Tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones: Una mirada desde la Teoría de la Objetivación

María Angélica Ramírez Archila

Ana Yamile Meza Quintero

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá, D.C.

2024

Tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones: Una mirada desde la Teoría de la Objetivación

María Angélica Ramírez Archila

Ana Yamile Meza Quintero

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática

Director

Rodolfo Vergel Causado

Doctor en Educación con énfasis en Educación Matemática

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá, D.C.

2024

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Rodolfo Vergel Causado por su dedicación, compromiso, orientación, enseñanzas y confianza para asignarnos, impulsarnos y motivarnos cada día a cumplir este reto que nos permitió crecer a nivel personal, profesional y académico.

Al profesor Cristian Alejandro Guzmán Ruíz por dedicar una parte de su tiempo para escucharnos y brindarnos espacios para discutir nuestra investigación.

A los niños y a las niñas de la Institución Educativa Distrital CODEMA que fueron partícipes en nuestra investigación.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 10

1. ANTECEDENTES 12

2. JUSTIFICACIÓN Y PROBLEMATIZACIÓN 32

3. OBJETIVOS 34
   3.1. Objetivo General 34
   3.2. Objetivos específicos 34

4. MARCO TEÓRICO 35
   4.1. Teoría de la Objetivación 35
   4.2. Pensamiento algebraico y generalización 41

5. METODOLOGÍA 47
   5.1. Análisis multimodal 47
   5.2. Estrategias cualitativas empleadas en la Educación Matemática 49
   5.3. Recolección de la información 51
   5.4. Prueba piloto 52
   5.5. Tareas de la investigación 61
   5.6. Categorías de análisis 62

6. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES 64
   6.1. Tarea mesas 64
   6.2. Tarea Juanes 71
   6.3. Tarea Ramas I 77
   6.4. Tarea Ramas II 82

7. CONCLUSIONES 91
   7.1. Respuesta a la pregunta de investigación 91
   7.2. Síntesis y observaciones finales 94

REFERENCIAS 95

ÍNDICE DE FIGURAS

Imagen 1: Secuencia figural con apoyo tabular (p.200) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3). 12
Imagen 2: Gestos indexicales (p.202) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3). 12
Imagen 3: Mensaje que permite calcular la cantidad de círculos de la figura 1000 (p.203) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3). 13
Imagen 4: Ítem propuesto para nombrar lo indeterminado (p.208) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3). 13
Imagen 5: Mensaje que permite calcular el número que se encuentra dentro de la tarjeta (p.209) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3). 14
Imagen 6: Secuencia figural con apoyo tabular (p.11) por Callejo, et al. 2016, Avances de Investigación en Educación Matemática, 10. 15
Imagen 7: Mensaje en un sobre (p.25) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73. 17
Imagen 8: Secuencia figural con apoyo tabular (p.26) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73. 17
Imagen 9: Señalamientos y deícticos espaciales en las producciones de los estudiantes (p.26) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73. 18
Imagen 10: Ritmo en las producciones de los estudiantes (p.29) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73 18
Imagen 11: Secuencia figural (p.13) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.). 19
Imagen 12: Expresiones simbólicas escritas por estudiantes de cuarto grado (p.18) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.). 19
Imagen 13: Expresiones simbólicas escritas por estudiantes de grado quinto (p.21) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.). 20
Imagen 14: Secuencia figural con apoyo tabular (p.44) por Gustin, J. y Pontón, T., 2020. Unión, Año XVI (60). 21
Imagen 15: Secuencia numérica con apoyo tabular (p.49) por Gustin, J. y Pontón, T., 2020. Unión, Año XVI (60). 22
Imagen 16: Medios semióticos movilizados en las producciones de los estudiantes (p.222) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 23
Imagen 17: Procedimientos realizados por un estudiante (p.223) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 24
Imagen 18: Expresiones escritas y procedimientos realizados por Mateo (p.225) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 24
Imagen 19: Expresiones simbólicas escritas por Mateo (p.226) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 24
Imagen 20: Procedimientos realizados por Hugo (p.230) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 25
Imagen 21: Procedimientos realizados por Sofía (p.231) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3). 25

Imagen 22: Secuencia figural con apoyo tabular (p. 92) por Zapatera, A., 2018a. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(1). 27
Imagen 23: Producción de un estudiante de una tarea que involucra una secuencia figural con apoyo tabular (p.53) por Uicab, et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1)..... 28
Imagen 24: Secuencia numérica con apoyo tabular (p.8) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1)..... 29
Imagen 25: Cálculo del término 15 de la secuencia (p.10) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1)..... 30
Imagen 26: Secuencia figural con apoyo tabular (p.13) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1)..... 30
Imagen 27: Articulación de medios semióticos utilizados por Miguel y Cristina (p. 106) por Radford, L., 2006a. Relime, número especial..... 36
Imagen 28: Relación entre el saber y el conocimiento (p. 110) por D'Amore, B. y Radford, L., 2017. Énfasis. Bogotá, Colombia. 37
Imagen 29: Secuencia figural con apoyo tabular (p.8) por Radford, L., 2020a. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2). 40
Imagen 30: Representación icónica realizada por los estudiantes para determinar la cantidad de rectángulos para los términos 5 y 6 (p.8) por Radford, L., 2020a. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2). 40
Imagen 31: Secuencia figural con apoyo tabular (p. 5) por Radford, L. (2013). 41
Imagen 32: Termino 8 según Monique (p. 8) por Radford, L. (2013)..... 41
Imagen 33: Estructura de la actividad (p. 126) por D'Amore, B. y Radford, L., 2017. Énfasis. Bogotá, Colombia..... 42
Imagen 34: Estructura de la generalización algebraica (p. 7) por Radford, L. (2013) 45
Imagen 35: Secuencia figural con apoyo tabular (p.11) por Callejo, et al. 2016, Avances de Investigación en Educación Matemática, 10..... 53
Imagen 36: Representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto 54
Imagen 37: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto..... 54
Imagen 38: Representación icónica del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea de mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto 55
Imagen 39: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por el estudiante 1 partícipe en la prueba piloto 55
Imagen 40: Representación icónica del término 21 de la secuencia en la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto..... 56
Imagen 41: Señalamientos, deícticos espaciales y representación icónica del término 20 de la secuencia en la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto56
Imagen 42: Producción de los estudiantes partícipes en la prueba piloto en el ítem f de la tarea mesas..... 56
Imagen 43: Secuencia figural con apoyo tabular de la tarea "Ramas I"..... 57

Imagen 44: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto 57
Imagen 45: Señalamientos y representación icónica del término 12 de la secuencia en la tarea de ramas I realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto 58
Imagen 46: Representación icónica del término 31 de la secuencia en la tarea ramas I realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto 59
Imagen 47: Gestos realizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto en la tarea ramas I 59
Imagen 48: Señalamientos y tabla realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto en la tarea Juanes 60
Imagen 49: Producción de los estudiantes partícipes en la prueba piloto en el ítem g de la tarea Juanes 60
Imagen 50: Secuencia figural con apoyo tabular de la tarea "Ramas II" 61
Imagen 51: Señalamientos, deícticos espaciales, gestos y conteos manuales realizados por los estudiantes de G3 de la tarea mesas 64
Imagen 52: Representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes de G1 65
Imagen 53: Representación de los gestos indexicales realizados por los estudiantes de G1 para analizar la secuencia de patrones de la tarea mesas 65
Imagen 54: Representación del gesto indexical realizado por los estudiantes de G4 y representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas 65
Imagen 55: Representación icónica del término 5 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por el estudiante 2 de G1 66
Imagen 56: Representación icónica del término 5 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por el estudiante 1 de G1 66
Imagen 57: Representación icónica del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes de G3 67
Imagen 58: Método propuesto por G1 para determinar el número correspondiente del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea mesas 67
Imagen 59: Conclusión del ítem d planteada por G1 en la tarea mesas 67
Imagen 60: Representación icónica del término 20 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por G2 68
Imagen 61: Conclusión y ejemplo del ítem f de la tarea mesas planteado por G2 69
Imagen 62: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G1 69
Imagen 63: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G3 70
Imagen 64: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G4 70
Imagen 65: Conteos manuales de dos en dos realizados por los estudiantes en el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes 71
Imagen 66: Conclusión del ítem c de la tarea Juanes planteada por el estudiante 1 de G1 . 72
Imagen 67: Conclusión del ítem c de la tarea Juanes planteada por el estudiante 2 de G1 . 72
Imagen 68: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G2 ... 72

Imagen 69: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G3 ... 73
Imagen 70: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G4 ... 73
Imagen 71: Representación del aumento de seguidores desde el primer día a cada uno de estos en la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizado por G2 ... 74
Imagen 72: Procedimiento para encontrar el aumento desde el primer día a cada uno de estos en la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizado por G2 ... 74
Imagen 73: Expresión planteada por G2 que permite hallar cualquier término de la secuencia en la tarea de Juanes ... 75
Imagen 74: Procedimiento para determinar el número correspondiente del término 12 de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes realizado por G2 ... 75
Imagen 75: Relación entre el término cero y su número correspondiente en la secuencia de patrones de la tarea de Juanes realizada por G2 ... 76
Imagen 76: Expresión sofisticada para determinar cualquier término de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes planteada por G2 ... 76
Imagen 77: Procedimientos realizados por G2 para determinar el número correspondiente de los términos 12, 38 y 7 de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes ... 76
Imagen 78: Conclusión planteada por G2 para el ítem g de la tarea de Juanes ... 77
Imagen 79: Conteos manuales, señalamientos, deícticos espaciales y gestos indexicales realizados por los estudiantes durante el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Ramas I ... 78
Imagen 80: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G1 ... 81
Imagen 81: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G2 ... 81
Imagen 82: Procedimiento para determinar el número correspondiente del término 400 en la secuencia de patrones de la tarea de ramas I realizado por G3 ... 81
Imagen 83: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G3 ... 81
Imagen 84: Conclusión de G1 para el ítem a de la tarea ramas II ... 82
Imagen 85: Señalamientos, conteos manuales y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes durante el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Ramas II ... 84
Imagen 86: Conclusión del ítem g planteada por G1 de la tarea ramas II ... 86
Imagen 87: Conclusión del ítem g planteada por G3 de la tarea ramas II ... 86
Imagen 88: Análisis de la secuencia de patrones de la tarea ramas II por parte de G2 ... 87
Imagen 89: Expresión planteada por G2 para determinar cualquier término en la secuencia de la tarea ramas II ... 87
Imagen 90: Análisis de la secuencia de patrones de la tarea ramas II por parte de G4 ... 88
Imagen 91: Procedimiento realizado por G4 para determinar el número correspondiente al término 8 en la secuencia de patrones de la tarea ramas II ... 89
Imagen 92: Conclusión del ítem g planteada por G4 de la tarea ramas II ... 89

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Recolección de la información 51
Tabla 2: Categorías de análisis 62
Tabla 3: Conclusiones de los grupos para los ítems e y f de la tarea de Juanes..... 73
Tabla 4: Conclusiones de los grupos para los ítems e y f de la tarea Ramas I..... 80
Tabla 5: Expresiones utilizadas por los estudiantes que dan cuenta de una generalización algebraica..... 92
Tabla 6: Transiciones entre los tipos de generalización producidas por los estudiantes para el desarrollo de cada tarea 92

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, uno de los intereses de la investigación en Educación Matemática ha sido el estudio de los tipos de generalización de patrones que realizan los estudiantes, ya que según Rodríguez de Chicas y Ron (2022), es un factor fundamental para potenciar el pensamiento algebraico. Por esta razón, a través de esta tesis se pretende ampliar y aportar a dichas investigaciones, ya que tiene como finalidad documentar los tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones.

Para ello, de acuerdo con las producciones de los estudiantes, se identifican, caracterizan y describen los medios semióticos de objetivación que se movilizan y de esta manera identificar la presencia del componente de abducción analítica.

Inicialmente, se consultan diversas investigaciones que fueron realizadas por Callejo, et al. (2016), Radford (2018), Zapatera (2018a), Gustin y Pontón (2020), Ayala y Molina (2021), Vergel (2015), Uicab, et al. (2022), Vergel, et al. (2022) y Vergel (2016). Estos reportes están relacionados con el diseño e implementación de tareas asociadas a la generalización de patrones en diferentes niveles de escolaridad, en particular, en el álgebra temprana. Lo anterior, se encuentra en el capítulo 1 titulado a*ntecedentes*.

Posteriormente, surge la necesidad de enfocar la investigación en una teoría de educación, por esta razón, este trabajo se fundamenta desde la Teoría de la Objetivación (TO), la cual se expone en el capítulo 2 correspondiente al *marco teórico*. Para profundizar en la TO, se toman como referentes a Vergel (2014, 2021, 2022), Radford (2006a, 2013, 2014, 2019, 2020a, 2020b, 2021a, 2021b), Radford (en D'Amore y Radford, 2017) y Vergel et al. (2022). Además, en este mismo capítulo se conceptualiza el pensamiento algebraico y la generalización de patrones a partir de los trabajos realizados por Rodríguez de Chicas y Ron (2022), Blanton y Kaput (2005), Kaput (1999), Radford (en Miranda, et al. 2007), Radford (en D'Amore y Radford, 2017), Callejo et al. (2016), Stacey (1989), Zapatera y Callejo (2011), Vergel (2014, 2022), Radford (2003, 2008, 2010, 2011, 2013).

Teniendo en cuenta los antecedentes y el marco teórico, se adaptan y se diseñan tareas que permiten a los estudiantes generalizar patrones a través de secuencias figurales y numéricas con apoyo tabular. Además, se realiza un pilotaje con estudiantes de grado octavo donde se identifican los medios semióticos de objetivación y los ambientes que se generan en el aula, se analiza la viabilidad de las preguntas planteadas y se evidencian las dificultades que se presentan en la estructura de las tareas y su abordaje. Para el registro de la información se tiene en cuenta algunas estrategias cualitativas empleadas en la Educación Matemática descritas por Camargo (2021) y las fases establecidas por Miranda et al. (2007), Radford (2012) y Vergel (2015). Lo descrito anteriormente, se expone en el capítulo 3 titulado *metodología.*

En el capítulo 4 se presenta el *análisis de las producciones de los estudiantes* a partir de la metodología, el marco teórico, los antecedentes, los diferentes medios semióticos movilizados, los procesos de interpretación y el contexto social de los estudiantes. Para ello,

se realiza un análisis de carácter multimodal descrito por Arzarello (2006), Bayona (2021), Vergel (2015) y Radford et al. (2009), que permite dar cuenta de los procesos de inducción, abducción y deducción que presentan los estudiantes al momento de trabajar con tareas asociadas a la generalización de patrones.

Finalmente, en el capítulo 5 se reportan las *conclusiones* obtenidas a partir del análisis multimodal con el fin de responder a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados. Además, se presentan algunas observaciones finales relacionadas con los aportes de este trabajo a la investigación en la Educación Matemática.

1. ANTECEDENTES

En los últimos años el desarrollo del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones se ha convertido en tema de interés en investigaciones en Educación Matemática. En algunas investigaciones realizadas se considera la generalización de patrones como uno de los principales medios de introducir el álgebra en el aula (Vergel, 2016). Por esta razón, se presenta la descripción de algunas investigaciones que se tendrán como referentes en el diseño de las tareas y en el análisis de las producciones de los estudiantes.

Vergel (2015) presentó los datos provenientes de una investigación doctoral en la que participaron estudiantes de 9 y 10 años, con el fin de indagar las formas de pensamiento algebraico temprano. Para ello, utilizó la siguiente secuencia figural con apoyo tabular:

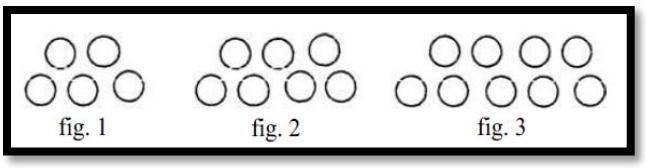


Imagen 1: Secuencia figural con apoyo tabular (p.200) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3).

Para comprender la situación, una estudiante llamada Laura, realizó dos gestos indexicales espaciales, es decir, dos señalamientos o movimientos con los dedos de la mano para indicar expresiones tales como "ahí" o "aquí": tapar los círculos y señalar la torre (que corresponden a tres círculos, dos en la parte inferior y el otro en la parte superior):

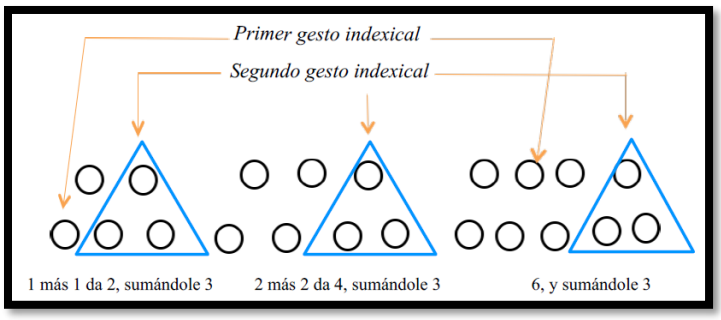


Imagen 2: Gestos indexicales (p.202) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3).

El autor afirmó que la torre se convirtió en un medio semiótico de objetivación ya que le permitió contar el número de círculos de la fila de arriba y la de abajo por medio de la percepción, la coordinación de deícticos o gestos indexicales espaciales, el ritmo, las palabras y la actividad perceptual. Cabe resaltar que según Radford (2013), un medio semiótico son los recursos lingüísticos, objetos, herramientas o signos que los estudiantes utilizan en la construcción social de significados con el fin de tomar conciencia, expresar sus intenciones y realizar acciones que le permitan alcanzar un objetivo. Vergel (2015) manifestó que dicho proceso de semiosis perceptual se transforma en un nodo semiótico (entendido como la movilización entre varios medios semióticos) ya que caracteriza la actividad reflexiva de la

estudiante. Además, resaltó que cuando Laura expresó *"6 y sumándole 3"* efectuó una generalización de acciones a partir de las operaciones.

Luego, le solicitó a la estudiante escribir un mensaje a un compañero que no asistió a la clase en donde le debe explicar cómo calcular el número de círculos que tiene la figura 1000, el mensaje creado por Laura fue:

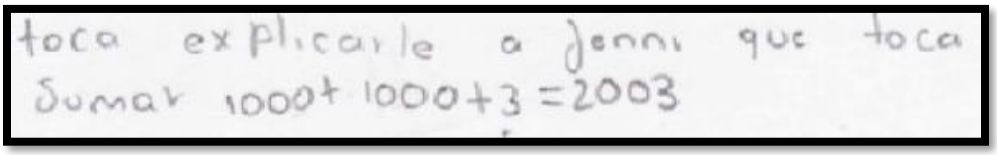


Imagen 3: Mensaje que permite calcular la cantidad de círculos de la figura 1000 (p.203) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3).

El autor consideró que, Laura realizó una generalización algebraica factual ya que lo indeterminado no se nombró, posiblemente quedó incrustada en los medios semióticos utilizados (percepción, gestos, ritmo y palabras). Sin embargo, gracias a la materialidad de la actividad, los estudiantes se concientizaron de la misma y el pensamiento algebraico pudo surgir. Además, cuando expresó que "*siempre le vamos a sumar acá, la torre"*, la estudiante reconoció que independientemente de la figura, los tres círculos se deben sumar. Por lo tanto, Vergel (2015) afirmó que el lenguaje natural permite expresar una fórmula en acción. También concluyó que, el diálogo que se constituye a la labor conjunta o a la actividad, permitió que los estudiantes tomaran conciencia de la comunalidad y la generalizaran, es decir, dicha abducción se utilizó para determinar el número de círculos de cualquier figura particular.

Luego, para nombrar lo indeterminado y para operarlo analíticamente, el autor propuso a los estudiantes la siguiente situación:

La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

Imagen 4: Ítem propuesto para nombrar lo indeterminado (p.208) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3).

Jimmy, otro estudiante escribió el siguiente mensaje*:*

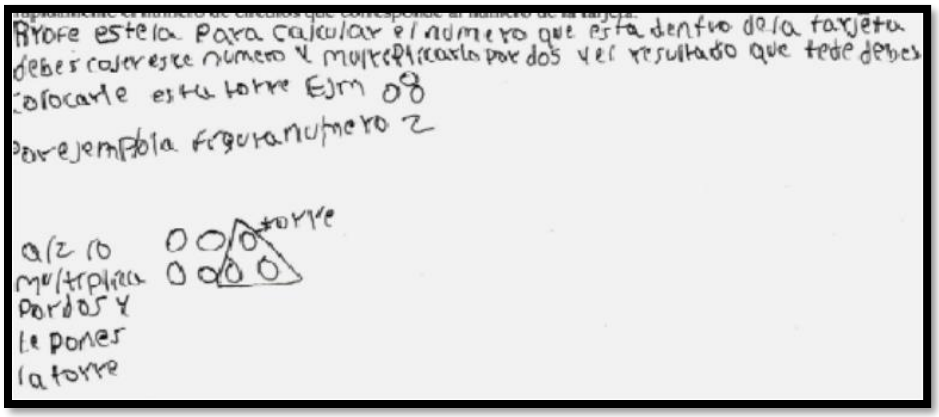


Imagen 5: Mensaje que permite calcular el número que se encuentra dentro de la tarjeta (p.209) por Vergel, R., 2015, PNA, 9(3).

Cuando Jimmy explicó su mensaje utilizó movimientos tales como el señalar, tocar y deslizar, es decir, según el autor se entiende como una fórmula corpórea. Además, dicha acción lingüística - perceptiva - gestual se transforma en un nodo semiótico que permite la toma de conciencia. Según Vergel (2015) cuando el estudiante escribió *"el número que está dentro de la tarjeta"* especificó la indeterminancia a través de una designación semiótica lingüística y expresó la analiticidad, es decir, el carácter operatorio de la indeterminancia, cuando menciona *"coger el número y multiplicarlo por dos y el resultado que te dé debes colocarle esta torre"*. Otros estudiantes nombraron lo indeterminado como *"figura", "el número que le salga en la tarjeta", "el número que te entregaron"* y *"el número que esté en la cartulina"*. Además, la analiticidad se evidenció cuando los estudiantes expresaron que *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé le sumo tres", "sumar el número que te salga en la tarjeta dos veces y le suma tres", "el número que te entregaron tienes que multiplicarlo por dos y el número que te dio le sumas tres"* y *"el número que esté en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres"*.

Finalmente, Vergel (2015) concluyó que, los estudiantes identificaron la comunalidad y la abducción de esta, lo cual permitió calcular cualquier término de la secuencia de manera lingüística, en donde se evidenció la analiticidad de la característica de la generalización algebraica e incluso involucraban un carácter operatorio en cada una de las expresiones. Además, el autor conjeturó que posiblemente la analiticidad de la generalización algebraica contribuye a la analiticidad del pensamiento algebraico. También afirmó que, las secuencias figurales con apoyo tabular permiten la movilización de los medios semióticos tales como la percepción, los gestos y los recursos lingüísticos, generando una transición de un pensamiento algebraico factual al contextual ya que en este proceso se nombró lo indeterminado, es decir, la denotación se realizó a través de una actividad multimodal, "en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural" (Radford, 2013, p.12).

En la investigación que realizaron Callejo, et al. (2016) el objetivo fue identificar las características del pensamiento algebraico en estudiantes de 6 a 12 años cuando resuelven problemas de patrones lineales. Para ello, participaron 264 alumnos de educación primaria de un centro público de la provincia de Alicante, 43 de ellos eran de grado primero, 53 de segundo, 46 de tercero, 41 de cuarto, 35 de quinto y 46 de sexto. Cabe aclarar que ningún estudiante había trabajado con generalización de patrones. La tarea propuesta por los autores involucraba la siguiente situación:

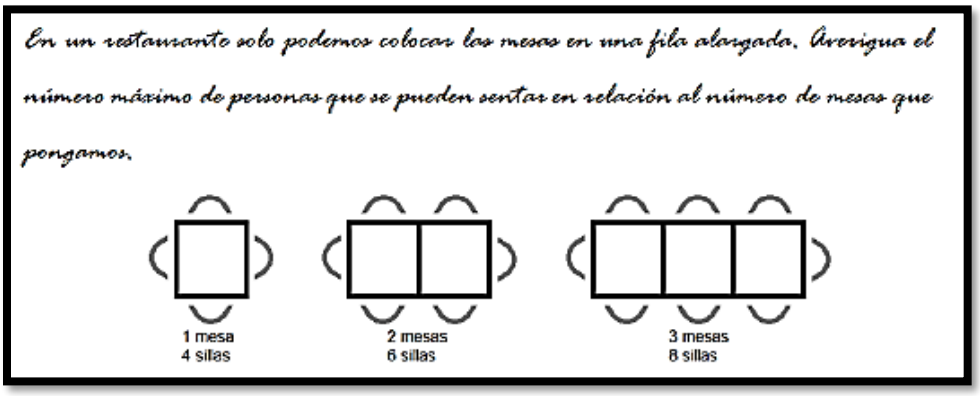


Imagen 6: Secuencia figural con apoyo tabular (p.11) por Callejo, et al. 2016, Avances de Investigación en Educación Matemática, 10.

Para esta tarea se plantearon cinco preguntas, cada una con un propósito que permitió cumplir con el objetivo mencionado anteriormente, estas son:

- Pregunta 1: ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
  Objetivo: Representar el siguiente término de la sucesión.

- Pregunta 2: ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
  Objetivo: Calcular el número de elementos que componen los dos siguientes términos.

- Pregunta 3: En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
  Objetivo: Calcular el número de elementos que compone un término lejano.

- Pregunta 4: Si en un cumpleaños se han invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
  Objetivo: Identificar cuál es el término que tiene un número dado de elementos.

- Pregunta 5: Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.
  Objetivo: Identificar la regla general.

Para el análisis de los resultados, los autores tuvieron en cuenta cuatro categorías de la generalización cercana y lejana, las cuales permitieron analizar la coordinación entre la estructura espacial y la numérica cuando se representa gráficamente un término en particular; la relación funcional, es decir, asociar el número de mesas con el de sillas y el proceso inverso al relacionar el número de sillas con el de mesas. Dichas categorías son:

- Representación gráfica o recuento directo sobre un dibujo de la figura solicitada.

- Estrategia recursiva o construcción de la sucesión numérica hasta el término buscado, añadiendo a cada término la diferencia constante para obtener el siguiente, $a_{n+1} = a_n + d$.

- Relación funcional no proporcional, agrupando mentalmente las sillas de la figura solicitada y relacionando el número de mesas con el de sillas, asumiendo implícitamente que $f(n) = an + b, b \neq 0$.

- Razonamiento proporcional, entendiendo implícitamente que hay una relación de proporcionalidad entre el número de mesas y el de sillas, $f(n) = an$.

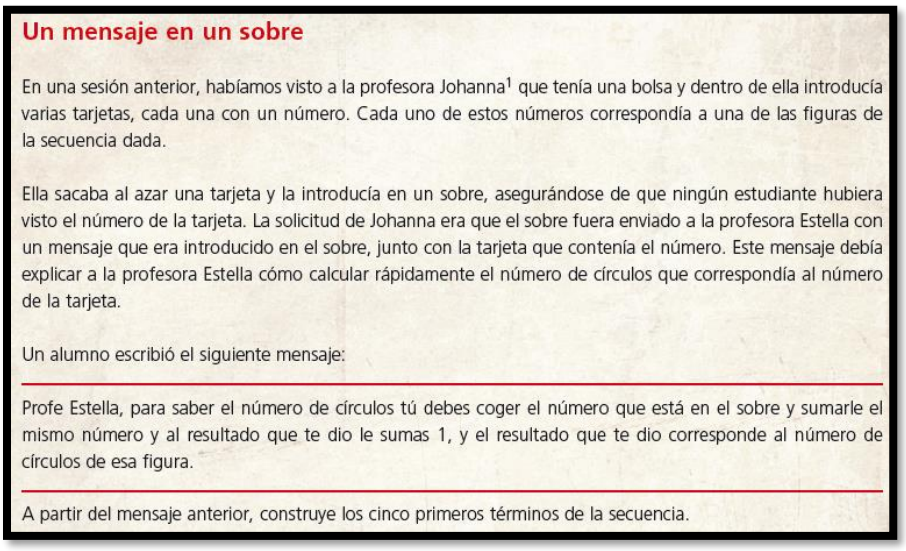
Los autores observaron tres métodos diferentes utilizados por los estudiantes al momento de reconocer la relación entre el número de sillas y de mesas. En el primero, multiplicaron el número de mesas por dos para obtener el número de sillas situadas arriba y abajo, y le suman dos que son las sillas de los extremos. En el segundo, realizaron una descomposición entre las mesas de los extremos con tres sillas y las de en medio con dos sillas cada una, efectuaron una multiplicación para cada caso y sumaron los resultados obtenidos. En el tercero, separaron una de las mesas de los extremos y añadieron la silla del otro extremo, conformando una mesa con cuatro sillas, luego multiplicaron el resto de las mesas por dos y sumaron las dos cantidades.

Callejo, et al. (2016) afirmaron que la mayoría de los estudiantes acudieron a la representación gráfica para visualizar con mayor facilidad el patrón de la secuencia y poder hacer un recuento de la cantidad de sillas, esto permitió evidenciar la coordinación entre la estructura espacial y numérica. Además, solamente en 3 estudiantes se reflejó la analiticidad, ya que encontraron el número de sillas utilizando la identificación de la recursividad, es decir, sumando 2 sillas por cada mesa añadida. Pero, de los 3 estudiantes sólo 1 respondió correctamente, pues los otros dos no identificaron la diferencia constante; sin embargo, evidenciaron un incipiente sentido de la indeterminación ya que se refieren a la cantidad indeterminada de mesas como si la conocieran, lo que manifiesta una forma de pensamiento algebraico contextual. Por otro lado, los errores más frecuentes que se presentaron fue el reconocimiento de que cada mesa tiene dos sillas, el olvido de las sillas de los extremos o multiplicar las sillas de los extremos con las demás sillas en vez de sumarlas.

De acuerdo con los resultados obtenidos y con el análisis realizado, los autores concluyeron que el cambio de una representación gráfica a una estrategia funcional implica un salto

cualitativo al momento de relacionar dos cantidades, ya que la mayoría de los estudiantes recurrieron a la estructura espacial y numérica de la figura, descomponiéndola y recomponiéndola, lo que permitió encontrar la relación funcional inversa, pero no fue suficiente para reconocer la regla general. Además, en las explicaciones de los cálculos realizados, utilizaron deícticos espaciales y mostraron un modo de pensamiento algebraico local (explicación de números concretos a partir de una figura específica) o contextual (figura cualquiera, por ejemplo, cuando mencionan "*el número de mesas"* o al momento de expresar verbalmente la regla general).

En la investigación realizada por Vergel (2016) se presentó la experiencia llevada a cabo con dos estudiantes con el fin de explorar la manera en que utilizaban la indeterminancia analítica o algebraica a través de la siguiente tarea:



Un mensaje en un sobre

En una sesión anterior, habíamos visto a la profesora Johanna[1] que tenía una bolsa y dentro de ella introducía varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números correspondía a una de las figuras de la secuencia dada.

Ella sacaba al azar una tarjeta y la introducía en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante hubiera visto el número de la tarjeta. La solicitud de Johanna era que el sobre fuera enviado a la profesora Estella con un mensaje que era introducido en el sobre, junto con la tarjeta que contenía el número. Este mensaje debía explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que correspondía al número de la tarjeta.

Un alumno escribió el siguiente mensaje:

Profe Estella, para saber el número de círculos tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado que te dio le sumas 1, y el resultado que te dio corresponde al número de círculos de esa figura.

