UNA INTRODUCCIÓN A

LA INTEGRAL DE RIEMANN STIELTJES

Raúl Alfonso Galeano Acosta

Director

Milton del Castillo Lesmes Acosta



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

12 Febrero 2017

Contenido

	Agradecimientos	**5**
	INTRODUCCIÓN	**7**
1	**Preliminares**	**9**
2	**Teorema de la integral de Stieltjes**	**19**
3	**Integración por partes**	**25**
	Bibliografía	**29**

Dedicado a:

Mi Familia.

AGRADECIMIENTOS

A todos los que hicieron posible este proyecto

Introducción

En el presente trabajo definiremos y se dará una introducción al el Teorema de la Integral de Stieljes.Para ello revisare algunos conceptos del Análisis Matemático como lo son la integral, funciones monótonas, de variación acotada, y algunas propiedades que nos permitirán abordar e interpretar lo deseado.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El teorema de la integral de Stieltjes es mas comúnmente conocido como la " integración por partes" , la integración por partes se emplea con frecuencia para transformar una integral de otra forma integrable a una forma más susceptible a las técnicas de integración conocidas, en esta monografía nos centraremos en las características del teorema de la integral de Stieltjes.

JUSTIFICACIÓN

La idea de integral ha estado presente desde Arquímedes, en 1854 George Riemann dio un conjunto de condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una función acotada es integrable, en 1984 el Matemático Holandés llamado Thoman Ene Stieltjes desarrolló la integral de Riemann-Stieltjes, esta permite la terminación de una integral cerrada,este tema se estudia con profundidad en la en la teoría del análisis matemático, por tanto cuando se quiere hablar de áreas bajo la curva o de formas de integración, se debe dar todo el rigor apropiado a la teoría dada.

OBJETIVOS

Objetivo General

Reconstruir parte la teoría de el capitulo 7 del libro Análisis matemático Apostol que desarrolla parte de la teoria del teorema de la integral de Stieltjes.(ver [**?**])

Objetivos Específicos

- Presentar algunas propiedades de la integral de Stieltjes.

Capítulo 1

Preliminares

El desarrollo del cuerpo teórico del tema seleccionado se sustenta en las siguientes definiciones y resultados, se han incluido algunas demostraciones que se han considerado relevantes, las otras pueden ser consultadas en la bibliográfia relacionada.

Definición 1 *Una* ***función*** F *es un conjunto de pares ordenados* (x, y) *ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento, es decir, si* $(x, y) \in F$ *y* $(x, z) \in F$ *entonces* $y = z$*,donde para cada* x *del dominio de* F *existe un único* y *tal que* $(x, y) \in F$

Definición 2 *Una funcion* f *tiende* ***hacia el límite*** l ***en*** a *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* x*, si* $0 < |x - a| < \delta$ *entonce* $|f(x) - l| < \epsilon$

Definición 3 *Sean* (S, d_s) *y* (T, d_T) *espacios métricos y sea* $f : S \to T$ *una función de* S *en* T*. La función* f *se llama* ***continua*** *en un punto* p *de* S *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$d_T(f(x), f(p)) < \epsilon \qquad \text{siempre que } d_s(x, p) < \delta$$

Definición 4 *Sea* $S \neq \emptyset$*,* $S \subseteq \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R}$*,* c *es llamado cota superior de* S *si* $x \leq c$*,* $\forall x \in S$*, se dira que* c *es cota inferior de* S *si* $x \geq c$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Teorema 1 *Sea* $S \subseteq \mathbb{R}$ *no vacío. Si* m *es finito* $m = infS$ *si y sólo si* m *es una cota inferior de* S *y para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $x \in S$ *que depende de* ϵ *tal que* $m \leq x < xm + \epsilon$

$\Rightarrow$Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, m finito $m = infS$ por tanto m es la máxima cota inferior de S, m es cota inferior de S dado $\epsilon > 0$ se tiene

$$m + \epsilon > m$$

así $m + \epsilon$ no es una cota inferior de S como m es cota inferior existe $x \in S$ tal que $m + \epsilon > x$ por lo tanto

$$m + \epsilon > x \geq m$$

$\Leftarrow$ Supongamos que m es finito además m es una cota inferior de s,sea k un elemento finito de $\mathbb{R}$ con $k > m$ entonce $k - m > 0$ tomemos $\epsilon = k - m$ luego existe un $x \in R_e$ tal que $m + (k - m) > x \geq m$ esto quiere decir que $m \leq x < k$ por lo tanto k no es una cota inferior de S es decir m es la máxima cota inferior de S.

