ESPACIOS DE HILBERT DE FUNCIONES ENTERAS Y OPERADOR DE COMPOSICIÓN



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

YULY ANDREA MUÑOZ GARCÍA

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2018

ESPACIOS DE HILBERT DE FUNCIONES ENTERAS Y OPERADOR DE COMPOSICIÓN



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

YULY ANDREA MUÑOZ GARCÍA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Matemática

Director: Julio César Ramos Fernández
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2018

Las Matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo
Galileo Galilei

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por permitirme dar este paso tan importante porque sin él nada de esto hubiera sido posible, agradezco a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, a todos los profesores que estuvieron en mi vida académica, pero en especial le quiero dar las gracias al profesor Julio César Ramos, ya que con su ayuda, apoyo,su valioso tiempo y todos sus conocimientos este trabajo fue posible, gracias por formarme como persona y matemática.
Le quiero también dar las gracias a mis padres Gilberto Muñoz y María Luisa García, por su apoyo y dedicación en los tiempos más difíciles, a mis hermanos Juan y Carlos Muñoz, a mis abuelas Mireya y Esmilda que siempre han estado pendientes de mis estudios, a mi tío Juan Carlos le quiero agradecer todo el apoyo que me ha brindado, a mis tíos Edgar, Abelardo y German, a mis tías y primos que siempre me han apoyado con sus palabras.
El siguiente trabajo de grado es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañándome en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad a Wendy, Diana Plazas, Vanessa, Sara, Luisa, Edison, Jhoan, Emily, Angie, David, Yissela y M&M, gracias por cada palabra de aliento, por su amistad y sobre todo gracias por estar conmigo en todo momento.
Yesid Alejandro gracias por todo el apoyo incondicional que me brindas cada día, por las mil ayudas, por tu tiempo, esfuerzo y dedicación, por ser esa persona que me llena de valor para salir adelante y continuar mis estudios.
Juan David muchas gracias por todo el apoyo que me brindas cada día, por estar conmigo en todos los momentos importantes, este gran paso fue gracias a ti, tu fuiste testigo de todo lo que se hizo para que se hiciera realidad.
Edmundo García, abuelito te quiero dar las gracias porque desde pequeña me enseñaste que lo único que uno puede tener en la vida son los conocimientos.

Índice general

Introducción **4**

Objetivos **5**

1. Preliminares **6**
1.1. Sucesiones en espacios métricos 6
1.2. Espacios de Hilbert 10
1.3. Funciones Analíticas u Holomorfas 12
1.4. Operadores Continuos 16

2. Espacio ℓ^2_β **18**
2.1. Una generalización del espacio l^2 18
2.2. Comparación de espacios ℓ^2_β y ejemplos 27
2.3. Funciones Enteras y relación con el espacio ℓ^2_β 30

3. Espacios de Hilbert de funciones enteras **35**
3.1. El espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ 35
3.2. Una clasificación para sucesiones de números positivos 36
3.3. Tipos de espacios de Hilbert de funciones enteras 48
3.3.1. Espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ 49
3.3.2. Espacios $E^2_\gamma(T,\tau)$ Y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho,T)$ 56

4. Operadores de composición en $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho,T)$ **62**
4.1. Invarianza y Acotación 62
4.2. Norma Esencial y Compacidad 69
4.3. Diferencia compacta de dos operadores de composición en $\mathcal{H}(\beta^+_\rho,T)$. . . 75

5. Conclusiones **80**

Bibliografía **81**

Introducción

En la familia de los espacios vectoriales que están dotados de una estructura métrica, se encuentran los Espacios de Hilbert llamados así por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943), el cual introdujo el concepto de un espacio euclídeo de dimensión infinita, cuando llevaba a cabo sus estudios de ecuaciones diferenciales e integrales, lo cual dio consecuencias directas e importantes en el análisis funcional moderno. Este trabajo llevó consigo contribuciones importantes a la física matemática. Años más tarde, el matemático polaco Stefan Banach amplió este concepto, dando como resultado los Espacios de Banach. Cuando se estudian los Espacios de Hilbert, se debe recurrir a las sucesiones, y estas llevan a su vez una relación directa con las series, en particular este estudio se enfocará en las series de potencias de la familia E^2_γ con γ_n una sucesión de números reales positivos tal que $\beta = \beta_n = \frac{1}{\gamma_n^{-1}}$, denotada

$$E^2_\gamma = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ entera: } \|f\|_\gamma := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \gamma_n^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Los cuales se descubrieron cuando se estudiaban los operadores de traslación actuando sobre algunos espacios de Hilbert de funciones enteras. Este trabajo de grado es de tipo reconstructivo en base al articulo "Hilbert Spaces of Entire Functions and Composition Operators"de los autores Doan and Khoi [7], quienes estudiaron el espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ que se genera a través de los espacios E^2_γ y F^2_α. Las condiciones necesarias y suficientes para las propiedades de acotación y compacidad de los operadores de composición C_φ en $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ se obtuvieron del estudio de las propiedades de los espacios E^2_γ y F^2_α.
En el primer capítulo, se presentaran nociones básicas que se utilizarán a lo largo del desarrollo del trabajo, como las definiciones de sucesiones,espacios de Hilbert, función entera y operadores, además de algunas propiedades y ejemplos de estas. En el capítulo 2 se introduce el espacio ℓ^2_β, sus propiedades, como se relacionan entre sí y algunos ejemplos de estos, además de la relación entre funciones enteras y el espacio ℓ^2_β. Para el capítulo 3, se define el espacio de Hilbert de funciones enteras $\mathcal{H}(\beta_E)$ y sus particularidades, centrando el estudio en los espacios mencionados anteriormente (E^2_γ, $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$) y sus diferentes subclases las cuales se resumirán mediante un diagrama de contencias y por último en el capítulo 4, se presentarán los operadores de composición en los espacios $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$, definiendo el operador composición C_φ, además de las propiedades como la invarianza, acotación, compacidad, norma esencial, entre otras, y para finalizar este capítulo se presenta las nociones de la diferencia compacta de dos operadores de composición.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar el espacio de Hilbert generado por las funciones enteras propuesto en el artículo Hilbert Space of Entire Functions and Composition Operators (Minh Luan Doan. Le Hai Khoi, 2015) con el fin de presentar algunos ejemplos y mostrar algunas propiedades de dichos espacios de forma teórica.

Objetivos Específicos

1. Estudiar los espacios de Hilbert en particular el espacio ℓ^2_β, además del concepto y propiedades de las funciones enteras.

2. Ilustrar las principales propiedades del espacio ℓ^2_β

3. Analizar por medio del criterio de la raíz la sucesión de coeficientes de series de potencias de funciones enteras y el espacio ℓ^2_β.

Capítulo 1

Preliminares

Con la finalidad de que el trabajo sea autocontenido, en este capítulo se presentaran algunos conceptos básicos que serán utilizados a lo largo de este documento. En la primera sección se presentaran las sucesiones en espacios métricos, dando a conocer su definición y algunas de sus propiedades, además se mostrará también el concepto de serie, criterios de convergencia, límite superior e inferior y algunos ejemplos de estos límites, además del concepto de series y algunos criterios de convergencia para estas. En la segunda sección, se brindan herramientas y conceptos sobre los espacios de Hilbert y sus propiedades como estructura topológica. Para la tercera sección se busca presentar las funciones analíticas y las funciones enteras. Por último, en la cuarta sección se darán todos los conceptos necesarios sobre operadores que actúan sobre los espacios de Hilbert, esto con el fin de familiarizar al lector con conceptos que se puede encontrar a lo largo de este trabajo.

1.1. Sucesiones en espacios métricos

En esta primera sección se darán conceptos básicos del análisis y topología matemática. El lector interesado en profundizar sobre los conceptos que se introducen en esta sección puede consultar los textos Royden [10], Bartle and Sherbert [1] y Rudin [11]. En primer lugar, se recuerda la bien conocida propiedad arquimediana, en la cual se establece que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$. Además, también es necesario recordar el concepto de métrica y espacio métrico, el cual plantea que si M es cualquier conjunto no vacío, entonces una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es llamada una **métrica** en M si está satisface:

- $d(x, y) \geq 0$ para todo x, y en M;
- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ para todo x, y en M;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo x, y, z en M.

Si a un espacio se le puede definir una métrica M, se le denominará un espacio métrico. Una de las propiedades de los espacios métricos más utilizada es la desigualdad triangular, en el caso del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la función valor absoluto, se tiene que para a, b cualesquiera números reales, entonces

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Existen funciones particulares que asocian los números naturales con cualquier conjunto y estas son conocidas como sucesiones. Más precisamente, si J es un conjunto, entonces una función $x : \mathbb{N} \to J$ se llama sucesión de elementos de J. La imagen del n-ésimo número natural $x(n)$, se denota por x_n y tradicionalmente se denota la sucesión $x : \mathbb{N} \to J$ por $\{x_n\}$. Se llamará una sucesión real si $J = \mathbb{R}$ o una sucesión compleja si $J = \mathbb{C}$. En el caso que J sea un espacio métrico, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a $x^{'} \in J$ o tiene límite $x^{'}$, cuando

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad d\left(x_n, x^{'}\right) < \epsilon.$$

La sucesión $\{x_n\}$ converge a x y se denota por $x_n \to x$ o bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, también se suele decir, en este caso que la sucesión $\{x_n\}$ converge fuertemente a x. Si la definición anterior no se satisface se dirá que la sucesión no converge o que es divergente. Se dirá que una sucesión de números reales es divergente a $+\infty$ si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > k$.

Dentro de las propiedades que se usarán para sucesiones de números reales, se encuentra que una sucesión puede ser monótona creciente o decreciente, se dirá que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{n+1} \geq x_n$ o por el contrario si $x_{n+1} \leq x_n$ se dirá monótona decreciente. También es conveniente recordar que una sucesión de números reales o complejos es acotada si existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, la convergencia de una sucesión da como resultado que esta sea acotada. Se aplicará un criterio de convergencia para sucesiones monótonas; si una sucesión es acotada y es monótona ésta debe converger.

Las sucesiones reales o complejas también respetan las operaciones usuales como lo son suma, resta, multiplicación y división. Además, en caso de sucesiones reales, se pueden comparar y respetan desigualdades, es decir, si $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ son sucesiones convergentes de números reales y si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. De acá se puede obtener una herramienta muy útil para calcular límites que se conocen como el criterio de emparedado, éste establece que si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son convergentes y además que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

entonces $\{y_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Por lo general se tratará de dejar a $\{x_n\}$ o $\{z_n\}$ como una constante y la otra como el límite de una sucesión que sea conocido. En el documento se realizará un énfasis también en cocientes entre los términos de la sucesión, para ello se requiere recordar el siguiente teorema, donde dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales positivos tal que

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

existe. Si $L < 1$, entonces $\{x_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Se llamará subsucesión a cualquier conjunto infinito de elementos de una sucesión, donde los índices crecen sin cota, en particular una sucesión es una subsucesión de ella misma y toda subsubcesión es a su vez una sucesión, de acá se pueden heredar algunas propiedades como la convergencia y la monotonía, es decir, si x_n es una sucesión y s_n es una subsucesión de está, se tiene que si x_n converge, entonces s_n converge o si x_n es monótona se tiene que s_n es monótona. También hay que tener en consideración el teorema de Bolzano-Weierstrass el cual dice que toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

Con base en los estudios realizados se clasificaran las sucesiones con respecto a los límites superior e inferior, por esto la importancia de definirlos como sigue, sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada de números reales. El límite superior de $\{a_n\}$ denotado por $\lim\sup\{a_n\}$, es definido por

$$\lim\sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k | k \geq n\}\right).$$

El límite inferior de $\{a_n\}$, denotado por $\lim\inf\{a_n\}$, se define por

$$\lim\inf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \left(\text{ínf}\{a_k | k \geq n\}\right).$$

En el caso que $\{a_n\}$ no sea acotado superiormente, se define $\lim\sup\{a_n\} = +\infty$. Similarmente, si $\{a_n\}$ no es acotado inferiormente, se define $\lim\inf\{a_n\} = -\infty$. También es claro que

$$\lim\sup\{a_n\} = -\lim\inf\{-a_n\}.$$

Todavía más, se tienen las siguientes propiedades:

- $\lim\sup\{a_n\} = l \in \mathbb{R}$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, hay infinitos índices n para el cual $a_n > l - \epsilon$ y solo hay finitos indices n para el cual $a_n > l + \epsilon$.
- Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ converge a un número real extendido si y sólo si $\lim\inf\{a_n\} = \lim\sup\{a_n\} = a$.