A partir del mensaje anterior, construye los cinco primeros términos de la secuencia.

Imagen 7: Mensaje en un sobre (p.25) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73.

La secuencia figural que sirvió de base fue:

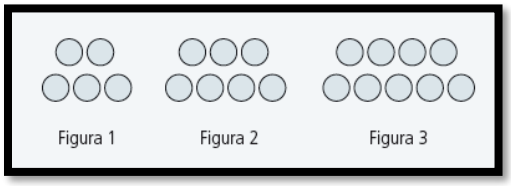


Imagen 8: Secuencia figural con apoyo tabular (p.26) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73.

En el desarrollo de la actividad, el investigador observó que los estudiantes utilizaron el lenguaje natural y algunos deícticos para expresar el lugar donde se deben ubicar las figuras en la secuencia a través de movimientos corpóreos (gestos):

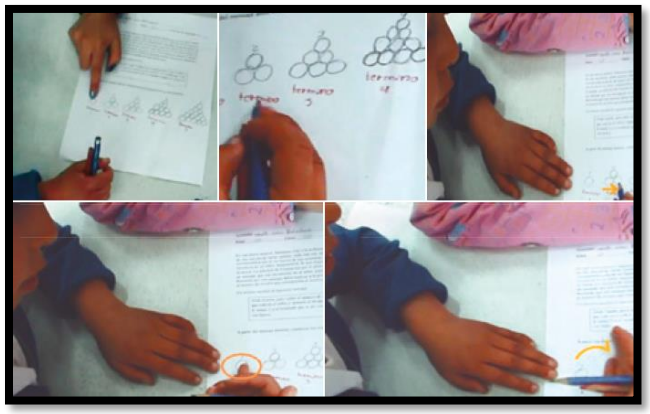


Imagen 9: Señalamientos y deícticos espaciales en las producciones de los estudiantes (p.26) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73.

Además, el programa Praat permitió realizar un análisis prosódico de un diálogo entre la profesora y uno de los estudiantes y se evidenció cómo el ritmo emerge como un medio semiótico de objetivación. En este caso el gesto y el ritmo se complementan para formar un nodo semiótico:

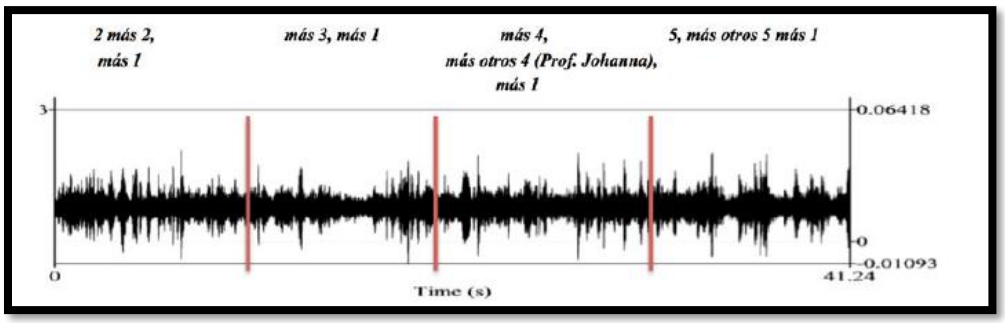


Imagen 10: Ritmo en las producciones de los estudiantes (p.29) por Vergel, R, 2016, UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73

De acuerdo con los resultados de la investigación, Vergel (2016) afirmó que por lo general en una expresión algebraica no se evidencian los medios semióticos que permitieron llegar a ella, por ejemplo, el lenguaje natural, los gestos, los deícticos espaciales, el ritmo, los movimientos corporales, las palabras, las miradas, entre otros. Por esta razón, el autor consideró que esta actividad propuesta se constituye en un problema de carácter semiótico. Además, Vergel (2016) mencionó que los diferentes sistemas semióticos de objetivación componen un nodo semiótico.

En el trabajo presentado por Radford (2018) participaron estudiantes de 5 a 12 años de grado cuarto, quinto y sexto. Para cada uno de los grados, se trabajó en grupos de 3 o 4 estudiantes. La investigación tuvo como objetivo comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en situaciones que involucran la generalización de patrones. La situación presentada tenía como protagonista a una hormiga que se encontró un recipiente con una

miga dentro y cada día agregaba dos migas más. Luego, se solicitó dibujar los recipientes correspondientes a los días 4 y 5 teniendo en cuenta la siguiente representación:

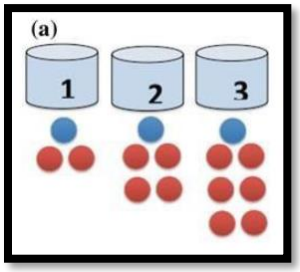


Imagen 11: Secuencia figural (p.13) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.).

Luego, se preguntó por la cantidad de migajas correspondientes al día 33, lo cual permitió revelar el proceso de generalización de los estudiantes, las representaciones que construyen y la manera de expresión oral de sus interpretaciones, que contribuyeron a la toma de conciencia en el desarrollo de la estructura de la secuencia. Posteriormente, la maestra solicitó a los estudiantes que escribieran un mensaje para que otra persona lograra calcular la cantidad de migajas necesarias para un día determinado. El análisis de datos se centró en un enfoque multimodal, detallando los gestos, el lenguaje, la percepción y el uso de símbolos que dan cuenta de la forma no convencional de la generalidad matemática significativa.

En primer lugar, en el grado cuarto, uno de los estudiantes acudió a la cantidad de migajas del día anterior y le agrega dos más para establecer la cantidad total de migajas que le corresponde a cierto día, tal y como lo mencionó en la expresión *"para el día 4 sacamos el número nuevamente, es decir, el día 3. Después de eso agregaremos dos migas"*. Mientras que, otro estudiante realiza dos columnas, en cada una de ellas, dibuja la cantidad de migajas teniendo en cuenta el número de día que se indique y le agrega la migaja de la parte superior, tal y como lo indica al comentar que *"siempre debemos dibujar la cantidad de días así (señalando la columna de la izquierda) más uno en la parte superior",* es decir, reconoció las partes figurativas del término para realizar la representación. Radford (2018) afirmó que cuando el estudiante utilizó el adverbio de tiempo *"siempre"* hace alusión a todos los términos de la sucesión, ya que permitió que expresara de manera oral una generalización de tipo fáctica, es decir, que la variable aparece de forma tácita. En cuanto al cálculo que debían crear para determinar el número de migajas teniendo en cuenta el día, surgieron las siguientes expresiones:

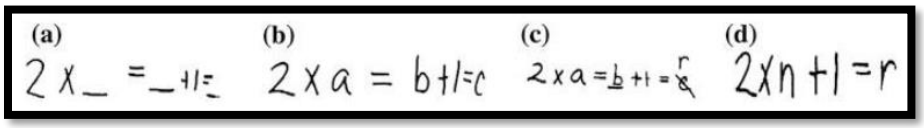


Imagen 12: Expresiones simbólicas escritas por estudiantes de cuarto grado (p.18) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.).

Para la primera expresión, una estudiante sugirió utilizar una letra, sin embargo, lo hace como si supiera el número que le corresponde al mencionar *"le pones* r *a la cantidad de días*

y pones de cada lado y es igual a 200*, luego le sumas* 1 *y es igual a* 201". Seguido de esto, el docente aclara que el número de día se desconoce, por lo tanto, para representar el número del día, los estudiantes proponen utilizar signos tales como "#", " ? " y ". ". Posteriormente, utilizaron letras, tal y como se muestra en la segunda expresión. La docente solicitó mencionar el significado de cada letra, Lola mencionó que "2 veces el número más 1 es igual a la respuesta", teniendo en cuenta el análisis de la estudiante, cambiaron las letras por n de número y r de respuesta.

En segundo lugar, los estudiantes de grado quinto representaron rápidamente el día 4 y 5, no se presentó alguna dificultad para determinar la cantidad de migajas para el día 33 y reconocieron que, independientemente del día, la cantidad de migajas es impar. Además, identificaron lingüísticamente las variables de manera explícita y adecuada. En cuanto a la creación del mensaje que permite determinar el número de migajas teniendo en cuenta el día, surgieron las siguientes expresiones:

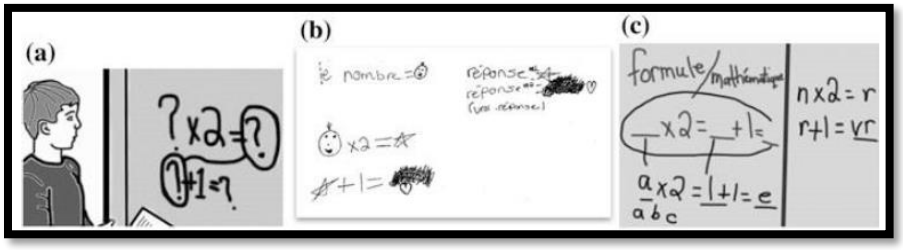


Imagen 13: Expresiones simbólicas escritas por estudiantes de grado quinto (p.21) por Radford, L., 2018, Published in: C. Kieran (Ed.).

El autor evidenció que, en las dos primeras fórmulas, cada grupo de estudiantes separó los cálculos en dos partes, mientras que la tercera no, pues consideraron que no era necesario hacerlo. Posteriormente, el docente solicitó explicar el significado de las letras y los coeficientes teniendo en cuenta el contexto de la situación problema. Por ejemplo, un estudiante mencionó que si se tiene la fórmula $10x + 5 = r$, "10 son las migas añadidas, n es el número del día, 5 es la primera miga" y r la respuesta", es decir, implícitamente está señalando que, el coeficiente hace referencia a las migas añadidas, n es el número de día, el término independiente corresponde a la primera miga y el término independiente sería la respuesta.

En tercer lugar, en el grado sexto no se presentó alguna dificultad relacionada a la representación de las migajas ni a la determinación de la cantidad de migajas que corresponden al día 33. La mayoría de los estudiantes expresaron que, para determinar la cantidad total de migajas de un día cualquiera *"primero hay que tomar el número del día y multiplicarlo por 2, porque cada día suma dos migajas. Y hay que sumar 1, que es la miga que encontró la hormiga en el recipiente"*, esto les permitió llegar fácilmente a la expresión alfanumérica que representaba la generalización y comprender el significado de las variables y la constante, una de las expresiones era $(n2) \times +1 = m$, donde n corresponde al número de día y m el total de migas que se encuentran en el recipiente.

De acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis de estos, Radford (2018) concluyó que, en el grado cuarto los estudiantes realizaron generalizaciones fácticas, pero se les dificultó expresar una generalización de tipo contextual. En cuanto al grado quinto, los estudiantes formularon lingüísticamente las variables y las relacionaron entre sí, ya que entró a un pensamiento verbal más no al simbólico, sin embargo, la deicticidad de las generalizaciones contextuales no desaparecieron, sino que se transformaron en nuevos signos que permitieron expresar la generalización de manera simbólica. Finalmente, en el grado sexto, surgió el pensamiento simbólico algebraico e incluso se siguió desarrollando la concientización del significado de las variables en otro tipo de situaciones.

En el trabajo realizado por Gustin y Pontón (2020) participaron 30 estudiantes de 11 y 12 años pertenecientes al grado séptimo, con los que se trabajaron dos situaciones problema y los resultados se analizaron teniendo en cuenta la concepción multimodal del pensamiento humano planteados por Miranda, et al. (2007), por esta razón, tuvieron en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados tales como el sistema semiótico del lenguaje escrito, el lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc., que surgieron durante el desarrollo de la actividad. La primera situación propuesta contiene una secuencia figural con apoyo tabular:

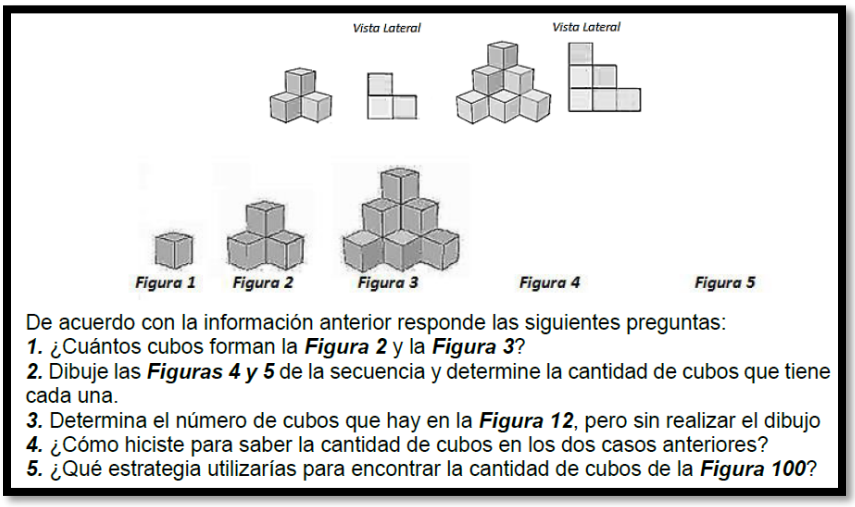
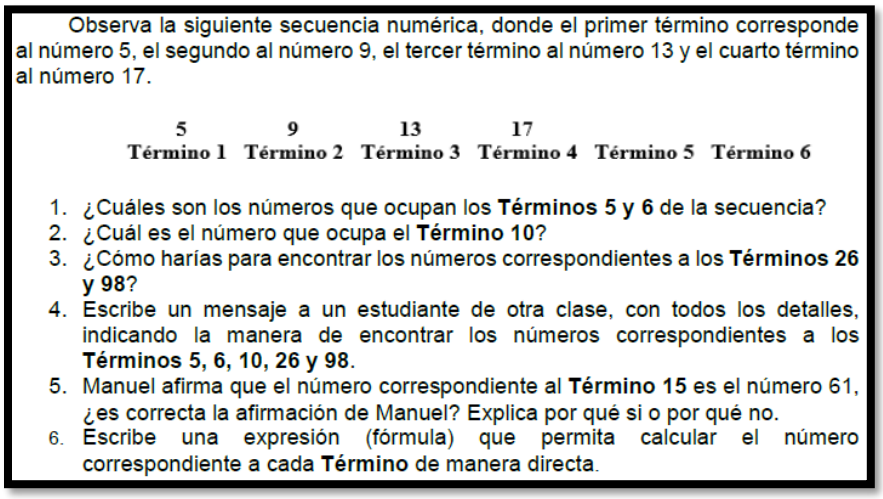


Imagen 14: Secuencia figural con apoyo tabular (p.44) por Gustin, J. y Pontón, T., 2020. Unión, Año XVI (60).

Los autores evidenciaron diferentes medios utilizados por los estudiantes tales como gestos, dibujos auxiliares, señalamientos con el lápiz y el dedo, deícticos espaciales y el ritmo (entonación constante cuando enumeraban los cubos). Gustin y Pontón (2020) afirmaron que la coordinación de los medios semióticos caracteriza la actividad perceptual y reflexiva lo que permitió constituir un nodo semiótico que contribuyó a la realización de sumas entre la cantidad de cubos visibles y ocultos de cada figura. Sin embargo, a pesar de que algunos estudiantes identificaron la comunalidad al mencionar expresiones como "*se van aumentando de a 4*", solamente llegaron a una generalización aritmética ya que la abducción no fue analítica, es decir, lo indeterminado quedó sin nombrar.

La segunda situación propuesta contiene una secuencia numérica con apoyo tabular:



Observa la siguiente secuencia numérica, donde el primer término corresponde al número 5, el segundo al número 9, el tercer término al número 13 y el cuarto término al número 17.

5	9	13	17		
Término 1	**Término 2**	**Término 3**	**Término 4**	**Término 5**	**Término 6**

1. ¿Cuáles son los números que ocupan los **Términos 5 y 6** de la secuencia?
2. ¿Cuál es el número que ocupa el **Término 10**?
3. ¿Cómo harías para encontrar los números correspondientes a los **Términos 26 y 98**?
4. Escribe un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, indicando la manera de encontrar los números correspondientes a los **Términos 5, 6, 10, 26 y 98**.
5. Manuel afirma que el número correspondiente al **Término 15** es el número 61, ¿es correcta la afirmación de Manuel? Explica por qué si o por qué no.
6. Escribe una expresión (fórmula) que permita calcular el número correspondiente a cada **Término** de manera directa.

Imagen 15: Secuencia numérica con apoyo tabular (p.49) por Gustin, J. y Pontón, T., 2020. Unión, Año XVI (60).

Los autores evidenciaron que, durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes utilizaron los medios semióticos tales como los señalamientos con el lápiz, dibujos auxiliares y frases clave, con el fin de contribuir a la construcción de una generalización factual, contextual y simbólica, ya que identificaron la característica en común, hubo una abducción analítica que se aplicó a términos no dados y dedujeron una expresión ($4n + 1$) acompañada de expresiones como "*n depende del término que sea" y "el 4 y el 1 siempre se aplican y no cambian"*. Además, cuando el docente intervino preguntando *¿el 26 qué representa?* y una estudiante contesta que corresponde al número del término, se empezó a manifestar el sentido de la indeterminancia y la expresión simbólica, de hecho, cuando menciona que para encontrar el número que corresponde a cualquier término *"sería el número del término por cuatro más uno y da el resultado",* no solo establece el sentido de la indeterminancia sino también hay una analiticidad y una designación simbólica.

De acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis realizado, Gustin y Pontón (2020) concluyen que las interacciones de los diferentes medios semióticos contribuyeron a la formación de nodos semióticos que permitieron que los estudiantes tomaran conciencia de los objetos matemáticos, en especial, de la indeterminancia, la analiticidad y del significado de la variable.

Ayala y Molina (2021) en su investigación, tun vieron como finalidad describir la manera en que tres estudiantes de grado cuarto (de 9 y 10 años) construyen, dan sentido y expresan la relación funcional durante el proceso de generalización. Cabe aclarar que ellos nunca han trabajado ni con la generalización ni con expresiones algebraicas. Las actividades propuestas eran contextuales, por ejemplo, el dinero gastado en un parque o la cantidad de sorpresas necesarias en una fiesta de cumpleaños y las preguntas estaban organizadas de lo particular a lo general y expresadas por medio de dibujos, en un lenguaje natural y alfanumérico. La situación problema se sitúa en una fiesta de cumpleaños en donde regalan la misma cantidad

de globos a cada invitado y colocan otro globo en la puerta para saber en qué casa se realizó la celebración. A continuación, se dan a conocer algunos ejemplos de las preguntas que se realizaron:

- Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos ¿qué crees que hizo con los globos?
- Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos ¿qué crees que hizo con los globos?
- Cuando hay 5 invitados ¿cuántos globos necesita?
- Cuando hay 15 invitados ¿cuántos globos necesita?
- Un niño de la clase dice que hay 8 invitados por lo que necesitarán 22 globos ¿estás de acuerdo con él?
- ¿Cómo le explicarías a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?
- Cuando hay "muchos" / "infinitos" invitados ¿cuántos globos necesita?
- Cuando hay R invitados ¿cuántos globos necesita?
- ¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan Z+Z+Z globos"? ¿Por qué?
- ¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan W globos"? ¿Por qué?

Para solucionar las dos primeras preguntas, Mateo utilizó los globos de papel, seleccionando la cantidad total y repartiéndolos uno a uno, su conjetura fue que Isabel le dio tres globos a cada invitado y dejó uno en la puerta:

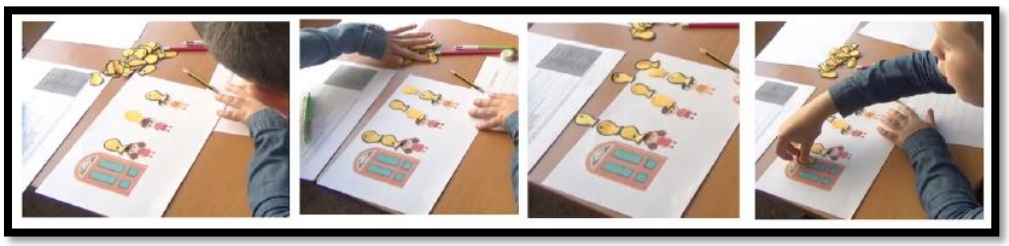


Imagen 16: Medios semióticos movilizados en las producciones de los estudiantes (p.222) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

Cuando se solicitó al estudiante comprobar su conjetura realizó un conteo, pero luego propuso hacer una división, después verbalizó su cálculo efectuando una multiplicación, aunque registró una división. Las autoras afirmaron que la estrategia para determinar la cantidad de globos teniendo en cuenta el número de invitados se volvió más sofisticada debido a la limitación del material y la extensión del conteo:

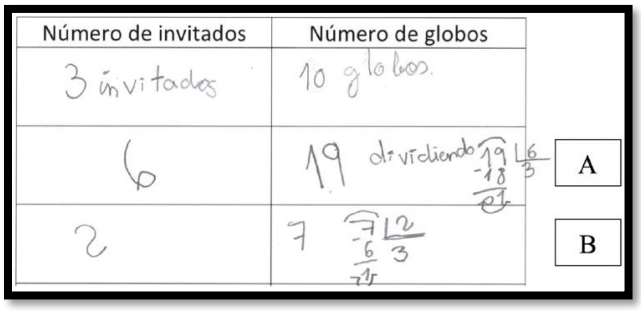


Imagen 17: Procedimientos realizados por un estudiante (p.223) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

Además, las investigadoras evidenciaron que Mateo identificó la relación funcional y la expresó verbalmente a partir de la indeterminación de manera analítica, lo que dio sentido a la fórmula que obtuvo y la relacionó con el contexto, esto se logró gracias al reparto del material ya que aportó a la comprensión de la situación y fue el sustento al momento de proponer una multiplicación:

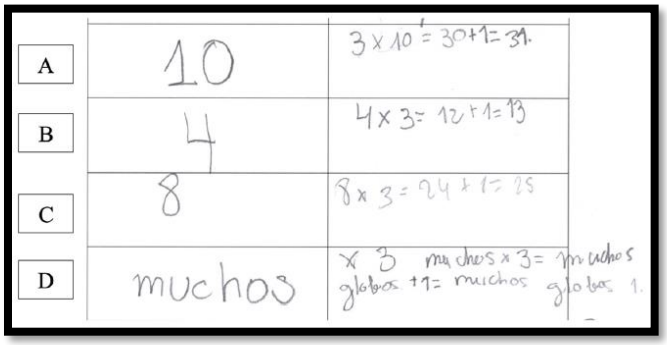


Imagen 18: Expresiones escritas y procedimientos realizados por Mateo (p.225) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

Cuando la entrevistadora le preguntó a Mateo qué sucedía cuando asistían infinitos invitados, él contestó que *"pues multiplicando por tres, infinito. Por tres es igual a infinito. Entonces infinito globos, más uno, infinitos globos uno".* Tanto para muchos como para infinitos, el estudiante expresó la relación de forma indeterminada, operó como si las cantidades fueran conocidas y representó las variables de manera verbal, relacionándolas con el contexto. En cuanto a la representación con símbolos alfanuméricos, Mateo asignó un valor a cada letra asociándola con su forma, pero recurrió a cantidades concretas:

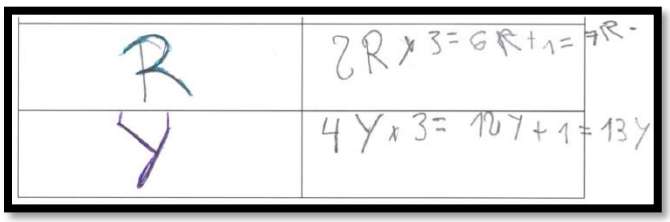


Imagen 19: Expresiones simbólicas escritas por Mateo (p.226) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

Posteriormente, Mateo evaluó la veracidad de tres pares de valores: (Z, Z+Z+Z), (Z, W) y (Z, Z×3 +1). Para el primer caso, mencionó que "en vez de multiplicar, suma y le faltó el globo de la puerta", para el segundo par asignó un número a cada letra Z = 7 Y W = 11 y divide 11 entre 7 y concluyó que sobraban 3 globos. Finalmente, en cuanto al tercer caso, evaluó la letra como 7, a medida que realizaba el cálculo, lo relacionaba con el contexto y mencionó explícitamente las variables.

Hugo, otro estudiante se le facilitó llegar a la conjetura que se daban 3 globos a cada invitado, realizaba gestos de reparto con ayuda de sus dedos y del material, además, realizaba el número tres con la mano y la movía hacia la derecha, simultáneamente, mencionaba que *"repartió tres. Le dio tres a cada niño y los demás se los quedó ella"*. Luego, comprobó su conjetura utilizando el material. Sofía, la tercera estudiante, abordó el problema de manera similar a Hugo. Al preguntar por 5 invitados, ambos estudiantes modificaron su relación, Hugo sumó voz alta de tres en tres y se apoyó del registro escrito:

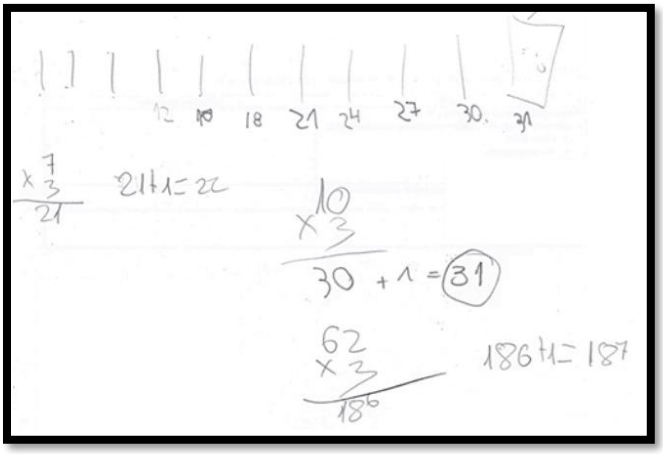


Imagen 20: Procedimientos realizados por Hugo (p.230) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

Mientras que Sofía, contó de uno en uno los dedos y luego comentó que *"mis dedos son, por ejemplo, los invitados. Entonces yo voy contando de tres en tres y me sale el número"*. Por lo tanto, Sofía resolvió la situación sumando y multiplicando, lo que permitió identificar la estructura de la situación al momento de relacionar sus operaciones con el contexto:

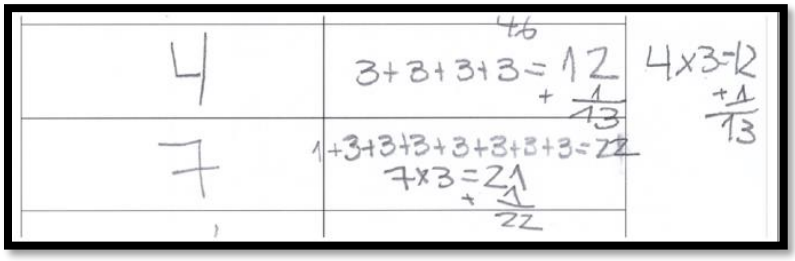


Imagen 21: Procedimientos realizados por Sofía (p.231) por Ayala, C. y Molina, M., 2021. PNA, 15 (3).

En cuanto a la pregunta relacionada con "muchos" e "infinitos" invitados, Hugo relacionó el término "muchos" con la cantidad de 100 y para "infinitos" con 1000. Sin embargo,

mencionó que el resultado de la multiplicación eran los globos para los invitados sumando uno más para la puerta. Las autoras afirmaron que en este momento el estudiante identificó una estructura e incluso cuando el entrevistador planteó un caso falso, Hugo argumentó por qué no funcionaba. Mientras que Sofía, mencionó que no le era posible hacer algún cálculo si no se sabía el número de invitados y ejemplificó con cantidades particulares.

Para el caso de la representación alfanumérica, Hugo comentó que no sabía qué representaba la legra R y realizó representaciones tales como "$R \times A$" o "$R \times 3 = 3$" pero no las involucró dentro del contexto. Sofía les asignó valores numéricos a las letras teniendo en cuenta el orden alfabético, es decir, mencionó que "como la B es la segunda letra, pues sumaria dos veces tres, porque tres más tres, son seis, entonces el número que habría pensado son seis, le sumo uno, que el uno es de la puerta. Son siete".

Por otro lado, Sofía no reconoció la expresión $Z \times 3 + 1$. Sin embargo, argumentó que no es posible darse el caso de Z invitados y Z globos porque le estaría dando un globo a cada uno.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y el análisis realizado por parte de Ayala y Molina (2021) concluyeron que, Mateo realizó una generalización contextual; mientras que, Sofía y Hugo, una generalización en acto. Además, afirmaron que los estudiantes utilizaron varios medios semióticos (por ejemplo, los gestos de reparto, el conteo, los dibujos y los registros escritos de sus cálculos) para dar un sentido a la situación y para determinar una relación funcional. También, aseguraron que una manera para percibir que los estudiantes generalizaron fue reconocer que identificaron la estructura involucrada en el problema a pesar de que no la expresaron explícitamente.

Finalmente, las autoras consideraron importante incorporar varias maneras de preguntar por lo indeterminado al momento de representar la generalización de manera alfanumérica, por ejemplo, utilizando los términos "muchos" e "infinitos" o proponiendo expresiones verdaderas o falsas, aunque en este último caso, los estudiantes le asignaron un valor numérico cualquiera o teniendo en cuenta la posición que ocupa en el abecedario. Esto permitió que los estudiantes centraran su atención en la situación problema, que transfirieran la relación identificada en los casos particulares y que tuvieran ideas incipientes sobre lo indeterminado.

La investigación realizada por Zapatera (2018a) tuvo como objetivo estudiar la manera en que los estudiantes resuelven problemas de generalización de patrones. Para ello, contó con la participación de 106 estudiantes pertenecientes a los grados tercero, cuarto, quinto y sexto, que se sitúan en el rango de edad de 9 a 12 años, cabe aclarar que ninguno ha trabajado con la de generalización de patrones. El autor da a conocer a los estudiantes la siguiente situación adaptada de la original propuesta por Callejo, et al. (2016):

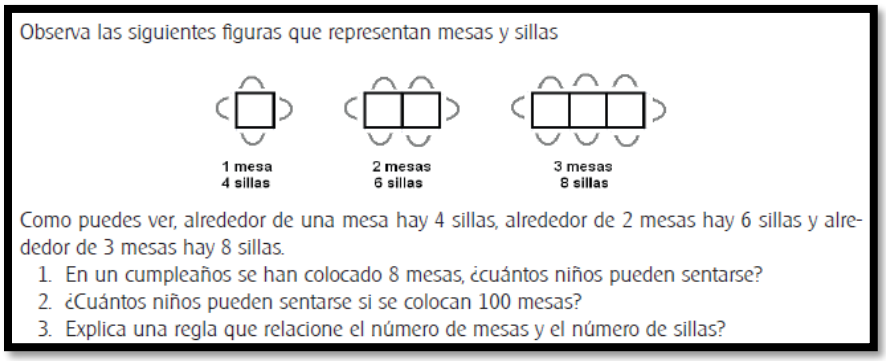


Imagen 22: Secuencia figural con apoyo tabular (p. 92) por Zapatera, A., 2018a. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(1).

Las preguntas propuestas se plantearon con el objetivo de que primero, descubrieran el patrón de crecimiento para realizar una generalización cercana, luego extendieran el rango del patrón hasta 100 mesas para realizar la generalización lejana para finalmente, expresar una regla que permita determinar el número de sillas de acuerdo con un número cualquiera de mesas. De acuerdo con los resultados obtenidos, el autor afirmó que 97 estudiantes realizaron correctamente la generalización cercana, 45 de ellos realizaron correctamente la generalización lejana y 39 de ellos expresaron correctamente la regla general. Además, mencionó que la estrategia más utilizada por los estudiantes para realizar una generalización cercana fue la aditiva (recuento y dibujo), para la lejana fue la funcional (función local) y para la expresión de la regla general fue la proporcional y la función global.

