta elección?