En el caso que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sean sucesiones acotadas de números reales tales que $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces

$$\lim\sup\{a_n\} \leq \lim\inf\{b_n\}.$$

Se verán algunos ejemplos a continuación para una mayor comprensión sobre el $\lim\sup$ y el $\lim\inf$,

- sea $\{x_n\} = \{2\}$, entonces $\lim\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\sup\{a_k|k \geq n\}] = 2$ y $\lim\inf\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\inf\{a_k|k \geq n\}] = 2$.
- sea $\{x_n\} = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si es par} \\ n \text{ si es impar,} \end{cases}$ entonces $\lim\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\sup\{a_k|k \geq n\}] = \infty$ y $\lim\inf\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\inf\{a_k|k \geq n\}] = 0$.
- sea $\{x_n\} = (-1)^n$, entonces $\lim\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\sup\{a_k|nk \geq n\}] = 1$ y $\lim\inf\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\inf\{a_k|k \geq n\}] = -1$.
- sea $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$, entonces $\lim\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\sup\{a_k|k \geq n\}] = 1$ y $\lim\inf\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}[\inf\{a_k|k \geq n\}] = 1$.

Los espacios que se estudiarán en el presente trabajo de grado son espacios completos, para dar esta definición se requiere introducir la noción de sucesiones de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico es de Cauchy si se satisface que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que para todos los } \quad n, m > N \text{ entonces } d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Toda sucesión convergente es de Cauchy. Se dirá que un espacio métrico X es completo si en X cada sucesión de Cauchy es convergente.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales o complejos, se puede formar otra sucesión $\{S_n\}$ mediante la expresión

$$S_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_n,$$

la cual se conoce como la sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}$. Si esta sucesión $\{S_n\}$ es convergente se dice que la serie de los x_n es convergente y se escribe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$, en caso contrario, se dice que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_n$ es divergente. Es importante notar que si una serie es convergente, entonces su término n-ésimo x_n tiende a cero, a este hecho se le conoce como el criterio del término n-ésimo para la convergencia de una serie. Como en las sucesiones, las series se pueden comparar para así conocer su convergencia o divergencia de la siguiente manera, si $0 \leq x_n \leq y_n$ para $n \geq K$, para algún $K \in \mathbb{N}$, y si la $\sum y_n$ converge entonces la $\sum x_n$ converge, o por el contrario si $\sum x_n$ diverge, esto implica que $\sum y_n$ diverge.

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ de números reales o complejos se dice que es absolutamente convergente si la serie del valor absoluto de los términos es convergente, es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.
En este caso, se tiene que si una serie de números reales o complejos es absolutamente convergente, entonces la serie es convergente.
Para poder determinar la convergencia o divergencia de una serie, se hará uso de los siguientes criterios de convergencia:

- **Criterio de la raíz**: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales o complejos. Si existe $r \in \mathbb{R}$, con $r < 1$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^{1/n} \leq r$ para $n \geq K$, entonces la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente. Si existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^{1/n} \geq 1$ para $n \geq K$, entonces la serie $\sum x_n$ es divergente.

- **Criterio de la razón o criterio de D'Alembert**: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números $\mathbb{R}$ distintos a cero, si existe $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ y $K \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r$ para $n \geq K$, entonces la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente. Si existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ para $n \geq K$, entonces la serie $\sum x_n$ es divergente.

- **Criterio de comparación**: Suponga que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones reales distintas de cero y suponga que el siguiente límite existe en $\mathbb{R}$,

$$r := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right|.$$

  Si $r \neq 0$ entonces $\sum x_n$ es absolutamente convergente si y sólo si $\sum y_n$ es absolutamente convergente. Si $r = 0$ y si $\sum y_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum x_n$ es absolutamente convergente.

- **Criterio del encaje**: Sea $\sum a_n$ y $\sum c_n$ dos series convergentes, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $a_n \leq b_n \leq c_n$ entonces $\sum b_n$ también converge.

1.2. Espacios de Hilbert

El motivo principal de esta sección es dar a conocer los elementos básicos de espacios de Hilbert que seran abordados a lo largo de este trabajo, para esto se recuerda que un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ es una estructura algebraica $(X, +; \mathbb{K}, +, \cdot; \circ)$, donde $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un campo, $(X, +)$ es un grupo abeliano y la operación $\circ : X \times \mathbb{K} \to X$ satisface las condiciones siguientes: para todos $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \alpha \circ (x + y) &= \alpha \circ x + \alpha \circ y, \\ (\alpha + \beta) \circ x &= \alpha \circ x + \beta \circ x, \\ \alpha \circ (\beta \circ x) &= (\alpha \cdot \beta) \circ x. \end{aligned}$$

Además, si 1 es la unidad del campo $\mathbb{K}$, se cumple: $1 \circ x = x$. Si $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$ y satisface las propiedades de espacio vectorial entonces A es llamado subespacio vectorial de X, otra de las maneras para establecer que A es un subespacio vectorial de X, se da mostrando que $0 \in A$ y que para todo $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la combinación lineal $\alpha x + \beta y \in A$. Para algunos espacios vectoriales se tiene una función especial llamada producto interno, se recordara que un producto interno en X es una función de $X \times X$ en el campo escalar K de X; es decir, que a cada par de vectores x e y se le asocia un escalar, denotado por $\langle x, y \rangle$, el cual es llamado el producto interno de x e y, de modo que para cualesquiera vectores x, y, z y escalares α se tiene que se cumplen las siguientes condiciones:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle y, x \rangle$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle a, a \rangle \geq 0$, además $\langle a, a \rangle = 0$ si y sólo si $a = 0$.

Un producto interno en X define una norma en X dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Una norma en un espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{K}$, que puede ser el campo de los reales $\mathbb{R}$ o bien el campo de los complejos $\mathbb{C}$, se define como una función no negativa tal que para todo $x \in X$ se tiene que

$$x \to \|x\| \in \mathbb{R},$$

que satisface las siguientes condiciones

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \ x \in X, \ \alpha \in \mathbb{K}.$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0.$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

El par $(X, \| \cdot \|)$ es llamado un **espacio normado**. Se debe tener en cuenta que no toda norma proviene o se define de un producto interno, pero cada norma define de forma natural una métrica convirtiendo X en un espacio métrico. En particular, para un espacio X con producto interno, la métrica se da por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Los espacios métricos completos que tendrán más importancia a lo largo de este trabajo serán los espacios de Hilbert, se sabe que un **espacio de Hilbert** satisface que es

un espacio vectorial con producto interno y con la métrica proveniente del producto interno el espacio es completo. Un ejemplo clásico de estos espacios es el espacio $\mathbb{R}^n$, con el producto interno usual. Aquellos espacios vectoriales, normados y completos, cuya norma no necesariamente proviene de un producto interno son llamados **espacios de Banach**. A lo largo de este trabajo se estudiará en profundidad otros espacios de Hilbert o espacios de Banach, por ejemplo, para $p \geq 1$ se define el espacio l^p, como el conjunto de todas las sucesiones de valor real o complejo tales que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Resulta que el par $(l^p, \|\cdot\|_p)$ provee, para cada $p \geq 1$, ejemplos de espacios de Banach. En particular, si $p = 2$, se tiene que $(l^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert donde el producto interno viene dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n,$$

con $x = \{x_n\}$ y $y = \{y_n\}$ sucesiones reales o complejas. De estos espacios se tienen dos desigualdades muy importantes, las cuales son:

- **Desiguldad de Hölder**:
  Sean x_n, y_n sucesiones de ℓ^p, $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

  $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

  tenga en cuenta que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cuando los valores de $p = q = 2$ entonces la desigualdad de Hölder recibe el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz.

- **Desigualdad de Minkowski** :
  Sean x_n, y_n sucesiones de ℓ^p, si $p \geq 1$

  $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

El lector interesado en profundizar sobre los conceptos que se emitieron en esta sección puede consultar los textos Kreyszig [8] y Conway [4].

1.3. Funciones Analíticas u Holomorfas

En esta sección se presentarán algunos conceptos de funciones analíticas u holomorfas que son funciones definidas sobre ciertas regiones del plano complejo el cual tiene estructura topológica debida a su métrica que proviene del módulo de los complejos y se

define de la siguiente manera: dados dos complejos x, y con $x = a + bi$ e $y = c + di$, la distancia de x a y, denotado por $|x - y|$, queda definida por la relación

$$|x - y| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Recuerde además que una función compleja a valor complejo es una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyo dominio y rango son subconjuntos de $\mathbb{C}$. En este trabajo de grado se consideran funciones complejas definidas en subconjuntos abiertos Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Si f una función compleja definida en Ω, $z_0 \in \Omega$ y si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, entonces se dice que f es diferenciable en z_0, se denotará este límite como $f'(z_0)$ y se llamará la derivada de f en z_0. Si $f'(z_0)$ existe y es continua para todo $z_0 \in \Omega$ se dice que f es holomorfa o analítica en Ω, en el caso donde $\Omega = \mathbb{C}$, estas serán llamadas funciones enteras, como por ejemplo la función exponencial compleja es una función entera.

El conjunto de funciones analíticas en Ω se denotará por $H(\Omega)$. Este conjunto es un anillo con las operaciones de suma y producto, con ayuda de las reglas de la derivada. Entre algunas de las propiedades de las funciones analíticas más importantes y que se utilizaron a lo largo de este trabajo se encuentran:

- **Teorema de Cauchy - Goursat** ([6]) Sea $f(z)$ una función analítica en una región que contenga al rectángulo R, dado por las desigualdades $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Entonces

  $$\int_{\partial R} f(z)dz = 0,$$

  donde ∂R es la frontera de R.

- **Formula Integral de Cauchy**: ([4]) Sea G un subconjunto abierto del plano y $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si γ es una curva rectificable cerrada en G tal que $n(\gamma; w) = 0$ para todo w en $\mathbb{C} - G$, entonces para a en $G - \{\gamma\}$

  $$n(\gamma; a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

- **Teorema del Módulo Máximo**: También conocido como el principio del módulo máximo, donde se define una región Ω, $f \in H(\Omega)$ y $\overline{D}(a; r) \subset \Omega$. Entonces

  $$|f(a)| \leq \max_\theta |f(a + re^{i\theta})|.$$

  La igualdad se obtiene si y sólo si f es constante en Ω.

Se establece ahora el Teorema de Montel, se dará una demostración de este resultado en virtud de la importancia que tiene para el desarrollo de este trabajo. Se recuerda que una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en un dominio G se dice normal si toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión convergente que converge a una función en $\mathcal{F}$. También es conveniente recordar que una familia de funciones holomorfas en un dominio G se dice localmente acotada si para cada punto a en G existen constantes M y $r > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$, $|f(z)| \leq M$ para $|z-a| < r$. Con estas notaciones, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1 (MONTEL)**.** *Una familia $\mathcal{F}$ en $H(G)$ es normal si y sólo si $\mathcal{F}$ es localmente acotado.*

Nota. $\mathcal{F} \subset H(E)$ es localmente acotado si para cada $z_0 \in G$ existen $M > 0$ y $r > 0$, tal que $\|f(z)\| \leq M$, para todo $z \in B(z_0, r)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Demostración. Suponga $\mathcal{F}$ es normal pero que no se cumple que sea acotado localmente; entonces existe un conjunto compacto $K \subset G$ tal que

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty.$$

Esto es, que existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n.$$

Como $\mathcal{F}$ es normal, existe una función f en $H(G)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$. Pero esto da que

$$\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0 \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Si $|f(z)| \leq M$ para z en K,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M;$$

Como la parte derecha converge a M, esto es una contradicción.