Zapatera (2018) concluyó que para poder llegar a una generalización algebraica se debe iniciar por una generalización cercana con el fin de identificar un patrón de crecimiento, luego con una generalidad lejana, lo cual permitirá al estudiante expresar la regla general. Además, en el proceso de generalización realizado por los 39 estudiantes, el autor logró identificar cinco métodos diferentes de solución de acuerdo con las tres preguntas planteadas en la situación problema:

- Recuento sobre el dibujo, función local y función global (18 estudiantes).
- Recuento sobre el dibujo, función local, función local (13 estudiantes).
- Función local, función local, función global (5 estudiantes).
- Función local, función local, función local (2 estudiantes).
- Recuento sobre el dibujo, recuento sobre el dibujo y recuento iterativo (1 estudiante).

El estudio que realizaron Uicab, et al. (2022) es cualitativo, descriptivo y longitudinal que tuvo como objetivo describir el proceso y el alcance de la generalización algebraica de los estudiantes durante la resolución de las tareas de generalización. En dicha investigación, participaron 25 estudiantes de quinto grado pertenecientes a una escuela pública mexicana, el trabajo fue individual y no hubo alguna intervención por parte del investigador. A continuación, se da a conocer una de las secuencias propuestas por los autores, esta es de tipo figural con apoyo tabular junto con uno de los resultados obtenidos por un estudiante:

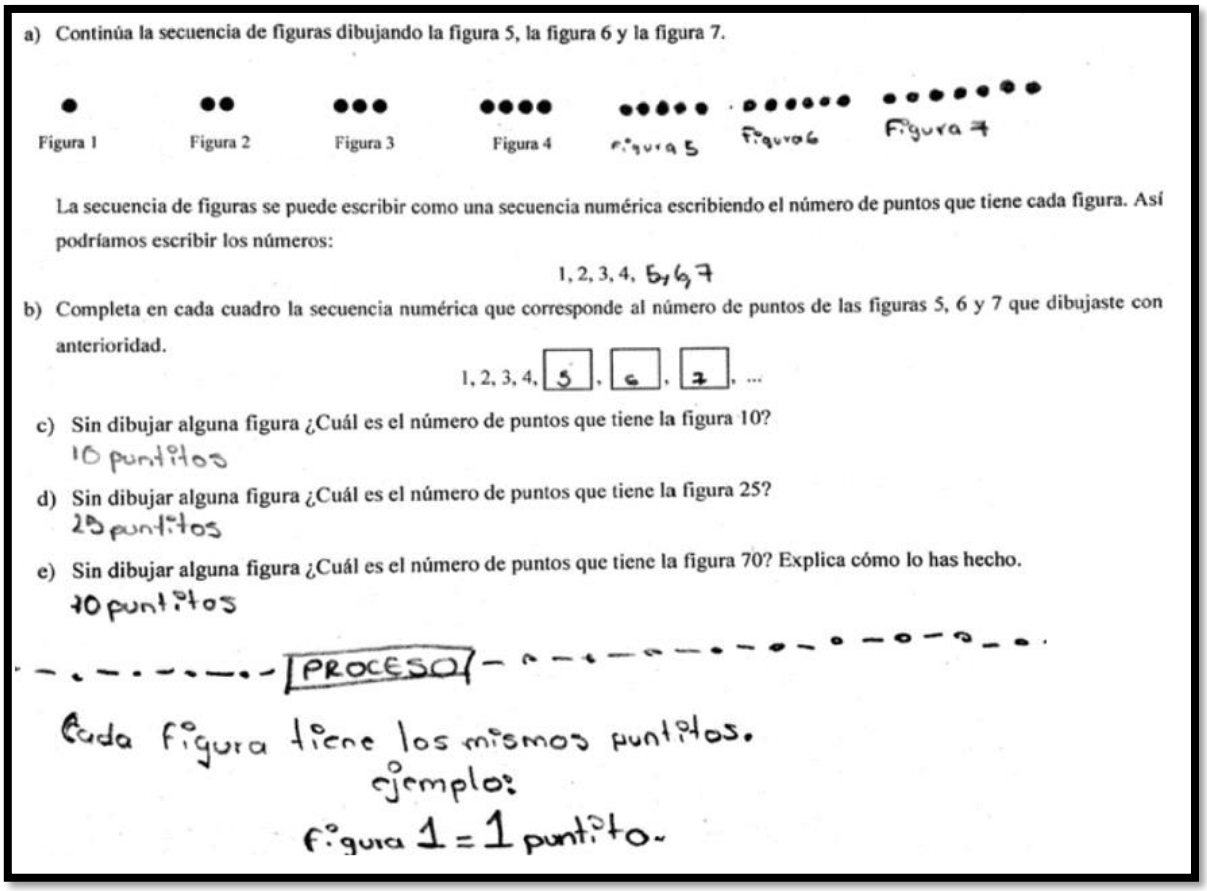

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 figura 5 Figura 6 Figura 7

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 2, 3, 4, [5], [6], [7], ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?
10 puntitos

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25?
25 puntitos

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 70? Explica cómo lo has hecho.
70 puntitos

PROCESO

Cada figura tiene los mismos puntitos.
ejemplo:
figura 1 = 1 puntito.

Imagen 23: Producción de un estudiante de una tarea que involucra una secuencia figural con apoyo tabular (p.53) por Uicab, et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1).

Según los autores, el estudiante transitó de la acción manipular hacia la obtención de sentido y la articulación en el transcurso de su trabajo con ejemplos particulares, lo que le permitió relacionar el número de puntos con el número de la figura, para ser más específicos, en las tres primeras preguntas, manipuló; en la cuarta, realizó la acción de obtención de sentido y en la quinta, articuló. Cabe aclarar que cuando un estudiante utiliza una regla implícita de generalización que le permite trabajar con casos particulares lejanos, se dice que existe una articulación más no una expresión.

Posteriormente, se preguntó a los estudiantes ¿cuál es el número de puntos que tiene la figura 70? y se solicitó argumentar dicha respuesta, los autores lo realizan con el propósito de determinar el alcance de la generalización algebraica al expresar la relación entre el número de puntos y el número de la figura. Para analizar dichas generalizaciones, Uicab, et al. (2022) propusieron las siguientes categorías:

- Categoría 1: Incluye expresiones en donde no se tuvo en cuenta las variables involucradas, ni la variación y ni la relación de correspondencia. (9 estudiantes).

- Categoría 2: Incluye expresiones que involucran las variables, pero no tiene en cuenta la relación de correspondencia. (7 estudiantes).

- Categoría 3: Incluye expresiones que denotan la relación de correspondencia para un caso particular (3 estudiantes).

- Categoría 4: Incluye expresiones en donde se percibe la relación entre las dos variables de manera general teniendo en cuenta que, el número de puntos es el mismo número que el de las figuras. (2 estudiantes).

- Categoría 5: Incluye expresiones que involucra un término cualquiera. (2 estudiantes).

Con base en lo investigado, Uicab, et al. (2022) afirmaron que la mayoría de los estudiantes generalizaron casos particulares, proporcionaron términos lejanos teniendo en cuenta los términos dados y reconocieron las variables involucradas (incluso, algunos expresaron la relación de correspondencia). En cuanto al proceso de generalización, los autores concluyeron que, la mayoría de los estudiantes interpretaron las secuencias, analizaron los registros tabulares y construyeron los términos cercanos. Además, algunos estudiantes lograron transitar de la acción de manipulación a la obtención de sentido y la articulación.

Por último, en el artículo realizado por Vergel, et al. (2022) se dio a conocer la investigación realizada que tuvo como objetivo indagar acerca de los medios semióticos de objetivación que podrían emerger durante la actividad matemática. En ella, presentó dos ejemplos de la actividad semiótica, el primero contiene una secuencia numérica con apoyo tabular en donde se solicitaba determinar el número que corresponde al término 4 y 5 con el fin de analizar la secuencia. Posteriormente, debían hallar el número correspondiente al término 15:



Imagen 24: Secuencia numérica con apoyo tabular (p.8) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1).

Yaneth, una estudiante completó la secuencia hasta llegar al término 6 que le corresponde el número 17. Para contestar a la pregunta asociada al término 15, tuvo en cuenta el término 6 y sumó 9 veces el número 3 para obtener que al término 15 le corresponde el número 44:

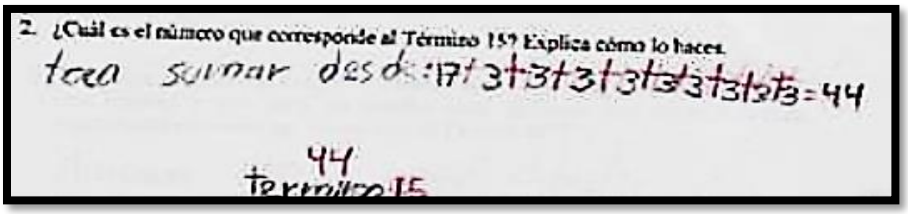


Imagen 25: Cálculo del término 15 de la secuencia (p.10) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1).

Los autores afirmaron que la estudiante identificó la característica en común, es decir, que se debía aumentar 3. Por lo tanto, su generalización es de tipo aritmética sofisticada, ya que la abducción es utilizada para transitar de un término a otro. De hecho, inicialmente tiene en cuenta un término conocido y procede a repetir la adición de tres hasta llegar al término solicitado. Además, Vergel, et al. (2022) identificaron que la estudiante no reconoció las variables que estaban inmersas en la secuencia, sino que se limitaron a determinar cuántas veces debe sumar 3, es decir, no realiza una co-variación ya que el multiplicador 3 no es designado semióticamente.

Posteriormente, se le solicitó a la estudiante hallar el número que le corresponde al término 100, para ello, mencionó *"pasamos los 6 primeros términos y faltarían 94 que es lo que falta a 6 para ser igual a 100",* Luis, un compañero interrumpió a Yaneth para expresar que *"como cada término aumenta de a 3 multiplicamos 94×3 que es igual a 282 y a esto le agregamos 17 que resulta dar 299",* finalmente Yaneth intervino exponiendo otro caso *"si queremos conseguir el número del término 1000 lo que hacemos es primero restar 6 del 1000, lo multiplicamos por 3 y este resultado le sumamos siempre el 17*". Vergel, et al. (2022) consideraron que Yaneth logró establecer una relación implícita, es decir, existe una proto - analiticidad o analiticidad incipiente ya que se aproxima a un cálculo de términos.

En el segundo ejemplo, los autores acudieron a la siguiente secuencia figural con apoyo tabular, en donde solicitaban a algunos docentes representar las figuras 5 y 6 con el fin de analizar dicha secuencia. Posteriormente, debían hallar la cantidad de círculos para la figura 100:

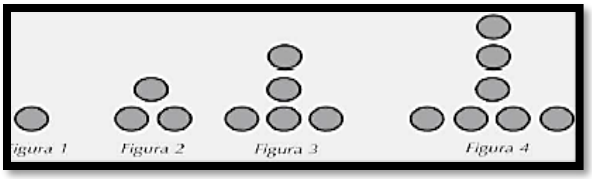


Imagen 26: Secuencia figural con apoyo tabular (p.13) por Vergel, R., et al. 2022. Educación Matemática, 34 (1).

Para determinar la cantidad de círculos que debía tener la figura 100, una profesora mencionó que *"como se han recorrido 4 figuras faltarían 96 y como cada figura aumenta en 2 círculos multiplico 96×2 = 192 y le agrego los círculos correspondientes a la figura 4 o sea 7 y los sumo 192 + 7 = 199. Luego 199 es el equivalente para la figura 100. Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el # de círculos en determinada figura".* Vergel, et al. (2022) afirmaron que la docente no les dio un significado a las variables ni las relacionó, es decir, no

hubo una toma de conciencia, por lo tanto, se le dificultó construir una fórmula que le permitiera calcular la cantidad de círculos para cualquier figura. Por esta razón, los autores consideraron que, nuevamente se está en presencia de una proto - analiticidad o analiticidad incipiente, ya que su discurso se aproximó a un cálculo de términos cercana a una multiplicación.

Finalmente, los autores concluyeron que, gracias al análisis de su trabajo, se abrió la posibilidad de pensar en "una evolución desde una generalización aritmética hacia una generalización aritmética sofisticada y, a su vez, hacia una proto - forma de pensamiento algebraico, categorías que han sido consideradas desde la TO" (Vergel, et al. 2022, p.17). En ambas situaciones, tanto Yaneth como la profesora llegaron a una proto - analiticidad o analiticidad incipiente ya que no hubo una designación semiótica de las variables, es decir, la formulación o generalización, por lo tanto, ambas personas presentaron dificultades en el proceso de generalización. Además, ambos análisis les permitieron a los autores reconocer que se está "frente a proto - formas de pensamiento algebraico, pues la variable tampoco se sitúa en el campo de la intuición, como es el caso de las generalizaciones algebraicas factuales" (Vergel, et al. 2022, p.18).

2. JUSTIFICACIÓN Y PROBLEMATIZACIÓN

Teniendo en cuenta lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en lo referente a los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), explicitan cinco tipos de pensamientos tales como el variacional, espacial, métrico, aleatorio y numérico; siendo este último, uno de los más desarrollados en las clases de matemáticas en primaria. Según el MEN (2006), el pensamiento variacional debe generar la posibilidad de analizar de qué manera cambia una secuencia, de conjeturar sobre la forma o el valor del término siguiente, de expresar en forma oral o escrita los términos siguientes y de intentar formular procedimientos que permitan reproducir un patrón o determinar cualquier término.

En cuanto al pensamiento algebraico, las investigaciones realizadas en los últimos años han demostrado que, al momento de proponer tareas sobre la generalización de secuencias de patrones, se potencia el pensamiento algebraico en los estudiantes. Cabe resaltar que, según el MEN (1998) la generalización es un proceso que involucra la visualización, la exploración, la manipulación de los números y de las figuras, por lo cual está en el núcleo de toda actividad matemática, siendo considerada como el nivel más alto de la modelación matemática. Además, la generalización se logra a partir de procesos ordenados, secuenciados, orientados y guiados por el profesor, quien llevará a los estudiantes a observar, expresar, describir, formular hipótesis y verificar conjeturas a través de una secuencia. También, el estudiante tendrá la posibilidad de describir lo que cambia, cómo varía y lo que permanece constante teniendo en cuenta los términos de dicha secuencia.

Es importante mencionar que, "la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica" (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005; en Radford, 2006b, p.7), que "implica una relación entre aquellos sujetos inmersos en dicha actividad y una relación de legitimación de contenidos disciplinarios … donde los estudiantes y el profesor están siempre interactuando unos con otros" (Radford y Lasprilla, 2020, p. 107). Además, "la actividad matemática de un sujeto es una forma de reflexión que envuelve lo individual como un todo, su conciencia, sentimientos, percepción, actividad sensoriomotora, inmersa en un sistema de significación cultural que orienta sus actos intencionales" (Vergel, 2016c, p.67).

Por otro lado, algunos países se han enfocado en incluir en sus currículos la generalización de patrones en la actividad de enseñanza – aprendizaje del álgebra. Por ejemplo, Zapatera (2018b) menciona que, en Canadá se introduce el pensamiento algebraico por medio de patrones, relaciones, expresiones e igualdades; mientras que, en Australia hacen uso de los conceptos de variable y función, al igual que en Costa Rica, ya que también los utilizan para introducir la generalización de la aritmética y de los patrones; por otro lado, Corea y Singapur desarrollan el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones, la resolución de problemas y las funciones; en Chile, "pretenden que los estudiantes expliquen y describan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos y, que identifiquen, extiendan y expresen patrones para facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico" (Zapatera, 2018b, p. 52).

Sin embargo, desde la labor como docentes y la experiencia en el aula, se ha evidenciado que la mayoría de los estudiantes son involucrados en el pensamiento variacional solo al llegar a grado octavo, donde trabajan con sistemas algebraicos y analíticos, sin haber realizado un acercamiento que incluya la transición del pensamiento numérico al variacional causando desmotivación, bajo rendimiento académico y desinterés por el álgebra. Además, no solo las dificultades se dan a nivel curricular sino también a nivel cognitivo ya que, la mayoría de las clases en primaria se han centrado en los procesos netamente algorítmicos, que incluso, carecen de sentido y de significado para los estudiantes. Cabe señalar también, que los currículos de las instituciones educativas están orientados por contenidos y por logros. De hecho, en el aula de matemáticas, las posibilidades que tienen los estudiantes de trabajar con secuencias que permitan generalizar patrones y de esta manera potenciar el pensamiento algebraico, han sido muy pocas o en algunos casos nulas.

Por ejemplo, en la Institución Educativa Distrital CODEMA se ha observado que la generalización de patrones no se trabaja en primaria, sino cuando los estudiantes cursan grado octavo. Sin embargo, de acuerdo con las investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico, la introducción al álgebra debe dotar de significado a las variables y potenciar el pensamiento algebraico por medio de la identificación de una comunalidad y los procesos de abducción, entendidos como "la generalización de la característica en común" (Radford, 2013, p. 5); inducción, que hacen referencia a "diversas abducciones que están representadas en propuestas de fórmulas, las cuales parecen plausibles, y son sometidas a un número finito de pruebas … es un procedimiento basado en un razonamiento probable" (Radford, 2013, p. 6) y la deducción, "que contiene en su arquitectura la abducción analítica" (Radford, 2013, p. 7); para poder llegar a una expresión que permita determinar cualquier término de una secuencia.

En algunas ocasiones, el trabajo realizado en dicha institución no es coherente con lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) en cuanto a lo que genera el pensamiento variacional; además, coincide con las dificultades y conclusiones que se han reportado en las investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con el pensamiento algebraico (Callejo, et al. 2016; Radford, 2018; Zapatera, 2018a; Gustin y Pontón, 2020; Ayala y Molina, 2021; Vergel, 2015; Uicab, et al. 2022; Vergel, et al. 2022 y Vergel, 2016).

Teniendo en cuenta lo anterior y que, posiblemente el docente "podría estar enseñando aritmética mientras piensa que está enseñando álgebra" (Vergel, 2022, p.13), es decir, que el profesor conciba que el pensamiento algebraico se enfoca solamente en operar números y letras; este trabajo de investigación se planteó y se desarrolló con el propósito de dar respuesta a la pregunta ¿qué tipos de generalización producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) de la Institución Educativa Distrital CODEMA cuando resuelven tareas sobre secuencias de patrones?

3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo General:

Documentar los tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 - 14 años) cuando resuelven tareas sobre secuencias de patrones.

3.2. Objetivos Específicos:

En la actividad matemática que emerge cuando los estudiantes resuelven tareas sobre secuencias de patrones y en sus producciones, se espera:

- Identificar los medios semióticos de objetivación.
- Caracterizar la articulación de los medios semióticos de objetivación.
- Identificar la presencia del componente de abducción analítica.

4. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan las ideas teóricas que fundamentan nuestra investigación, es decir, se mencionan aspectos generales de la Teoría de la Objetivación, el pensamiento algebraico y la generalización de patrones.

4.1. Teoría de la Objetivación:

Según Radford (2020b) toda teoría se basa en dos criterios, el primero, hace referencia a que los conceptos de saber y de aprendizaje deben estar fundamentados desde lo epistemológico y lo ontológico; mientras que el segundo, hace alusión a la articulación coherente entre el saber y el aprendizaje. Radford (2006a) afirma que, "en el fundamento epistemológico de la teoría de la objetivación se caracteriza la manera en que los estudiantes conocen los objetos" (Vergel, 2014, p. 67). En cuanto al fundamento ontológico, la TO indica que los objetos dependen de la actividad realizada por los seres humanos y concibe que el saber está relacionado con el contexto social, cultural, histórico y político del sujeto, quien es considerado por Radford (2010) como un proyecto de vida que vive, piensa y actúa en su cultura y, su cognición se sitúa en la praxis social, es decir, en una actividad humana sensitiva y concreta.

Cabe resaltar que los objetos son "patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos … que son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico - cultural" (Radford, 2006a, p.111). Además, el objeto es independiente para el individuo y se modifica a través de un proceso de movimiento y de toma de conciencia, lo que causa una variación en las formas de pensamiento de la persona, quién según Radford (2021a) está en constante construcción de su existencia.

Por un lado, Radford (2021b) afirma que en la TO el saber se define como un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituidos, el cual se produce de manera colectiva y es el resultado de la producción del estudiante que aparece a través de la actividad, ya que "la manera en que llegamos a pensar y a conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad" (Radford, 2006a, p.108).

"El saber es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente … que emerge de la actividad humana … a través de sus acciones, reflexiones, sufrimientos y esperanzas" (Radford en D'Amore y Radford, 2017, pp. 100 - 101). También, para Vergel et al. (2022) el saber siempre está en movimiento o en proceso, por lo tanto, es dinámico, transformativo y dispuesto a ser modificado, es por ello por lo que, Radford (en D'Amore y Radford, 2017) lo define como una labor cristalizada. De hecho, Vergel (2021) afirma que la circulación del saber se realiza a

través de una transformación de los modos de producción de los recursos y los medios intelectuales.

Además, "la adquisición del saber se obtiene del contacto con el mundo material, los artefactos culturales y la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas" (Radford, 2006a, p.115). Dichos artefactos mediatizan y materializan el pensamiento ya que se piensa con y a través de ellos, en consecuencia, cuando el individuo está en contacto con los artefactos, reestructura sus movimientos y su parte intelectual. Un ejemplo que refleja la importancia del uso de artefactos en la actividad matemática se evidencia en la investigación realizada por Radford (2006a), donde un grupo de estudiantes de primaria trabajaron una situación problema por medio de una secuencia numérica, la cual consistió en que una ardilla tenía 8 nueces en su nido y cada día llevaba dos nueces, el objetivo de esta tarea fue determinar la cantidad total de nueces almacenadas en el décimo día.

Una estudiante llamada Cristina inició su conteo de dos en dos, pero se percató que no había tenido en cuenta el número de días que iban transcurriendo. Sin embargo, al involucrarlo se le dificultó realizar ambos conteos, decidió buscar a su compañero Miguel para que le ayudara y juntos se ubicaron en frente del tablero con ayuda de una regla y de una recta numérica, Cristina empezó a contar de dos en dos mientras que Miguel contaba los días, esto lo realizaban simultáneamente. Ambos llegaron a la conclusión de que la cantidad total de nueces que hay en el nido en el décimo día es de 28:



Imagen 27: Articulación de medios semióticos utilizados por Miguel y Cristina (p. 106) por Radford, L., 2006a. Relime, número especial.

A partir de los datos proporcionados por la docente, los estudiantes generaron una representación mental del problema, dicho pensamiento posiblemente se generó a partir del procesamiento de la información codificada a través de reglas lógicas o de inferencia. Radford (2006a) afirmó que, el pensamiento de Cristina y Miguel no solamente transcurrió en el plano cerebral de ambos, sino que también ocurrió en el plano social, en el territorio de artefacto, en este caso, la regla de madera, la recta numérica y los signos matemáticos sobre la hoja son artefactos que mediatizan y materializan el pensamiento.

Por otro lado, Radford (2021b) menciona que el conocimiento es la materialización, actualización o encarnación del saber, es decir, se genera un contenido conceptual concreto.

De acuerdo con lo anterior, el saber es general (“en sí”) mientras que el conocimiento es personal (“para sí”). Para realizar dicha transición debe existir un momento dialéctico, una objetivación y una actividad que involucra los artefactos y sus formas de uso, el cuerpo, el lenguaje, las formas y los modos de producción humana, entre otros:

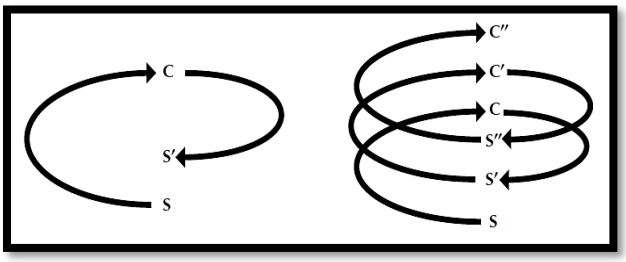


Imagen 28: Relación entre el saber y el conocimiento (p. 110) por D’Amore, B. y Radford, L., 2017. Énfasis. Bogotá, Colombia.

Para Radford (2021a) el aprendizaje es un encuentro con los saberes que se han constituido histórica y culturalmente, ya que su foco de interés se centra no solo en el saber sino también en el ser, lo que permite una transformación tanto del estudiante como del docente, tal y como lo afirma Radford (2021b) cuando expresa que ambos individuos son subjetividades en formación que se conciben como proyectos de vida sin terminar y que están en constante cambio.

Además, “el aprendizaje consiste en dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el estudiante en su cultura” (Radford, 2006a, p. 113). Es por ello por lo que “aprender supone un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto mediatizado por la cultura, un proceso en el que a través de su acción ya sea sensorial o intelectual, el sujeto toma conciencia del objeto” (Radford, 2006a, p. 116). Por lo tanto, “la comprensión del aprendizaje solo puede lograrse considerando la naturaleza y las características específicas de la actividad enfocada en la teoría de la objetivación” (Radford, 2020a, p.15).

Cabe aclarar que, según Radford (2021b) en la TO, la objetivación se define como el encuentro con los sistemas de pensamiento cultural e históricamente constituidos y como el intento de comprender el saber, es decir, tomar conciencia de él. Es por ello por lo que, el aprendizaje se define como el resultado de los procesos de objetivación, entendidos como los procesos que permiten aprehender algo culturalmente significativo por medio de la actividad corporal, sensible, afectiva, emocional, artefactual, semiótica y creativa de los individuos.

Según Radford (2021a) en esta teoría, la actividad se concibe como el proceso en el que la persona produce su existencia y se coproduce con otros, es decir, a través de ella llegamos a ser lo que somos (dimensión ontológica), a saber, lo que sabemos (dimensión epistemológica) y a expresarnos como individuos (dimensión estética). Además, el autor afirmó que en la TO hay una única actividad que es la de enseñanza – aprendizaje, complementándose para producir y hacer circular el saber en el aula. También, para Vergel

(2021) la actividad es una fuente de vida, es decir, donde los docentes y los estudiantes se producen y se coproducen como seres humanos.

De acuerdo con lo anterior, para Vergel (2021) el aprendizaje al igual que la actividad no es individualista ya que involucra los vectores de la ética comunitaria: la responsabilidad, el compromiso con el trabajo colectivo y el cuidado del otro, permitiendo que el sujeto y la cultura se constituyan mutuamente y es allí donde la actividad se concibe como una labor conjunta.

Radford (2021b) expresa que la actividad se concibe a partir de cuatro dimensiones:

- Constitutiva: La actividad aparece como una energía formada por los individuos en su búsqueda de algo en común.

- Ontológica: La actividad aparece como una forma de vida donde los individuos se realizan como seres vivos.

- Epistemológica: La actividad aparece como un órgano kinestésico donde los individuos producen y reproducen el saber.

- Relacional: La actividad aparece alrededor de una ética comunitaria.

Para Radford (en D'Amore y Radford, 2017) la labor conjunta no siempre es una actividad pacífica ya que puede presentarse tensiones y diferencias, las cuales deben aceptarse con compasión y con empatía, con el fin de examinarlas críticamente y poder comprender los mecanismos que las sustentan.

En cuanto a la educación, Radford (2021b) la define como un evento ético y estético inmerso en un espacio político ya que la persona se transforma según su historia y su cultura, generando experiencias individuales y sociales. Por lo tanto, en la TO se plantea el problema de la escuela como un sitio de transformación social, donde el salón de clases "es el espacio social en donde el estudiante elabora la reflexión común y activa con su realidad histórico - cultural … donde se encuentra el objeto y el saber a través de un proceso social …. donde surge la comprensión de otras voces y otras conciencias" (Radford, 2006a, p. 116).

Según Radford (2021a) la Educación Matemática es un esfuerzo político, social, histórico y cultural que permite que el sujeto sea reflexivo para poder posicionarse críticamente en las prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente. De hecho, Vergel (2021) mencionó que, si no se considera la historia y la cultura en el saber matemático, es imposible pensar en un cambio desde la escuela para la sociedad. Además, gracias a la labor conjunta se logró producir las matemáticas a través de las ideas que surgen de manera crítica, democrática e inclusiva, con el fin de que se genere un proceso de reflexión y de encuentro con la matemática.

Radford (2020a) afirma que la TO busca comprender que la actividad de enseñanza – aprendizaje se logra a través de una experiencia sensible e intelectual, crítica y poética, que permita comprender las matemáticas de manera colectiva, social y cultural que sea enriquecedora para los estudiantes y el docente, por esta razón, la objetivación debe aparecer como un proceso crítico, poético, sensible y sensual de encuentro con las matemáticas, que según Radford (2019) debe ser progresivo, encarnado, discursivo, subversivo, afectivo, simbólico y material con el saber cultural.

Además, "el objetivo de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es que el estudiante elabore una reflexión común y activa con su realidad histórico - cultural" (Radford, 2006a, p. 114) con el fin de que su aprendizaje contribuya a la formación de las capacidades humanas porque "al aprender, también sentimos. La realidad es que no sólo pensamos matemáticamente, también sentimos matemáticamente" (Radford en D'Amore y Radford, 2017, p. 146). Entonces, "aprender matemáticas no es simplemente aprender a hacer matemáticas sino aprender a ser en matemáticas" (Radford, 2006a, p. 114) y "si cuando aprendemos algo, seguimos siendo los mismos seres humanos, entonces realmente no hemos aprendido nada … porque aprender no es simplemente adquirir un conocimiento, sino transformarse como sujeto humano" (Radford en D'Amore y Radford, 2017, p. 141).

Por un lado, Radford (2006a) afirma que en la TO el estudiante siempre está involucrado en su grupo de trabajo, ya que debe estar atento a las discusiones que se presenten, solicitar explicaciones que permitirán fortalecer el proceso de alteridad y realizar acciones y reflexiones de acuerdo con las intervenciones.

Por otro lado, Vergel (2021) menciona que lo primero que debe realizar el profesor es reconocer las formas de actuación y de pensamiento en el aula de clase para poderlas transformar, ya que cada estudiante tiene una historicidad. También, Radford (2021a) considera que, en el ciclo de una actividad conjunta, el docente debe presentar la actividad, organizar a los estudiantes en grupos pequeños, brindar espacios de discusión entre todos los estudiantes y el profesor, donde cada persona tiene la posibilidad de colaborar, analizar e intercambiar ideas para cumplir con un objetivo. Todo lo anterior se puede lograr a través de la creación de un proceso de alteridad y una ética comunitaria, donde se evidencie el compromiso con la clase, la responsabilidad y el cuidado con el otro.

En la TO, "el docente debe catalizar el encuentro entre el estudiante y el objeto del saber" (Radford, 2006a, p. 105). Para ello, el maestro debe proponer tareas complejas que permitan la objetivación del saber con el fin de favorecer la aparición de diferentes métodos de solución y así poder generar el proceso de alteridad. Además, el profesor debe intervenir en los grupos cuando evidencie que la discusión no tiene salida o cuando crea que los estudiantes no han analizado detalladamente la actividad como lo esperaba.