Proposición 1 *Sea S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}_e$ tal que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $supS_1 \leq supS_2$*

Sea $X = SupS_1, \quad Y = SupS_2$, supongamos que $Y < X$ x una cota superior de S_1 y no es una cota superior de S_2, luego existe $K \in S_1$ tal que $Y < K < X$, como $S_1 \subseteq S_2$ entonces $k \in S_2$ un elemento de S_2 mayor a al mínima cota superior de S_2 lo que es una contradicción

Definición 5 *Un **Una función monótona** f es una función real definida en un subconjunto S de $\mathbb{R}$, f es creciente o decreciente en s si pata todo par de x e y de s:*

$$x < y \to f(x) \leqslant f(y)$$

Si $x < y \ \to f(x) < f(y)$, entonces f se llamara estrictamente creciente sobre S

Definición 6 *Sea I un intervalo, una función $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada función paso si hay una colección finita $\{I_1, I_2, I_3, ..., I_n\}$ intervalos disjuntos*

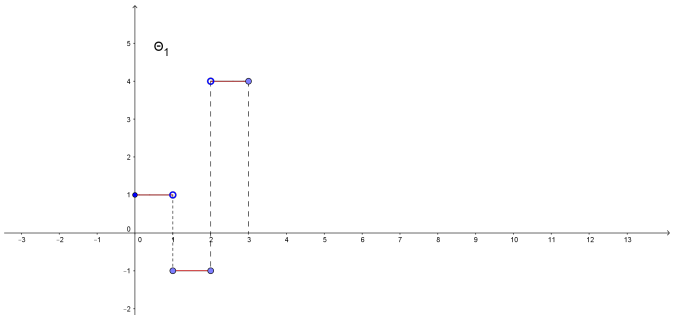
dos a dos tal que $S = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup, ..., \cup I_n \subseteq I$ y el conjunto de números reales $\{C_1, C_2, c_3, ..., C_n\}$ diferentes de cero tal que:

$$\theta(x) = \begin{cases} C_j & si \quad x \in I_j,\ j = 1, 2, 3, ..., n \\ 0 & si \quad x \in I - S \end{cases}$$

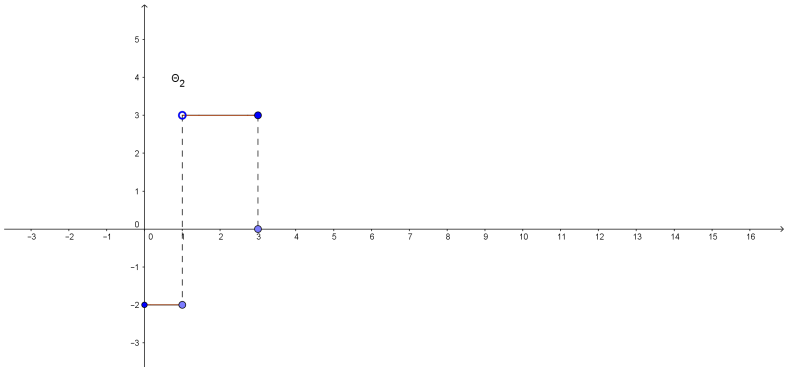
en otras palabras θ es constante y no nula en cada intervalo I_j y cero en otras partes de I. Si el soporte de una función de paso θ tiene longitud total finita entonces se asocia con $A(\theta)$ como el área entre la gráfica de θ y el eje X.

Ejemplo 1 *Sea $\theta_1, \theta_2 : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$\theta 1x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ -1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



$$\theta_2(x) = \begin{cases} -2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & si \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