Ahora se supone que $\mathcal{F}$ es localmente acotado; el Teorema Ascoli- Arzela puede ser usado para mostrar que $\mathcal{F}$ es normal. Como la condición (a) del Teorema Ascoli- Arzela se satisface, se va a mostrar que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de G. Fijando un punto a en G y $\epsilon > 0$; de la hipótesis existe un $r > 0$ y $M > 0$ tal que $\overline{B}(a; r) \subset G$ y $|f(z)| \leq M$ para todo z en $\overline{B}(a; r)$ y para todo f en $\mathcal{F}$. Sea $|z - a| < \frac{1}{2}r$ y $f \in F$; entonces usando la fórmula integral de Cauchy con $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)}dw\right| \\ &\leq \frac{4M}{r}|a-z|, \end{aligned}$$

haciendo $\delta < \text{mín}\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\epsilon\}$ se sigue que $|a - z| < \delta$ da $|f(a) - f(z)| < \epsilon$ para toda f en $\mathcal{F}$. Esto muestra el resultado. □

Por último se abordaran algunas generalidades de las funciones enteras, la función entera f se puede representar por medio de serie de potencia de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

donde la sucesión de coeficientes $\{a_n\}$ satisface.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

es decir, la serie de potencia que define f tiene radio de convergencia infinito. Es de interés estudiar el crecimiento de una función entera cuando $|z| \to \infty$, según el principio del módulo máximo, esta información se deduce analizando el crecimiento de la siguiente función

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

la cual aumenta monótonamente. También es conveniente introducir el orden y el tipo de una función entera a fin de que ellas queden clasificada según su crecimiento. El orden ρ de la función entera f definida en (1.1) se define como

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(1/|a_n|)}.$$

En el caso que este valor sea finito, se define el tipo de esa función entera f por

$$\sigma = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n\to\infty} (n \sqrt[n]{|a_n|^\rho}).$$

Por ejemplo, si fijamos dos valores $0 < \rho < \infty \quad y \quad 0 < \sigma < \infty$, entonces la función entera

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n/p} z^n$$

es de orden ρ y tipo σ. La función

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$$

es de orden cero y la función

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n}\right)^n z^n$$

es de orden infinito. El lector interesado en profundizar sobre los conceptos que se emitieron en esta sección puede consultar los textos Derrick et al. [6] y Conway [4].

1.4. Operadores Continuos

Uno de los objetos matemáticos más importantes dentro de este trabajo de grado son los operadores que actúan entre los espacios de Hilbert, es necesario definir qué es y como actúan estos, para ello se le denomina **operador** a una aplicación o mapeo sobre espacios vectoriales en particular espacios normados. Se define que un operador lineal T si se satisface:

1. El dominio $\mathcal{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y mientras que el rango $\mathcal{R}(T)$ [1] es un espacio vectorial sobre el mismo campo.

2. Para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y escalar α

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x). \end{aligned}$$

Algunas de las propiedades que se utilizarán a lo largo de este trabajo, es que un operador lineal se dice continuo, cuando la imagen inversa de un conjunto abierto es abierto y a su vez también se puede definir de la misma forma para conjuntos cerrados, por otro lado si $x_n \to x$ en el dominio entonces $T(x_n) \to T(x)$.

Se dice que un un operador lineal T entre espacios de Banach X e Y es acotado si existe una constante finita $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

para todo x en el espacio X. A su vez se puede definir la norma del operador como

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\right\}.$$

De manera equivalente note que para todo $x \in X$ el operador T es continuo si existe c tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$. Se puede ver que la norma del operador T se obtiene a partir de lo que se mencionó anteriormente de tal manera que

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Dentro de los operadores más usuales se pueden encontrar los siguientes

- Operador identidad: el operador identidad $I_X : X \to X$ es definido por $I_X x = x$ para todo $x \in X$. se puede escribir simplemente I en lugar de I_X es decir $I(x) = x$.

- Operador cero: el operador $0 : X \to Y$ esta definido por $0x = 0$ para todo $x \in X$.

[1] Se denota $\mathcal{D}(T)$ el dominio de T,$\mathcal{R}(T)$ el tango de T y $\mathcal{N}(T)$ el espacio nulo de T.

- Operador diferenciación: Sea X un espacio normado de todos los polinomios en $J = [0, 1]$ con norma dada por $\|x\| = \text{máx}\,|x(t)|,\ t \in J$. El operador diferenciación T es definido sobre X por $T[x(t)] = x^{'}(t)$ donde la prima denota la diferenciación con respecto a t. Este operador es lineal pero en general no es acotado.

- Operador Matricial: una matriz real $A = (\alpha_{jk})$ con r filas y n columnas define un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ por medio de $y = Ax$ donde $x = \xi_i$ y $y = \eta_j$ son vectores columna con n y r componentes respectivamente, se usa la multiplicación de matrices usual y en términos de sus componentes, la ecuación $y = Ax$ se convierte en

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k \qquad\qquad (j = 1, ..., r)$$

  T es lineal pues la multiplicación de matrices es un operador lineal, T es acotado ya que la norma en $\mathbb{R}^r$ da que

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 &= \sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k \right]^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2. \end{aligned}$$

  Notese que la doble sumatoria en la ecuación anterior no depende de x, se puede escribir la última desigualdad como

$$\|Tx\|^2 \leqq c^2\|x\|^2 \text{ donde } c^2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2.$$

  por lo tanto T es acotado.

Un operador $T : H \to K$, siendo H y K espacios de Banach, se dice que es compacto si la imagen de toda bola en H tiene clausura compacta en K. T se dice que tiene rango finito si el rango de T es de dimensión finita. Es conocido que todo operador de rango finito es compacto y que el límite (con la norma de operador) de operadores compactos da como resultado otro operador compacto. La norma esencial $\|T\|_e$ de un operador acotado T es la distancia en la norma del operador de T a los operadores compactos, en términos de norma del operador, esto es,

$$\|T\|_e = \text{ínf}\left\{\|T - K\| : K\text{es compacto}\right\}.$$

Se puede concluir que la norma esencial de T sera igual a cero si y sólo si T es compacto.

Se recomienda los textos de Conway [4] y Kreyszig [8] para más propiedades de los operadores lineales continuos.

Capítulo 2

Espacio ℓ^2_β

En esté capítulo se presenta el espacio ℓ^2_β, el cual es un espacio de Hilbert que generaliza el clásico espacio l^2 de sucesiones. El producto interno de este nuevo espacio posee un peso $\beta = \{\beta_n\}$ el cual es una sucesión de números reales positivos. También se dará a conocer cuando dos espacios de este tipo $\ell^2_{\beta_1}$ y $\ell^2_{\beta_2}$ pueden ser iguales y algunos ejemplos. El espacio ℓ^2_β fue introducido recientemente por Minh Luan Doan y Le Hai Khoi (2015) en su artículo titulado "Hilbert Spaces of Entire Functions and Composition Operators".

2.1. Una generalización del espacio l^2

En esta sección se define el conjunto de sucesiones complejas l^2_β, se establece que es un espacio vectorial y luego se dota este espacio de un producto interno el cual lo convierte en un espacio métrico completo.

Definición 1. Sea $\beta = \{\beta_n\}$ una sucesión de números reales positivos, se denota por ℓ^2_β el conjunto de las sucesiones complejas $\{a_n\}$ que satisfacen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 < \infty,$$

es decir,

$$\ell^2_\beta = \left\{ \{a_n\} \in \mathbb{C} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 < \infty \right\}.$$

Primero se observa que efectivamente es un espacio vectorial, esto con el fin de poder dar una estructura al espacio ℓ^2_β.

Proposición 2.1.1. *ℓ^2_β es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración. Dado que ℓ^2_β es un subconjunto del conjunto de las sucesiones, sólo es necesario mostrar que es un subespacio vectorial. Se quiere ver que es cerrado con la suma. En efecto, sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \in \ell^2_\beta$ de las relaciones

$$\begin{aligned} 0 &\leq |a_n - b_n|^2 \\ &= |a_n|^2 + |b_n|^2 - a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n} \\ a_n\overline{b_n} + b_n\overline{a_n} &\leq |a_n|^2 + |b_n|^2. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|^2 &= |a_n|^2 + |b_n|^2 + a_n\overline{b_n} + b_n\overline{a_n} \\ &\leq |a_n|^2 + |b_n|^2 + |a_n|^2 + |b_n|^2 \\ &\leq 2|a_n|^2 + 2|b_n|^2. \end{aligned}$$

Ahora multiplicando por β_n^2 y aplicando la sumatoria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ se da que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n|^2\beta_n^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2\beta_n^2\right).$$

Pero por hipótesis se tiene que $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \in \ell^2_\beta$, es decir, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2 = M < \infty$$

y además que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2\beta_n^2 = N < \infty,$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n|^2\beta_n^2 \leq 2(M + N) < \infty.$$

Por tanto se tiene que es cerrado para la suma ya que $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \in \ell^2_\beta$.

Ahora se quiere ver que es cerrado bajo el producto por escalar. Sea $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que probar que $\{\lambda a_n\} \in \ell^2_\beta$. Para ello observe que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda a_n|^2\beta_n^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^2|a_n|^2\beta_n^2 \\ &= |\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2 \end{aligned}$$

pero como $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2 = M < \infty$, luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda a_n|^2\beta_n^2 = |\lambda|^2 M < \infty,$$

es decir, $\{\lambda a_n\} \in \ell^2_\beta$. Por tanto ℓ^2_β es un espacio vectorial. □

En lo que sigue de esta sección, se asumirá que la sucesión peso $\beta = \{\beta_n\}$ se encuentra fijada. La siguiente proposición, será de gran importancia para dotar el espacio vectorial l^2_β de un producto interno.

Proposición 2.1.2. *Sea $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ dos sucesiones en el espacio ℓ^2_β, entonces la serie numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{c_n}\beta_n^2$$

es convergente en $\mathbb{C}$.

Demostración. Es suficiente ver que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||c_n|\beta_n^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}$$

con $\{a_n\} \in l^2_\beta$ y $\{c_n\} \in l^2_\beta$. Se observa que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

de donde,

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$$

Ahora para $\{\widetilde{a_n}\}$ y $\{\widetilde{c_n}\} \in l^2_\beta$ tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widetilde{a_n}|^2\beta_n^2 = 1 \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |\widetilde{c_n}|^2\beta_n^2 = 1 \tag{2.1}$$

se tiene que

$$|\widetilde{a_n}\widetilde{c_n}| \leq \frac{|\widetilde{a_n}|^2}{2} + \frac{|\widetilde{c_n}|^2}{2}$$

y como cada β_n^2 real positivo, entonces

$$|\widetilde{a_n}\widetilde{c_n}|\beta_n^2 \leq \frac{|\widetilde{a_n}|^2}{2}\beta_n^2 + \frac{|\widetilde{c_n}|^2}{2}\beta_n^2.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{a_n}\widetilde{c_n}|\beta_n^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|\widetilde{a_n}|^2}{2}\beta_n^2+\frac{|\widetilde{c_n}|^2}{2}\beta_n^2\right). \qquad (2.2)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{a_n}|^2\beta_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{c_n}|^2\beta_n^2.\\ &= \frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1\end{aligned}$$

en virtud de (2.1). Ahora, para sucesiones no nulas, $\{a_n\}$ y $\{c_n\}\in l^2_\beta$ se consideran las sucesiones $\{\widetilde{a_n}\}$ y $\{\widetilde{c_n}\}$ definidas por

$$\widetilde{a_n}=\frac{a_n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}\ ,\quad \widetilde{c_n}=\frac{c_n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{a_n}|^2\beta_n^2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{a_m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}\right|^2\beta_m^2\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|a_m|^2}{\left|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}\right|^2}\beta_m^2\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|a_m|^2}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2}\beta_m^2\\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2}\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2\beta_m^2\\ &= 1\end{aligned}$$

con lo cual $\{\overline{a_n}\}$ satisface (2.1). De manera análoga se satisface (2.1) para $\{\overline{c_n}\}$. Por

tanto, de (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{a_n}\widetilde{c_n}|^2\beta_n^2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|a_m||c_m|}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}\beta_m^2\\ &= \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}\frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|a_mc_m|\beta_m^2\right)\\ &\leq 1\end{aligned}$$

con lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nc_n|\beta_n^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2},$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||c_n|\beta_n^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}.$$

De aquí que $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||c_n|\beta_n^2$ converge pues $a=\{a_n\}$ y $c=\{c_n\}$ son elementos de l_β^2. Luego, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{c_n}\beta_n^2$ es una serie de números complejos absolutamente convergente y como $(\mathbb{C},|\cdot|)$ es un espacio de Banach, esta serie debe converger en el sentido usual. Esto demuestra la proposición. □

Como consecuencia del hecho anterior se obtiene la siguiente proposición, la cual muestra que el espacio ℓ_β^2 presenta un producto interno.

Proposición 2.1.3. *La relación*

$$\langle a,c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{c_n}\beta_n^2, \tag{2.3}$$

con $a=\{a_n\}, c=\{c_n\}\in l_\beta^2$, es un producto interno en ℓ_β^2.

Demostración. Por la proposición anterior, para $a,c\in\ell_\beta^2$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{c_n}\beta_n^2$ es convergente por tal razón, la relación

$$\langle\,,\rangle : \ell_\beta^2\times\ell_\beta^2\to\mathbb{C}$$

dada por $\langle a, c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{c_n} \beta_n^2$ es una función bien definida. Además cumple las siguientes propiedades:

No negatividad. Si $a \in l_\beta^2$, entonces

$$\langle a, a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} \beta_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2,$$

pero como $\beta_n^2 > 0$ ya que se define positivo y $|a_n|^2 \geq 0$ se tiene $|a_n|^2 \beta_n^2 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\langle a, a\rangle \geq 0$.