A continuación, se da a conocer dos situaciones reales de clase en donde se resalta el rol del docente y su importancia teniendo en cuenta la TO:

Ejemplo 1: En la investigación realizada por Radford (2020a), en una clase de segundo grado se inició a estudiar la generalización de secuencias. Para ello, se organizaron grupos de

máximo 3 estudiantes con el fin de encontrar el término 5 y 6 de la siguiente secuencia figural:

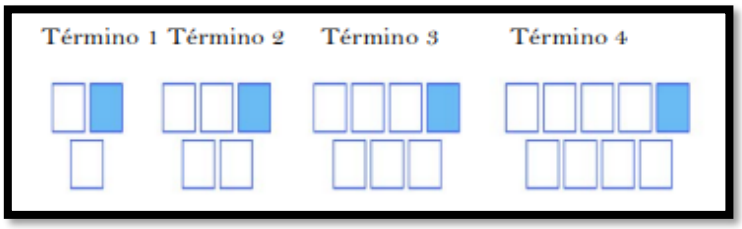


Imagen 29: Secuencia figural con apoyo tabular (p.8) por Radford, L., 2020a. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2).

Un grupo de estudiantes organizó los rectángulos de manera lineal e implícitamente reconocieron que se deben añadir dos rectángulos para pasar de un término a otro:

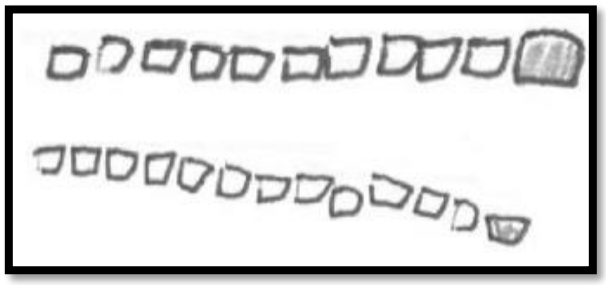


Imagen 30: Representación icónica realizada por los estudiantes para determinar la cantidad de rectángulos para los términos 5 y 6 (p.8) por Radford, L., 2020a. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5(2).

Sin embargo, el objetivo que tenía la profesora era que los estudiantes utilizaran la información espacial presentada en la secuencia. Por esta razón, la docente se acerca a dicho grupo y sugiere mirar solamente la parte inferior de cada uno de los términos, concluyendo de manera conjunta que, se debe tener en cuenta el término para hallar la cantidad de rectángulos. De la misma manera, a través de preguntas, gestos, deícticos y un diálogo conjunto, solicita a los estudiantes analizar los cuadrados de la parte superior, todos concluyen que se debe agregar uno al número correspondiente al término que se está observando.

Radford (2020a) destacó el rol de la docente ya que los estudiantes lograron identificar las dos relaciones a partir de la información espacial de cada término, lo que permitió avanzar en su proceso de generalización. Además, el autor mencionó que la maestra no dice o no muestra a los estudiantes qué deben hacer, sino que, a través de los gestos, las palabras y el ritmo, invitó a explorar la secuencia de otra manera que no había sido considerada por el grupo. Es decir, "la profesora y los estudiantes se lanzan en un despliegue rítmico de medios semióticos, discursivos y perceptivos para generar un significado multisemiótico" (Radford, 2020a, p. 23).

Ejemplo 2: En el trabajo de Radford (2013) se da a conocer la siguiente secuencia presentada a estudiantes de 7 y 8 años sobre la generalización algebraica:

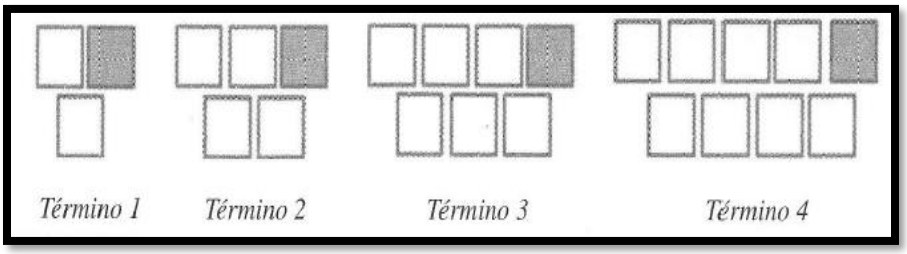


Imagen 31: Secuencia figural con apoyo tabular (p. 5) por Radford, L. (2013)

La docente, comentó a los estudiantes una afirmación que realiza una persona ficticia llamada Monique quien menciona que a la siguiente figura le corresponde el término 8:

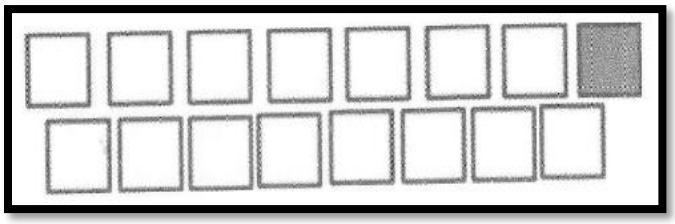


Imagen 32: Termino 8 según Monique (p. 8) por Radford, L. (2013)

En esta actividad, la docente tuvo en cuenta las preguntas ¿cuántos cuadrados? y ¿en dónde colocarlos?, las cuales corresponden a la estructura numérica y espacial, respectivamente. Algunos estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación, por esta razón, la maestra inició un trabajo conjunto con el fin de concientizarlos de la estructura espacial de la secuencia para llegar a la objetivación de la característica en común. Para ello, utilizó gestos y palabras que permitieron resaltar la relación funcional que surgió a partir de una toma de conciencia relacional entre el número de la figura y el número de cuadrados. Por lo tanto, el autor afirmó que la acción lingüística - perceptiva - gestual se convirtió en un nodo semiótico, es decir, los signos pertenecen a diferentes sistemas semióticos y se complementan para generar dicha toma de conciencia, en la manera en que se puede abordar un problema desde una visión algebraica.

Además, Radford (2013) menciona que la denotación de una generalización algebraica se realiza a través de una actividad multimodal, en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural. Finalmente, para que la variable se convierta en objeto de discurso, deberán surgir nuevas formas de conciencia durante la actividad de enseñanza - aprendizaje que debe ser mediada por el uso abstracto del lenguaje oral y escrito.

4.2. Pensamiento algebraico y generalización:

En la TO el saber es una posibilidad que el ser humano lo transforma en una potencialidad y se expresa de diferentes maneras como el lenguaje natural, el simbolismo, las gráficas, entre otros. Por lo tanto, “el saber algebraico … es una potencialidad incrustada en la cultura:

posibilidades que se ofrecen a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera … a través de las formas algebraicas de analizar, de la percepción y del tratamiento de las secuencias" (Radford en D'Amore y Radford, 2017, p. 101). Además, el pensamiento algebraico "consiste en el proceso psíquico mediatizado por la actividad intelectual dirigida hacia la búsqueda y el descubrimiento de lo esencialmente nuevo de los objetos que pertenecen al campo de los números, las letras y los símbolos" (Rodríguez de Chicas y Ron, 2022, p. 5).

A continuación, se presenta una estructura de la actividad relacionada con el pensar algebraicamente:

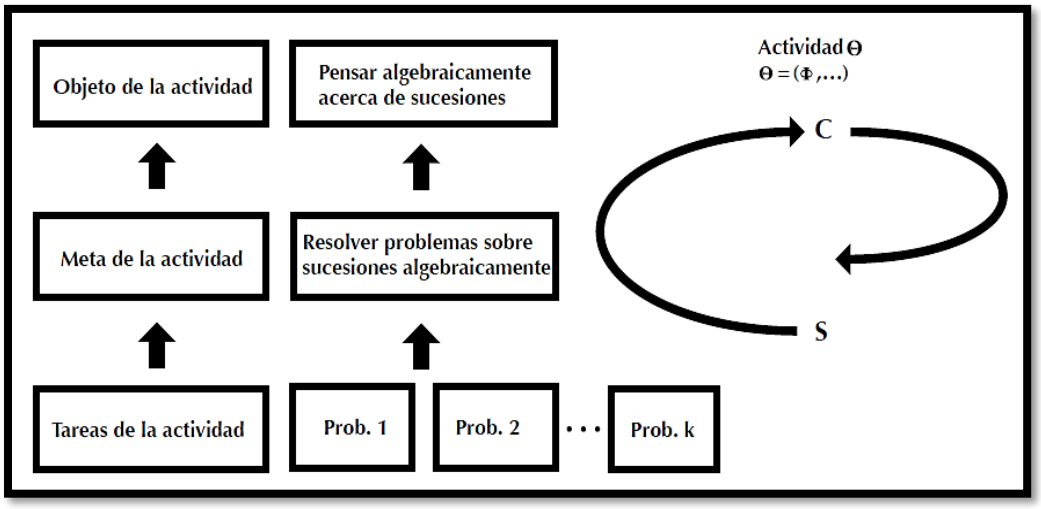


Imagen 33: Estructura de la actividad (p. 126) por D'Amore, B. y Radford, L., 2017. Énfasis. Bogotá, Colombia.

Para Blanton y Kaput (2005) la generalización es un proceso matemático que permite pasar de lo particular a lo general, permitiendo desarrollar un pensamiento algebraico que involucra la argumentación, la conceptualización y los procedimientos matemáticos, con el fin de expresar, manipular y abstraer ideas matemáticas. Además, Kaput (1999) considera la generalización como la extensión del rango de razonamiento de los casos considerados en una secuencia, para identificar explícitamente una similitud entre ellos y fortalecer el razonamiento a un nivel donde se enfatice en los patrones, los procedimientos, las estructuras y las relaciones entre ellos. También, Radford (en Miranda, et al. 2007) argumenta que la generalización de patrones radica en la capacidad de identificar una regularidad y extenderla a otros términos para generalizarla a todos los términos de la secuencia, dicha generalización no depende del uso de notaciones sino del tratamiento que se da a la secuencia.

De acuerdo con las investigaciones que se han realizado en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico, en especial, cómo los estudiantes identifican el patrón de una secuencia dados los primeros términos, es necesario que se consideren tres aspectos importantes descritos por Callejo et al. (2016):

- La coordinación entre la estructura espacial y la numérica: Los estudiantes necesitan reconocer una regularidad que relacione la estructura espacial y la numérica con el fin de continuar una secuencia.

- La relación funcional: Para identificar un término lejano se debe establecer una relación funcional entre el término de la sucesión que ocupa la figura y la cantidad de elementos que la forman.

- El proceso inverso: Para identificar el término de la sucesión que ocupa una figura conociendo el número de elementos que la forman, es preciso establecer una relación funcional inversa a la anterior.

Por lo tanto, según Stacey (1989) trabajar con la generalización de patrones lineales, es decir, con una estrategia funcional y contextual, es un elemento fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Los patrones lineales se definen como:

> …Aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1), f(2), f(3), \ldots$ de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular $f(n)$ para n "pequeño" y para n "grande" y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín (Zapatera y Callejo, 2011, p. 600).

Además, las investigaciones realizadas por Radford (2011) han mostrado que, en los cursos inferiores, por ejemplo, en primaria, no todos los estudiantes lograban coordinar la estructura espacial y la numérica en una secuencia figural, pero otros determinaban una regla que permitiera calcular el número de elementos de un término específico y en grados superiores, expresaban pseudo-fórmulas que permitían representar una generalización. Sin embargo, para Vergel (2022) el trabajo con las secuencias figurales y numéricas con apoyo tabular son fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Radford (2010) afirma que las formas de pensamiento algebraico permiten comprender las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando acuden a los medios semióticos de objetivación en actividades contextuales de generalización de patrones ya que, a diferencia del pensamiento numérico, en el algebraico se trabajan con cantidades indeterminadas como si fueran conocidas e incluso se operan, es decir, se involucra el criterio de la analiticidad.

Radford (2003) identifica tres formas de pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica:

- Pensamiento algebraico factual: La generalidad se basa en acciones realizadas sobre números y las actuaciones constan de palabras, gestos, movimientos, ritmo y de la actividad perceptual. Es decir, según Vergel (2015) la indeterminancia queda implícita en dichos medios semióticos de objetivación.

- Pensamiento algebraico contextual: La formulación algebraica es una descripción del término general donde los gestos se sustituyen por deícticos. Es decir, según Radford (2010) la indeterminación se convierte en una contracción semiótica donde aparecen variables, operadores o frases discursivas.

- Pensamiento algebraico simbólico: Utiliza el simbolismo algebraico (aunque sea incipiente) para expresar la generalidad.

"Las investigaciones de Radford (2010) muestran que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano se mueve desde lo factual a lo contextual y a lo simbólico" (Callejo et al. 2016, p.9). Lo que concuerda con lo concluido por Vergel (2014) en una de sus investigaciones con estudiantes de quinto y sexto grado, en donde afirma que:

> "en una fórmula algebraica estas expresiones quedan implícitas en su estructura y ésta no deja ver quizás las maneras cómo han evolucionado las formas corpóreas que se han expresado a través de acciones (por ejemplo, gestos, ritmos, miradas, palabras) y que se despliegan en el espacio y el tiempo. Este elemento didáctico es un indicador que nos brinda información valiosa sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano" (Vergel, 2014, p. 184).

Además, según las investigaciones que se han realizado sobre los procesos de generalización de secuencia de patrones, se ha mostrado que "aun cuando las producciones de los estudiantes no contienen signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico" (Vergel, et al. 2022, p. 2).

Las investigaciones se han centrado en los tipos de generalización que realizan los estudiantes al momento de trabajar con la secuencia de patrones. Inicialmente, Stacey (1989) distingue dos tipos de generalizaciones:

- Generalización cercana: Los estudiantes encuentran el siguiente término u otro término de una secuencia dada por medio del recuento, una tabla o un dibujo.

- Generalización lejana: Los estudiantes identifican un patrón o una regla general que permita determinar cualquier término de la secuencia.

Luego, Radford (2013) menciona que la generalización algebraica se compone de la identificación de una característica en común, la generalización o la aplicación de dicha comunalidad a todos los términos y la capacidad de utilizar la propiedad común, con el fin de deducir una expresión directa que permita determinar cualquier término de la secuencia. Es decir, la estructura de la generalización algebraica sería:

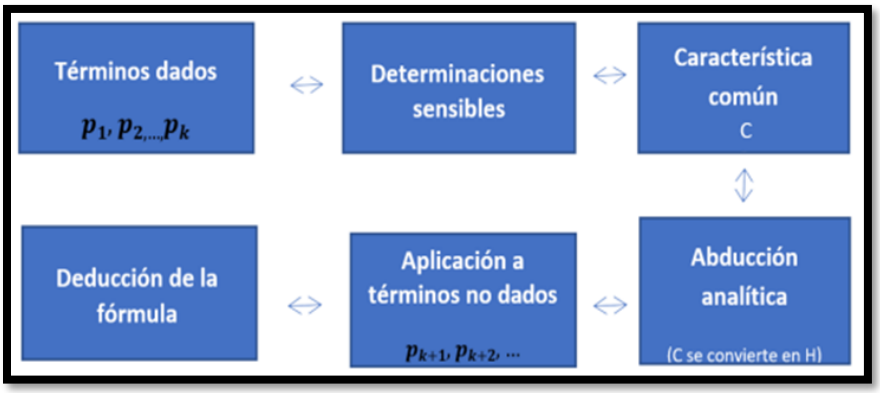


Imagen 34: Estructura de la generalización algebraica (p. 7) por Radford, L. (2013)

Además, Radford (2010) y Vergel et al. (2022) describen componentes analíticos del pensamiento algebraico como:

- Sentido de la indeterminancia: Sensación de indeterminación de los objetos algebraicos como incógnitas, variables o parámetros.

- Analiticidad: Carácter operatorio de lo desconocido como si fuera conocido que involucran los procesos de deducción.

- Expresión semiótica: Lo indeterminado se puede expresar semióticamente ya que hay una toma de conciencia de significado de las variables.

Actualmente, Vergel et al. (2022) categorizan el proceso de la generalización en tres fases, teniendo en cuenta la estructura de la generalización algebraica y los componentes analíticos del pensamiento algebraico:

- Generalización aritmética: Los estudiantes se enfrentan con una secuencia de patrones que contiene algunos términos dados, observan recurrencias, analizan cómo cambian y cómo aumentan, con el fin de identificar una característica en común.

- Generalización aritmética sofisticada: Los estudiantes se aproximan a un cálculo de términos acercándose a una expresión multiplicativa, sin embargo, no se llega a materializar y las variables aún no cobran sentido, en este caso, se menciona que existe una proto - analiticidad o analiticidad incipiente.

- Generalización algebraica: Se presenta cuando los estudiantes utilizan la característica en común como hipótesis para deducir una expresión para determinar cualquier término de la secuencia, es decir, existe una abducción analítica, que según Radford (2013) hace referencia a la generalización de la característica en común.

Cabe resaltar que, “cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados) … estamos frente a una generalización aritmética” (Radford, 2008). En palabras de Vergel (2022), cuando la abducción es utilizada para analizar los términos, no hay una generalización algebraica.

5. METODOLOGÍA

A partir de los aportes realizados por Radford et al. (2009) y Vergel (2015) relacionados con la importancia del cuerpo humano en el acto de conocer, es fundamental tener en cuenta los recursos cognitivos, físicos y perceptuales (caracterizados por Arzarello (2006) como los medios semióticos básicos) que utilizan los estudiantes al momento de empezar a trabajar con ideas matemáticas; es decir, comienzan sus actividades con dichos medios y a partir de ellos se enriquecen con otros, tales como dibujos, números, representaciones, etc.

Por lo tanto, surge la necesidad de analizar los procesos de producción de significado de los estudiantes en términos de la forma en que diferentes medios semióticos se entrelazan durante el desarrollo de una actividad matemática. Además, los estudiantes movilizan diferentes medios que "incluyen comunicaciones simbólicas escritas y orales, así como dibujos, la manipulación de artefactos físicos y electrónicos (calculadoras) y diversos tipos de movimiento corporal" (Radford et al. 2009, pp. 91 - 92).

De acuerdo con lo anterior, en esta investigación se analizan los diferentes medios semióticos movilizados por los estudiantes durante la actividad matemática. Además, se incluyen los procesos de interpretación y producción, sin dejar de lado el contexto social en el cual están inmersos los estudiantes. De esta manera, dicho análisis permite dar cuenta de los procesos de inducción, abducción y deducción que presentan los estudiantes al momento de trabajar con tareas asociadas a la generalización de patrones.

Por esta razón, para el registro de la información se tiene en cuenta algunas estrategias cualitativas empleadas en la Educación Matemática y se realiza un análisis de carácter multimodal, que para Vergel (2015) la naturaleza multimodal de la cognición humana y las modalidades sensoriales (como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc.) se convierten en partes integrales de los procesos cognitivos.

A continuación, presentamos la fundamentación teórica de las estrategias cualitativas empleadas en la Educación Matemática y del análisis multimodal. También, se describe la manera en que se recolectarán los datos. Posteriormente, se da a conocer los resultados obtenidos de la prueba piloto junto con su respectivo análisis. Por último, se presentan las tareas que se tuvieron en cuenta para la investigación.

5.1. Análisis multimodal:

La Teoría de la Objetivación propone una forma distinta de entender los procesos de enseñanza - aprendizaje desde una postura sociocultural, debido a que las interacciones que se dan al interior del aula posibilitan el logro de los saberes adquiridos histórica y culturalmente. De igual manera la TO manifiesta que, la actividad matemática es multimodal ya que permite reflexionar sobre las múltiples formas de expresión que son utilizadas por los estudiantes.

Arzarello (2006) menciona que, en la investigación en Educación Matemática, la multimodalidad surge para referirse a la relevancia y coexistencia mutua de una variedad de modalidades cognitivas, materiales y perceptivas o recursos en los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, específicamente, en el pensamiento matemático. Además, Radford et al. (2009) consideran que es importante tener en cuenta el cuerpo en el acto de conocer ya que están los recursos cognitivos, físicos y perceptuales, los cuales están inmersos en las acciones que los estudiantes realizan cuando desarrollan una tarea.

De acuerdo con lo anterior, "la naturaleza multimodal de la cognición humana significa que, en nuestros actos de conocimiento, diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., llegan a ser partes integrales de nuestros procesos cognitivos" (Vergel, 2015, p.96). De hecho, Arzarello (2006) considera que se debe realizar un análisis donde se relacionen los diferentes medios semióticos movilizados durante la actividad (tales como el lenguaje escrito o hablado, gestos, acciones, dibujos, la manipulación de artefactos físicos y electrónicos, movimientos corporales, etc.), junto con sus procesos de interpretación, producción y argumentación.

Cabe resaltar que, Radford et al. (2009) conciben al medio semiótico como un conjunto de signos que se generan a través de acciones que tienen una intención. También, afirman que dentro del aula se observa un fenómeno didáctico llamado juego semiótico, que se presenta cuando el docente interactúa con los estudiantes, debido a que se involucra con los medios semióticos de los estudiantes y los utiliza para develar el conocimiento matemático de manera significativa. Por ejemplo, el profesor puede repetir un medio semiótico que realizó un estudiante junto con una explicación verbal. Por lo tanto, el juego semiótico permite que el docente y los estudiantes manejen el mismo lenguaje.

Por otro lado, Bayona (2021) menciona que el análisis multimodal contempla la actividad como unidad de análisis, ya que se brindan espacios de participación y de escucha, donde los estudiantes expresan sus opiniones y puntos de vista, preguntan, argumentan y toman postura, manteniendo una ética comunitaria en la labor conjunta entre estudiantes y docentes. Además, se tiene la oportunidad de evidenciar los medios semióticos construidos por cada sujeto y posibilita la heterogeneidad en los métodos de solución de las tareas propuestas.

Sin embargo, de acuerdo con los resultados que obtuvo Bayona (2021) en su investigación, afirma que en las clases frecuentemente no se dan espacios de socialización, donde los estudiantes tengan la oportunidad de expresar sus respuestas, procedimientos y argumentos. También, evidenció que algunos estudiantes tienen temor de expresar lo que piensan o borran lo que han realizado cuando observan que su respuesta no incide con la de sus compañeros. Lo anterior quizás se deba a que no confían en su conocimiento matemático.

5.2. Estrategias cualitativas empleadas en la Educación Matemática:

Según Camargo (2021) las estrategias surgen en el reconocimiento de la necesidad de buscar formas de indagación que se enfoquen en la complejidad de los fenómenos educativos, con el fin de producir resultados interesantes y útiles. Las estrategias, además de dar respuesta a cuestiones que se movilizan en la investigación, también permiten encontrar nuevos caminos para pensar acerca de las inquietudes y sus posibles soluciones, permitiendo una mayor profundización en los fenómenos.

Las estrategias cualitativas en la Educación Matemática se enfatizan en la naturaleza social y cultural de las matemáticas, por lo tanto, también en su enseñanza y en su aprendizaje. Dentro de las estrategias cualitativas se encuentran las naturalistas, clínicas y de diseño, las cuales deben ser elegidas de acuerdo con los objetivos de la investigación. En nuestro caso, tenemos en cuenta las clínicas, en especial, las estrategias investigativas de entrevista semiestructurada y basada en tareas.

Las estrategias clínicas son utilizadas por los investigadores cuando se preguntan *¿cómo pasa?, ¿qué pasó?, ¿por qué pasa?* o *¿por qué pasó?* con el fin de hacer un análisis a profundidad que permita explicar, describir o interpretar el fenómeno. Este tipo de estrategias "en Educación Matemática usualmente son empleadas por quienes tienen interés en develar las formas de pensar de las personas" (Camargo, 2021, p.72). Además, Kelly y Lesh (2000) mencionan que los investigadores "pretenden que se revelen descripciones, concepciones, procedimientos y justificaciones útiles para profundizar en los fenómenos estudiados y poder explicarlos" (citado en Camargo, 2021, p.72).

5.2.1. Estrategias investigativas de entrevista semiestructurada:

Una entrevista es semiestructurada cuando la secuencia de preguntas varía de acuerdo con la respuesta dada por el entrevistado, las cuales permitirán realizar una indagación sistemática. Además, esta estrategia se implementa cuando se quieren recopilar las ideas de un grupo de personas, opiniones o puntos de vista, con el fin de analizar los procesos de razonamiento o concepciones y detectar estructuras de pensamiento. Algunos productos de este tipo de entrevista son modelos de concepciones o razonamientos que permiten "comprender las formas de pensar, detectar dificultades de aprendizaje y hacer diseños curriculares" (Camargo, 2021, p.73).

Por otro lado, Camargo (2021) menciona que los entrevistados deben responder de manera "espontánea, auténtica, sincera y lo más completa posible, evitando al máximo presuponer lo que el entrevistador desea escuchar" (p.74), mientras que, los investigadores no deben intervenir en dichas respuestas y tienen que recopilarlas de manera exacta. Sugieren que las preguntas sean evaluadas por expertos en donde evidencien su pertinencia, el lenguaje sea adecuado y establecer el orden en que se realizan.

5.2.2. Estrategia investigativa de la entrevista basada en tareas:

Según Romberg (1992) y Goldin (2000) la entrevista basada en tareas consiste en una indagación sistemática sobre la actividad o su evolución, que es realizada por los estudiantes o un grupo de ellos. Para ello, existe una interacción entre el investigador y el entrevistado cuando están respondiendo preguntas o solucionando tareas que se les proponen y que han sido diseñadas de acuerdo con los objetivos investigativos. Además, Clement (2000) afirma que esta estrategia se utiliza "cuando se busca profundizar en los procesos de pensamiento propios de la actividad matemática de los estudiantes y explicaciones de estos" (citado en Camargo, 2021, p.78).

Camargo (2021) menciona que la entrevista basada en tareas permite "documentar formas de resolver tareas matemáticas o pedagógicas, rastrear mecanismos de exploración y avances en la construcción conceptual logrados al resolver una tarea, evaluar el avance en un estado de conocimiento y validar conjeturas sobre aprendizajes, afecto, emociones o concepciones" (p.78).

Los productos de esta estrategia dependen de si la investigación es exploratoria o confirmatoria ya que puede haber descripciones y explicaciones o reportes del proceso, pruebas de hipótesis o de inferencias sobre el pensamiento de las personas, evaluaciones sobre la aplicabilidad de una intervención o desarrollo de constructos que explican la actividad o evolución de esta. Por esta razón, "los investigadores dan información detallada sobre la tarea, los recursos, los momentos de intervención del entrevistador, las situaciones contingentes, etc." (Camargo, 2021, p.79).

En este tipo de investigación una persona o un grupo de individuos se involucran en la resolución de una tarea y uno de los investigadores es quien promueve el diálogo con ellos mientras resuelven una tarea. Por esta razón, Goldin (2000) afirma que "en la interacción no solo intervienen entrevistados y entrevistadores, sino también los recursos disponibles en el escenario y la tarea misma" (en Camargo, 2021, p.79).

Los investigadores preparan preguntas con el fin de que los estudiantes den a conocer de manera clara, completa y precisa lo que piensan, las tareas que emplean, las razones para aplicarlas, etc.; además, son quienes los retan a pensar en voz alta y a utilizar los recursos que tienen para dar solución a una actividad; también, tienen la libertad de hacer preguntas nuevas o utilizar otros implementos para que los estudiantes logren clarificar sus reportes. Además, para Camargo (2021) la meta de los entrevistadores es lograr que los entrevistados expliciten el proceso de razonamiento que realizan a través de sus palabras, gestos, interjecciones, intervenciones, acciones, actuaciones, escritos, etc.

Por otro lado, Goldin (2000) menciona que durante la realización de la tarea los entrevistadores interactúan con los entrevistados según su ritmo. Por lo tanto, después del planteamiento de la tarea, dejan tiempo a los entrevistados para pensar cómo proceder, en dado caso de que no comuniquen los procesos que realizan, pueden formular preguntas como: *¿pueden decirnos algo sobre lo que están haciendo? ¿podrían narrar cómo están procediendo?* si no funciona esta estrategia, pueden hacer preguntas como: *¿pueden valerse*

de alguno de los materiales que tienen a disposición? ¿ven alguna forma de organizar la información? ¿ven algún patrón de registro?

Además, para Goldin (2000) las tareas propuestas no tienen que ser rutinarias y deben garantizar riqueza en el proceso desarrollado por los estudiantes y control sobre la información recogida, cuya atención se enfoca en los procesos de resolución de las tareas, más que en patrones de respuestas correctas o incorrectas. La tarea debe estimular a los estudiantes a que utilicen estrategias heurísticas, usar diferentes tipos de representaciones verbales, generar discusiones, producir textos y exhibir su involucramiento emocional en la situación. Por esta razón, "entre más entrenados estén los participantes para expresar en voz alta lo que están pensando, se tendrán mejores registros de información para el análisis" (Camargo, 2021, p.79).

5.3. Recolección de la información:

Para la toma de datos y el análisis de la información se tendrán en cuenta los recursos y sugerencias para registrar información y construir datos investigativos establecidos por Camargo (2021), con el fin de decidir qué información se desea registrar. Para ello, la autora sugiere preguntarse *¿dónde? ¿a quién o qué? ¿cuándo? ¿haciendo qué? y ¿cómo?* "las respuestas a cada pregunta dependen de las necesidades del estudio que están determinadas por las inquietudes investigativas, el marco de referencia adoptado, el conocimiento previo que tienen los investigadores sobre el fenómeno y la estrategia usada o construida" (Camargo, 2021, p.105). En la siguiente tabla se da respuesta a cada una de las preguntas planteadas anteriormente:

Tabla 1: Recolección de la información

Pregunta	En relación con la investigación
¿Dónde?	Institución Educativa Distrital CODEMA de carácter oficial de educación formal.
¿A quién o a qué?	Interacción directa con 13 estudiantes de grado octavo.
¿Cuándo?	La prueba piloto se implementará a mediados de junio de 2023 y las tareas propias de la investigación se aplicarán entre septiembre y octubre de 2023. Cabe aclarar que los registros se realizarán durante todo el desarrollo de la prueba piloto y de las tareas, cuando hay intervenciones internas en el grupo de trabajo, cuando participa el docente y cuando exista la interacción entre todos los grupos. Además, los registros de los datos serán por sesiones y por grupo.

¿Haciendo qué?	El foco de interés de la investigación se centra en la identificación del tipo de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones. Además, se analizarán los medios semióticos de objetivación que utilizan los estudiantes tales como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos, a partir de los símbolos, los gestos, los deícticos, los movimientos, las señas, el lenguaje y las interacciones. Para ello, se tendrá en cuenta los artefactos como la prueba piloto, las tareas, las grabaciones, los registros fotográficos y las producciones de los estudiantes, los cuales permitirán realizar un análisis cualitativo y multimodal.
¿Cómo?	Para la toma de datos y el análisis de la información se tendrán en cuenta las siguientes fases tomadas de las orientaciones de Miranda et al. (2007), Radford (2012) y Vergel (2015): • Fase 1: Todas las actividades que se desarrollen durante la clase se grabarán de manera visual y auditiva. • Fase 2: Cada grupo desarrollará las tareas propuestas en hojas y se tomará registro fotográfico para su posterior análisis. • Fase 3: Se observarán los videos y se realizará la transcripción de estos, con el fin de determinar las intervenciones, acciones y discusiones que se generaron durante el desarrollo de la actividad. • Fase 4: Se analizará la información recopilada con el propósito de observar los diferentes medios semióticos de objetivación que utilizaron los estudiantes.

5.4. Prueba piloto:

El pilotaje se realizó el día 17 de junio de 2023 con la colaboración de dos estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Distrital CODEMA, con edades comprendidas entre 13 y 14 años. Las tareas propuestas permitieron que los estudiantes interactuaran, discutieran y compartieran sus puntos de vista, lo que generó confianza entre ellos y motivación durante su implementación. El objetivo de implementar la prueba piloto se enfocó en identificar los medios semióticos de objetivación, los ambientes que se generaron

en el aula, analizar la viabilidad de las preguntas planteadas y evidenciar las posibles dificultades que se pueden presentar en la estructura de las tareas y su abordaje.