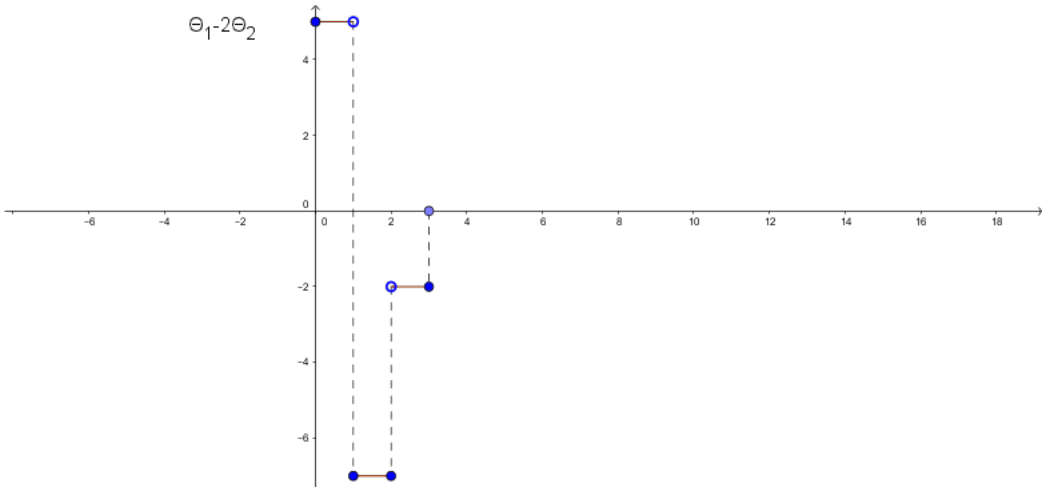


veamos $\theta_1 - 2\theta_2$ *y verifiquemos que* $A(\theta_1 - 2\theta_2) = A(\theta_1) - 2A(\theta_2)$*, en efecto:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ -7 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -2 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(\theta_1 - 2\theta_2) &= 1(5) + 1(-7) + 1(-2) \\ &= 5 - 7 - 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

y $A(\theta_1) - 2A(\theta_2) = 4 - (4) = -4$*, por lo tanto* $A(\theta_1) - 2A(\theta_2) = A(\theta_1 - 2\theta_2)$



Definición 7 *Si* $[a,b]$ *es un intervalo compacto en un conjunto de puntos*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

que satisfaga la igualdad

$$a = x_0 < x_1 <, ..., < x_n - 1 < x_n = b,$$

se llama partición de $[a,b]$. *El intervalo* $[x_{k-1} - x_k]$ *se llama K-ésimo subintervalo de* P *y se escribe* $\triangle x_k - x_{k-1}$ *con lo que* $\sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = b - a$

Definición 8 *Supongamos que* f *es acotada sobre* $[a,b]$ *y* $p = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ *es una partición de* $[a,b]$, *se tiene,*

$$m_i = Inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

$$M_i = Sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

La suma inferior de f *para* p, *designada por* $L(f,p)$ *se define poniendo,*

$$L(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

la suma superior de f *para* p, *designada por* $U(f,p)$ *se define poniendo,*

$$U(f,p) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Ejemplo 2 *Tomemos el intervalo* $[a,b]$ *tomemos el caso particular cuando el intervalo es* $[0,3]$ *dividiéndolo en cinco subintervalos,*