Unicidad del cero. Si $a \in \ell_\beta^2$ es tal que $\langle a, a\rangle = 0$, entonces por definición se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = 0$$

y como $\beta_n^2 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se obtiene $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, lo cual significa que a es la sucesión nula; es decir, $a = 0$. Ahora bien, si $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que

$$\langle a, a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |0|^2 \beta_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \beta_n^2 = 0.$$

Esto muestra que $\langle a, a\rangle = 0$ si y sólo si $a = 0$.

Linealidad por izquierda. Si $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ y $c = \{c_n\}$ son sucesiones complejas en ℓ_β^2 y $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \lambda a + \rho b, c\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \rho b_n) \overline{c_n} \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n \overline{c_n} + \rho b_n \overline{c_n}) \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n \overline{c_n} \beta_n^2) + (\rho b_n \overline{c_n} \beta_n^2) \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \overline{c_n} \beta_n^2) + \rho \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \overline{c_n} \beta_n^2) \\
&= \lambda \langle a, c\rangle + \rho \langle b, c\rangle,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que todas las series involucradas son convergentes.

Linealidad conjugado por derecha. Si $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ y $c = \{c_n\}$ son sucesiones complejas en ℓ^2_β y $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle a, \lambda b + \rho c\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{\lambda b_n + \rho c_n})\beta_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\overline{\lambda b_n} + a_n\overline{\rho c_n})\beta_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\overline{\lambda b_n}\beta_n^2 + a_n\overline{\rho c_n}\beta_n^2) \\
&= \overline{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\overline{b_n}\beta_n^2) + \overline{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\overline{c_n}\beta_n^2) \\
&= \overline{\lambda}\langle a, b\rangle + \overline{\rho}\langle a, c\rangle,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que todas las series numéricas involucradas son convergentes.

Hermiticidad. Si $a = \{a_n\}$ y $b = \{b_n\}$ son sucesiones complejas en ℓ^2_β entonces

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\beta_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{a_n}b_n}\beta_n^2 \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\overline{a_n}\beta_n^2} \\
&= \overline{\langle b, a\rangle},
\end{aligned}$$

donde se ha usado, las siguientes propiedades de los conjugados de los números complejos: $\overline{\beta_n} = \beta_n$ pues el conjugado de un número real es el mismo número real. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{\overline{z}} = z$; y lo más importante, la función conjugada compleja es continua, es decir si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos tales que $z_n \to z \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z_n} \to \overline{z}$, esta propiedad se usó en la tercera igualdad, por lo tanto todas las series involucradas en esta cadena de igualdades son convergentes. Esto muestra la hermiticidad de la relación (2.3). Se concluye entonces que la relación (2.3) es un producto punto o producto interno para ℓ^2_β. □

Ya que la relación (2.3) es un producto interno para ℓ^2_β, entonces este espacio es normado con la norma dada por

$$\|a\|_\beta := \sqrt{\langle a, a\rangle} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{a_n}\beta_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Todavía más, se tiene que $(\ell^2_\beta, \|\cdot\|_\beta)$ es un espacio métrico completo tal como se muestra en el próximo resultado.

Teorema 2.1.1. *Para β una sucesión de números reales positivos se tiene que el espacio normado $(\ell^2_\beta, \|\cdot\|_\beta)$ es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell^2_\beta, \|\cdot\|_\beta)$, donde $x_n = \{s_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $s_i^n \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por definición de sucesión de Cauchy se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ se satisface $\|x_n - x_m\|_\beta < \epsilon$, pero esto es

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |s_i^n - s_i^m|^2 \beta_i^2\right)^{1/2} < \epsilon.$$

Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ (fijo), se cumple que $|s_i^n - s_i^m|^2\beta_i^2 < \epsilon^2$ siempre que $n, m \geq N$. Pero β_i^2 es un escalar positivo, luego $|s_i^n - s_i^m|^2 < \epsilon^2/\beta_i^2$ para $n, m \geq N$, de aquí que $\{s_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, el cual es un espacio de Banach. Por tal motivo, existe $s_i \in \mathbb{C}$ tal que $|s_i^n - s_i| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Se define ahora la sucesión de números complejos

$$x = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Se debe ver que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, es decir, se debe mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$, para todo $m \geq N_0$ se tiene que $\|x_m - x\|_\beta < \epsilon$, esto es,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |s_i^m - s_i|^2 \beta_i^2 < \epsilon^2.$$

En efecto, sea $\epsilon > 0$ cualquiera y fije $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en $\left(\ell^2_\beta, \|\cdot\|_\beta\right)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} |s_i^m - s_i^n|^2 \beta_i^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |s_i^m - s_i^n|^2 \beta_i^2 < \epsilon^2.$$

siempre que $n, m \geq N$. Luego

$$\sum_{i=0}^{k} |s_i^m - s_i^n|^2 \beta_i^2 < \epsilon^2,$$

siempre que $n, m \geq N$. Ahora, como la suma es finita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} |s_i^m - s_i^n|^2 \beta_i^2 \leq \epsilon^2,$$

para todo $m \geq N$, entonces

$$\sum_{i=0}^{k} \lim_{n\to\infty} |s_i^m - s_i^n|^2 \beta_i^2 \leq \epsilon^2,$$

para todo $m \geq N$. Como el módulo es continuo, entonces

$$\sum_{i=0}^{k} |s_i^m - \lim_{n\to\infty} s_i^n|^2 \beta_i^2 \leq \epsilon^2,$$

para todo $m \geq N$. Y ya que $s_i^n \to s_i$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k} |s_i^m - s_i|^2 \beta_i^2 \leq \epsilon^2,$$

para todo $m \geq N$. Puesto que se cumple para un k arbitrario, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |s_i^m - s_i|^2 \beta_i^2 \leq \epsilon^2$$

siempre que $m \geq N$ lo cual muestra que $\|x_m - x\|_\beta < \epsilon$ siempre que $m \geq N$ y así $x_m \to x$ en $\left(\ell^2_\beta, \|\cdot\|_\beta\right)$.

Por otro lado, se debe mostrar que $x \in l^2_\beta$, es decir

$$\|x\|_\beta = \sum_{i=0}^{\infty} |s_i|^2 \beta_i^2 < \infty.$$

En efecto, para $\epsilon = 1$, como $x_m \to x$ en ℓ^2_β, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{N_0} - x\|_\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \|s_i^{N_0} - s_i\|^2 \beta_i^2 < \epsilon = 1$$

Con un N_0 fijo, y por la desigualdad de Minkowski se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_\beta &= \|x - x_{N_0} + x_{N_0}\|_\beta \\ &\leq \|x - x_{N_0}\|_\beta + \|x_{N_0}\|_\beta \\ &< 1 + \|x_{N_0}\|_\beta < +\infty, \end{aligned}$$

pues $x_{N_0} \in l^2_\beta$ se concluye que $\|x\|_\beta < \infty$, es decir, $x \in \ell^2_b$ □

2.2. Comparación de espacios ℓ^2_β y ejemplos

En la siguiente sección se va a comparar cuando dos espacios ℓ^2_β se encuentran relacionados, es decir, cuando un espacio es igual a otro o si uno esta contenido en el otro. Además se darán algunos ejemplos que ayudan a observar de una manera más clara estas relaciones. A continuación se va a mostrar cuando dos espacios ℓ^2_β esta contenido uno en el otro, para esto se darán los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.2.1. *Sean $\beta_1 = \{\beta_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\beta_2 = \{\beta_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números positivos. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = 0, \tag{2.5}$$

entonces $\ell^2_{\beta_1} \subseteq \ell^2_{\beta_2}$. Todavía más, esta inclusión es continua, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que

$$\|a\|_{\beta_2} \leq L \|a\|_{\beta_1}$$

para toda sucesión $a \in \ell^2_{\beta_1}$.

Demostración. Se supone que la relación (2.5) se cumple, entonces para $\epsilon = 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq k$

$$\left| \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} - 0 \right| < \epsilon = 1.$$

Luego, $|\beta_2(n)| < |\beta_1(n)|$ siempre que $n \geq k$ o lo que es lo mismo,

$$\beta_2(n) < \beta_1(n) \tag{2.6}$$

siempre que $n \geq k$. Todavía más, como las sucesiones β_1 y β_2 son de números positivos, se puede encontrar constantes positivas m y M tales que $\beta_1(n) \geq m$ para todo $n \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ y $\beta_2(n) \leq M$ para todo $n \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$. Por tanto,

$$\frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} \leq \frac{M}{m} = L \tag{2.7}$$

para todo $n \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$. Luego, se ha demostrado que existe una constante $L > 0$ tal que

$$\beta_2(n) \leq L\beta_1(n) \tag{2.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora considere $\{a_n\} \in \ell^2_{\beta_1}$, entonces de la relación (2.8) se tiene que

$$\|a\|^2_{\beta_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_2^2(n) \leq L^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_1^2(n) = L^2 \|a\|^2_{\beta_1} < \infty.$$

Lo cual muestra la inclusión continua de $\ell^2_{\beta_1}$ en $\ell^2_{\beta_2}$. □

Comentario. En general, la inclusión, en el resultado anterior, es estricta. Para ver esto, considere la sucesión β_1 definida por $\beta_1(n) = n$ y la sucesión constante $\beta_2(n) = 1$, entonces claramente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Se considera ahora la sucesión $a = \{a_n\}$ definida por

$$a_n = \frac{1}{\beta_1(n)} = \frac{1}{n}.$$

Entonces $\{a_n\} \in \ell^2_{\beta_2}$ ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_2^2(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\beta_{1(n)}} \right|^2 \beta_2^2(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_1^2(n)} \beta_2^2(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_2^2(n)}{\beta_1^2(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} \right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi}{6} < \infty.
\end{aligned}$$

Pero $\{a_n\} \notin \ell^2_{\beta_1}$ ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_1^2(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\beta_1(n)} \right|^2 \beta_1^2(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_1(n)}{\beta_1(n)} \right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty.
\end{aligned}$$

Esto muestra que, en este caso, $\ell^2_{\beta_1} \subsetneq \ell^2_{\beta_2}$.

Ahora un par de consecuencias.

Corolario 2.2.1. *Sean $\beta_1 = \{\beta_1(n)\}$ y $\beta_2 = \{\beta_2(n)\}$ dos sucesiones de números positivos.*

1. *Si*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = +\infty,$$
entonces $\ell^2_{\beta_2}$ *está continuamente contenido en* $\ell^2_{\beta_1}$ *y en general, esta inclusión es estricta.*

2. *Si existe* $L > 0$ *tal que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = L,$$
entonces los espacios $\ell^2_{\beta_1}$ *y* $\ell^2_{\beta_2}$ *son iguales y las normas* $\|\cdot\|_{\beta_1}$ *y* $\|\cdot\|_{\beta_2}$ *son equivalentes.*

Demostración. Sean $\beta_1 = \{\beta_1(n)\}$ y $\beta_2 = \{\beta_2(n)\}$ dos sucesiones de números positivos. Si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = +\infty,$$
entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_1(n)}{\beta_2(n)} = 0$$
y el resultado del ítem (1) sigue del Teorema 2.5 intercambiando los papeles de β_1 y β_2.

Se supone ahora que existe $L > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} = L.$$
Entonces, para $\epsilon = \frac{1}{2}L > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\left|\frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} - L\right| < \frac{1}{2}L$$
para todo $n \geq N_0$. Por propiedades del valor absoluto
$$-\frac{1}{2}L < \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} - L < \frac{1}{2}L$$
sumando L se tiene que
$$\frac{1}{2}L < \frac{\beta_2(n)}{\beta_1(n)} < \frac{3}{2}L$$
multiplicando por $\beta_1(n) > 0$ se cumple
$$\frac{1}{2}L\beta_1(n) < \beta_2(n) < \frac{3}{2}L\beta_1(n)$$

para todo $n \geq N_0$; mientras que para $n \in \{1, 2, \cdots, N_0 - 1\}$, argumentando como en la demostración del Teorema 2.5, se encuentran constantes positivas m y M tales que

$$m\beta_1(n) \leq \beta_2(2) \leq M\beta_1(n).$$

Lo cual muestra que existen constantes positivas L_1 y L_2 tales que

$$L_1\beta_1(n) \leq \beta_2(2) \leq L_2\beta_1(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Con esta última relación, tal y como se hizo en la demostración del Teorema 2.5, se obtiene que los dos espacios son iguales y que las normas son equivalentes. Esto culmina la demostración del corolario. □

2.3. Funciones Enteras y relación con el espacio ℓ^2_β

En la presente sección se identifica el espacio de las funciones enteras y como estas están relacionadas con el espacio ℓ^2_β mediante algunas condiciones especiales que debe cumplir β. Se recuerda, según el Teorema de Taylor, que una serie de potencias complejas

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

representa una función entera si y solamente si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0, \tag{2.9}$$

es decir, si el radio de convergencia de esta serie de potencia es infinito. El conjunto de las sucesiones complejas $a = \{a_n\}$ que definen funciones enteras se denota por E, es decir, $a = \{a_n\} \in E$ si y sólo si la sucesión a satisface la relación (2.9). Dada una sucesión $\beta = \{\beta_n\}$ de números positivos, es natural preguntarse:

¿Qué relación tienen E y ℓ^2_β?