Como se mencionó anteriormente, se implementaron tres tareas, de las cuales la primera fue tomada de Callejo, et al. (2016) y las otras dos fueron de elaboración propia. Además, dos tareas involucraban una secuencia figural con apoyo tabular y la otra incluía una secuencia numérica con apoyo tabular.

5.4.1. Mesas:

En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación con el número de mesas que pongamos:

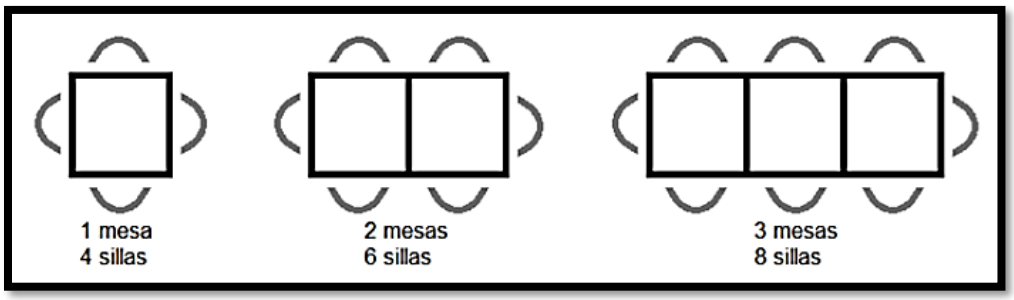


Imagen 35: Secuencia figural con apoyo tabular (p.11) por Callejo, et al. 2016, Avances de Investigación en Educación Matemática, 10.

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
b) ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas?
c) ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 6 mesas?
d) En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
e) Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
f) Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Para el *ítem a* los estudiantes identificaron el patrón de la secuencia figural, lo cual les permitió representar icónicamente las sillas correspondientes a las 4 mesas. Por lo tanto, la representación de las mesas 1, 2 y 3 son de gran ayuda para determinar el número de sillas que se deben ubicar cada vez que se agrega una mesa.

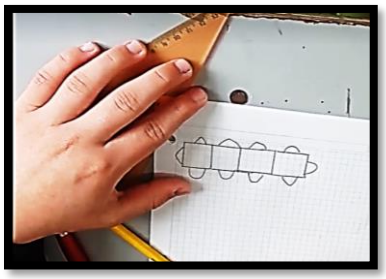


Imagen 36: Representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Para el *ítem b* inicialmente, cada estudiante analizó la cantidad de sillas que deberían ubicarse en 5 mesas. Sin embargo, sus respuestas no coincidían ya que, el estudiante 1 afirmaba que se tenía que agregar 3 sillas; mientras que, la estudiante 2 aseguraba que se debían ubicar dos sillas más, al mencionar que "serían 12, porque se uniría esta [corrió la hoja y tapa la silla que está en la parte lateral derecha de la representación de las cuatro mesas] con esta [señaló la representación de una mesa y cuatro sillas]. Contando este lado, este lado y este lado [señaló tres sillas de la representación de una mesa, específicamente, la silla de la parte superior, la lateral derecha y la inferior]."

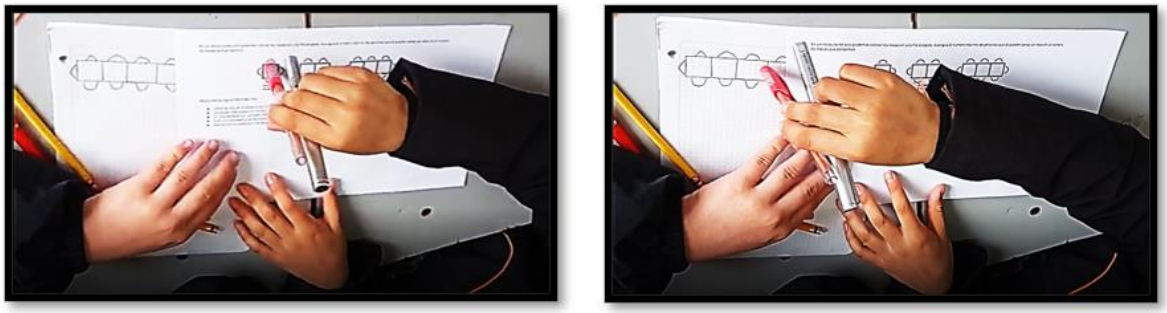


Imagen 37: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

De acuerdo con la explicación de la estudiante 2, el estudiante 1 reconoce el patrón identificado en la secuencia de patrones, sin tener que realizar una representación icónica, el cual se centraba en tapar una de las sillas de la parte lateral, para poder unir las mesas y agregar dos sillas (una en la parte inferior y otra en la parte superior), por último, ubicaban nuevamente la silla que habían tapado.

Además, se evidenció la presencia de algunos medios semióticos tales como los deícticos espaciales, los señalamientos y la kinestésica (coordinación viso-manual). También, se generaron ambientes de discusión, de debate y de análisis, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de revisar y cuestionar los métodos de solución propios y del otro, incluso modificaron sus planteamientos iniciales. Lo anterior, concuerda con los espacios que se deben generar durante el ciclo de la actividad conjunta descrito por Radford (2021a).

Para el *ítem c* los estudiantes rápida y fácilmente lograron determinar la cantidad de sillas que se deben ubicar en 6 mesas, aplicando el patrón identificado en el ítem anterior.

Para el *ítem d* los estudiantes no utilizaron el patrón encontrado anteriormente, sino que recurrieron a la cantidad de sillas que corresponden a 4 y 5 mesas, con el fin de agruparlas y luego duplicarlas, es decir: $4\ mesas + 5\ mesas = 9\ mesas$, entonces $10\ sillas + 12\ sillas = 22\ sillas$. Por lo tanto, en 9 mesas, hay 22 sillas y en 18 mesas, habría 44 sillas. Sin embargo, se evidenció que a la estudiante 2 le generaba duda la respuesta obtenida por el estudiante 1, lo que conllevó a analizar nuevamente la situación por medio de una representación icónica de las 18 mesas, realizaron su respectivo conteo y concluyeron que en 18 mesas se deben ubicar 38 sillas.



Imagen 38: Representación icónica del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea de mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Para el *ítem e,* se evidenció que la estudiante 2 recurrió a la representación icónica, mientras que el estudiante 1 utilizó nuevamente el patrón identificado inicialmente desde el conteo de 38 sillas en 18 mesas. Sin embargo, sus respuestas no coincidieron porque el estudiante 1 afirmaba que serían 20 mesas "porque si se siguen sumando las mesas, se borra uno de los lados [señaló la silla de la parte lateral izquierda de la representación de una mesa] y este queda libre [señaló la silla de la parte lateral derecha de la representación de una mesa]".



Imagen 39: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por el estudiante 1 partícipe en la prueba piloto

Mientras que, la estudiante 2 aseguraba que eran 21 mesas:

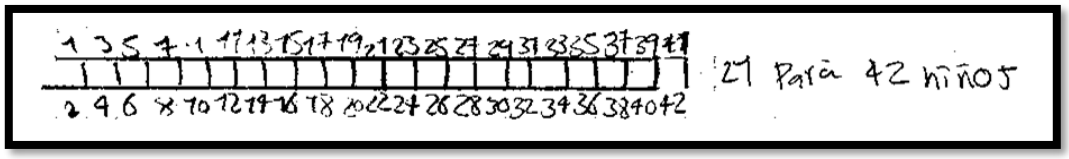


Imagen 40: Representación icónica del término 21 de la secuencia en la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

De manera respetuosa y empática, el estudiante 1 le explicó que dos de las sillas están ubicadas de manera incorrecta, ya que no tuvo en cuenta las sillas que deben ubicarse en los extremos de la primera y última mesa "Pero faltan, porque falta colocar dos sillas, a este lado y a este lado [señaló los dos extremos de las mesas]. Entonces, para 20 mesas son 42 niños".

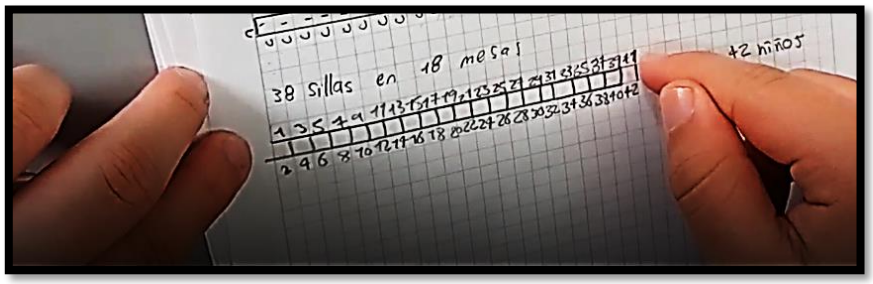


Imagen 41: Señalamientos, deícticos espaciales y representación icónica del término 20 de la secuencia en la tarea mesas realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Para el *ítem f* los estudiantes concluyeron que para una mesa "las sillas se ponen por los lados de la mesa" y cuando se tienen dos o más mesas "se aumentan las sillas de los lados y se quita una del lado que conecta".

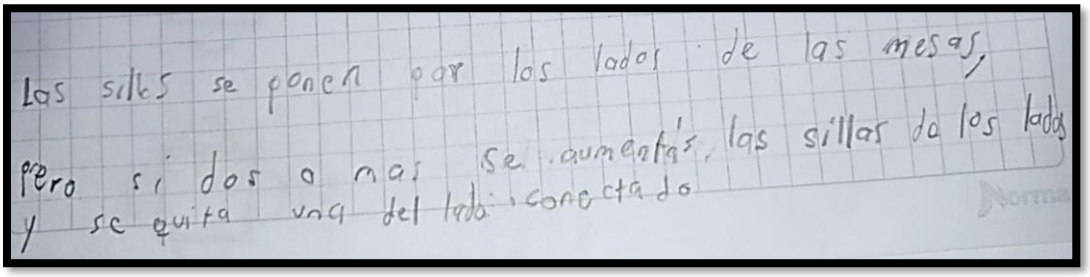


Imagen 42: Producción de los estudiantes partícipes en la prueba piloto en el ítem f de la tarea mesas

5.4.2. Tarea 2. Ramas I:

En una finca se plantó una semilla para que creciera un árbol, el agricultor que la sembró observó su crecimiento durante seis meses y lo registró de la siguiente manera:

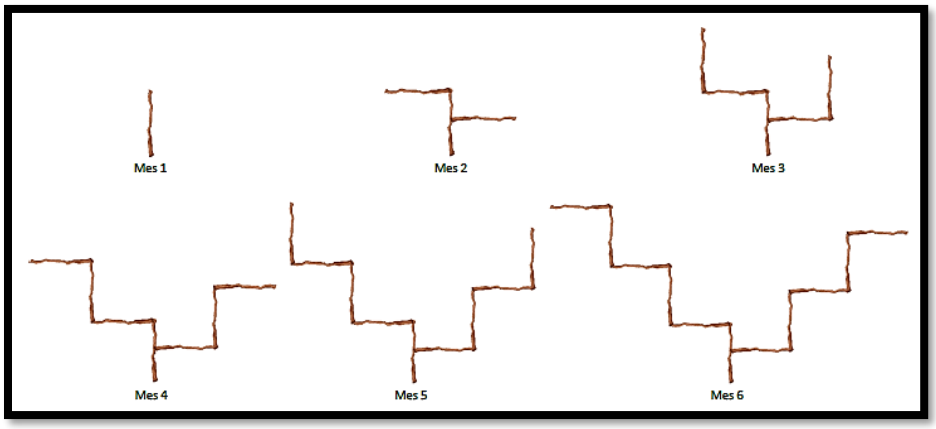


Imagen 43: Secuencia figural con apoyo tabular de la tarea "Ramas I"

Teniendo en cuenta el crecimiento del árbol, responde las siguientes preguntas con su justificación correspondiente:

a) ¿Cuántas ramas tendrá el árbol en el mes 7?
b) ¿Cuántas ramas tendrá el árbol en el mes 12?
c) ¿En algún mes el árbol tendrá 35 ramas?
d) ¿En algún mes el árbol tendrá 61 ramas?
e) ¿En algún mes el árbol podría tener 22 ramas?
f) ¿En algún mes el árbol podría tener 40 ramas?
g) Otro agricultor de la misma finca está interesando en el crecimiento del árbol ¿cómo le explicarías qué debe hacer para conocer la cantidad de ramas que se tendrán en cualquier mes?

Para el *ítem a,* los estudiantes analizaron el comportamiento que describe el crecimiento de las ramas, ya que mencionaban que *"están aumentando hacia arriba, porque mire, en el segundo mes la rama estaba creciendo así* [deslizó el lápiz y el dedo índice para indicar las ramas horizontales]*, en el tercer mes crecieron hacia arriba* [deslizó el lápiz y el dedo índice para indicar las últimas ramas verticales]*, en el cuarto crecen a los lados* [deslizó el lápiz y el dedo índice para indicar las últimas ramas horizontales] *en el quinto mes otra vez empieza a subir* [deslizó el lápiz y el dedo índice para indicar las últimas ramas verticales] *y en el sexto mes vuelven a crecer a los lados* [deslizó el lápiz y el dedo índice para indicar las últimas ramas horizontales]*":*

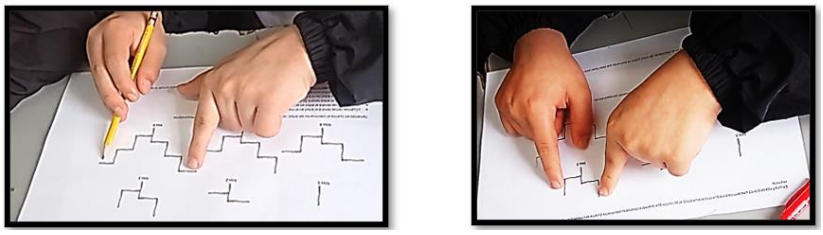


Imagen 44: Señalamientos y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Luego de analizar la secuencia de patrones los estudiantes afirmaron que *"por cada lado aumentan las ramas. Por ejemplo, en el primer mes, hay una rama; en el segundo mes, nada más hay dos ramas* [deslizó los dos dedos índices para indicar las ramas horizontales]. *Luego, empiezan a subir de dos en dos, entonces serían 13".* En este momento, los estudiantes identificaron la comunalidad en la secuencia de patrones.

Se evidenció la presencia de algunos medios semióticos tales como los deícticos espaciales, los señalamientos, los deslizamientos y la kinestésica (coordinación viso-manual). También, se generaron ambientes de análisis, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de observar cómo cambia la secuencia de un término a otro. Lo anterior, concuerda con los espacios que se deben generar durante el ciclo de la actividad conjunta descrito por Radford (2021a).

Para el *ítem b,* los estudiantes acudieron a la representación icónica para concluir que el árbol tendría 23 ramas en el mes 12:

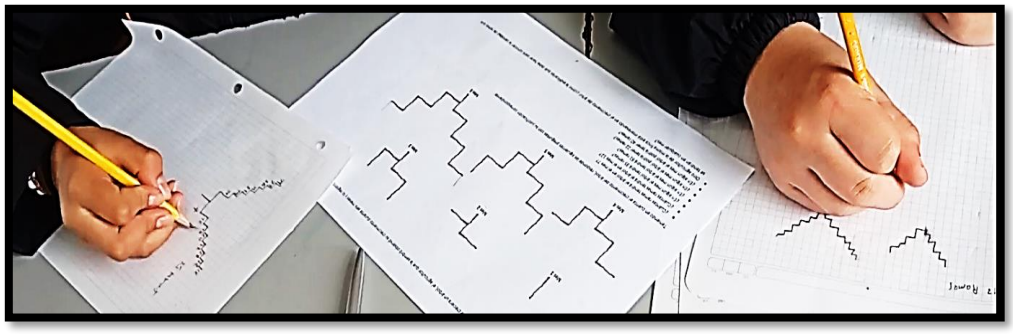


Imagen 45: Señalamientos y representación icónica del término 12 de la secuencia en la tarea de ramas I realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Para el *ítem c,* completaron la representación icónica que habían realizado hasta llegar a las 35 ramas que correspondían al día 18. Sin embargo, uno de los estudiantes intentó encontrar un método de solución numérico, ya que mencionó que *"primero hay que dividir las ramas, una de este lado y otra de este lado* [señaló la rama izquierda y derecha respectivamente, de la representación del segundo mes]. *Entonces hay que agregar de a 6 ramas a cada lado porque en el mes 12 eran 23 ramas y para llegar a 35 faltan 12 y la mitad son 6, o sea, 6 ramas del lado izquierdo y 6 del lado derecho".*

Para el *ítem d,* nuevamente recurren a la representación icónica, pero esta vez, solamente dibujan las ramas de un lado y concluyen que en el mes 32 se tendrían 61 ramas. Sin embargo, la estudiante escribió y resolvió la operación $31 + 31 = 62$, pero la borró rápidamente:

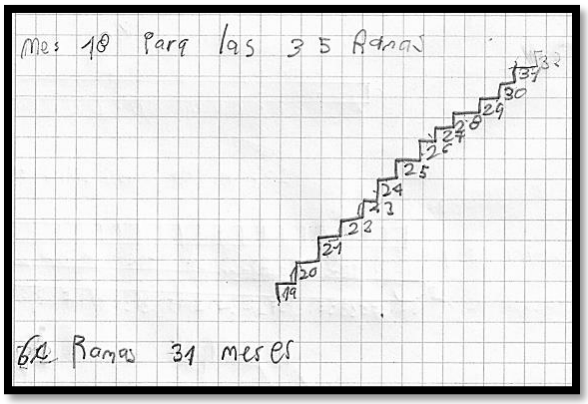


Imagen 46: Representación icónica del término 31 de la secuencia en la tarea ramas I realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto

Para el *ítem e* y *f,* los estudiantes afirmaron que no es posible que en algún mes el árbol tenga 22 ni 40 ramas porque *"habíamos dicho que aumentan de a dos ramas* [levantó los dedos índices], *en el mes 12 hay 23 ramas, entonces la rama 22 y 23 quedan en el mes 12, digamos la rama 20 y 21 son del mes 11. Entonces no se podría porque siempre van en parejas":*



Imagen 47: Gestos realizados por los estudiantes partícipes en la prueba piloto en la tarea ramas I

Para el *ítem g*, los estudiantes mencionaron que le dirían al agricultor que *"en el mes 1 crece una sola rama y a partir del mes dos crecen de a dos".*

5.4.3. Tarea 3. Juanes:

Juanes es un reconocido cantante colombiano de rock en español y pop, cuando empezó su trayectoria musical tenía 25 seguidores. Sin embargo, cuando lanzó su canción titulada "la camisa negra", dicha cantidad se incrementó, su mánager registró en una tabla la cantidad de seguidores que obtuvo durante los primeros cinco días después de su éxito:

Día	1	2	3	4	5
Cantidad de seguidores	27	29	31	33	35

Teniendo en cuenta el éxito de Juanes dado por el lanzamiento de dicha canción, responde las siguientes preguntas con su justificación correspondiente:

a) ¿Cuántos seguidores tendrá en el día 7?
b) ¿Cuántas seguidores tendrá en el día 12?
c) ¿En algún día tendrá 67 seguidores?
d) ¿En algún día tendrá 105 seguidores?
e) ¿En algún día tendrá 54 seguidores?
f) ¿En algún día tendrá 114 seguidores?
g) El mánager de Juanes está interesado en conocer la cantidad de seguidores que tiene en cualquier día después del lanzamiento de su canción ¿cómo le explicarías al mánager lo que debe realizar?

Para el *ítem a* y *b,* fácilmente los estudiantes reconocieron que se tienen 39 y 49 seguidores respectivamente, ya que mencionaron que "*este es como el de los árboles, o sea van sumando de a 2 seguidores"* y se apoyaron en una tabla construida por ellos. En este momento, los estudiantes identificaron la comunalidad en la secuencia de patrones.



Imagen 48: Señalamientos y tabla realizada por los estudiantes partícipes en la prueba piloto en la tarea Juanes

Para el *ítem c y d,* los estudiantes siguieron construyendo la tabla hasta llegar a 67 y 105 seguidores y afirmaron que dicha cantidad se tendría en el día 21 y en el 41, respectivamente.

Para el *ítem e* y *f,* los estudiantes revisaron la secuencia apoyándose en la tabla y concluyeron que no habría algún día en que se tendrían 54 y 114 seguidores porque van de dos en dos.

Finalmente, para el *ítem g,* los estudiantes le dirían al mánager de Junes:

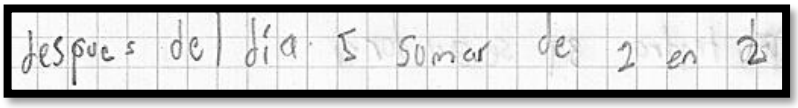


Imagen 49: Producción de los estudiantes partícipes en la prueba piloto en el ítem g de la tarea Juanes

De manera general, los estudiantes lograron identificar la comunalidad en las tres secuencias de patrones involucradas en las tareas aplicadas, ya que encontraron un patrón para determinar el término siguiente siempre y cuando el anterior fuera dado. Para ello, los estudiantes detallaron los términos dados, observaron las recurrencias y analizaron cómo cambian y cómo aumentan los términos de la secuencia.

De acuerdo con lo anterior, las tres tareas se implementarán en la investigación, ya que se evidenció la movilización de algunos medios semióticos tales como los deícticos espaciales, los señalamientos y la kinestésica (coordinación viso-manual). Además, las preguntas planteadas fueron comprendidas por los estudiantes junto con los términos dados de la secuencia, lo que permitió que se generaran espacios de discusión, de debate y de análisis,

donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de revisar y cuestionar los métodos de solución propios y del otro, e incluso tuvieron que modificar sus planteamientos iniciales.

5.5. Tareas de la investigación:

Como se mencionó anteriormente, las tres tareas que se aplicaron en la prueba piloto se implementarán en la investigación a pesar de que en la tarea de Juanes se evidenció con menos intensidad los medios semióticos de objetivación utilizados por los estudiantes a comparación de las otras dos tareas que comprometían secuencias figurales con apoyo tabular. Lo anterior coincide con lo planteado por Vergel (2014) cuando afirma que:

> "Al parecer las secuencias figurales con apoyo tabular ofrecen índices geométrico-espaciales que movilizan formas perceptivas y gestuales en los alumnos, formas que parecen no ser movilizadas, o por lo menos no con la misma intensidad, en el caso de las secuencias numéricas con apoyo tabular y las puramente numéricas" (p.105).

Por esta razón, se diseñó otra tarea (Ramas II) que tuviera una secuencia figural con apoyo tabular, que permitiera visualizar el uso de medios semióticos de objetivación en la actividad matemática y que involucrara un nivel de mayor complejidad de generalización, con el fin de evidenciar detalladamente el componente de abducción analítica, los nodos semióticos, el reconocimiento y materialización de las variables, el trabajo con lo indeterminado y la generalización de la comunalidad. A continuación, se presenta dicha tarea:

En una finca se plantó una semilla para que creciera un árbol, el agricultor que la sembró observó su crecimiento durante cinco meses y lo registró de la siguiente manera:

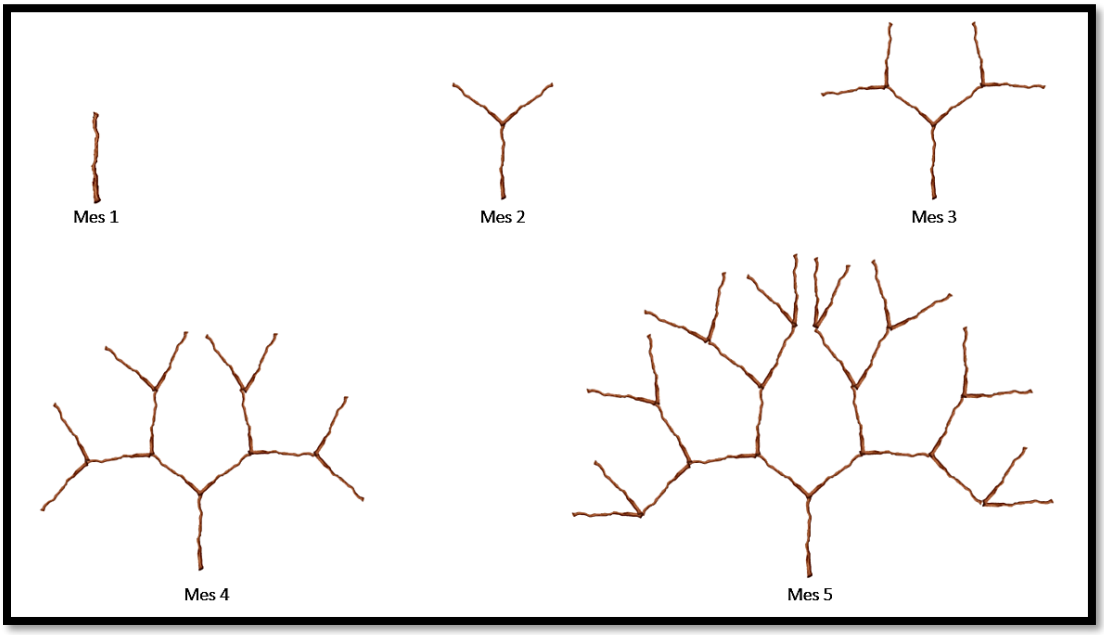


Imagen 50: Secuencia figural con apoyo tabular de la tarea "Ramas II"

Teniendo en cuenta el crecimiento del árbol, responde las siguientes preguntas con su justificación correspondiente:

a) ¿Cuántas ramas tendrá el árbol en el mes 6?
b) ¿Cuántas ramas tendrá el árbol en el mes 8?
c) ¿En algún mes el árbol tendrá 127 ramas?
d) ¿En algún mes el árbol tendrá 511 ramas?
e) ¿En algún mes el árbol podría tener 24 ramas?
f) ¿En algún mes el árbol podría tener 32 ramas?
g) Otro agricultor de la misma finca está interesando en el crecimiento del árbol ¿cómo le explicarías qué debe hacer para conocer la cantidad de ramas que se tendrán en cualquier mes?

5.6. Categorías de análisis:

Teniendo en cuenta los datos obtenidos en la aplicación de las tareas de la investigación, la información suministrada en las producciones de los estudiantes, las grabaciones de audio y video, las fotografías y las entrevistas realizadas, se establecieron las siguientes categorías de análisis con el fin de documentar los tipos de generalización que producen los estudiantes cuando resolvieron las cuatro tareas sobre secuencias de patrones. Para ello, se tomaron como referentes las tres fases del proceso de generalización establecidas por Vergel et al. (2022) y la caracterización de estas realizadas por Bayona (2020):

Tabla 2: Categorías de análisis

Categorías	Descripción	Subcategorías
Generalización aritmética	Los estudiantes se enfrentan con una secuencia de patrones que contiene algunos términos dados, observan recurrencias, analizan cómo cambian y cómo aumentan, con el fin de identificar una característica en común.	Expresa con palabras cómo varía la secuencia de patrones.
		Realiza representaciones icónicas o numéricas para comunicar cómo varía la secuencia de patrones.
		Realiza movimientos, gestos, deícticos espaciales y cambia su ritmo (tono de voz).
		Identifica la característica en común sin hacerse explícita en las producciones.
		Identifica la característica en común y es explícita de manera verbal, escrita o kinestésica en las producciones.
		Establece la relación entre un término y su valor correspondiente siempre y cuando sean cercanos a la secuencia dada.
		Reconoce las variables sin identificar su relación de dependencia e independencia.

		Emplea la abducción para pasar de un término a otro teniendo en cuenta el anterior.
Generalización aritmética sofisticada	Los estudiantes se aproximan a un cálculo de términos acercándose a una expresión multiplicativa, sin embargo, no se llega a materializar y las variables aún no cobran sentido, en este caso, se menciona que existe una proto - analiticidad o analiticidad incipiente.	Utiliza el lenguaje aritmético para determinar los términos de una secuencia de patrones por medio de representaciones icónicas o de una lista de valores de los términos anteriores al solicitado.
		Expresa las relaciones numéricas de un término a otro por medio de sus producciones verbales, escritas y kinestésicas de manera sincrónica, es decir, se evidencia la presencia de un nodo semiótico de objetivación.
		Reconoce las variables, pero no se materializan ni cobran sentido.
		Emplea la abducción de manera proto - analítica para deducir una expresión que permite determinar el valor de cualquier término teniendo en cuenta un término conocido menor que no necesariamente es el anterior.
Generalización algebraica	Los estudiantes utilizan la característica en común como hipótesis para deducir una expresión para determinar cualquier término de la secuencia, es decir, existe una abducción analítica.	Descompone la figura presentada en la secuencia de patrones para establecer una correspondencia o relación numérica entre el término y la cantidad de figuras de este.
		Establece una sincronía entre las producciones verbales, escritas y kinestésicas para determinar cualquier término de la secuencia, es decir, se evidencia la presencia de una contracción semiótica la cual hace referencia a la aparición de palabras o frases clave expresadas en un lenguaje natural o aritmético.
		Emplea expresiones, dibujos, ejemplos o frases clave que indican el trabajo con los términos dados, los trabajados y los que no son visibles.
		Establece una relación de dependencia e independencia entre las variables.
		Contempla y trabaja con lo indeterminado, es decir, la variable se materializa y cobra sentido.
		Emplea la abducción de manera analítica que permite determinar el valor de cualquier término de la secuencia.

6. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

En este capítulo presentamos el análisis de los datos y de la información obtenida en la actividad matemática desarrollada en la implementación de las cuatro tareas propuestas. Para ello, se tuvo en cuenta la pregunta de investigación, los objetivos, el marco teórico (enmarcado en la TO y en el pensamiento algebraico), el análisis multimodal, las categorías de análisis y las producciones de los estudiantes que fueron obtenidas a través de las cuatro fases de recolección de datos planteadas en la metodología. Cabe resaltar que para el desarrollo de las tareas de la investigación se conformaron cuatro grupos (G1, G2, G3 y G4) cada uno de 3 o 4 estudiantes, los cuales se enfrentaron a tareas que involucraban secuencias figurales o numéricas con apoyo tabular.

6.1. Tarea mesas:

Inicialmente, la docente entregó a cada grupo la hoja correspondiente y mencionó que *"en esta tarea se trabajará con una secuencia figural*". Posteriormente, leyó la situación y preguntó por la cantidad de sillas (número correspondiente) para 1, 2 y 3 mesas (término), los estudiantes contaban uno a uno la cantidad correspondiente. Luego de un trabajo individual e interno grupal, la docente visitó cada uno de los equipos de trabajo para indagar cómo han trabajado con la secuencia y para hacer emerger una toma de conciencia de la relación funcional, momento al que Radford (2014) lo denomina: el intento de constituirse en un trabajo conjunto.