$$[0, 0.5][0.5, 1][1, 1.5][1.5, 2][2, 2.5][2.5, 3]$$

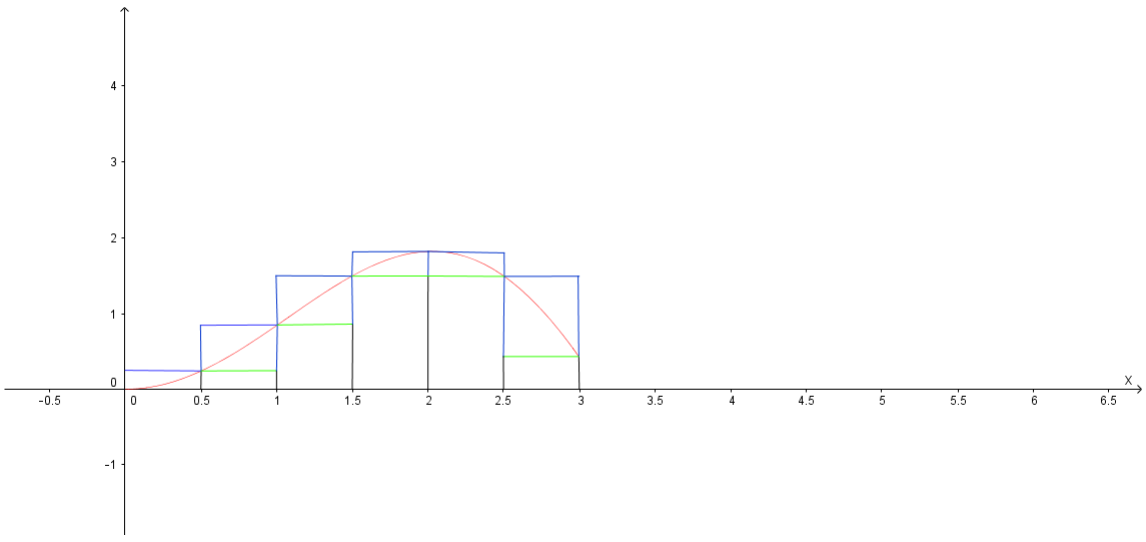
$$a = 0 < 0.5 < 1, ..., < 3 = b$$

en el intervalo $[0, 0.5]$ *la función* $f(x) = xsin(x)$ *tiene un valor mínimo* m_i *y un valor máximo* M_i *en virtud de la definición la suma inferior de* $f(x)$ *en* $[0, 3]$ *sera,*

$$\begin{aligned} L(f, p) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{6} x_{i-1} sen(xi - 1)\frac{3}{6} \end{aligned}$$

análogamente la suma superior de la partición de la función $f(x)$ $U(f, x)$ *se define por,*

$$\begin{aligned} U(f, p) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{5} x_i sen(x_i)\frac{3}{6} \end{aligned}$$



Definición 9 *Una función f acotada sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$ si,*

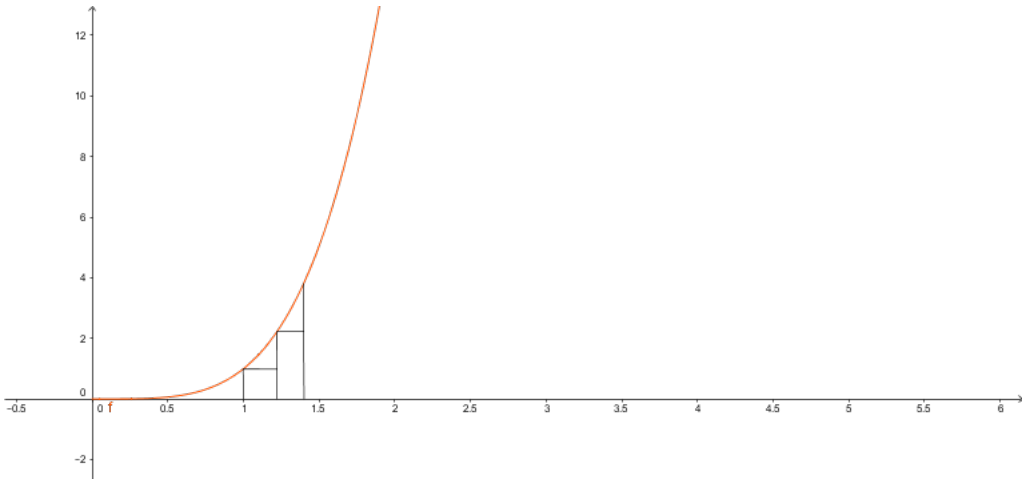
$$Sup = \{L(f,p)\} Inf\{U(f,p)\}$$

con p una partición de $[a,b]$.En este caso este numero recibe el nombre de integral f sobre $[a,b]$ y se nota,

$$\int_a^b f$$

Ejemplo 3 *Demostrar que* $\int_0^b x^4 = \frac{b^5}{5}$ *La función $f(x) = x^4$, sea $P = \{x_0x, x_1, x_3, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[0,b]$ entonces,*

$$m_i = f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^4, \quad M_i = f(x_i) = x_i^4$$



$$\begin{aligned} L(f,p) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_{i=1})^4(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-})\frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^4 b^4}{n^4}\frac{b}{n} \\ &= \frac{b^5}{n^5}\sum_{j=0}^{n-1} j^4 \\ &= \frac{b^5}{n^5}\left(\frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n}{30}\right) \end{aligned}$$

de forma análoga tenemos $U(f,p)$, para un n suficientemente grande se concluye,

$$SupL(f,p) = InfU(f,p) = \tfrac{b^5}{5}$$

Teorema 2 *Si f es continua en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Como f es continua en $[a,b]$ y además $[a,b]$ es cerrado y acotado es decir es compacto entonces f es uniformemente continua, por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a,b]$, si

$$\mid x - y \mid < \delta \Rightarrow (x) - f(y) \mid < \tfrac{\epsilon}{3(b-a)}$$

tomemos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ con $n \in \mathbb{N}$ que $n > \frac{b-a}{\delta}$ entonces $\delta > \frac{b-a}{n}$ tenemos que x, y en (x_{i-1}, x_i) tal que,