En el siguiente resultado se establecen las relaciones entre estos dos últimos conjuntos; pero antes, es necesario introducir los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \beta_* &= \liminf_{n\to\infty} (\beta_n)^{1/n} \\ \beta^* &= \limsup_{n\to\infty} (\beta_n)^{1/n}. \end{aligned}$$

Con esta notación, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Se cumple alguno de los siguientes casos.*

1. *$\ell^2_\beta \subsetneq E$ si y sólo si $\beta_* = \infty$.*

2. *$E \subsetneq \ell^2_\beta$ si y sólo si $\beta^* < \infty$.*

3. *$E \setminus \ell^2_\beta \neq \emptyset$ y $\ell^2_\beta \setminus E \neq \emptyset$ si y sólo si $\beta_* < \beta^* = \infty$*

Demostración. (1) Se mostrará primero que $\ell^2_\beta \subsetneq E$ si y sólo si $\beta_* = \infty$. Se supone que $\ell^2_\beta \subsetneq E$, y para $n \in \mathbb{N}$, se define

$$a_n = \frac{1}{n\beta_n}$$

entonces

$$\|a_n\|_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

con lo cual $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$.
Así $\{a_n\} \in E$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}\beta_n^{1/n}} = 0.$$

Luego como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{1/n}} = 1$, se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = +\infty$ por tanto $\beta_* = +\infty$.

Recíprocamente, si $\beta_* = \infty$, entonces $\beta^* = \infty$, con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = \infty.$$

Se va mostrar que $\ell^2_\beta \subseteq E$. Sea $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 < +\infty$$

y en particular $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\beta_n = 0$, luego, sea $\epsilon > 0$ cualquiera y tomando $\hat{\epsilon}$ tal que $\hat{\epsilon} < \text{mín}\{1, \epsilon\}$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que.

1. $(\beta_n)^{1/n} > \frac{1}{\hat{\epsilon}}$ siempre que $n \geq N_1$

2. $|a_n|\beta_n < \hat{\epsilon}$ siempre que $n \geq N_2$

Para $n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se cumple entonces las condiciones anteriores y se puede ver que $|a_n| < \frac{\hat{\epsilon}}{\beta_n}$ por tanto

$$|a_n|^{1/n} < \frac{\hat{\epsilon}^{1/n}}{(\beta_n)^{1/n}} < \hat{\epsilon}^{\frac{1}{n}+1}$$

siempre que $n \geq N$, como $\hat{\epsilon} \leq 1$ entonces $|a_n|^{1/n} < \hat{\epsilon}^{1/n+1} \leq \hat{\epsilon}$, así

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$$

esto es, $\{a_n\} \in E$.

Para ver que la inclusión es propia, se considera $a_n = \frac{1}{\beta_n}$ con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n^{1/n}} = 0$$

y por tanto $\{a_n\} \in E$, pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

esto muestra que $\{a_n\} \notin \ell^2_\beta$, y por tanto $\ell^2_\beta \subsetneq E$.

(2) Ahora se va a mostrar que $E \subsetneq \ell^2_\beta$ si y sólo si $\beta^* < \infty$. Se supone primero que $\beta^* < \infty$. Sea $\{a_n\} \in E$, entonces, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$. Además,

$$\limsup_{n\to\infty} (|a_n|^2 \beta_n^2)^{1/n} = \left(\limsup_{n\to\infty} (|a_n|\beta_n)^{1/n} \right)^2.$$

También

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{n\to\infty} (|a_n|\beta_n)^{1/n} &\leq \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right) \left(\limsup_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} \right) \\ &= \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right) \beta^*. \end{aligned}$$

Se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} (|a_n|^2 \beta_n^2)^{1/n} = 0 < 1,$$

Luego, por el criterio de la raíz, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\beta_n$ es convergente. De acá que $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$.

Para ver que, en general, la inclusión es propia, considere por ejemplo, $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $\beta_n = \frac{1}{n!}$.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

por otro lado

$$\limsup_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$$

con lo cual $\beta^* = 0$. Nótese que $\{a_n\} \in \ell^2_\beta$ pues, como

$$\|a_n\|_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{n!^2}, \tag{2.10}$$

entonces, aplicando el criterio de la razón, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)^4(n+1)!^2}}{\dfrac{1}{n^4n!^2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4n!^2}{(n+1)^4(n+1)!^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{(n+1)^4(n+1)^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n^4)^4(n+1)^2}\\ &= 0<1\end{aligned}$$

con lo cual la serie en (2.10) converge y $\{a_n\}\in\ell^2_\beta$. pero

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2/n}}=1$$

por tanto $\{a_n\}\notin E$, así $\ell^2_\beta\subsetneq E$.

Ahora se va a demostrar el recíproco, suponga que $E\subsetneq\ell^2_\beta$ y que

$$\beta^*=\limsup_{n\to\infty}\beta_n^{\frac{1}{n}}=+\infty.$$

Entonces la sucesión $\{\beta_n\}$ tiene una subsucesión que diverge a $+\infty$. Luego para $m\in\mathbb{N}$ fijo es posible encontrar un subíndice $n_m\in\mathbb{N}$ tal que

$$\beta_{n_m}^{1/n_m}\geq m\Rightarrow\beta_{n_m}\geq m^{n_m}\geq 1.$$

Todavía más, estos subíndices n_m se puede tomar creciente y sin cotas por lo que $\{\beta_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión creciente de $\{\beta_n\}$. Ahora para cada $m\in\mathbb{N}$ se define la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Para $m=1$, se hace

$$a_1=a_2=...=a_{n_1}=\frac{1}{\beta_{n_1}}\leq 1$$

y para $m>1$, se hace

$$a_{n_m+1}=a_{n_m+2}=...=a_{n_{m+1}}=\frac{1}{\beta_{n_{m+1}}}<1. \tag{2.11}$$

Se tiene entonces

- $a_k>0$ para todo $k\in\mathbb{N}$.
- $a_{n_m}=\frac{1}{\beta_{n_m}}$ para todo $m\in\mathbb{N}$.
- $\lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}=0$, es decir, $\{a_k\}\in E$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \epsilon$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_{m_0}$. Existe $m \geq m_0$ tal que

$$n_m + 1 \leq k \leq n_{m+1}$$

con lo cual $a_k = \frac{1}{\beta_{n_{m+1}}}$ (por definición). Además como la función b^x con $b \in (0, 1]$ es decreciente y

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{n_{m+1}},$$

entonces

$$b^{\frac{1}{k}} \leq b^{\frac{1}{n_{m+1}}},$$

Colocando $b = a_k \in (0, 1]$, se obtiene

$$\begin{aligned} |a_k|^{\frac{1}{k}} &= a_k^{\frac{1}{k}} \leq a_k^{\frac{1}{n_{m+1}}} = \beta_{n_{m+1}}^{-\frac{1}{n_{m+1}}} \leq (m+1)^{-1} \\ &< \frac{1}{m_0} \text{ pues } m \geq m_0 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

siempre que $k > n_{m_0}$. Por tanto $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0$.

Esto significa que $a = \{a_k\} \in E$ y como $E \subseteq \ell^2_\beta$, entonces $a = \{a_k\} \in \ell^2_\beta$. En particular, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\beta_n = 0$, pero por la definición de la sucesión $\{a_k\}$ en (4.13), se tiene

$$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}|\beta_{n_k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

Lo cual es una contradicción con (4.13). Por tanto, si $E \subsetneq \ell^2_\beta$ entonces $\beta^* < \infty$.

(3) Ahora se mostrará que $E \setminus \ell^2_\beta \neq \emptyset$ y $\ell^2_\beta \setminus E \neq \emptyset$ si y sólo si $\beta_* < \beta^* = \infty$. Para mostrar este ítem, se negará los numerales (1) y (2) de esté teorema, de (1) se tiene que si:

$$\beta_* < \infty \iff \ell^2_\beta \nsubseteq E;$$

pero esta última condición es equivalente a decir que $\ell^2_\beta \setminus E \neq \emptyset$. Simultáneamente del numeral (2), se tiene que:

$$\beta^* = \infty \iff E \nsubseteq \ell^2_\beta$$

lo cual equivale a decir que $E \setminus \ell^2_\beta \neq \emptyset$. Por tanto $E \setminus \ell^2_\beta \neq \emptyset$ y $\ell^2_\beta \setminus E \neq \emptyset$ si y sólo si $\beta_* < \beta^* = \infty$. Esto muestra el resultado. □

Capítulo 3

Espacios de Hilbert de funciones enteras

En este capítulo se definen los espacios de Hilbert de funciones enteras donde se ha realizado la investigación.

En la primera sección se encontrara el espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$, para la segunda sección se presenta una clasificación para sucesiones de números positivos que se usarán para definir distintos espacios de Hilbert de funciones enteras tales como los espacios E^2_γ,$E^2_\gamma(T)$, $E^2_\gamma(T,\tau)$, $\mathcal{H}(\beta_\rho)$, $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$, $\mathcal{H}(\beta^+_\rho,T)$ y $\mathcal{H}(\beta_E)$, tratando algunos de estos espacios de una manera más profunda y mirando algunas de sus características y propiedades principales.

3.1. El espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$

Del Teorema 2.3.1 ítem (3) se observa que la condición para tener sucesiones de números complejos $\{a_n\}$ que definan funciones enteras que no pertenecen a ℓ^2_β es que $\beta^* = \infty$. De aquí que, para este tipo de sucesiones β, se puede definir una clase de funciones enteras cuyos coeficientes estén en el espacio ℓ^2_β. Más precisamente, en esta sección se introduce la clase que se define a continuación.

Definición 2. Sea $\{\beta_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\beta^* = \infty$. La clase $\mathcal{H}(\beta_E)$ se define como el conjunto de las funciones enteras tales que sus coeficientes están en el espacio ℓ^2_β; es decir,

$$\mathcal{H}(\beta_E) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : a = \{a_n\} \in E \cap \ell^2_\beta \right\} = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n / \|f\|_\beta < \infty \right\}.$$

Claramente, $\mathcal{H}(\beta_E)$ es un subespacio del espacio de las funciones enteras. Como consecuencia de los resultados del capítulo anterior, se puede dotar a $\mathcal{H}(\beta_E)$ de un producto interno que lo convierte en un espacio de Hilbert, ya que ℓ^2_β es un espacio de Hilbert.

De hecho, para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ funciones en el espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ es natural definir

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} \beta_n^2. \tag{3.1}$$

Entonces, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.1.1. *Si $\beta = \{\beta_n\}$ es una sucesión de números positivos, entonces $\mathcal{H}(\beta_E)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido en (3.1).*

La norma para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\beta_E)$ claramente viene dada por

$$\|f\|_\beta := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \beta_k^2 \right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Por tanto $\left(\mathcal{H}(\beta_E), \|\cdot\|_\beta\right)$ es un espacio de Banach de funciones enteras.
Por comodidad de escritura y notación de ahora en adelante se va a denotar $\|f\|_\beta$ por $\|f\|$.

3.2. Una clasificación para sucesiones de números positivos

A fin de poder definir otros espacios de Hilbert de funciones enteras donde se pueda hacer estudios de ciertos operadores lineales, es necesario hacer una clasificación del conjunto de las sucesiones de números reales positivos. En virtud de lo anterior, para cualquier sucesión positiva $\beta = \{\beta_n\}$, se define el real extendido

$$\beta_\rho = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \beta_n}{n \log n},$$

y la función $\mu_\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$\mu_\beta(n) = \frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n}.$$

Con estas notaciones, se definen las siguientes clases de sucesiones de números reales positivos, donde obviamente, β denota una sucesión cualquiera de números positivos que satisface $\beta^* = +\infty$.