Para desarrollar el *ítem a* que solicitaba dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas, los estudiantes de G2 realizaron la representación icónica y contaron las sillas correspondientes, mientras que, G1, G3 y G4 percibieron que por cada mesa que se agregue se tienen dos sillas más. Por ejemplo, G3 mencionó que *"hay 10 sillas porque no se pueden sentar en la esquina y como se agregó otra, serían dos más"* y contaron la cantidad de sillas de dos en dos:



Imagen 51: Señalamientos, deícticos espaciales, gestos y conteos manuales realizados por los estudiantes de G3 de la tarea mesas

Los estudiantes de G1 analizaron la secuencia de la siguiente manera:

> *L1. Estudiante 1:* Es que en la de las 2 mesas hay 6 sillas, en la de 3 mesas queda igual pero sólo se agregó una mesa en el medio entonces se agregaron dos sillas.
> *L2. Estudiante 2:* Entonces serían 10 porque se suman dos sillas cada vez que se agrega una mesa [los estudiantes realizaron el dibujo de las 4 mesas con sus sillas correspondientes]:

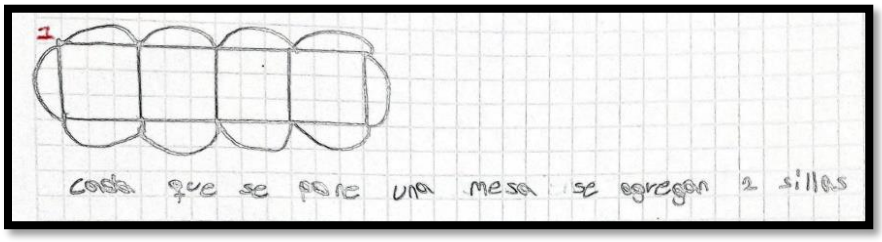


Imagen 52: Representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes de G1

Se evidencia que en *L1* los estudiantes de G1 implícitamente dedujeron que en la secuencia siempre hay algo que se mantiene y son las dos mesas de los extremos que corresponden a 6 sillas y si se agrega cierta cantidad de mesas se ubican en el medio, es decir:

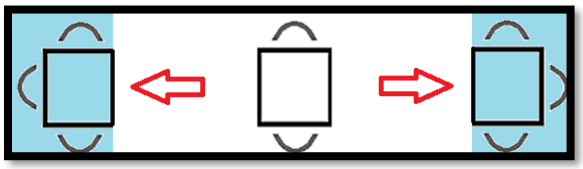


Imagen 53: Representación de los gestos indexicales realizados por los estudiantes de G1 para analizar la secuencia de patrones de la tarea mesas

Las estudiantes de G4 mencionaron que *"hay 10 sillas porque se agrega una mesa* [la dibujó en la representación icónica de 3 mesas], *se agregan dos sillas* [dibujó las dos sillas una en la parte superior y otra en la inferior] *y esta se corre* [señaló la silla del extremo derecho de la representación icónica de 3 mesas y la deslizó hasta el extremo derecho de la secuencia]*"*, es decir:

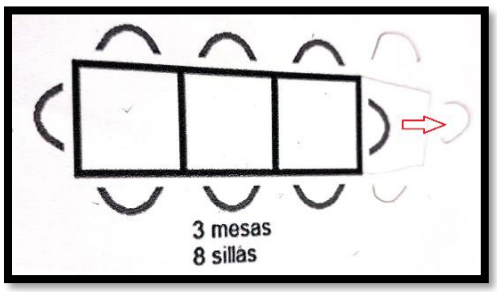


Imagen 54: Representación del gesto indexical realizado por los estudiantes de G4 y representación icónica del término 4 en la secuencia de patrones de la tarea mesas

Para el ítem *b y c* que solicitaban determinar la cantidad de sillas que había en 5 y 6 mesas los estudiantes de G2 nuevamente realizaron la representación icónica de cada una y concluyeron que eran 12 y 14, respectivamente. Mientras que, G3 y G4 inicialmente no realizaron la representación icónica, sino que utilizaron la comunalidad que habían encontrado, por lo tanto, mencionaban que *"hay 12 sillas porque se añade una mesa y alrededor de 6 mesas serían 14 sillas porque se añaden dos mesas"* (G3) y *"pues con 5 mesas serían 12 sillas porque se agrega una mesa que son dos sillas y con 6 mesas se suman otras dos sillas más que serían 14"* (G4). Sin embargo, las estudiantes de G4 realizaron la representación icónica de las 5 y 6 mesas para verificar sus respuestas.

Los estudiantes de G1 dibujaron dos casos, uno cuando las mesas se ubicaban en una sola fila y otro cuando se colocaban de manera aleatoria, sin embargo, uno de los integrantes del grupo mencionaba que se deben poner en fila para que funcione lo que habían encontrado en el punto anterior:

L3. Estudiante 1: Pues serían 12 porque se agregan dos más [realizó la representación icónica].
L4. Docente: ¿Cuántas te salieron ahí? [Preguntó a otro estudiante].
L5. Estudiante 2: Diez [contó las sillas de su representación icónica], entonces depende de la posición:

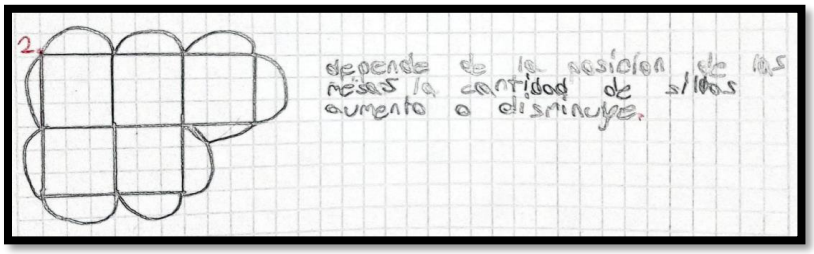


Imagen 55: Representación icónica del término 5 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por el estudiante 2 de G1

L6. Estudiante 1: Es que tienes que ponerla en fila o sino no funciona:



Imagen 56: Representación icónica del término 5 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por el estudiante 1 de G1

Teniendo en cuenta las tres fases de la generalización propuestas por Vergel et al. (2022), G1, G3 y G4 produjeron una generalización aritmética ya que identificaron la comunalidad en la secuencia de patrones y emplearon la abducción para pasar de un término a otro teniendo en cuenta el anterior.

Para abordar el *ítem d* que solicitaba determinar la cantidad de invitados que pueden sentarse alrededor de 18 mesas, los estudiantes de G2 y G4 realizaron la representación icónica, contaron la cantidad correspondiente y mencionaron que *"a cada mesa se va sumando de a 2, entonces serían 38 sillas"* (G2) y *"los invitados que se pueden sentar son 38, encontramos el resultado contando y haciendo la gráfica* (G3):

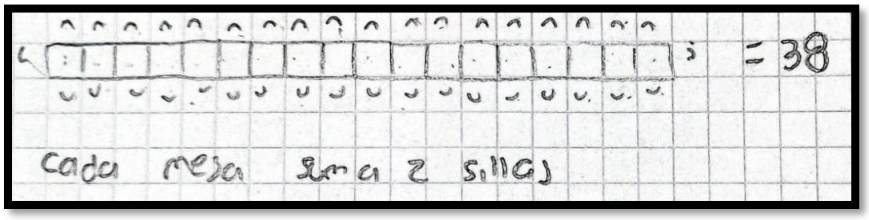


Imagen 57: Representación icónica del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por los estudiantes de G3

En este momento, se observa que G2 reconoció la comunalidad en la secuencia de patrones, por lo tanto, realizaron una generalización aritmética.

Por otro lado, los estudiantes de G1 mencionaron que *"las esquinas son tres sillas y las del medio son de a dos, sería sumar las tres de las esquinas que serían 6, más las otras 16, 16 por 2 es 32 y 32 más 6 serían 38"* y escribieron lo siguiente*:*

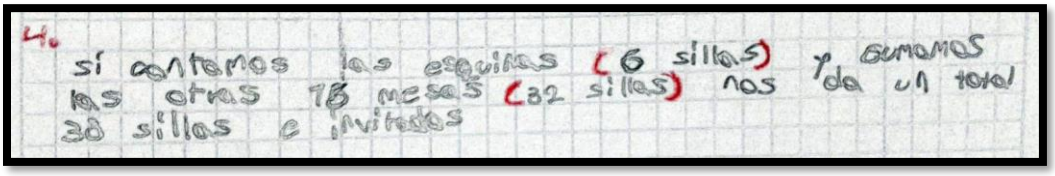


Imagen 58: Método propuesto por G1 para determinar el número correspondiente del término 18 en la secuencia de patrones de la tarea mesas

Lo planteado por los estudiantes se puede describir como $T_{18} = 6 + (18 - 2) * 2$.

Además, G3 realizó la representación icónica para determinar el número de sillas correspondientes a 18 mesas dialogaron lo siguiente:

L7. Estudiante 1: Es que, si se tienen 18 mesas, serían 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 [señaló cada mesa, pero cuenta de dos en dos].
L8. Estudiante 2: ¿Y más estos dos de acá? [señaló las sillas de los extremos] ¿Esas las contó?
L9. Estudiante *1:* No, entonces serían 38. Porque 18, más 18, más 2, son 38 si se sigue la secuencia, porque si las mesas estuvieran separadas serían 18 por 4 que es [pausa] 72.

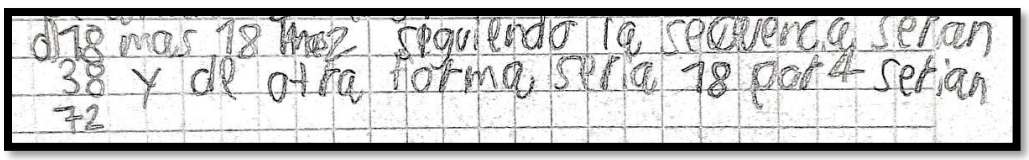


Imagen 59: Conclusión del ítem d planteada por G1 en la tarea mesas

Lo planteado por los estudiantes en *L9* se puede describir como $T_{18} = 18 + 18 + 2$.

En este momento, se evidenció que G1 y G3 reconocieron las variables (pero no las han materializado, ni han cobrado sentido) y dedujeron una expresión que permitió determinar el valor de cualquier término, es decir, emplearon la abducción de manera proto – analítica; por lo tanto, produjeron una generalización aritmética sofisticada propuesta por Vergel et al. (2022).

Para abordar el *ítem e* que solicitaba determinar la cantidad de mesas necesarias para sentar a 42 invitados, G1, G3 y G4 tomaron como referencia el punto anterior mencionando que *"ya teníamos 38 sillas del punto anterior, a 42 faltan 4, que sería agregar 2 mesas, se tendrían 18 más 2 son 20, 20 mesas"* (G1), *"se agregan dos mesas más que el problema anterior y resultan 42 sillas porque por cada mesa se añaden dos sillas"* (G3) y *"para 42 niños serían 20 mesas, el resultado lo encontramos con el anterior ejercicio agregándole dos mesas, porque por cada mesa son dos sillas más"* (G4).

Los estudiantes de G2 realizaron la representación icónica y contaron las sillas correspondientes:

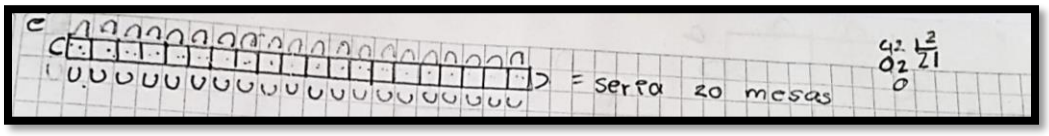


Imagen 60: Representación icónica del término 20 en la secuencia de patrones de la tarea mesas realizada por G2

Sin embargo, surgió un diálogo entre ellos y la docente:

> *L10. Docente:* ¿Por qué son 20 mesas?
> *L11. Estudiante 1:* Porque 42 dividido 2 es 21 [realizó la operación].
> *L12. Docente:* ¿Qué hiciste con ese 21?
> *L13. Estudiante 1:* Es que esa era la cantidad de invitados.
> *L14. Docente:* ¿Por qué no pusiste 21 acá y 21 acá? [señaló las sillas superiores e inferiores, respectivamente, sin señalar las sillas de los extremos].
> *L14. Estudiante 1:* Porque al final siempre tienen que haber dos sillas una al inicio y al final y, dos sillas hacen una mesa, que es la que se debe restar.

Lo planteado por los estudiantes en *L11* y *L14* se puede describir como $n = (a \div 2) - 1$ siendo n la cantidad de mesas y a el número de sillas que corresponde al número de invitados y $a = 2k$ con $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$ Implícitamente, G2 dedujo una expresión que permitió determinar la cantidad de mesas (número correspondiente) para ubicar cierta cantidad de sillas (término). Por lo tanto, G2 produjo una generalización aritmética sofisticada propuesta por Vergel et al. (2022).

Finalmente, para el *ítem f* que solicitaba explicar una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas, G2 mencionó *"que en cada fila de mesas en las esquinas quedan de a tres y en las otras de a dos"*:

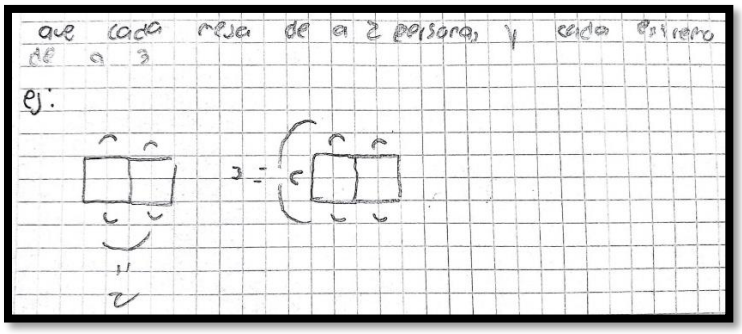


Imagen 61: Conclusión y ejemplo del ítem f de la tarea mesas planteado por G2

Los estudiantes de G1 utilizaron el método que habían encontrado anteriormente para dar un ejemplo con 50 mesas:

L15. Docente: ¿Cómo le dirías a una persona cuántas sillas debe ubicar en cualquier cantidad de mesas?
L16. Estudiante 2: Por ejemplo, si tú necesitas 50 mesas sería que mirara las esquinas y sumara el total de sillas y [pausa]. Las esquinas que serían un total de 6 y las del medio.
L17. Docente: ¿Cómo sacamos las del medio?
L18. Estudiante 2: Sumándolas, sumando de dos en dos.
L19. Docente: Entonces ¿cómo le dirías a esa persona?
L20. Estudiante 2: ¡Ay ya! Sería coger las esquinas, que serían dos mesas y las otras que serían 48, multiplicar 48 por 2 y luego sumar las sillas de las esquinas.

La docente intervino con el fin de hacer emerger la materialización de las variables y el trabajo con lo indeterminado. Para ello, se tuvo el siguiente diálogo:

L21. Docente: Ese con el ejemplo de 50, ahora ¿cómo le dirías a esa persona si tiene cualquier cantidad de mesas?
L22. Estudiante 2: A la cantidad de mesas se le quitan dos y la cantidad del centro se multiplica por dos y se suma … mejor lo escribo porque me confundo:

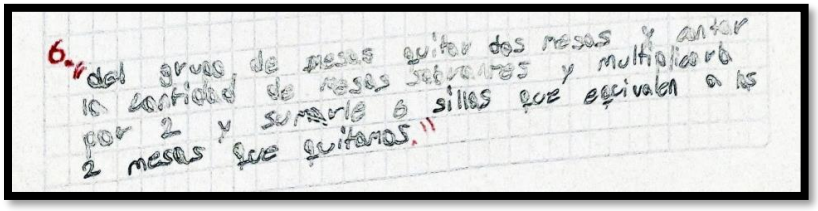


Imagen 62: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G1

L23. Estudiante 2: Sería así, del grupo de mesas quitar dos mesas y contar la cantidad de mesas sobrantes y multiplicarla por 2 y sumarle 6 sillas que equivalen a las 2 mesas que quitamos.

Lo planteado en *L23* se puede describir como $(n-2)*2+6$ siendo n el número de mesas y con $n=1,2,3,4,\ldots$

Por otro lado, en G3 surgió el siguiente diálogo:

L24. Estudiante 1: No entendemos a que se refiere con "regla".
L25. Docente: Digamos si alguien quiere saber cuántas sillas debe ubicar en cualquier cantidad de mesas ¿qué le dirían?
L26. Estudiante 1: ¿Multiplicando por dos el número de mesas? Porque por cada mesa serían dos sillas y después se le añaden dos que serían las dos del final.
L27: Docente: Entonces ¿cómo quedaría?
L28: Estudiante 1: Se multiplica por 2 cada mesa y después se le añaden dos sillas más [lo escribe]:

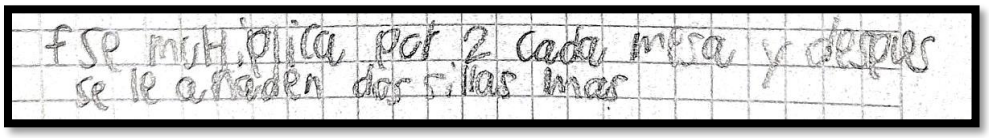


Imagen 63: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G3

Lo planteado en *L28* se puede describir como $n*2+2$ siendo n el número de mesas y con $n=1,2,3,4,\ldots$

Por último, en G4 surgió el siguiente diálogo:

L29. Estudiante 1: Es que no entiendo la pregunta.
L30. Docente: ¿Cómo hallarías la cantidad de sillas para cualquier cantidad de mesas?
L31. Estudiante 1: Se podría dividir la cantidad de mesas por dos.
L32. Docente: Hagamos el ejemplo con las 18 mesas.
L33. Estudiante 2: No da, porque 18 entre 2 da 9.
L34. Docente: Entonces ¿qué harían?
L35. Estudiante 1: Sería multiplicar, porque si lo multiplicamos sacaría el doble de la cantidad ¿no? Y como por cada mesa hay dos sillas…
L36. Docente: Entonces 18 por 2 nos da 36.
L37. Estudiante 1: Pero le agregamos las dos sillas de los extremos que sería 38, ahora si dio.
L38. Docente: ¿Cómo sería con cualquier cantidad de mesas?
L39. Estudiante 1: Poner la cantidad de mesas multiplicado entre dos y agregarle las últimas dos sillas [escribe en la hoja].

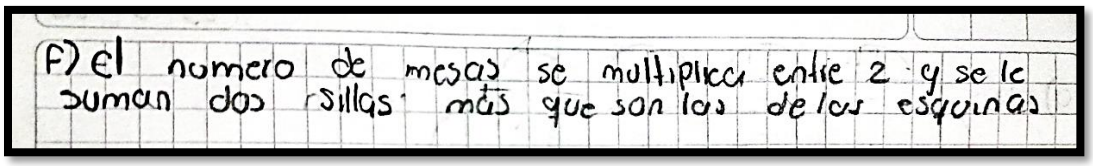


Imagen 64: Conclusión del ítem f de la tarea mesas planteada por G4

Lo planteado en *L39* se puede describir como $n * 2 + 2$ siendo n el número de mesas y con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

De acuerdo con lo anterior y los tres tipos de generalización propuestos por Vergel et al. (2022), los estudiantes de G1, G3 y G4 produjeron una generalización algebraica ya que establecieron una relación de dependencia e independencia entre las variables, las materializaron y cobraron sentido, es decir, contemplaron y trabajaron con lo indeterminado. Además, generalizaron la característica en común, por lo tanto, hubo una presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013), lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural.

6.2. Tarea Juanes:

Inicialmente, la docente entregó a cada grupo la hoja correspondiente y mencionó que *"para este caso, no se trabajará con una secuencia figural sino numérica*". Posteriormente, leyó la situación y preguntó por la cantidad de seguidores (número correspondiente) de cada día (término). Luego de un trabajo individual e interno grupal, la docente visitó cada uno de los equipos de trabajo para indagar cómo han trabajado con la secuencia y para hacer emerger una toma de conciencia de la relación funcional, momento al que Radford (2014) lo denomina: el intento de constituirse en un trabajo conjunto.

Fácilmente, los estudiantes lograron identificar que los términos aumentaban en 2, lo que permitió responder el *ítem a*, que preguntaba por la cantidad de seguidores que Juanes tenía en el día 7, estas fueron algunas expresiones de los estudiantes *"de 27 a 29 hay dos, se van sumando de a dos, entonces 36 y 37, en el día 6; 38 y 39, en el día 7"* (G1), *"van de dos en dos, entonces dos, cuatro, más 35 serían 39"* (G2), *"28 y 29, aumenta de a dos seguidores, entonces 39 seguidores"* (G3) y *"va avanzando de a dos seguidores cada día, entonces serían 39 seguidores"* (G4). Es aquí donde se evidenció que los estudiantes identificaron la comunalidad $+2$ en la secuencia de patrones.

Además, se observaron algunos medios semióticos tales como los señalamientos y la coordinación viso – manual. De acuerdo con lo anterior, se evidenció que los estudiantes identificaron la característica en común de manera verbal, escrita y kinestésica en la secuencia de patrones e incluso un grupo la denominó como el "dato":

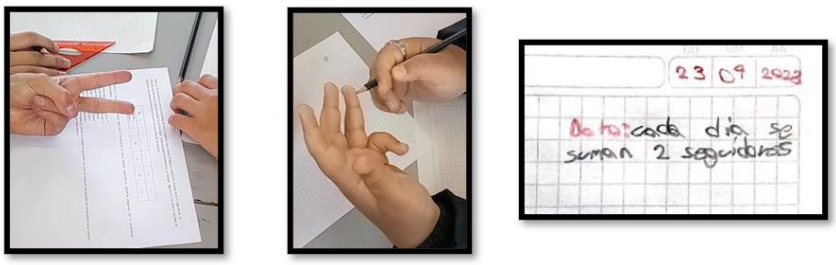


Imagen 65: Conteos manuales de dos en dos realizados por los estudiantes en el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes

En el *ítem b* que consistía en determinar la cantidad de seguidores del día 12, todos los grupos coincidieron que era 49. Sin embargo, utilizaron un método diferente, dos de los grupos realizaron una tabla (G2 y G4), otro mencionó que *"solo se siguen sumando de a dos personas por día"* (G3) y G1 acudió a la proporcionalidad:

> *L1. Estudiante:* Si el día 2 es 29 [pausa] entonces serían 49.
> *L2. Docente:* ¿Por qué serían 49?
> *L3. Estudiante:* Es que es una suma muy sencilla, porque cada día son dos seguidores más, entonces 5 días equivaldrían a 10 seguidores y al día 2 se le agregan 10 días, sería sumarle 10 más 10 seguidores, entonces 10 días equivalen a 20 seguidores.

Por otro lado, en el *ítem c* se solicitaba determinar si en algún día Juanes tuvo 67 seguidores, para ello, G2, G3 y G4 construyeron una tabla que les permitió afirmar que en el día 21 se tendrá dicha cantidad. Mientras que, dos estudiantes de G1 movilizaron varios medios semióticos, es decir, se produjo un nodo semiótico de objetivación ya que uno mencionaba los días y simultáneamente otro realizaba el conteo con las manos y expresaba el resultado e incluso cada uno registró el conteo que realizó:



Imagen 66: Conclusión del ítem c de la tarea Juanes planteada por el estudiante 1 de G1



Imagen 67: Conclusión del ítem c de la tarea Juanes planteada por el estudiante 2 de G1

Para dar respuesta al *ítem d* que preguntaba si en algún día Juanes tendrá 105 seguidores, G2, G3 y G4 continuaron construyendo la tabla hasta encontrar o superar dicha cantidad. Sin embargo, sus respuestas no coincidían debido a repeticiones o conteos faltantes durante su realización. Por ejemplo, los estudiantes de G2 concluyeron que en el día 41 se tienen 105 seguidores, pero no tuvieron en cuenta que escribieron que en el día 22 hay 67 seguidores, es decir, la misma cantidad que en el día 21:

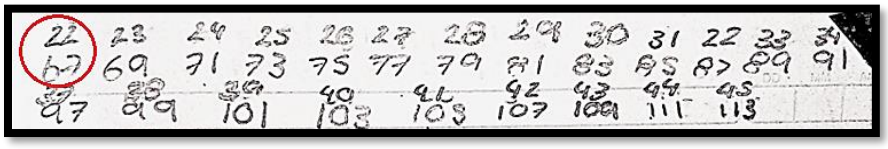


Imagen 68: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G2

Los estudiantes de G3 completaron la tabla hasta tener 115 seguidores y concluyeron que en el día 41 se tienen 105 seguidores. Sin embargo, no se dieron cuenta que no escribieron el día 29:

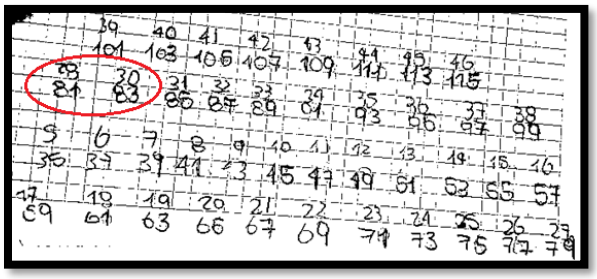


Imagen 69: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G3

Las estudiantes de G4 completaron correctamente la tabla hasta llegar a 105 seguidores que correspondía al día 40:

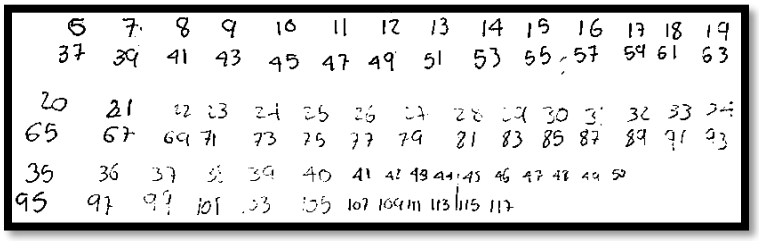


Imagen 70: Tabulación de la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizada por G4

Los estudiantes de G1 nuevamente acudieron a la proporcionalidad ya que mencionaban que *"cada día son dos seguidores, 5 son 10, 10 equivaldrían a 20 y 20 días que serían 40 y así siguen. Si en el día 21 son 67, de 67 a 107 son 40 de más, entonces se deben sumar 20 días más, que sería en el día 41".* Sin embargo, no percibieron que calcularon el día en que se tenían 107 seguidores y no de 105 que sería en el día 40.

En el *ítem e* y *f* preguntaban si en algún día Juanes tendrá 54 o 144 seguidores respectivamente, los grupos mencionaron que:

Tabla 3: Conclusiones de los grupos para los ítems e y f de la tarea de Juanes

Grupo	*Ítem e*	*Ítem f*
G1	*"No se puede porque va de impar en impar"*	*"No se puede porque va de impar en impar"*
G2	*"Sería entre el día 14 y 15 ya que en esas fechas tendría entre 53 y 55"*	*"Tendría 114 seguidores entre los días 45 y 46"*
G3	*"No porque es par, entonces entre el día 14 y 15"*	*"No, porque es par entonces entre el día 45 y 46"*
G4	*"Sí, mientras que termina el día 14 y empieza el día 15"*	*"Mientras que termina el día 44 y empieza el día 45"*

Por último, en el *ítem g* se solicitaba explicarle al mánager de Juanes cómo debía encontrar la cantidad de seguidores que tuvo en cualquier día después de su lanzamiento, los estudiantes mencionaron que *"le diría que cada día Juanes gana 2 seguidores por*

lanzamiento" (G1), *"mirando la cantidad de seguidores durante 5 días y mirando cuánto sube por día que son dos seguidores"* (G3) y *"mientras pasa cada día le tiene que sumar dos seguidores"* (G4). De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta las tres fases de la generalización propuestas por Vergel et al. (2022), los cuatro grupos produjeron una generalización aritmética ya que emplearon la abducción para pasar de un término a otro teniendo en cuenta el término anterior.

Al desarrollar el *ítem g* los estudiantes de G2 percibieron que si los términos aumentaban en 2 debería existir una relación entre la cantidad de seguidores del primer término y el día correspondiente, que posiblemente contribuya a encontrar la cantidad de seguidores. Para identificar dicha hipótesis se produjo el siguiente diálogo:

> *L4. Estudiante 1:* Es que, si se están aumentando de dos en dos, parece una multiplicación por dos.
> *L5. Estudiante 2:* Sí, es que si se usa la tabla del dos como aumento desde el día 1 se tiene el aumento desde el primer día hasta cada uno. Por ejemplo, 27 más 2, es 29; 27 más 4, es 31; 27 más 6, es 33; 27 más 8, es 35 [unió el 27 con cada uno de los seguidores y escribió su respectivo aumento]:



Imagen 71: Representación del aumento de seguidores desde el primer día a cada uno de estos en la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizado por G2

> *L6. Estudiante 2:* ¿Si me hago entender? Es como dos más dos; luego dos, más dos y más dos; algo así.
> *L7. Docente:* Escriba eso.

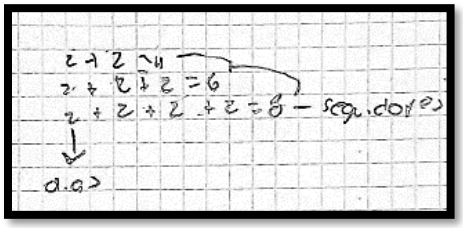


Imagen 72: Procedimiento para encontrar el aumento desde el primer día a cada uno de estos en la secuencia de patrones de la tarea Juanes realizado por G2

De acuerdo con las producciones de los estudiantes, se evidenció que reconocieron las variables, sin embargo, aún no cobraron sentido ni se materializaron. En este momento la docente intervino con el fin de hacer que los estudiantes tuvieran un acercamiento con lo indeterminado. Para ello, surgió el siguiente diálogo:

L8. Docente: ¿Y eso se cumple para cualquier día? Por ejemplo, para el día 3 ¿cómo lo harían?
L9. Estudiante 1: No, porque 2 más 2 más 2 da seis y es imposible que sea 31, es mucho más, entonces se debería sumar.
L10. Docente: ¿Cuánto se debe sumar?
L11. Estudiante 2: Pues es que el día 1 empezó con 27 [pausa] pues sumemos eso.
L12. Estudiante 1: 6 más 27 [pausa] es 33, nos pasamos porque debe dar 31.
L13. Estudiante 2: Pues restémosle 2 para que dé.

El proceso que realizaron los estudiantes se puede describir como $T_3 = 2 + 2 + 2 + 27 - 2$ con $T_1 = 27$. De acuerdo con lo anterior los estudiantes dedujeron una expresión que permitió determinar el valor de cualquier término teniendo en cuenta un término conocido menor que no necesariamente es el anterior, es decir, emplearon la abducción de manera proto – analítica; por lo tanto, G2 produjo una generalización aritmética sofisticada propuesta por Vergel et al. (2022).