$$f(x) > M_i - \tfrac{\delta}{3(b-a)}$$

$$f(y) < m_i + \tfrac{\epsilon}{3(b-a)}$$

se tiene $\mid x - y \mid < (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$, así,

$$f(x) - f(y) < \tfrac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$M_i - \tfrac{\epsilon}{3(b-a)} - m_i\tfrac{\epsilon}{3(b-a)} < f(x) - f(y) < \tfrac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$\begin{aligned} M_i - \frac{\epsilon}{3(b-a)} - m_i\frac{\epsilon}{3(b-a)} &< \frac{\epsilon}{3(b-a)} \\ M_i - m_i &< \frac{\epsilon}{3(b-a)} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \\ M_i - m_i &< \frac{3\epsilon}{3(b-a)} \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \end{aligned}$$

Para todo i tenemos

$$\begin{aligned} U(f,p) - L(f,p) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Definición 10 *Sea f definida en $[a,b]$. Si $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ escribiremos $\triangle f_k = f(x_k) - f(xk-1)$ para $k = 1, 2, 3, ..., n$ si existe un numero positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\triangle f_k| \leq M$$

para toda partición de $[a,b]$ entonces diremos que f es de variación acotada en $[a,b]$.

Teorema 3 *Si f es monótona en $[a,b]$ entonces f es de variación acotada en $[a,b]$*

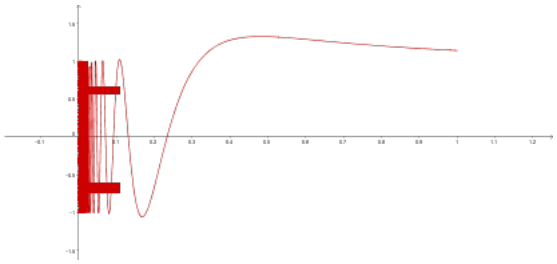
Si f es creciente, entonces para cada partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ se tiene que $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$ para todo $k = 1, 2, 3, ..., n$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |\triangle f_k| = \sum_{k=1}^{n} \triangle f_k = \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a) = M$$

Ejemplo 4 *Determinar si $f(x) = x^2 sen(1/x)$ si $x \neq 0, f(0) = 0$, es de variación acotada en $[0,1]$ Para determinar si la función es de variación acotada primero nombraremos un resultado cuya demostración puede consultarse en Apóstol*

Teorema 4 *Si f es continua en $[a,b]$ y si f' existe y esta acotada en el interior, es decir que $|f'(x)| \leq A$ para todo x de (a,b) entonces f es de variación acotada en $[a,b]$ en efecto $f(x) = x^2 sen(1/x)$ derivando tenemos*

$$f'(x) = 2xsen(1/x) - cos(1/x)$$



para $x \in (0,1]$ *y* $f'(0) = 0$ *tenemos*

$f'(x)$ *es acotada en* $[0,1]$ *ya que* $|f'(x)| \leq 3$ *como lo podemos apreciar en la grafica anterior, y en virtud del teorema 3 se tiene que la función* f *es de variación acotada.*

Capítulo 2

Teorema de la integral de Stieltjes

En el presente capítulo se presentan las definiciones y resultados básicos del presente trabajo; para ello se consideran definiciones, teoremas y propiedades de la integral de Stieltjes

Definición 11 · *Una partición P' de $[a,b]$ es más fina que P si $P \subseteq P'$ o refinamiento.*
· *El símbolo $\triangle\alpha_k$ designa la diferencia $\triangle\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ luego,*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Definición 12 *Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1} - x_k]$ una suma formal*

$$S(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle \alpha_k$$

se llama de Riemann Stieltjes de f respecto a α.

Definición 13 *Se dirá que f es Riemann-integrable respecto a α en $[a,b]$ si existe un número A tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que para cada partición P mas fina que P_ϵ y para cada elección de los puntos t_k del intervalo $[x_{k-1} - x_k]$ se tiene,*

$$\mid S(f, p, \alpha) - A \mid < \epsilon$$

entonces se dirá que f es Riemann integrable respecto de α en $[a,b]$.