- $\mathbf{A} = \{\beta : \beta_* = +\infty\}$
- $\mathbf{B} = \{\beta : \beta_\rho > 0\}$
- $\mathbf{C} = \{\beta : \beta_\rho < +\infty\}$

- $\mathbf{D} = \left\{ \beta : \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \downarrow 0 \text{ es decir, es decreciente y converge a cero } \right\}$
- $\mathbf{G} = \{\beta : \mu_\beta \text{ es acotado } \}$
- $\mathbf{H} = \{\beta : \exists \tau = \tau(\beta) > 0 \text{ tal que } \mu_\beta(n) \downarrow \tau \text{ es decir, es decreciente y converge a } \tau\}$.

Entonces se tiene las siguientes relaciones de las clases de sucesiones previamente definida:

Proposición 3.2.1. *Las siguientes proposiciones son verdaderas (ver Figura 3.1).*

(i) $\boldsymbol{D \subsetneq A}$ *pero* $\boldsymbol{C \nsubseteq A}$.

(ii) $\boldsymbol{D \setminus G \neq \emptyset}$ *y* $\boldsymbol{G \setminus D \neq \emptyset}$.

(iii) $\boldsymbol{G \subsetneq B \subsetneq A}$, *además* $\boldsymbol{B \setminus D \neq \emptyset}$ *y* $\boldsymbol{D \setminus B \neq \emptyset}$.

(iv) $\boldsymbol{H \subsetneq A \cap B \cap C \cap D \cap G = C \cap D \cap G}$.

(v) $\boldsymbol{(C \cap G) \setminus (D \cap G) \neq \emptyset}$ *y* $\boldsymbol{(D \cap G) \setminus (C \cap G) \neq \emptyset}$.

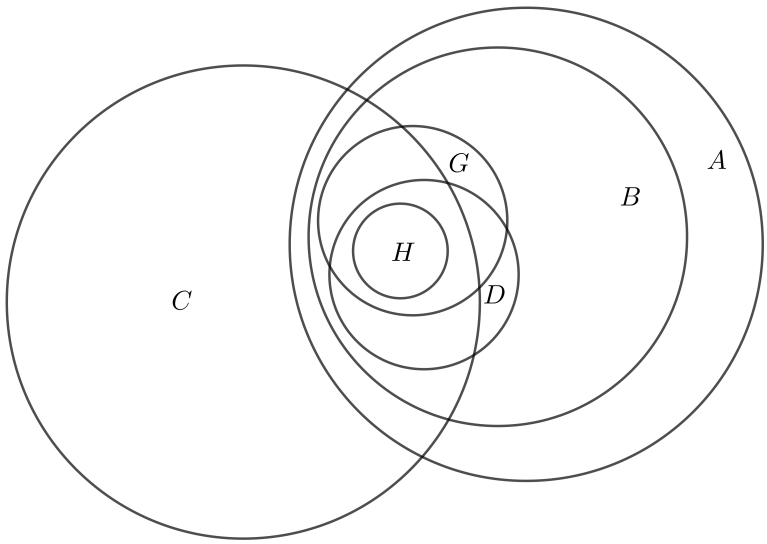


Figura 3.1: Clases de sucesiones

Demostración. (i) $\mathbf{D} \subsetneq \mathbf{A}$ pero $\mathbf{C} \nsubseteq \mathbf{A}$. Vea que $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$. Sea $\beta = \{\beta_n\}$ tal que $\beta \in \mathbf{D}$, esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$

$$\left| \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} - 0 \right| < \epsilon,$$

en particular para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\left|\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}\right| < \frac{1}{2}, \text{ siempre que } n \geq N_1.$$

Como $\beta = \{\beta_n\}$ es una sucesión positiva se tiene que

$$2\beta_{n-1} \ < \ \beta_n,$$

siempre que $n \geq N_1$. De acá que

$$\begin{aligned} 2\beta_{N_1} &< \beta_{N_1+1} \\ 2\beta_{N_1+1} &< \beta_{N_1+2}, \end{aligned}$$

luego

$$2^2\beta_{N_1} < \beta_{N_1+2},$$

en general se tiene que

$$2^{n-N_1}\beta_{N_1} < \beta_n,$$

para todo $n > N_1$. Aplicando límite a ambos lados

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2^{n-N_1}\beta_{N_1} &\leq \lim_{n\to\infty} \beta_n \\ \infty &= \lim_{n\to\infty} \beta_n \end{aligned}$$

por tanto $\beta_n \to \infty$.
Ahora se toma $N_2 > N_1$ tal que $\beta_n > 1$ para todo $n > N_2$ y para cualquier $S > 1$ arbitrariamente grande, se toma N_3 tal que cuando $n \geq N_3$,

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} > S^2 > 1 \tag{3.3}$$

Esto es posible pues $\beta \in \mathbf{D}$ y de la convergencia de $\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \to 0$.
Sea $S > 0$ entonces para $\epsilon = \frac{1}{S^2}$ existe N_3 tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{S^2} &> \left|\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} - 0\right| \\ \frac{1}{S^2} &> \left|\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right| \\ \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} &> S^2 \end{aligned}$$

Sea $N = \text{máx}\{N_2, N_3\}$, entonces $\beta \in \mathbf{A}$ porque para $n > 2N$

$$\beta_n = \beta_N \prod_{p=N}^{n-1} \frac{\beta_{p+1}}{\beta_p} > 1 \cdot S^{2(n-N)} = S^{n+(n-2N)} > S^n,$$

por lo cual se tiene que $\beta_n^{1/n} > S$ luego $\liminf_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = +\infty$, por tanto $\beta \in \mathbf{A}$ así se ha mostrado que $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$.
Ahora se mostrará que la inclusión es propia, es decir, $\mathbf{D} \neq \mathbf{A}$, se toma la siguiente sucesión $\beta^{(1)}$ definida por

$$\beta_n^{(1)} = \begin{cases} n^n, \text{ si } n \text{ es impar,} \\ n^{2n}, \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces $\beta \in \mathbf{A}$, ya que $\beta_*^{(1)} = +\infty$. Si n es par $n = 2k$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\beta_{2k}^{(1)}}{\beta_{2k+1}^{(1)}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^{4k}}{(2k+1)^{2k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{((2k)^2)^{2k}}{(2k+1)(2k+1)^{2k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)^2}{2k+1}\right)^{2k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^{2k}}{2k+1} \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{2k} \\ &= +\infty(1/e) = +\infty. \end{aligned}$$

Si n es impar $n = 2k+1$, luego

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_{2k+1}^{(1)}}{\beta_{2k}^{(1)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)^{2k+1}}{2k^{4k}} = 0,$$

de lo cual $\beta^{(1)} \notin \mathbf{D}$, es decir, $\mathbf{D} \neq \mathbf{A}$, por lo tanto $\mathbf{D} \subsetneq \mathbf{A}$.
Se va a mostrar ahora que $\mathbf{C} \nsubseteq \mathbf{A}$. Sea $\beta_n = 1$ para todo n, claramente $\beta_\rho = 0 < \infty$, es decir, $\beta \in \mathbf{C}$, pero $\beta_* = 1 < \infty$ con lo cual $\beta \notin \mathbf{A}$, esto muestra que $\mathbf{C} \nsubseteq \mathbf{A}$.
En conclusión $\mathbf{D} \subsetneq \mathbf{A}$ pero $\mathbf{C} \nsubseteq \mathbf{A}$.

[(ii)] $\mathbf{D} \setminus \mathbf{G} \neq \emptyset$ y $\mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$. Se quiere ver que $\mathbf{D} \setminus \mathbf{G} \neq \emptyset$. Sea la sucesión $\beta_n^{(2)} = \sqrt{n!}$, ahora se tiene que $\beta^{(2)} \in \mathbf{D}$ ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n^{(2)}}{\beta_{n+1}^{(2)}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n!(n+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pero $\beta^{(2)} \notin \mathbf{G}$, ya que $\mu_{\beta^{(2)}}$ no esta acotado puesto que:

$$\begin{aligned}\mu_{\beta^{(2)}}(n) &= \frac{n\beta^{(2)}_{n-1}}{\beta^{(2)}_n} \\ &= \frac{n\sqrt{(n-1)!}}{\sqrt{n!}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n}\end{aligned}$$

así $\mu_{\beta^{(2)}}$ no esta acodado pues $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Luego $\mathbf{D} \setminus \mathbf{G} \neq \emptyset$.
Se quiere ver que $\mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$, ahora se va a considerar la sucesión $\beta^{(3)}$ tal que

$$\beta^{(3)}_n = \begin{cases} n!, \text{ si } n \text{ es impar,} \\ 2n!, \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La sucesión $\beta^{(3)} \in \mathbf{G}$ ya que, cuando n es par se tiene

$$\begin{aligned}\mu_{\beta^{(3)}}(n) &= \frac{n\beta^{(3)}_{n-1}}{\beta^{(3)}_n} \\ &= \frac{n(n-1)!}{2n!} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y cuando n es impar se tiene

$$\begin{aligned}\mu_{\beta^{(3)}}(n) &= \frac{n\beta^{(3)}_{n-1}}{\beta^{(3)}_n} \\ &= \frac{2n(n-1)!}{n!} \\ &= 2\end{aligned}$$

es decir, $\mu_{\beta^{(3)}}$ es acotado ya que

$$\mu_{\beta^{(3)}}(n) = \begin{cases} 2, \text{ si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2}, \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Con lo cual $\mu_{\beta^{(3)}}$ esta acotado por 2, es decir $\beta^{(3)} \in \mathbf{G}$.
Ahora para mostrar que $\beta^{(3)} \notin \mathbf{D}$ observe que cuando n es par se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\beta^{(3)}_n}{\beta^{(3)}_{n+1}} &= \frac{2n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{n!}\frac{n!}{(n+1)} \\ &= \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

mientras que si n es impar se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n^{(3)}}{\beta_{n+1}^{(3)}} &= \frac{n!}{2(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{2n!(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{\beta_n^{(3)}}{\beta_{n+1}^{(3)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)}, \text{ si } n \text{ es impar}, \\ \dfrac{2}{(n+1)}, \text{ si } n \text{ es par}, \end{cases}$$

pero $\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}$ no es decreciente pues:

$$\frac{\beta_1^{(3)}}{\beta_2^{(3)}} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{\beta_2^{(3)}}{\beta_3^{(3)}} = \frac{2}{3},$$

con lo cual, $\frac{\beta_2^{(3)}}{\beta_3^{(3)}} > \frac{\beta_1^{(3)}}{\beta_2^{(3)}}$ luego $\beta_n \notin \mathbf{D}$, es decir $\mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$. Por tanto $\mathbf{D} \setminus \mathbf{G} \neq \emptyset$ y $\mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$.

[(iii)] $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$, además $\mathbf{B} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$ y $\mathbf{D} \setminus \mathbf{B} \neq \emptyset$.
Se va a mostrar que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Sea $\beta \in \mathbf{B}$, entonces $\beta_\rho = \lim\inf_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} > 0$, luego existe $c > 0$, tal que $\frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} > c$. Esto es,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\frac{\log(\beta_n)}{\log(n)} &> c \\ \frac{1}{n}\log_n(\beta_n) &> c \\ \log_n(\beta_n^{1/n}) &> c \\ \beta_n^{1/n} &> n^c \\ \lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} &\geq \lim_{n\to\infty} n^c \to \infty,\end{aligned}$$

es decir $\beta \in \mathbf{A}$, con lo cual $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

Por otra parte para mostrar que la contenencia es estricta, se toma $\beta^{(4)} : \beta_0^{(4)} = \beta_1^{(4)} =$

$\beta_2^{(4)} = 1$ y $\beta_n^{(4)} = (\log(n))^n$ para $n \geq 3$, entonces $\beta_*^{(4)} = +\infty$, pero $\beta_\rho^{(4)} = 0$, ya que

$$\begin{aligned}
\beta_\rho^{(4)} &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n^{(4)})}{n\log(n)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\log(n)^n)}{n\log(n)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{n\log(\log(n))}{n\log(n)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\log(n))}{\log(n)}
\end{aligned}$$

se toma $u = \log(n)$ y aplicando L'Hopital

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(u)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{u}}{1} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0 \tag{3.4}$$

entonces $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$.
Para mostrar que $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{B}$, sea $\beta \in \mathbf{G}$, entonces existe $S > 0$ tal que $\mu_\beta(n) < S$ para todo n, luego, como

$$\begin{aligned}
\mu_\beta(n) &= \frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n} \\
S &> \frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n} \\
\beta_n = \frac{n\beta_{n-1}}{\mu_\beta(n)} &> \frac{n\beta_{n-1}}{S}
\end{aligned}$$

así

$$\beta_n > \frac{n\beta_{n-1}}{S} > \frac{n(n-1)\beta_{n-2}}{S^2} > \cdots > \frac{n!\beta_0}{S^n}.$$

Además, como $n! \geq n^{n/2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} &> \frac{\log\left(\frac{n!\beta_0}{S^n}\right)}{n\log(n)} = \frac{\log(n!\beta_0) - \log(S^n)}{n\log(n)} = \frac{\log(n!) + \log(\beta_0) - \log(S^n)}{n\log(n)} \\
&= \frac{\log(n!) + \log(\beta_0) - n\log(S)}{n\log(n)} \geq \frac{\log(n^{n/2}) + \log(\beta_0) - n\log(S)}{n\log(n)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\log(n) + \log(\beta_0) - n\log(S)}{n\log(n)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\log(n)}{n\log(n)} + \frac{\log(\beta_0)}{n\log(n)} - \frac{n\log(S)}{n\log(n)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{k}{n\log(n)} - \frac{g}{\log(n)}.
\end{aligned}$$

De aquí que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} > \frac{1}{2}$, por tanto $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} > \frac{1}{2}$, esto es, $\beta \in \mathbf{B}$, es decir, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{B}$.