La docente intervino con el fin de hacer emerger la materialización de las variables. Para ello, se tuvo el siguiente diálogo:

L14. Docente: Pero ¿cómo le expresarían eso al mánager?
L15. Estudiante 1: Primero debe sumar tres veces dos, luego… [es interrumpido por su compañero].
L16. Estudiante 2: Espere, eso es una multiplicación, sería 3 por 2 [pausa]. El día por dos, sumábamos 27 y le restábamos 2 [pausa]. Mire, sería algo así:

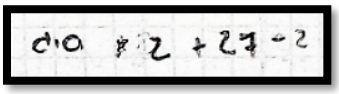


Imagen 73: Expresión planteada por G2 que permite hallar cualquier término de la secuencia en la tarea de Juanes

L17. Docente: Verifiquemos con el día 12.
L.18 Estudiante 2: 12 por 2 es 24, más 27 es 51, menos 2 es 49, si da [realizó la operación]:

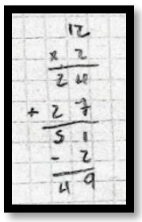


Imagen 74: Procedimiento para determinar el número correspondiente del término 12 de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes realizado por G2

Se observó que en *L16* los estudiantes construyeron una expresión multiplicativa que permitió representar la relación entre la comunalidad $+2$ y el día, que en este caso fue $día * 2$. En este momento, se evidenció que generalizaron la característica en común, por lo tanto,

habría una presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013). Posteriormente, surgió un nuevo diálogo que permitió analizar la expresión y sofisticarla:

L19. Estudiante 2: Pero ¿por qué siempre se le debe restar 2? No me cuadra ¿de dónde sale?
L20. Estudiante 1: Es que está restando, es como quitarle dos seguidores, pero no sé ¿qué día sería?
L21. Estudiante 2: ¿El día cero? Serían 25 seguidores [completó la tabla]:

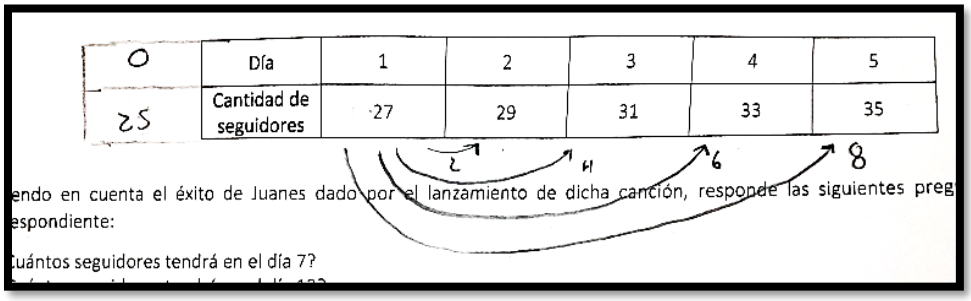


Imagen 75: Relación entre el término cero y su número correspondiente en la secuencia de patrones de la tarea de Juanes realizada por G2

L22. Docente: Pero ¿por qué 25 seguidores?
L23. Estudiante 2: Porque antes de lanzar la canción tenía ya fijos 25 seguidores [pausa]. Entonces, no debo sumar 27 sino 25 que era lo que tenía al inicio:

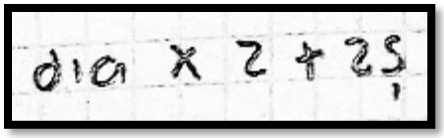


Imagen 76: Expresión sofisticada para determinar cualquier término de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes planteada por G2

Finalmente, los estudiantes realizaron más verificaciones:

L24. Estudiante 2: ¡Claro! Ya todo tiene sentido. Hagamos más.
L26. Estudiante 2: Cojamos al azar. [Realizó la verificación con el día 12, 38 y 7]:

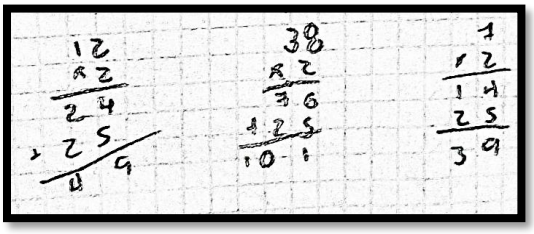


Imagen 77: Procedimientos realizados por G2 para determinar el número correspondiente de los términos 12, 38 y 7 de la secuencia de patrones en la tarea de Juanes

L27. Estudiante 1: Pero en la tabla no da 101.
L28. Docente: Revisemos la tabla [pausa]. Mira que en el día 21 y 22 escribiste la misma cantidad de seguidores.
L29. Estudiante 1: ¡Ay sí! En el día 22 debe haber 69 seguidores, me equivoqué, entonces a todos los seguidores hay que sumarle 2 [pausa]. Aquí dice que en el día 38 hay 99 pero como fallé serían 101. Si quedó bien.
L30. Estudiante 2: Entonces completemos lo último [completó la respuesta de la pregunta]:

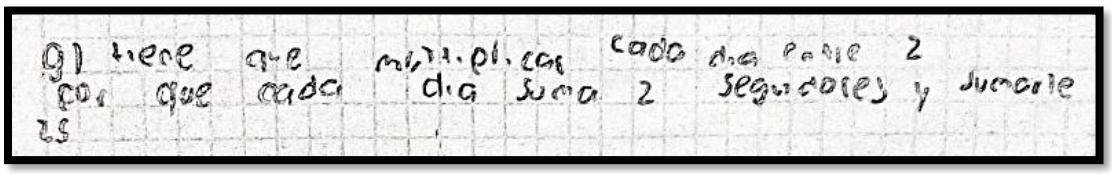


Imagen 78: Conclusión planteada por G2 para el ítem g de la tarea de Juanes

De acuerdo con lo anterior y los tres tipos de generalización propuestos por Vergel et al. (2022), los estudiantes de G2 produjeron una generalización algebraica ya que establecieron una relación de dependencia e independencia entre las variables, las materializaron y cobraron sentido, es decir, contemplaron y trabajaron con lo indeterminado. Además, emplearon la abducción de manera analítica lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural y aritmético al mencionar que *"tiene que multiplicar cada día entre 2 porque cada día suma 2 seguidores y sumarle 25"* y al representarla como $día * 2 + 25$.

6.3. Tarea Ramas I:

Para el desarrollo de esta tarea se contó con la participación de solamente 3 grupos puesto que 2 integrantes de G2 no pudieron asistir por cuestiones personales, por lo tanto, el estudiante de G2 se unió a G3.

Inicialmente, la docente entregó a cada grupo la hoja correspondiente, leyó la situación y preguntó por la cantidad de ramas (número correspondiente) de cada mes (término). Luego de un trabajo individual e interno grupal, la docente visitó cada uno de los equipos de trabajo para indagar cómo han trabajado con la secuencia y para hacer emerger una toma de conciencia de la relación funcional, momento al que Radford (2014) lo denomina: el intento de constituirse en un trabajo conjunto.

Fácilmente los estudiantes reconocieron que los términos aumentaban en 2, por lo tanto, rápidamente dieron respuesta al *ítem a*, el cual solicitaba determinar la cantidad de ramas en el mes 7, estas fueron algunas de sus expresiones *"se van agregando de dos en dos por cada mes, entonces tendría 13 ramas"* (G1), *"en el mes 7 tendría 13 ramas y que cada mes crece 2 ramas"* (G2), *"supongo que en esta están creciendo de a dos ramas, entonces en el*

mes 7 tendría 13 ramas" (G3). Es aquí donde se evidenció que los estudiantes identificaron la comunalidad $+2$ en la secuencia de patrones.

Además, durante el desarrollo de este ítem, los estudiantes articularon varios medios semióticos de objetivación mientras se expresaban, por ejemplo, se evidenciaron señalamientos con el lápiz o con los dedos, algunos deícticos espaciales como "a los lados, arriba, horizontal o vertical", gestos manuales y conteos con las manos:

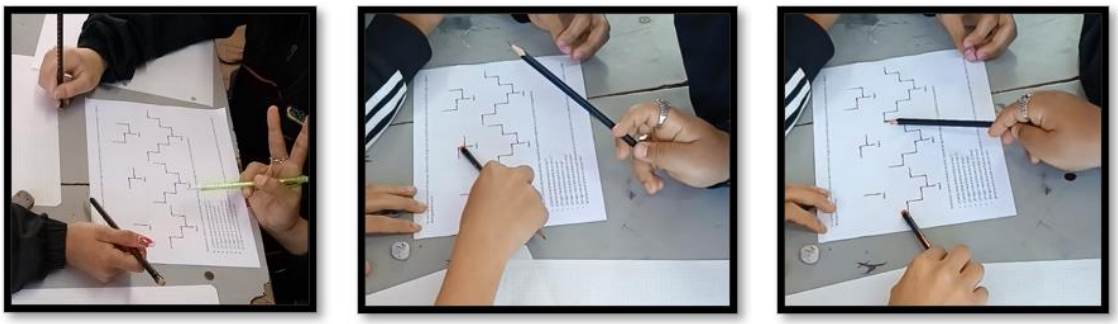


Imagen 79: Conteos manuales, señalamientos, deícticos espaciales y gestos indexicales realizados por los estudiantes durante el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Ramas I

De acuerdo con lo anterior, se evidenció que los estudiantes identificaron la característica en común de manera verbal, escrita y kinestésica en la secuencia de patrones. Teniendo en cuenta las tres fases de la generalización propuestas por Vergel et al. (2022), los tres grupos produjeron una generalización aritmética ya que identificaron la comunalidad en la secuencia de patrones y emplearon la abducción para pasar de un término a otro teniendo en cuenta el anterior.

Por otro lado, los estudiantes de G2 quisieron encontrar de una vez la cantidad de ramas para cualquier mes, por esta razón, surgió el siguiente diálogo:

L1. Estudiante 1: Cada mes se suman dos ramas.
L2. Estudiante 2: Es como el de Juanes, sería multiplicar el mes por dos.
L3. Estudiante 3: Pero faltaría sumarle uno.
L4. Estudiante 1: Pues miremos si funciona. Siete por dos 14 más uno da 15. No da.
L5. Estudiante 3: Pues quítele uno.
L6. Docente: ¿Por qué se le debe quitar uno?
L7. Estudiante 1: Porque a cada lado crece lo mismo y solo hay una rama fija que es la del inicio, toca quitarle la pareja [señala la rama del mes 1] esa no se duplica.
L8. Estudiante 2: Entonces para encontrar las ramas se tendría que multiplicar el mes por dos, menos uno.

En *L2* se evidenció que los estudiantes crearon una expresión multiplicativa que se puede describir como $2 * mes$ y en *L7* hay una materialización y toma de conciencia de las variables lo que permitió que establecieran una relación de dependencia e independencia entre ellas, es decir, contemplaron y trabajaron con lo indeterminado. Además, se observó que

generalizaron la característica en común, por lo tanto, hubo una presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013). También, emplearon la abducción de manera analítica lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural (en *L8*). De acuerdo con lo anterior, G2 produjo una generalización algebraica propuesta por Vergel et al. (2022).

Por otro lado, para dar respuesta al *ítem b*, el cual hacía referencia a encontrar la cantidad de ramas que tenía el árbol en el mes 12, los estudiantes de G2 aplicaron su generalización y concluyeron que *"pues 12 por 2 da 24 menos uno da 23, serían 23 ramas".* Mientras que, en G1 surgió el siguiente diálogo:

L9. Estudiante 1: Si aumenta de a dos, entonces 2 por 12 da 24.
L10. Estudiante 2: Pero todos son impares.
L11. Estudiante 1: Mmm si, probemos con el mes 6, 6 por 2 da 12 y tienen que ser 11, entonces se le está quitando una rama.
L12. Estudiante 2: Es la del inicio porque empezó solo con una y de ahí va aumentando de a dos.
L13. Estudiante 1: Entonces sería 12 por 2 da 24 y quitémosle la pareja de la rama del inicio, o sea una rama, quedaría 23 ramas.
L14. Docente: Entonces con lo que acaban de hacer ¿cómo podrían hallar la cantidad de ramas de cualquier mes?
L15. Estudiante 1: Multiplicando por 2 el mes y restándole 1.

En *L9* se evidenció que los estudiantes crearon una expresión multiplicativa que se puede describir como $2 * mes$ y en *L11* a *L15* hay una materialización y toma de conciencia de las variables lo que permitió que establecieran una relación de dependencia e independencia entre ellas, es decir, contemplaron y trabajaron con lo indeterminado. Además, se observó que generalizaron la característica en común, por lo tanto, hubo una presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013). También, emplearon la abducción de manera analítica lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural (en *L15*). De acuerdo con lo anterior, G1 produjo una generalización algebraica propuesta por Vergel et al. (2022).

Por otro lado, en G3 sumaron de dos en dos teniendo en cuenta la cantidad de ramas del mes 7 para poder determinar las del mes 12, expresaron lo siguiente *"en el mes 7, tenía 13; en el 8, serían 15; en el 9, 19; en el 10, 21; en el 11, 23 y en el 12, 25. Serían 25 ramas".* Sin embargo, no percibieron que $15 + 2 = 17$ entonces para el mes 9, el árbol no tendría 19 ramas sino 17. Aunque el procedimiento realizado por G3 se puede describir como $T_{12} = 13 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ con $T_7 = 13$. De acuerdo con lo anterior G3 dedujo una expresión que permitió determinar el valor de cualquier término teniendo en cuenta un término conocido menor que no necesariamente es el anterior, es decir, emplearon la abducción de manera proto – analítica; por lo tanto, produjeron una generalización aritmética sofisticada propuesta por Vergel et al. (2022).

Para desarrollar el *ítem c*, que preguntaba si en algún mes el árbol tendría 35 ramas, G1 comentó que *"si siempre se le quita la inicial, entonces sumemos una 35 más 1 es 36 y un número multiplicado por 2 que de 36 es [pausa], mmm pues dividámoslo en dos, daría 18, es en ese mes"*. Se evidencia que G1 acudió a la división y a la suma, operaciones inversas a las que utilizaron para encontrar la generalización, es decir, en este caso emerge una toma de conciencia de las variables y una relación de dependencia e independencia entre ellas, pero en este caso, el término fue la cantidad de ramas y el número correspondiente fue el mes.

En G2 surgió el siguiente diálogo:

> *L16. Estudiante 1:* Pues busquemos un número cercano a 35 que se multiplique por dos, mmm sería [pausa] 17, 17 por 2 da 34 [pausa] ah no, porque se debe restar uno y daría 33.
> *L17. Estudiante 2:* Entonces en el día 18, 18 por 2 da 36 y menos 1 da 35.

Nuevamente, G3 recurrió a la suma de dos en dos partiendo desde la cantidad de ramas del mes 12 *"en el mes 12, habían 25; en el 13, 27; en el 14, 29; en el 15, 31; en el 16, 33; en el 17, 35. Entonces en el mes 17"*.

Para dar solución al *ítem d* que preguntaba si en algún mes se tendrían 61 ramas, los grupos aplicaron el método anterior y mencionaron que *"entonces 61 más 1 da 62 y la mitad de 62 es 31, entonces es en ese mes"* (G1), *"sería 31, porque 31 por 2 da 62 y menos 1 da 61"* (G2) y "q*uedamos en el mes 17 con 35 ramas, en el 18, tiene 37; en el 19, 39; en el 20, 41; en el 21, 43; en el 22, 45; en el 23, 47; en el 24, 49; en el 25, 51; en el 26, 53; en el 27, 55; en el 28, 57; en el 29, 59; en el 30, 61 ramas. Entonces en el mes 30"*.

En el *ítem e y f* preguntaban si en algún mes el árbol podría tener 22 y 40 ramas respectivamente, los estudiantes comentaron que:

Tabla 4: Conclusiones de los grupos para los ítems e y f de la tarea Ramas I

Grupo	*Ítem e*	*Ítem f*
G1	*"Entre el mes 11 y 12"*	*"Entre el mes 20 y 21"*
G2	*"En algún punto del mes 11 tendrá 22 ramas"*	*"En algún punto del mes 20 tendrá 40 ramas"*
G3	*"No, porque las ramas crecen de dos en dos y pasa del 21 al 23"*	*"No podría tener 40 ramas porque pasa lo mismo que el anterior, va de 39 a 41"*

Finalmente, en el *ítem g* se solicitaba explicarle a un agricultor qué debía hacer para conocer la cantidad de ramas que se tendrán en cualquier mes, los estudiantes mencionaron que *"multiplicando el mes por 2 y restándole 1 serían las ramas"* (G1) y *"se le diría al agricultor que, el mes que necesita, lo multiplique por 2 y al resultado le reste 1 para saber cuántas ramas tendrá el árbol"* (G2):

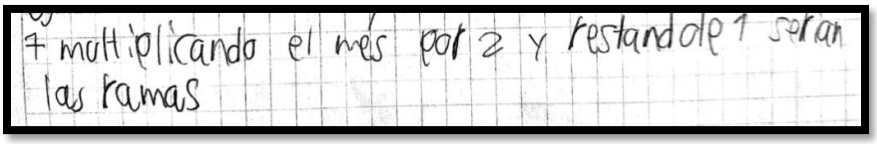


Imagen 80: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G1

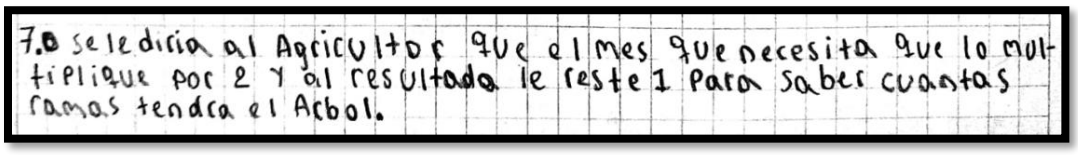


Imagen 81: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G2

Una estudiante de G3 mencionó que *"yo le diría que debe contar de dos en dos porque eso es lo que crece cada mes".* En este momento la docente intervino con el fin de hacer que los estudiantes tuvieran un acercamiento con lo indeterminado:

L18. Docente: Pero digamos, si él quiere hallar la cantidad de ramas para el mes 400 ¿qué tendría que hacer?
L19. Estudiante 2: Pues si sumamos de a dos en dos, sería multiplicar de dos en dos.
L20. Docente: Realicen la prueba con lo que tienen.
L21. Estudiante 3: Mmm el mes 6, 6 por dos da 12.
L22. Estudiante 1: Y son 11, entonces restémosle 1.
L23. Estudiante 3: Que sería la pareja de la primera rama, la del mes 1.
L24. Estudiante 2: Entonces para el mes 400 tendría que multiplicarlo por 2 y restarle 1.

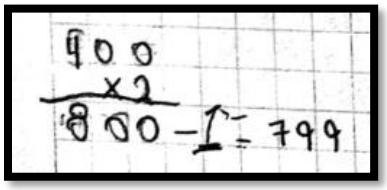


Imagen 82: Procedimiento para determinar el número correspondiente del término 400 en la secuencia de patrones de la tarea de ramas I realizado por G3

L25. Docente: Y ¿para cualquier mes?
L26. Estudiante 1: El agricultor tiene que contar de dos en dos, tiene que multiplicarlo por 2 y restarle 1 dependiendo del mes o de las ramas:

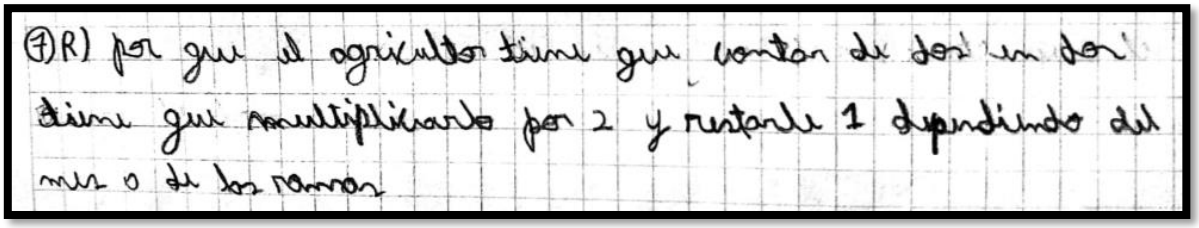


Imagen 83: Conclusión del ítem g de la tarea de Ramas I planteada por G3

En L19 se evidenció que los estudiantes crearon una expresión multiplicativa que se puede describir como $2 * mes$. Además, se observó que contemplaron y trabajaron con lo indeterminado y, generalizaron la característica en común, por lo tanto, hubo una presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013). También, emplearon la abducción de manera analítica lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural (en L26). De acuerdo con lo anterior, G3 produjo una generalización algebraica propuesta por Vergel et al. (2022).

6.4. Tarea Ramas II:

Inicialmente, la docente entregó a cada grupo la hoja correspondiente, leyó la situación y preguntó por la cantidad de ramas (número correspondiente) de cada mes (término). Luego de un trabajo individual e interno grupal, la docente visitó cada uno de los equipos de trabajo para indagar cómo han trabajado con la secuencia y para hacer emerger una toma de conciencia de la relación funcional, momento al que Radford (2014) lo denomina: el intento de constituirse en un trabajo conjunto.

Para dar respuesta al *ítem a*, el cual solicitaba determinar la cantidad de ramas del árbol en el mes 6, emergieron los siguientes diálogos:

En G1:

> *L1. Estudiante 1:* Es que en el mes 1, hay 1 rama, en el 2, 3; en el 3, 7; en el 4, son 15 ramas y en el 5, son 31. Es como el doble del anterior.
> *L2. Estudiante 2:* Pero 15 por 2 no da 31, da 30, tendríamos que sumarle una rama. Entonces, para el mes 6, cogemos las 31 ramas del mes 5 y lo multiplicamos por dos que daría 62, pero falta sumarle uno que serían 63 ramas.
> *L3*: *Estudiante 1:* Entonces en el mes 6 tendrá 63 ramas sabiendo que el doble de ramas del anterior más 1 da las ramas que tendrá en el siguiente mes:

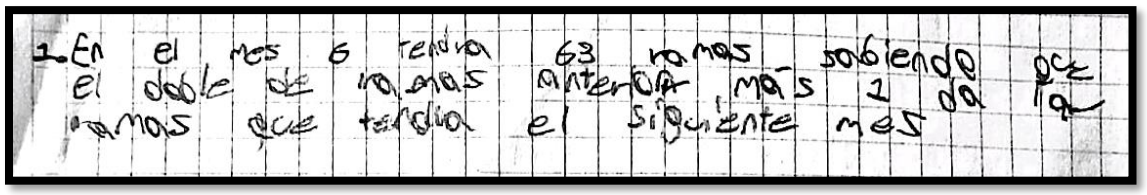


Imagen 84: Conclusión de G1 para el ítem a de la tarea ramas II

En G2:

> *L4. Estudiante 1:* Mire que se están duplicando las ramas de cada mes, pero teniendo el anterior, porque mire 3 por 2 da 6, se acerca al 7; 7 por 2 da 14, a 15 falta 1 y 15 por 2 da 30 más una 31.
> *L5. Estudiante 2:* Al parecer sí y siempre hay que sumarle 1.

L6. Estudiante 1: Entonces se multiplica la cantidad de ramitas por 2 y se suma 1 [escribe la operación].
L7. Estudiante 2: Para el mes 6, se coge 31 ramas del mes 5 por 2 da 62 y más 1 da 63.

En G3:

L8. Estudiante 1: Miremos cómo van aumentando en cada mes.
L9. Estudiante 2: Del mes 1 al 2, crecieron 2; del mes 2 al 3, fueron 4; del mes 3 al 4, son 8 y del mes 4 al 5 fueron 16.
L10. Estudiante 1: 2 por 2 da 4, 4 por 2 da 8 y 8 por 2 da 16. Entonces sería multiplicar por dos el último número.
L11. Estudiante 1: Entonces sería 16 por 2 da 32. Entonces en el mes 6 tendría 32 ramas.
L12. Docente: Para el mes 5 ¿cómo lo harían?
L13. Estudiante 1: Sería 8 por 2 da 16.
L14. Docente: Pero según lo que contaron deben ser 31 ramas.
L15. Estudiante 2: Es que por cada rama crecen dos más en el siguiente mes.
L16. Estudiante 3: Entonces se multiplicaría por 2.
L17. Docente: ¿Qué multiplicarían?
L18. Estudiante 1: Digamos para el mes 4, multiplicaríamos 2 por 4, esas cuatro son las ramas finales del mes 3. Pero faltaría restarle esta [señaló la rama del mes 1].
L19. Docente: Verifiquen.
L20. Estudiante 2: 2 por 4 da 8 menos 1 da 7, que son las ramas del mes 3.
L21. Estudiante 1: Y mire, 8 por 2 da 16 menos 1 da 15, que son las ramas del mes 4.
L22. Estudiante 3: Y 16 por 2 es 32 menos 1 da 31 que son las del mes 5.
L23. Estudiante 2: Entonces para el mes 6 sería 31 por 2 [pausa] 64 menos 1 da 63. Entonces el aumento se multiplica por 2 y se resta 1.

Los estudiantes de G3 no se percataron que $31 * 2$ es 62 y no 64.

En G4:

L24. Estudiante 1: Pues miremos como aumenta, contemos las ramas del final.
L25. Estudiante 2: Del mes 1 al 2, solo 2 ramas; del 2 al 3, hay 4 ramas; del 3 al 4, crecieron 8 ramas y del 4 al 5, hay 16 ramas.
L26. Estudiante 2: Es que como que van de dos en dos, pero como que se saltan.
L27. Estudiante 3: No, es que mire, 2 por 2 da 4; 4 por 2 es 8 y 8 por 2 es 16.
L28. Estudiante 1: El crecimiento se concibe multiplicando por la tabla del 2. Entonces ¿cuántas ramas tendrá el árbol en el mes 6?
L29. Estudiante 3: Pues 16 por 2 da 32, esas son las que crecen.
L30. Estudiante 1: Son 32 las que completan el árbol.
L31. Estudiante 3: Y 31 más las 32 del mes 5.
L32. Estudiante 2: Serían 63 en el mes 6.

De acuerdo con los diálogos que emergieron durante el análisis de la secuencia, se evidenció que en *L1*, *L4*, *L15* y *L26* los cuatro grupos reconocieron la comunalidad. Además, se observa que lo expresado en *L3* y *L6* hace referencia al procedimiento realizado por G1 y G2 para determinar la cantidad de ramas de cualquier mes teniendo el anterior, es decir, lo expresado por los estudiantes se puede describir como $T_n = 2 * T_{n-1} + 1$ donde n es el mes. Mientras que, los estudiantes de G3 analizaron cómo aumenta la cantidad de ramas a partir del mes anterior, lo expresado desde *L29* se puede describir como $T_6 = 2 * A_5 - 1$ donde A_5 hace referencia al aumento de ramas del mes 5, es decir, $A_5 = 16$.

Por lo tanto, se puede afirmar que los cuatro grupos produjeron una generalización aritmética propuesta por Vergel et al. (2022) ya que emplearon la abducción para pasar de un término a otro teniendo en cuenta el término o el aumento del mes anterior. Además, durante el desarrollo de este ítem y de los diálogos, los estudiantes articularon varios medios semióticos de objetivación que permitieron analizar la secuencia, identificar la característica en común y describir el aumento de las ramas en cada mes:

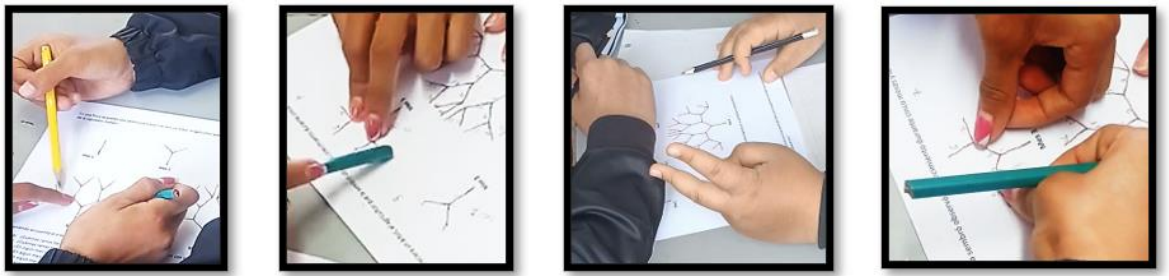


Imagen 85: Señalamientos, conteos manuales y deícticos espaciales utilizados por los estudiantes durante el análisis de la secuencia de patrones en la tarea de Ramas II

Para el *ítem b* que solicitaba determinar la cantidad de ramas en el mes 8, cada grupo acudió a sus métodos *"toca mirar cuántas ramas había en el mes 7. Entonces en el mes 6 había 63 ramas, por 2, da 126 más 1 da 127. Ahora, para el mes 8, 127 por 2 da 252 más 1 da 253"* (G1 no se percató que $127 * 2$ es 254), "*miremos primero el mes 7. Del 6 se tenían 63 ramas, por 2 da 126 más 1 da 127. Ahora, 127 por 2 da 254 más 1 da 255"* (G2), *"entonces 64 por 2 da 128 menos 1 da 127 ramas. Y 128 por 2 da 256 menos 1 da 255"* (G3) y *"bueno íbamos en el mes 6 que crecieron 32, entonces 32 por 2 [pausa] da 64 y 63 más 64 da 127. Entonces para el mes 7 serían 127 ramas, ahora para el mes 8 crecen 64 por 2 da 128 ramas. Luego, 127 más 128 da 255, eso tendrá en el mes 8"* (G4).

Para el *ítem c,* el cual preguntaba si en algún mes el árbol tendría 127 ramas, todos los grupos coincidieron que era en el mes 7.

Para el *ítem d* que preguntaba si en algún mes el árbol tendría 511 ramas, G1 utilizó su método, pero como en la multiplicación de 127 por 2 tuvieron un error, mencionaron que "*si en el mes 8 hay 253 ramas, en el mes 9 habría 253 por 2 da 516 más 1, sería 517. Entonces sería en algún punto del mes 8 y 9".* Mientras que, G2, G3 y G4 aplicaron sus métodos y coincidieron que en el mes 9 el árbol tendría 511 ramas. Sin embargo, durante el desarrollo de este ítem, emergió un diálogo en G3:

L33. Estudiante 1: Mmm pues es que para el mes 4, podría ser 4 por 4 da 16. Eso es como 4 a la 2.
L34. Estudiante 2: Falta restarle 1.
L35. Estudiante 3: Sería el mes a la 2 menos 1.
L36. Estudiante 1: Probemos con otro.
L37. Estudiante 2: Para el mes 5, sería 5 a la 2 da 25 menos 1 da 24. No funcionó.
L38. Estudiante 1: Espere, porque lo que está fijo es el dos porque en cada rama crecen otras dos. Entonces sería al revés, 2 a la 5 es 32 menos 1 da 31, si da.
L39. Estudiante 2: Bueno miremos para el mes 4, 2 a la 4 es 16 menos 1 da 15, por fin.
L40. Estudiante 1: Entonces para encontrar las ramas sería 2 elevado al mes menos uno.
L41. Estudiante 3: Vamos en el mes 7, ahora para el mes 8 sería 2 a la 8 da [pausa] 256 menos 1 da 255 ramas.
L42. Estudiante 2: Ahora, 2 a la 9 da [pausa], 2 a la 8 era 256 y eso por 2 da 512 menos 1 da 511. Entonces sería en el mes 9.

En *L40* se evidenció que los estudiantes establecieron una relación de dependencia e independencia entre las variables, las materializaron y cobraron sentido, es decir, contemplaron y trabajaron con lo indeterminado. Además, emplearon la abducción de manera analítica lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural al mencionar que *"entonces para encontrar las ramas sería 2 elevado al mes menos uno".* Por lo tanto, G3 produjeron una generalización algebraica propuesta por Vergel et al. (2022).