Propiedades de Linealidad

Teorema 5 *Si f y g en (α) en $[a,b]$ entonces $c_1f + c_2g \in R(\alpha)$ en $[a,b]$ para c_1, c_2 constantes se tiene,*

$$\int_a^b (c_1f + c_2g)d\alpha = c_1 \int_a^b d\alpha + c_2 \int_a^b gd\alpha$$

Demostración. *Tomemos $h = c_1f + c_2g$ y una partición cualquiera P de $[a,b]$,*

$$\begin{aligned} S(P, c_1f + c_2g, \alpha) = S(P, h, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} h(t_k) \triangle \alpha_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_1 f(t_k) \triangle \alpha_k + \sum_{i=1}^{n} c_2 g(t_k) \triangle \alpha_k \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{n} f(t_k) \triangle \alpha_k + c_2 \sum_{i=1}^{n} g(t_k) \triangle \alpha_k \\ &= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(p, g, \alpha) \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ existe una partición P'_ϵ tal que $P \supseteq P'_\epsilon$ esto implica que

$$\mid S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \mid < \epsilon$$

tomando una partición P'' tal que $P \supseteq P''_\epsilon$ e implique que

$$\mid S(P, g, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \mid < \epsilon$$

tomando $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ entonces para P más fina que P_ϵ se tiene

$$\mid S(P, h, \alpha)_{c1} \int_a^b f d\alpha - c_2 \int_a^b g d\alpha \mid \leq c_1 \mid \epsilon \mid + \mid \epsilon \mid$$

■

Teorema 6 *Supongamos que $c \in (a,b)$, si dos de la integral existen entonces la tercera también existe y además se tiene*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int f d\alpha$$

Demostración. *Tomando P una partición de $[a,b]$, $c \in P$, sea $P' = P \cap [a,b]$ y $P'' = P \cap [c,b]$ donde P' es una partición de $[a,c]$ y P'' una partición de $[c,b]$ por definición se tiene,*

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha)$$

Suponiendo que $\int_a^c f d\alpha$ existe e $\int_c^b f d\alpha$ entonces, dado $\epsilon > o$ existe una partición P'_ϵ de $[a,c]$ tal que

$$\mid S(P', f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha \mid < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } P' \text{ sea mas fina que } P'_\epsilon$$

y una partición P''_ϵ de $[c,b]$ tal que

$$\mid S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \mid < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } P'' \text{ sea mas fina que } P''_\epsilon$$

$P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ es una partición de $[a,b]$ tal que P'_ϵ y $P'' \supseteq P''_\epsilon$ luego siendo P más fina que P_ϵ se tiene que $P \supseteq P_\epsilon$ combinando se tiene,

$$\mid S(P,f,\alpha) - \textstyle\int_a^c f d\alpha - \int_c^b f d\alpha \mid < \epsilon$$

es decir $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a $\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$ ■

Definición 14 *Sea P una partición de $[a,b]$ y sea*

$$M_k(f) = Sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = Inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]$$

Los números $U(p,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \triangle \alpha_k$ y $L(p,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \triangle \alpha_k$ se llaman sumas superiores e inferiores respectivamente de Stieltjes de f con respecto a α para la partición P.

Teorema 7 *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$ entonces: i) si P' es más fina que P, tendremos*

$$U(P',f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \text{ y } L(P',f,\alpha) \geq L(P,f,\alpha)$$

ii) Para cada par de particiones p_1 y P_2 tendremos

$$L(P_1,f,\alpha) \leq U(P_2,f,\alpha)$$

Demostración. *Supongamos que P' posee sólo un punto más que P, tomemos c, si c esta en el i-ésimo subintervalo de P podemos escribir*

$$U(P',f,\alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f) \triangle \alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

donde M' y M'' designan el Sup de f en $[x_{i-1}, c] y [c, x_i]$ respectivamente, dado que

$$M' \leq M_i(f) \text{ y } M''_i(f)$$

luego

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f) \triangle \alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)] \leq$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f) \triangle \alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})]$$

y se tiene

$$U(P',f,\alpha)(P,f,\alpha)$$

haciendo un proceso análogo se prueba que $L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$. *Para probar (ii) tomamos* $P = P_1 \cup P_2$ *y por (i) se tiene*