Para ver que la inclusión es propia, considere la sucesión:

$$\beta^{(1)}(n) = \begin{cases} n^n, \text{ si } n \text{ es impar,} \\ n^{2n}, \text{ si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

se calculará ahora $\beta_\rho^{(1)}$.
Cuando n es impar se tiene

$$\begin{aligned} \beta_\rho^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^n)}{n\log(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{n\log(n)}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mientras que cuando n es par,

$$\begin{aligned} \beta_\rho^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^{2n})}{n\log(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\log(n)}{n\log(n)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\beta_\rho^{(1)} = 1$ de lo cual $\beta \in \mathbf{B}$.
Ahora para mostrar que $\mathbf{G} \neq \mathbf{B}$. Se calcula $\mu_\beta(2n+1)$

$$\begin{aligned} \mu_\beta(2n+1) &= \frac{(2n+1)2n^{2(2n)}}{(2n+1)^{2n+1}} \\ &= \frac{2n^{2(2n)}}{(2n+1)^{2n}} \\ &= \left(\frac{4n^2}{2n+1}\right)^{2n} \end{aligned}$$

el cual no es acotado ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2}{2n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n}} (2n)^{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} (2n)^{2n} \\ &= \frac{1}{e}(\infty) \\ &= \infty \end{aligned}$$

de acá que $\beta \notin \mathbf{G}$. Por tanto $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{B}$.

Para mostrar que $\mathbf{D} \setminus \mathbf{B} \neq \emptyset$, se tiene que $\beta^{(4)} \in \mathbf{D}$ ya que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \log(n) \leq \log(n+1) \quad \text{para } n \geq 3 \\ 0 &\leq \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \leq 1 \\ 0 &\leq \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n \leq 1 \\ 0 &\leq \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n \frac{1}{\log(n)} \leq \frac{1}{\log(n)}, \end{aligned}$$

pero al aplicar el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n \frac{1}{\log(n)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} \\ 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n \frac{1}{\log(n)} \leq 0, \end{aligned}$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n \frac{1}{\log(n)} = 0.$$

Entonces $\beta^{(4)} \in \mathbf{D}$, pero ya se mostró que $\beta^{(4)} \notin \mathbf{B}$ por (3.4). Luego $\mathbf{D} \setminus \mathbf{B} \neq \emptyset$.
Para mostrar que $\mathbf{B} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$, por la Proposición 3.2.1 ítem (ii) se tiene que $\mathbf{G} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$, y como $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$.
En conclusión $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$, además $\mathbf{B} \setminus \mathbf{D} \neq \emptyset$ y $\mathbf{D} \setminus \mathbf{B} \neq \emptyset$.

[(iv)] $\mathbf{H} \subsetneq \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{D} \cap \mathbf{G} = \mathbf{C} \cap \mathbf{D} \cap \mathbf{G}$.
Sea $\beta \in \mathbf{H}$, como $\mu_\beta(n)$ es convergente, entonces esta acotada. Por hipótesis $\mu_\beta(n) \downarrow \tau > 0$ se tiene que

$$\frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n} > \frac{(n+1)\beta_n}{\beta_{n+1}}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} &> \frac{(n+1)\beta_n}{n\beta_{n+1}} \\ &= \frac{n\beta_n}{n\beta_{n+1}} + \frac{\beta_n}{n\beta_{n+1}} \\ &= \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} + \frac{\beta_n}{n\beta_{n+1}} \\ &> \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \end{aligned}$$

de lo cual

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} < \frac{n\beta_{n-1}}{(n+1)\beta_n} < \frac{n(n-1)\beta_{n-2}}{(n+1)n\beta_{n-1}} < \frac{n(n-1)(n-2)\beta_{n-3}}{(n+1)n(n-1)\beta_{n-2}} < \cdots < \frac{\beta_0}{(n+1)\beta_1}$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_0}{(n+1)\beta_1} = 0,$$

de esto se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} = 0$ entonces $\beta \in \mathbf{D}$.
Ahora como $n! \leq n^n$ y $\mu_\beta(n) \downarrow \tau$ para todo n

$$\begin{aligned} \frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n} - \tau &> 0 \\ n\beta_{n-1} &> \tau\beta_n \\ \frac{n\beta_{n-1}}{\tau} &> \beta_n \end{aligned}$$

para el término $\mu_\beta(n-1)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)\beta_{n-2}}{\beta_{(n-1)}} - \tau &> 0 \\ (n-1)\beta_{n-2} &> \tau\beta_{(n-1)} \\ \frac{(n-1)\beta_{n-2}}{\tau} &> \beta_{(n-1)} \end{aligned}$$

de acá multiplicando por $\frac{n}{\tau}$

$$\frac{n(n-1)\beta_{n-2}}{\tau^2} > \frac{n\beta_{n-1}}{\tau} > \beta_n$$

así

$$\beta_n < \frac{n\beta_{(n-1)}}{\tau} < \cdots < \frac{n!\beta_0}{\tau^n}.$$

Esto implica que

$$\frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} < \frac{\log(\frac{n!\beta_0}{\tau^n})}{n\log(n)},$$

así

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} &< \lim_{n\to\infty}\frac{\log(\frac{n!\beta_0}{\tau^n})}{n\log(n)}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\log(\frac{n^n\beta_0}{\tau^n})}{n\log(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^n)+\log(\beta_0)-\log(\tau^n)}{n\log(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\log(n)}{n\log(n)}+\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\beta_0)}{n\log(n)}-\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\tau^n)}{n\log(n)}\\ &= 1,\end{aligned}$$

entonces $\beta_\rho = 1 < +\infty$, es decir, $\beta \in \mathbf{C}$.
Como $\beta \in \mathbf{H}$, esto es que $\mu_\beta(n) \downarrow \tau > 0$, es decir, que μ_β es acotado, luego $\beta \in \mathbf{G}$, también $\beta \in \mathbf{D}$ y $\beta \in \mathbf{C}$, con lo cual $\beta \in \mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$ ahora por la Proposición 3.2.1 ítem (iii), se tiene que $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$, por tanto $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G} = \mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$,con lo cual $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$.
Ahora se muestra que la inclusión es propia, sea $\beta^{(5)}$ definido por $\beta_0^{(5)} = 1, \beta_n^{(5)} = n^{2n}$ para $n > 0$. Mire que $\beta^{(5)} \in \mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$. En efecto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^{2n})}{n\log(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\log(n)}{n\log(n)} = 2.$$

Así $\beta^{(5)} \in \mathbf{C}$. Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n^{(5)}}{\beta_{n+1}^{(5)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{1}{e^2}(0) = 0\end{aligned}$$

además es decreciente ya que

$$\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} < \frac{(n-1)^{2(n-1)}}{n^{2n}}$$

así $\beta^{(5)} \in \mathbf{D}$.
Ahora se tiene que

$$\begin{aligned}\mu_{\beta^{(5)}}(n) &= \frac{n\left((n-1)^{2(n-1)}\right)}{n^{2n}}\\ &= \frac{n(n-1)^{2n}(n-1)^{-2}}{n^{2n}}\\ &= \frac{n}{(n-1)^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Ahora aplicando límite se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mu_{\beta^{(5)}}(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n-1)^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n-1)^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\\ &= 0\left(\frac{1}{e^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto μ_β es acotada y $\beta^{(5)}\in\mathbf{G}$, pero como $\mu_\beta\downarrow 0$ entonces $\beta^{(5)}\notin\mathbf{H}$.
Por tanto $\mathbf{H}\subsetneq\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}=\mathbf{C}\cap\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$.

[(v)]$(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$ y $(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$.
Sea

$$\beta_n^{(3)}=\begin{cases} n! \text{ si } n \text{ es impar}\\ 2n! \text{ si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Por el ítem (ii), se tiene que $\beta_n^{(3)}\notin\mathbf{D}$ por tanto $\beta_n^{(3)}\notin\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$. $\beta_n^{(3)}\in\mathbf{G}$ por el ítem (ii), ahora

$$\beta_\rho^{(3)}=\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log(n)}<\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(n^n)}{n\log(n)}=\liminf_{n\to\infty}\frac{n\log(n)}{n\log(n)}=1$$

así, $\beta_\rho^{(3)}<\infty$, por tanto $\beta_n^{(3)}\in\mathbf{C}$.
Se concluye que $\beta_n^{(3)}\in\mathbf{C}\cap\mathbf{G}$ y $\beta\notin\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$ así $(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$.
Se mostrará que $(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$. Sea $\beta^{(6)}=n^{n^2}$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n^{(6)}}{\beta_{n+1}^{(6)}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}}\right)^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)}\right)^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n\frac{1}{(n+1)}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

entonces $\beta^{(6)}\in\mathbf{D}$. Ahora se cumple que

$$\begin{aligned}\mu_{\beta^{(6)}} &= \frac{n(n-1)^{2(n-1)}}{n^{2n}}\\ &= \frac{(n-1)^{2(n-1)}}{n^{2n-1}}\\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2}\cdot\frac{1}{n}\end{aligned}$$

aplicando límite se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mu_{\beta^{(6)}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto $\mu_{\beta^{(6)}}$ es acotado y $\beta^{(6)}\in\mathbf{G}$, es decir, $\beta^{(6)}\in\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$.
Por otro lado $\beta^{(6)}\notin\mathbf{C}$ ya que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^{n^2})}{n\log(n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log(n)}{n\log(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty} n\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Así $\beta\in\mathbf{D}\cap\mathbf{G}$ y $\beta\notin\mathbf{C}\cap\mathbf{G}$ es decir $(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$.
Por tanto se cumple que $(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$ y $(\mathbf{D}\cap\mathbf{G})\setminus(\mathbf{C}\cap\mathbf{G})\neq\emptyset$. □

3.3. Tipos de espacios de Hilbert de funciones enteras

Usando la Proposición 3.2.1, se pueden definir diferentes tipos de espacios de Hilbert de funciones enteras. Uno de esos espacios, es el espacio E^2_γ que se define como:

$$E^2_\gamma=\left\{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \text{ entera: } \|f\|_\gamma:=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\gamma_n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\},$$

donde $\gamma=\{\gamma_n\}$ es una sucesión de números reales positivos. Claramente E^2_γ es un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ con $\beta=\{\beta_n\}=\{\gamma_n^{-1}\}\in\mathbf{D}$. Este espacio de Hilbert E^2_γ fue introducido por Chan and Shapiro [3] en el artículo "The cyclic behaviour of translation operators on Hilbert spaces of entire functions" en 1991, cuando los autores estudiaban la ciclicidad de los operadores de traslación actuando en algunos espacios de Hilbert de funciones enteras.
Uno de los resultados notables de Chan and Shapiro [3] en su artículo dice que si $\frac{n\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\downarrow\tau$ para algún $\tau>0$, entonces existe $f\in E^2_\gamma$ de orden 1 y tipo $\sigma<\tau$. Además cualquier operador de traslación $T_b: f(z)\to f(z+b); (b\in\mathbb{C})$ actuando en este espacio es acotado.
De esta observación los autores Chacón et al. [2] en el artículo " Composition operators on spaces of entire functions" en el 2007, definieron el operador composición C_φ

actuando en los espacios E^2_γ con $\frac{n\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \downarrow \tau > 0$ [el cual se denota por $E^2_\gamma(T,\tau)$], y se obtiene el criterio de acotación y compacidad para estos operadores.
Según los valores de β, se definen varias subclases de $\mathcal{H}(\beta_E)$ como (ver Figura 3.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\beta_\rho), &\text{ si } \beta \in \mathbf{B};\\ \mathcal{H}(\beta^+_\rho), &\text{ si } \beta \in \mathbf{B}\cap\mathbf{C};\\ \mathcal{H}(\beta^+_\rho, T), &\text{ si } \beta \in \mathbf{C}\cap\mathbf{G};\\ E^2_\gamma(T), &\text{ si } \beta \in \mathbf{D}\cap\mathbf{G};\\ E^2_\gamma(T,\tau), &\text{ si } \beta \in \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Se estudian los espacios $\mathcal{H}(\beta_\rho)$, $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$, $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$ y $E^2_\gamma(T)$ en las siguientes secciones.