Para el *ítem e y f* preguntaban si en algún mes el árbol podría tener 24 y 32 ramas respectivamente, los grupos mencionaron que:

Grupo	*Ítem e*	*Ítem f*
G1	*"Entre el mes 4 y 52"*	*"En el mes 5 y unos cuantos días"*
G2	*"No, porque del mes 4 al 5 no tiene 24 ramas"*	*"No, porque las ramas que salen por mes son impares"*
G3	*"No por lo que hemos hecho"*	*"No por lo que hemos hecho"*
G4	*"No porque se salta, estamos en el mes 4 que hay 15 ramas y en el mes 5 hay 31"*	*"No, porque le restamos 1 y quedan 31"*

Finalmente, en el *ítem g* que solicitaba explicarle a un agricultor cómo determinar la cantidad de ramas en cualquier mes, G1 mencionó que *"le diría que duplique el número de ramas del mes anterior y le sume 1"* y G3 concluyó que *"se pone de base el número 2 y de exponente el mes que se necesita y se le resta 1"*:

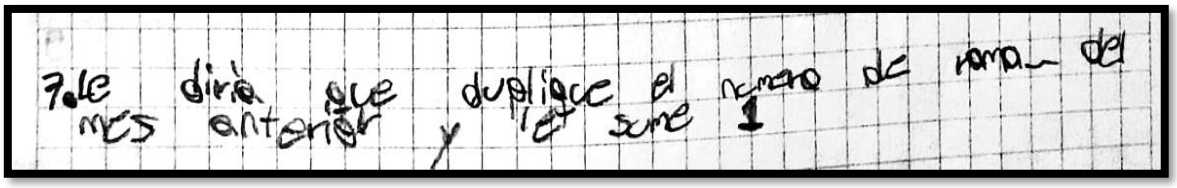


Imagen 86: Conclusión del ítem g planteada por G1 de la tarea ramas II

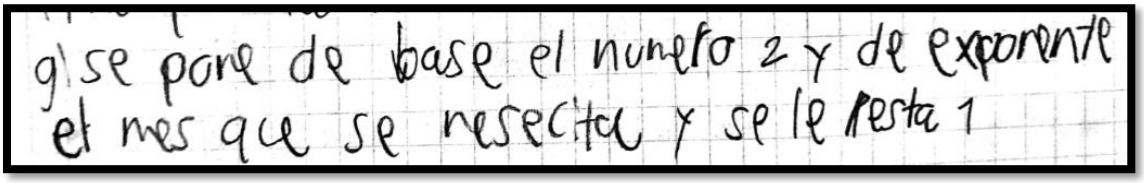


Imagen 87: Conclusión del ítem g planteada por G3 de la tarea ramas II

Para que los estudiantes de G2 tuvieran un acercamiento con lo indeterminado, se produjo el siguiente diálogo:

L43. Estudiante 2: Mmm este está difícil porque siempre necesitamos del anterior.
L44. Estudiante 1: Sí, porque ya solo es multiplicar por 2 y sumarle 1.
L45. Docente: ¿Cómo harían para no depender de las ramas del mes anterior al que se quiere calcular?
L46. Estudiante 1: Hagamos como la de Juanes, miremos el aumento entre cada mes.
L47. Estudiante 2: Del mes 1 que tenía 1 rama al mes 2 que tenía 3 ramas, hay 2 de aumento. De 3 a 7 ramas, hay 4 de aumento. De 7 a 15 ramas, hay 8 de aumento y de 15 a 31 ramas, hay 16 de aumento.
L48. Estudiante 1: Sería 2, 4, 8 y 16 de aumento.
L49. Estudiante 2: Es como la tabla del 2.
L50. Estudiante 1: No, porque faltaría el 6, el 10, el 12 y el 14. Más bien son como multiplicaciones seguidas por dos. Porque 2, 2 por 2 da 4, 2 por 2 por 2 da 8, 2 por 2 por 2 por 2 da 16.
L51. Docente: ¿Y cómo escribirían todas esas multiplicaciones?
L52. Estudiante 1: Profe ese tema lo vimos, eso se pone el numerito arriba de otro.
L53. Estudiante 2: Son potencias.
L54. Estudiante 1: Esa vaina, el número grande sería el dos y el numerito de arriba sería [pausa] el mes.

En este momento se evidenció que, al analizar el aumento de las ramas entre dos meses consecutivos, los estudiantes crearon una expresión multiplicativa para el aumento de las ramas que se puede describir como 2^{mes}. Sin embargo, en el siguiente diálogo se dan cuenta que están determinando la cantidad de ramas para cualquier mes:

L55. Estudiante 2: Pero mire que ahí ya no estamos mirando el aumento, sino que sale es como el número de ramas.

L56. Estudiante 1: Es cierto, en el mes 1, sería 2 a la 1 da 2, pero tendríamos que restar 1 para que funcione. En el mes 2, sería 2 a la 2 es 4 menos 1 es 3. En el mes 3, sería 2 a la 3 es 8 menos 1 es 7. Si está dando. Para el mes 4, sería 2 a la 4 que da 16 menos 1 es 15. Para el mes 5, es 2 a la 5 que es [pausa] 32 menos 1 da 31.
L57. Estudiante 2: Claro y eso que se le resta es porque no hay aumento en esta rama [señaló la rama del mes 1]. Mmm oiga y así como la de Juanes, ¿para el mes cero?
L58. Estudiante 1: Sería 2 a la 0 [pausa] creo que es uno menos 1 da 0. Todavía no había ramas.

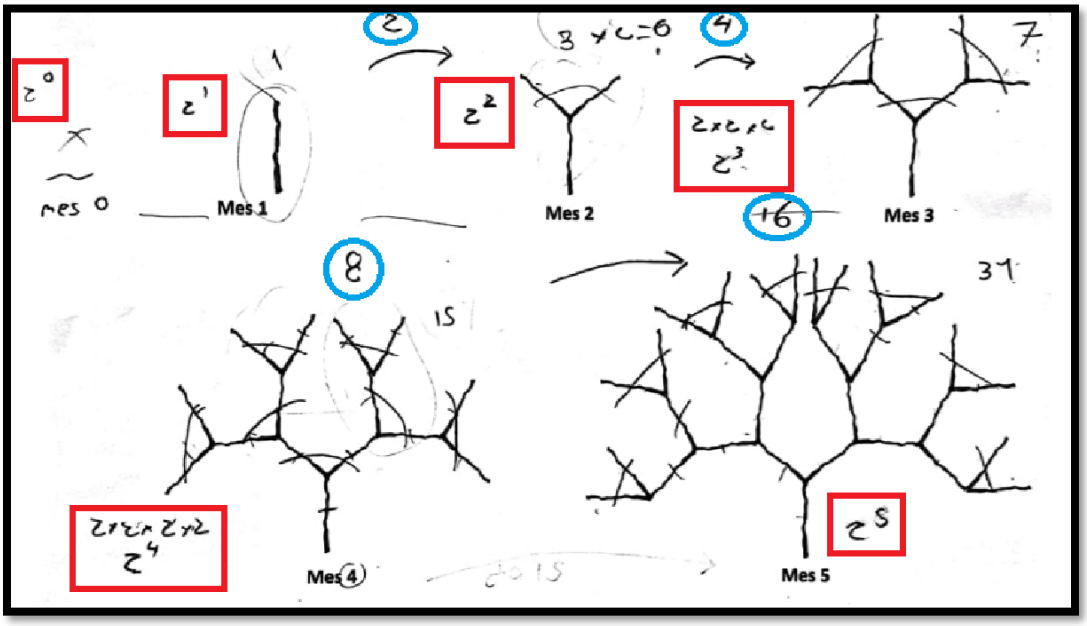


Imagen 88: Análisis de la secuencia de patrones de la tarea ramas II por parte de G2

L59. Docente: Entonces ¿qué le dirían al agricultor?
L60. Estudiante 1: Que para saber la cantidad de ramas tiene que hacer 2 al mes menos 1, algo así:

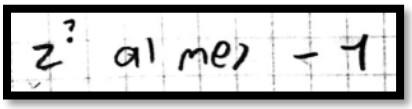


Imagen 89: Expresión planteada por G2 para determinar cualquier término en la secuencia de la tarea ramas II

L61. Docente: ¿Qué significa ese signo de interrogación?
L62. Estudiante 1: Ahí se pone el mes que necesita, es que no sé cómo escribirlo.

Teniendo en cuenta los tres tipos de generalización propuestas por Vergel et al. (2022), los estudiantes de G2 produjeron una generalización algebraica ya que desde *L54* se observó un reconocimiento, una materialización y un sentido de las variables que permitieron establecer una relación funcional de dependencia e independencia. Además, al momento de generalizar

la comunalidad se evidenció la presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013) lo que permitió que determinaran el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural y aritmético al mencionar que *"para saber la cantidad de ramas tiene que hacer 2 al mes menos uno"* y representarlo como $2^{?}$ al mes -1.

Por otro lado, también surgió un diálogo con los estudiantes de G4 para que tuvieran un acercamiento con lo indeterminado:

L63. Estudiante 1: Entonces yo le diría que tiene que multiplicar por 2 y restarle 1.
L64. Docente: Verifiquen con el mes 5.
L65. Estudiante 3: 2 por 5 da 10 menos 1 es 9. No da.
L66. Estudiante 2: Profe es que depende del crecimiento de las ramas.
L67. Docente: ¿Cómo hallamos el crecimiento?
L68. Estudiante 1: Es que como en cada rama crecen de a 2 cogíamos y multiplicábamos de a 2 el crecimiento anterior.
L69. Estudiante 2: Incluso, creo que se le puede restar 1 para saber la cantidad de ramas.
L70. Docente: ¿Cómo así?
L71. Estudiante 1: Sería multiplicar varias veces dos.
L72. Docente: ¿Cuántas veces?
L73. Estudiante 2: Depende del mes, porque en el mes 1 hay un sólo dos, pero digamos en el mes 4 se multiplica 4 veces el 2.

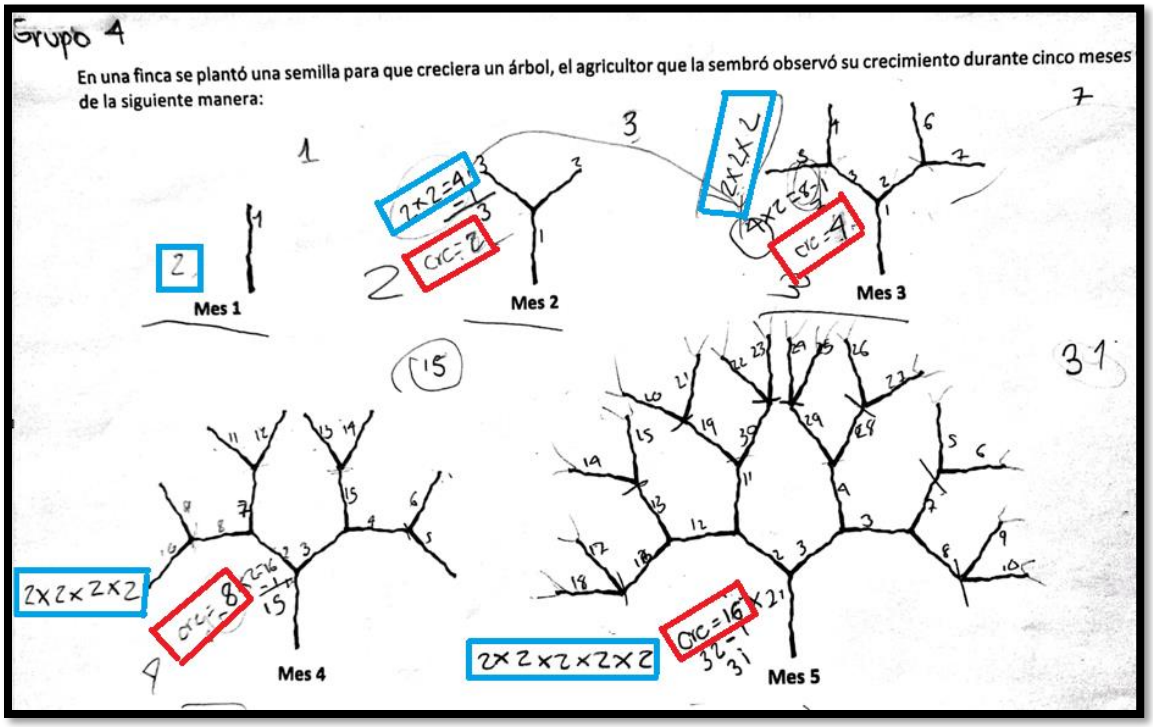


Imagen 90: Análisis de la secuencia de patrones de la tarea ramas II por parte de G4

L74. Docente: ¿Cómo escribirían todo eso?
L75. Estudiante 1: Digamos para el mes 6 sería 2 por 2 por 2 por 2 por 2 y por 2 menos 1.
L76. Docente: En matemáticas ¿cómo se escribe eso?
L77. Estudiante 3: Dos veces 6.
L78. Docente: Si tú me dices dos veces 6 pienso que es el doble de 6.
L79. Estudiante 1: No, espere, sería 2 a la 6.
L80. Docente: Entonces para hallar la cantidad de ramas del mes 6 ¿cómo quedaría?
L81. Estudiante 1: Pues sería 2 a la 6 menos 1.
L82. Docente: ¿Por qué menos 1?
L83. Estudiante 2: Mmm, por la primera rama, es que esa es fija.
L84. Docente: Verifiquemos con otro mes.
L85. Estudiante 1: Por ejemplo, el mes 8 nos tiene que dar 255 ramas.
L86. Estudiante 3: Entonces sería 2 a la 8 menos 1 [realizaron la operación]:

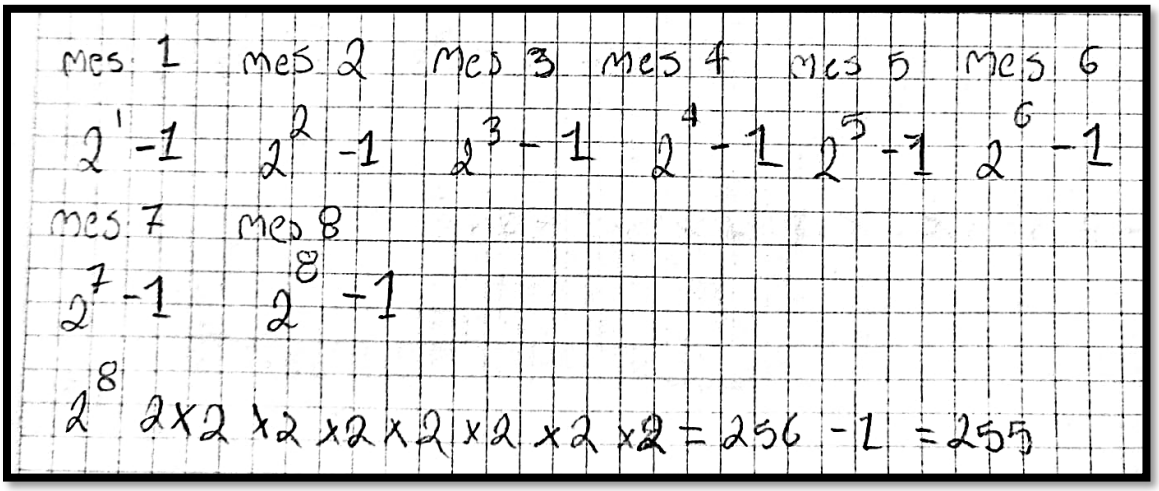


Imagen 91: Procedimiento realizado por G4 para determinar el número correspondiente al término 8 en la secuencia de patrones de la tarea ramas II

L87. Docente: Y si quisieran determinar la cantidad de ramas de cualquier mes ¿cómo lo harían?
L88. Estudiante 3: Ya no sería 6 ni 8 sino el mes.
L89. Estudiante 1: Tendría que poner 2 y elevarlo al mes y restarle 1.

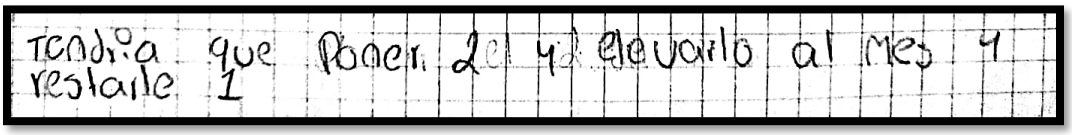


Imagen 92: Conclusión del ítem g planteada por G4 de la tarea ramas II

De acuerdo con lo anterior y con las tres fases de generalización propuestas por Vergel et al. (2022), los estudiantes de G4 produjeron una generalización algebraica ya que desde L68 se evidenció un reconocimiento, una materialización y un sentido de las variables, lo que les

permitió establecer una relación funcional de dependencia e independencia entre ellas. Además, al momento de generalizar la comunalidad se evidenció la presencia del componente de abducción analítica (Radford, 2013) lo que facilitó la manera de encontrar el valor de cualquier término de la secuencia, la cual fue expresada en un lenguaje natural al mencionar que *"tendría que poner 2 y elevarlo al mes y restarle 1"*.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones generales después de haber realizado el análisis multimodal de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes. Para ello, este capítulo se estructura en dos partes: la primera hace referencia a la respuesta de la pregunta de investigación teniendo en cuenta los objetivos planteados, los fundamentos teóricos de la Teoría de la Objetivación, el pensamiento algebraico y el análisis multimodal; mientras que, en la segunda, se expone una síntesis y algunas observaciones finales relacionadas con la Educación Matemática, en especial, con el desarrollo del pensamiento algebraico.

7.1. Respuesta a la pregunta de investigación:

El desarrollo de la investigación fue orientado por la siguiente pregunta *¿qué tipos de generalización producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) de la Institución Educativa Distrital CODEMA cuando resuelven tareas sobre secuencias de patrones?* Para dar respuesta a este interrogante, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos a partir del análisis de las producciones de los estudiantes:

En primer lugar, se identificaron los medios semióticos de objetivación utilizados por los estudiantes al momento de analizar y trabajar con la secuencia de patrones, de expresarse y de reconocer la comunalidad. Por lo tanto, durante el abordaje de las tareas se evidenció que recurrieron a los señalamientos, los deícticos espaciales, la coordinación viso - manual, la kinestésica y los deslizamientos; lo que les permitió fácilmente reconocer la comunalidad y transitar de una generalización aritmética a una aritmética sofisticada o a una algebraica.

Es importante mencionar que en la implementación de las tareas que involucraban las secuencias figurales con apoyo tabular (Mesas, Ramas I y Ramas II), los medios semióticos de objetivación se observaron con mayor frecuencia; sin embargo, en el desarrollo de la tarea de Juanes (secuencia numérica con apoyo tabular) estos emergieron, pero con poca intensidad, tal y como lo afirma Vergel (2014).

En segundo lugar, se caracterizó la articulación de los medios semióticos de objetivación ya que, en la mayoría de las tareas hubo presencia de nodos semióticos (que hacen parte de la actividad donde se articulan los medios semióticos) puesto que los estudiantes movilizaron simultánea y sincrónicamente varios medios semióticos tales como las acciones lingüísticas – perceptivas – gestuales. Por ejemplo, en la segunda tarea los estudiantes de un mismo grupo movilización dos o más medios semióticos de manera simultánea ya que un estudiante contaba los días y el otro la cantidad de seguidores por medio de gestos, movimientos, conteos y palabras.

En tercer lugar, se identificó en las producciones de los estudiantes la presencia del componente de abducción analítica ya que, para cada tarea al menos un grupo llegó a generalizar la característica en común expresándola en un lenguaje natural o aritmético,

identificaron, materializaron y hallaron sentido a las variables, trabajaron y nombraron lo indeterminado. Por ejemplo, en la siguiente tabla se presentan algunas expresiones mencionadas o escritas por los estudiantes que dan cuenta de una generalización algebraica:

Tabla 5: Expresiones utilizadas por los estudiantes que dan cuenta de una generalización algebraica

Tarea	Expresiones
Mesas	*"Del grupo de mesas quitar dos mesas y contar la cantidad de mesas sobrantes y multiplicarla por 2 y sumarle 6 sillas que equivalen a las 2 mesas que quitamos"* (G1). *"Se multiplica por 2 cada mesa y después se le añaden dos sillas más"* (G3). *"El número de mesas se multiplica entre 2 y se le suman dos sillas más que son las de las esquinas"* (G4).
Juanes	*"Tiene que multiplicar cada día entre 2 porque cada día suma 2 seguidores y sumarle 25"* (G2). $día * 2 + 25$ (G2).
Ramas I	*"Multiplicando el mes por 2 y restándole 1 serían las ramas"* (G1). *"Se le diría al agricultor que, el mes que necesita, lo multiplique por 2 y al resultado le reste 1 para saber cuántas ramas tendrá el árbol"* (G2). *"El agricultor tiene que contar de dos en dos, tiene que multiplicarlo por 2 y restarle 1 dependiendo del mes o de las ramas"* (G3).
Ramas II	*"Para saber la cantidad de ramas tiene que hacer 2 al mes menos uno"* (G2). $2^?$ al mes -1 (G2). *"Se pone de base el número 2 y de exponente el mes que se necesita y se le resta 1"* (G3). *"Tendría que poner 2 y elevarlo al mes y restarle 1"* (G4).

Teniendo en cuenta los tres aspectos mencionados anteriormente y el análisis multimodal realizado a partir de las producciones de los estudiantes, se tuvo las siguientes transiciones entre las tres fases de generalización propuestos por Vergel et al. (2002):

Tabla 6: Transiciones entre los tipos de generalización producidas por los estudiantes para el desarrollo de cada tarea

Tarea	Transiciones
Mesas	G1: Aritmética → Aritmética Sofisticada → Algebraica

	G2: Aritmética → Aritmética Sofisticada G3: Aritmética → Aritmética Sofisticada → Algebraica G4: Aritmética → Algebraica
Juanes	G1: Aritmética G2: Aritmética → Aritmética Sofisticada → Algebraica G3: Aritmética G4: Aritmética
Ramas I	G1: Aritmética → Algebraica G2: Aritmética → Algebraica G3: Aritmética → Aritmética Sofisticada → Algebraica
Ramas II	G1: Aritmética G2: Aritmética → Algebraica G3: Aritmética → Algebraica G4: Aritmética → Algebraica

De acuerdo con lo anterior, se evidenció que para desarrollar las tareas que involucraban secuencias figurales con apoyo tabular, la mayoría de los grupos inicialmente transitaron por las tres fases del proceso de generalización (Aritmética → Aritmética Sofisticada → Algebraica). Sin embargo, a medida que los estudiantes se fueron familiarizando con las tareas propuestas y con las preguntas planteadas, centraban la atención en cómo encontrar cualquier término de la secuencia sin necesidad de utilizar el término anterior, ni acudir a las representaciones icónicas o a la construcción de tablas. Por lo tanto, se observó que en las tareas de Ramas I y Ramas II, los estudiantes utilizaron la característica en común para deducir una expresión que les permitiera determinar cualquier término de la secuencia, es decir, transitaron de una generalización aritmética a una algebraica (Aritmética → Algebraica).

Por otro lado, en la tarea que involucraba una secuencia numérica con apoyo tabular (Juanes) se evidenció que la mayoría de los estudiantes identificaron la comunalidad (apoyándose en tablas o representaciones icónicas) y necesitaron del término anterior para determinar el siguiente, es decir, produjeron una generalización aritmética. No obstante, el trabajo con G2 fue bastante significativo puesto que reconocieron la comunalidad; determinaron el aumento de seguidores para cada día teniendo en cuenta la cantidad de seguidores del día 1; construyeron una expresión multiplicativa que permitiera determinar cualquier término de la secuencia sin recurrir al anterior; analizaron la cantidad de seguidores para el día cero; identificaron, materializaron y cobraron sentido las variables; trabajaron con lo indeterminado; generalizaron la comunalidad y la expresaron en un lenguaje natural y aritmético cómo determinar la cantidad de seguidores que el artista tendrá en cualquier día a partir del lanzamiento de su canción, es decir, los estudiantes emplearon la abducción de manera analítica para determinar el valor de cualquier término de la secuencia.

Finalmente, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, consideramos que en esta investigación se documentaron los tipos de generalización que producen los estudiantes de grado octavo (12 a 14 años) al resolver tareas sobre secuencias de patrones.

7.2. Síntesis y observaciones finales:

Una de las razones por las que se realizó esta investigación concierne a la preocupación de lo que causaba la transición del pensamiento numérico al variacional, ya que los estudiantes presentaban desinterés por el álgebra y no había motivación para trabajarla debido a que las sesiones de clase se centraban solamente en procesos algorítmicos haciendo que carezcan de sentido y significado. Sin embargo, al terminar la implementación de las tareas fue significativo escuchar expresiones como *"profe, qué bonito trabajar así, es más divertido", "¿por qué nunca lo habíamos visto así?", ¿cuándo volvemos a trabajar más actividades?, "así sí nos gustan las matemáticas, sin ver tantos números y más dibujos, porque nos ayudan a pensar más",* entre otras. Lo anterior, nos demuestra que esta investigación posibilitó que los estudiantes no concibieran las matemáticas como un proceso memorístico o mecánico. Ahora las consideran divertidas, significativas y contextualizadas ya que tuvieron la oportunidad de argumentar, interpretar, refutar, discutir, analizar y comunicar.

Finalmente, consideramos que esta investigación aportó elementos didácticos y metodológicos para la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, nos permitió repensar cómo potenciar el pensamiento algebraico y tomar conciencia de cómo los medios semióticos de objetivación son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, en especial, en el desarrollo del pensamiento algebraico.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267 - 299. https://www.redalyc.org/pdf/335/33509913.pdf

Ayala, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA, 15* (3), pp. 211 - 241. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/18109/20758

Bayona, L. (2021). *Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria (con edades de 10 y 11 años).* [Tesis doctoral, Universidad Santo Tomás]. https://repository.usta.edu.co/handle/11634/34520

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for research in Mathematics Education*, 36(5), 412 - 446. https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf

Callejo, M., García, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5 – 25. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/59875#vpreview

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y el análisis.* Primera edición. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. 224 páginas. Colección Investigación / Educación. ISBN: 978-958-501-036-9 ISBNe: 978-958-501-037-6

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education,* pp. 547 - 589. http://pat-thompson.net/RUME2S19Public/files/3513.pdf

D'Amore, B. y Radford, L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. *Énfasis.* Bogotá, Colombia. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *Mathematics and Science Education*, pp. 517 - 544.

https://www.researchgate.net/publication/313744920_A_scientific_perspective_on_structured_task-based_interviews_in_mathematics_education_research?enrichId=rgreq-e9b481bc94a336d27a989d385cc888c5-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzMxMzc0NDkyMDtBUzo2OTI1NjU2NDQ5MzkyNjZAMTU0MjEzMTkyNTkzNw%3D%3D&el=1_x_2&_esc=publicationCoverPdf

Gómez, J (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo.* Maestría tesis, Universidad Pedagógica Nacional. http://funes.uniandes.edu.co/11109/1/G%C3%B3mez2013La.pdf

Gustin, J. y Pontón, T. (2020). Emergencia de medios semióticos en estudiantes de grado séptimo al desarrollar tareas de generalización de patrones. *Unión*, *Año XVI* (60), pp. 38 – 56. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/94/64

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, y T. Romberg (Edits.). *Mathematics classrooms that promote understanding*, p. 133 - 155. Mahwah [us]: Routledge; Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. y Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Miranda, I. Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de las gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación*. Educación Matemática*, 19(3), pp. 5 - 30. http://www.luisradford.ca/pub/46_01Miranda.pdf

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://www.researchgate.net/publication/228553085_Gestures_Speech_and_the_Sprouting_of_Signs_A_Semiotic-Cultural_Approach_to_Students'_Types_of_Generalization

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, número especial, pp. 103 – 129. http://funes.uniandes.edu.co/9703/1/Radford2006Elementos.pdf

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and*

Mathematical Thinking, pp. 7 - 21. https://www.luisradford.ca/pub/59_Semiotica_educmat.pdf

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education*, *40,* pp. 83 - 96. https://www.researchgate.net/publication/227092412_Iconicity_and_contraction_A_semiotic_investigation_of_forms_of_algebraic_generalizations_of_patterns_in_different_contexts/link/0c96051d48fae8b4a6000000/download?_tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19

Radford, L., Edwards, L., y Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics.* 70 (3), pp. 91 - 95. https://www.researchgate.net/publication/225414587_Introduction_Beyond_words/link/00b7d520821df0bd4e000000/download

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. https://www.researchgate.net/publication/233043460_Algebraic_thinking_from_a_cultural_semiotic_perspective

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 17 - 24. Ankara, Turkey: PME.

Radford, L. (2012). Pensamiento algebraico temprano: problemas epistemológicos, semióticos y de desarrollo. *12th International Congress on Mathematical Education.* http://www.luisradford.ca/pub/5_2012ICME12RL312.pdf

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. *Investigación en Didáctica de la Matemática.* Granada, España: Editorial Comares. https://www.researchgate.net/publication/319057529_En_torno_a_tres_problemas_de_la_generalizacion/link/598d2efda6fdcc58acba5a03/download

Radford, L. (2014). De la Teoría de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7 (2), pp. 132 - 150.

Radford, L. (2018). El surgimiento del pensamiento algebraico simbólico en la escuela primaria. *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, pp. 3 - 25. New York: Springer. http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20-%20The%20emergence%20of%20symbolic%20algebraic%20thinking%20-%20web.pdf

Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. In J. Pilet y C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des*

mathématiques de l'ARDM, 2018, pp. 314 - 332. Paris: IREM de Paris – Université Paris Diderot.

Radford, L. (2020a). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), ISSN 2500-5251. http://funes.uniandes.edu.co/22713/1/379-Texto_del_art%C3%ADculo-1700-2-10-20200823.pdf

Radford, L. (2020b). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. "*REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*" *15* (36), p.27-42. http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Radford%20-%20REMATEC%20El%20aprendizaje%20visto%20como%20saber%20y%20devenir.pdf

Radford, L., y Lasprilla, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica, 28* (1), 107–128. http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Radford%20y%20Herrera%20Etica%20Matematica%20sua%20Didattica.pdf

Radford, L. [Aprender en Red]. (2021a). FITCEM/Diciembre/1 - De un problema endémico del aula de matemáticas: la alienación [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=bUXTJgIRZH8

Radford, L. (2021b). Aspectos conceituais e práticos da teoria da objetivação. *V. Moretti y L. Radford (Eds.), Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural*, pp. 35 - 56. Livraria da Física. http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20-%20Aspectos%20conceptuales%20y%20practicos%20de%20la%20%20TO_final_Spanish.pdf

Rodríguez de Chicas, S. y Ron, J. (2022). Desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante generalización de patrones. *Órbita científica, 119* (28), pp. 1 – 10. ISSN: 1027 – 44722. http://revistas.ucpejv.edu.cu/index.php/rOrb/article/view/1665/2034

Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 49 - 64. Nueva York: Macmilliam.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20* (2), pp. 147 - 164.

Uicab, G., Rojano, M. y García, M. (2022). Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de secuencias figurales-numéricas y numéricas. *Educación Matemática, 34* (1), pp. 42 - 69.

https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttextypid=S2448-80892022000100042ylng=esynrm=isoytlng=es

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* [Tesis de Doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Bogotá, Colombia. https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/2608/CausadoVergelRodolfo2014.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9* (3), 193-215. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6220/5534

Vergel, R. (2016a). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. UNO. *Revista de la Didáctica de las Matemáticas, 73*, pp. 23 – 31. http://funes.uniandes.edu.co/8433/1/UN073-Vergel2016.pdf

Vergel, R. (2016b). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano0ay_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf

Vergel, R. [Aprendiendo en Red]. (2021). *FITCEM/Diciembre/3 - Reflexiones sobre la constitución de la labor conjunta en el aula.* [Vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=hQDMGe_5e30

Vergel, R. [Óscar Guerrero Contreras GIEM] (2022). *RodolfoVergelZona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pen*. [Vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=xHe0ggSh8A8

Vergel, R., Radford, L. y Rojas, P. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 36* (74). Rio Claro. https://www.researchgate.net/publication/363694690_Zona_conceptual_de_formas_de_pensamiento_aritmetico_sofisticado_y_proto-formas_de_pensamiento_algebraico_una_contribucion_a_la_nocion_de_zona_de_emergencia_del_pensamiento_algebraico

Zapatera, A. y Callejo, M. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En Marín, M., Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 599 - 610. Ciudad Real: SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/1843/1/414_Zapatera2011Nivel_SEIEM13.pdf

Zapatera, A. (2018a). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21* (1), 87-114. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554987005

Zapatera, A. (2018b). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista Didáctica de las Matemáticas, 97,* pp. 51 – 67. ISSN: 1887-1984. https://core.ac.uk/download/pdf/186349335.pdf