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

■

Definición 15 *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$ *la integral superior de Stieltjes de* f *respecto a* α *se define como*

$$\int_a^{\overline{b}} d\alpha = Inf\{U(P, f, \alpha) : P \in \wp[a, b]\}$$

la integral inferior

$$\int_{\underline{a}}^b dx = Sup\{L(P, f, \alpha) : P \in \wp[a, b]\}$$

se denotara $\overline{I}(f, \alpha)$ *a la integral superior y* $\underline{I}$ *a la integral inferior.*
Propiedades
i) Si $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$ *entonces*

$$\int_a^{\overline{b}} f d\alpha = \int_a^{\overline{c}} f d\alpha + \int_c^{\overline{b}} f d\alpha$$

con $a < c < b$.
Demostración. *Sea* $\epsilon > 0$ *existe una partición* P *tal que*

$$U(P, f, \alpha) < \overline{I}(f, \alpha) + \epsilon$$

tomemos otras dos particiones $P_1 = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n1} = c\}$ *y* $P_2 = \{x_{n1} = c, ..., x_{n2} = b\}$ *con* $P_{12} = P \cup \{c\}$ *y llamamos* $P' = P \cup \{c\}$ *así*

$$\overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b) \leq U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha) = U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

como $U(P, f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha) + \epsilon$ *entonces*

$$\overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b) \leq \overline{I}(a, b)$$

donde ϵ *es arbitrario. Ahora hagamos la otra desigualdad, dado* $\epsilon > 0$ *existen* P_1 *y* P_2 *particiones tales que*

$$U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha) \leq \overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b) + \epsilon$$

esto implica que $P = P_{12}$, *por lo tanto*

$$U(P, f, \alpha) \leq \overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b) + \epsilon$$

luego

$$\overline{I}(a, b) \leq U(P, f, \alpha) \leq \overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b) + \epsilon$$

esto es

$$\overline{I}(a, b) \leq \overline{I}(a, c) + \overline{I}(c, b)$$

con ϵ arbitrario. ■
Ciertas igualdades que se verifican con integrales se convierten en desigualdades cuando se remplazan aquellas por integrales superiores e inferiores

$$\int_a^{\overline{b}}(f+g)d\alpha \leq \int_a^{\overline{b}} fd\alpha + \int_a^{\overline{b}} gd\alpha$$

$$\int_{\underline{a}}^{b}(f+g)d\alpha \geq \int_{\underline{a}}^{b} fd\alpha + \int_{\underline{a}}^{b} gd\alpha$$

Condiciones suficiente para la existencia de las integrales de Riemann Stieltjes

Teorema 8 *Si f es continua en $[a,b]$ y si α es de variación acotada en $[a,b]$ entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$*

Demostración. *Es suficiente demostrar el teorema para $\alpha \nearrow$ con $\alpha(a) < \alpha(b)$ como f es continua en $[a,b]$ entonces f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|x-y| < \delta \text{ entonces } |f(x)-f(y)| < \tfrac{\epsilon}{A}$$

con $A = 2[\alpha(b)-\alpha(a)]$, si P_ϵ es una partición de norma $||P_\epsilon|| < \delta$ entonces para P más fina que P_ϵ se tendrá

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \tfrac{\epsilon}{A}$$

puesto que $M_k(f) - m_k(f) = Sup\{f(x)-f(y) : x,y \in [x_{k-1},x_k]$ multiplicando la desigualdad por $\triangle\alpha_k$ y sumando se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\{M_k(f)-m_k(f)\}\triangle\alpha_k &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\triangle\alpha_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\alpha_k \\
&= U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}\sum_{k=1}^{n}\triangle\alpha_k \\
&= \frac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}(\alpha(b)-\alpha(a)) \\
&= \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

■

Condiciones necesarias para la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes

Teorema 9 *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$ y sea $a < c < b$ supongamos que tanto α como f son discontinuas en $x = c$, esto es supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen valores de x e y en el intervalo $(c, c+\delta)$ para los que*

$$|f(x) - f(c)| \geq \epsilon$$

$$|\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \epsilon$$

entonces la integral no existe, Tampoco existe la integral si α y f son discontinuas por la izquierda de c.

Capítulo 3

Integración por partes

Definición 16 *Si $a < b$ definimos $\int_b^a f d\alpha = -\int_a^b f d\alpha$ siempre que exista $\int_a^b f d\alpha$. Definamos también $\int_a^a f d\alpha = 0$.Luego la ecuación del teorema anterior se puede escribir*

$$\int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha + \int_c^a f d\alpha = 0$$

Integración por partes

Teorema 10 *Si f en $R(\alpha)$ en $[a,b]$ entonces $\alpha(f)$ en $[a,b]$ y se tiene,*

$$\int_a^b f(x) d\alpha + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

Demostración. *Dado $\epsilon > 0$, como $\int_a^b f d\alpha$ existe hay una partición P_ϵ en $[a,b]$ tal que para cada P' más fina que P_ϵ se tiene*

$$\mid S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \mid < \epsilon$$

tomando una suma de Riemann Stieltjes arbitraria para $\int_a^b \alpha df$

$$\begin{aligned} S(P, \alpha, f) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k) \triangle f_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k) f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

donde P es màs fina que P_ϵ, nombrando $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$ se tendrá la identidad

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1})$$

haciendo la diferencia de las dos ecuaciones anteriores

$$A - S(P,\alpha,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha x_(k-1) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(t_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(t_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\alpha(x_k) - \alpha(t_k)\right] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\left[\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})\right]$$

las dos sumas de la derecha se pueden combinar en una sola de forma que $S(P',f,\alpha)$ *donde* P' *es una partición de* $[a,b]$ *que contiene los puntos* x_k *y* t_k, P' *resulta ser más fina que* P_ϵ *por tanto*

$$\mid A - a(p,\alpha,f) - \int_a^b f d\alpha \mid < \epsilon$$

Siempre que P *sea más fina que* P_ϵ *esto asegura que* $\int_a^b \alpha df$ *existe y vale*

$$A - \int_a^b f d\alpha$$

es decir

$$\int_a^b \alpha df = [f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)] - \int_a^b f d\alpha$$

Teorema 11 *Supongamos que* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a,b]$ *y supongamos que* α *posee una derivada* α' *continua en* $[a,b]$ *entonces la integral de Riemann* $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ *existe y se verifica*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

Teorema 12 *Cada suma finita puede expresarse como una integral de Riemann Stieltjes, de hecho dada una suma finita* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *definamos* f *en* $[0,n]$ *como sigue*

$$f(x) = a_k \text{ si } k-1 < x < k \text{ con } k = 1,2,3,...,n \text{ y } f(x) = 0$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)d[x]$$

donde $[x]$ *es el mayor entero* $\leq x$.

Ejemplo 5 *Utilizar la integral por partes de Stieltjes para deducir*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln\, n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx + 1$$

Demostración. *Haciendo uso del teorema anterior se tiene*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x}d[x] + 1$$

usando la integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x}d[x]+1 &= -\int_1^n [x]dx^{-1}+\frac{[n]}{n}-1+1\\ &= -\int_1^n [x]dx^{-1}+1\end{aligned}$$

por la reducción de la integral de Riemann

$$\int_1^n [x]dx^{-1} = \int_1^n \frac{[x]}{x^2}dx+1$$

luego

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx-\int_1^n \frac{1}{x}dx+\int_1^n \frac{[x]}{x^2}dx+1$$

por tanto se tiene

$$ln\, n\int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx+1$$

■

Ejemplo 6 *Si f^{n+1} es continua en $[a,x]$ definamos*

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t)dt$$

Demostrar que

$$I_{k-1}(x)-I_k = \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}, \quad k=1,2,3,...,n$$

Demostración. *$k=1,2,3,...,n$ se tiene*

$$I_k(x) = \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{k+1}(t)dt$$

haciendo uso de la reducción a una integral de Riemann se tiene

$$\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k df^k(t)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}I_k(x) &= \frac{1}{k!}\left[(x-t)^k f^k(t)\big|_a^x\right]+\int_a^x f^k(t)d(x-t)^k\\ &= -\frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}+\int_a^x f^k(t)d(x-t)^{k-1}\\ &= -\frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}+k\int_a^x (x-t)^{k-1}f^k(t)dt\\ &= -\frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}+\frac{1}{(1-k)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f^k(t)dt\\ &= -\frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}+I_{k-1}(x)\end{aligned}$$

lo que es tiene

$$I_{k-1}(x)-I_k(x) = \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}$$

■

CONCLUSIONES

· *La integral de Riemann resulta ser una caso particular de la integral de Riemann-Stieltjes.*
· *En la probabilidad la distribuciones discretas y continuas las podremos tratar con la integral de Riemann Stieltjes en el caso finito, ya que cada suma finita puedes expresarse como una integral.*

Bibliografía

[1] Tom M Apostol, Análisis Matemático, segunda edición, Reverté S.A.

[2] M. Carter B. van brunt, The Lebesgue-Stieltjes integral, Springer, .

[3] Michael Spivak, Calculo infinitesimal, Reverté, Universidad de brandeis, 1970.

[4] James R. Munkres, Topología General, segunda edición, Pearson Educación, Madrid 2012.