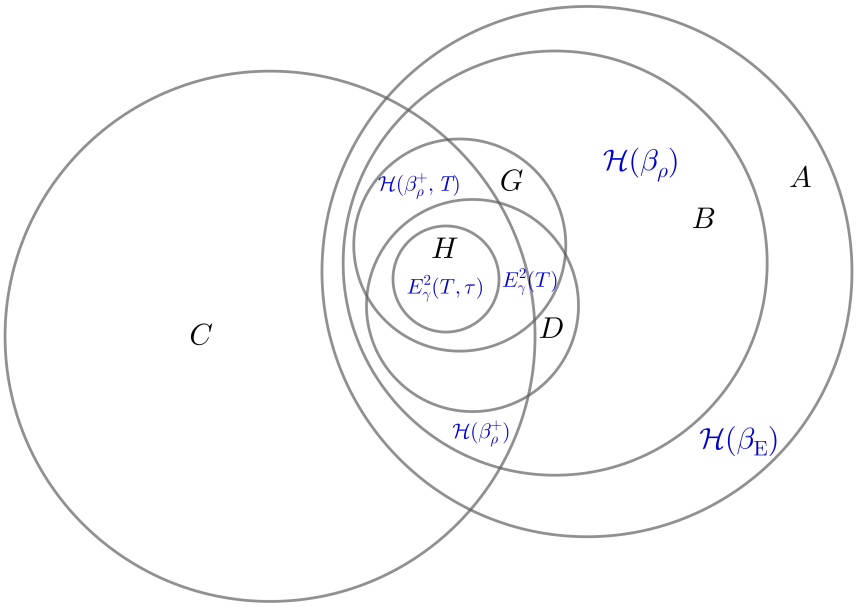


Figura 3.2: Subclases de $\mathcal{H}(\beta_E)$

3.3.1. Espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$

Una de las características principales de una función entera es su orden de crecimiento. Se recuerda que una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene orden finito ρ si y sólo si

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{-n\log(n)}{\log|a_n|} < \infty$$

se considera las dos propiedades:

(P_1) Toda función $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden finito.

(P_2) Existe $g \in \mathcal{H}(\beta_E)$ que tiene un orden no nulo.

Con estas dos propiedades se obtienen los siguientes resultados, para la propiedad (P_1) se tiene que

Teorema 3.3.1. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ tiene la propiedad (P_1) si y sólo si este es inducido por $\beta \in \boldsymbol{B}$.*

Demostración. Suponga que toda función en $\mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden finito, pero $\beta_\rho = 0$, esto es que existe una subsucesión β_{n_k} que cumple que para todo $k = 1, 2, 3, ...,$

$$\frac{\log(\beta_{n_k})}{n_k \log n_k} < \frac{1}{k}.$$

Esto pues $\beta_\rho = 0$ lo que significa que para todo $\epsilon > 0$ existe k tal que para todo $n \geq k$

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{\log(\beta_n)}{n \log(n)} - 0 \right| < \frac{1}{k}$$

esto para cualquier k así se puede hallar una subsucesión β_{n_k} que cumple

$$\frac{\log(\beta_{n_k})}{n_k \log n_k} < \frac{1}{k} \text{ entonces } k \log(\beta_{n_k}) < n_k \log n_k$$

entonces se toma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con (a_n) como sigue

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n\beta_n} \text{ si } n \text{ es impar} \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

De esto

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k+1}|^2 \beta_{2k+1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n_{2k+1}\beta_{2k+1}} \right|^2 \beta_{2k+1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < +\infty \end{aligned}$$

y como para $n_k = 2k + 1$ se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} (\beta_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} = +\infty$$

pues $\beta_* = +\infty$ se tiene que toda subsucesión diverge, es decir, $(\beta_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} \to \infty$. Ahora observe que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^{\frac{1}{n_k}} \beta_{n_k}^{\frac{1}{n_k}}} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\beta_{n_k}^{\frac{1}{n_k}}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\beta_{n_k}^{\frac{1}{n_k}}} = 0
\end{aligned}$$

por tanto como $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 < \infty$ entonces $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$. Pero entonces,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{-n_k \log(n_k)}{\log(|a_n|)} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{-n_k \log(n_k)}{\log(\frac{1}{n_k \beta_{n_k}})} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{-n_k \log(n_k)}{\log(1) - \log(n_k \beta_{n_k})} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{-n_k \log(n_k)}{-\log(n_k \beta_{n_k})} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{n_k \log(n_k)}{\log(n_k \beta_{n_k})} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{n_k \log(n_k)}{\log(n_k) + \log(\beta_{n_k})} \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{n_k \log(n_k)}{\log(n_k) + \frac{n_k \log_{n_k}}{k}} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{1 + \frac{n_k}{k}} \right) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k n_k}{k + n_k} \right) = \infty
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con que f tenga orden finito.

Ahora se supone que $\beta \in \mathbf{B}$, como $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$ este induce un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$.

Suponga $\beta_\rho > 0$ pero que existe $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no tiene orden finito en $\mathcal{H}(\beta_E)$.

Se puede tomar una subsucesión a_{n_k} tal que $|a_{n_k}| < 1$ como $\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{-n \log(n)}{\log(|a_n|)} =$

∞ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{-n_k \log(n_k)}{\log(|a_{n_k}|)} &> k \\
\frac{-n_k}{k} \log(n_k) &< \log(|a_{n_k}|) \\
\log(n_k^{\frac{-n_k}{k}}) &< \log(|a_{n_k}|) \\
n_k^{\frac{-n_k}{k}} &< |a_{n_k}|. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

De la hipótesis $\beta_\rho > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} > 0$$

por tanto, existe $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} &> c \\
\log(\beta_n) &> c\log(n^n) \\
\log(\beta_n) &> \log(n^{cn}) \\
\beta_n &> n^{cn}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ahora, por propiedad Arquimediana existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $kc > 1$ para toda $k > K$, entonces, usando (3.5) y (3.6) para los valores n_k

$$\begin{aligned}
|a_{n_k}|\beta_{n_k} &> n_k^{cn_k} n_k^{-\frac{n_k}{k}} \\
&> n_k^{cn_k - \frac{n_k}{k}} \\
&= n_k^{n_k(c-\frac{1}{k})} \\
&= n_k^{n_k} n_k^{(c-\frac{1}{k})} \\
&> 1
\end{aligned}$$

así $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \infty$ pero esto contradice que $\|f\| < +\infty$ □

Ahora se puede enunciar y demostrar el siguiente resultado para la propiedad (P_2), el cual es de gran utilidad para este trabajo

Teorema 3.3.2. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ tiene la propiedad (P_2) si y sólo si este es inducido por $\beta \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$.*

Demostración. Observe que β induce un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ si y sólo si $\beta \in \mathbf{A}$, ya que si $\beta \in \mathbf{A}$ esto quiere decir que $\beta^* = +\infty$ lo cual induce un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ según la definición, y además si β induce un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ por definición $\beta_* = +\infty$ es decir $\beta \in \mathbf{A}$.
Ahora solo se debe mostrar que $\mathcal{H}(\beta_E)$ tiene la propiedad (P_2) si y sólo si $\beta \in \mathbf{C}$. Se supone que $\beta_\rho = +\infty$, es decir,

$$\beta_\rho = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\beta_n)}{n\log(n)} = \infty,$$

de aquí que para n suficientemente grande, $\beta_n > n^n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} n^n = \infty$.
Ahora para cualquier $(a_n) \in \ell_2^\beta$ que induce una serie de potencias $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$, existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|\beta_n < 1$ para todo $n > N$ de acá se tiene que

$$\log(\beta_n) < \log\left(\frac{1}{|a_n|}\right),$$

es decir

$$\frac{1}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} < \frac{1}{\log(\beta_n)},$$

multiplicando por $n\log(n)$ se tiene que

$$\frac{n\log(n)}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} < \frac{n\log(n)}{\log(\beta_n)},$$

pero como $\beta_\rho = +\infty$ entonces se tiene que $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log(n)}{\log(\beta_n)} = 0$, por esto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log(\beta_n)} = 0,$$

de acá que cualquier $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden 0 (cero). Por otro lado, se supone que $\beta_\rho < +\infty$, entonces existe $c > 0$ y una subsucesión (β_{n_k}) con $k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{\log(\beta_{n_k})}{n_k\log(n_k)} < c$.
Se toma (a_n) como

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n\beta_n} & \text{si } n = n_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|^2\,\beta_{n_k}^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k^2}\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < +\infty,\end{aligned}$$

por tanto la serie converge y $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$.
De acá que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{n\log(n)}{-\log(a_n)} &= \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k\log(n_k)}{-\log(\frac{1}{n_k\beta_{n_k}})}\\ &= \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k\log(n_k)}{\log(n_k\beta_{n_k})},\end{aligned}$$

pero como

$$\begin{aligned}\frac{\log(\beta_{n_k})}{n_k\log(n_k)} &< c\\ \log(\beta_{n_k}) &< c(n_k\log(n_k))\\ \log(\beta_{n_k})+\log(n_k) &< c(n_k\log(n_k))+\log(n_k)\\ \log(\beta_{n_k}n_k) &< \log(n_k)(cn_k+1),\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{1}{\log(n_k)(cn_k+1)} < \frac{1}{\log(\beta_{n_k}n_k)},$$

luego

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\frac{n_k\log(n_k)}{\log(n_k\beta_{n_k})} &\geq \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k\log(n_k)}{\log(n_k)(cn_k+1)}\\ &= \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k}{cn_k+1}\\ &= \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k}{cn_k}\\ &= \frac{1}{c} > 0.\end{aligned}$$

Entonces la serie de potencias inducida por esta sucesión es de orden distinto de 0 (cero). □

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.1. *Exactamente uno de los siguientes casos alternativos pasan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ inducido por β.*

i) Toda función $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden cero si y sólo si $\beta_\rho = +\infty$ es decir $\beta \in \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{C}$.

ii) Existe una función $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ que no tiene orden finito si y sólo si $\beta_\rho = 0$ es decir $\beta \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{B}$.

iii) Toda $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden finito y existe $g \in \mathcal{H}(\beta_E)$ que tiene orden positivo si y sólo si $\beta_\rho \in (0, +\infty)$ es decir $\beta \in \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$

Demostración.

i) Del teorema anterior se tiene que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ es inducido por $\beta \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$ si y sólo si tiene la propiedad (P_2), es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\beta_E)$ que tiene orden distinto de cero. Si se niega esta proposición se tiene que toda función $g \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden cero si y sólo si $\beta \notin \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$, pero $\mathcal{H}(\beta_E)$ no tiene la propiedad $(P2)$ si y sólo si $\beta \notin \mathbf{C}$, y por el Teorema 3.3.1 se tiene que $\beta \in \mathbf{B}$ ya que β tiene orden finito. Por tanto $\beta \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$, es decir, $\beta_\rho = +\infty$.

ii) Del Teorema 3.3.1 se tiene que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ tiene la propiedad (P_1), es decir, toda función $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ tiene orden finito si y sólo si este es inducido por $\beta \in \mathbf{B}$. Si se niega esta proposición se tiene que existe una función $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ con orden infinito si y sólo si el espacio esta inducido por $\beta \notin \mathbf{B}$, pero esto significa que cumple la propiedad $P(2)$ y por el Teorema 3.3.2 tiene que $\beta \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$, en particular $\beta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{B}$, es decir, $\beta_\rho = 0$.

iii) Del Teorema 3.3.1 y Teorema 3.3.2 se sabe que en un espacio de Hilbert toda función $f \in \mathcal{H}(\beta_\mathcal{E})$ tiene orden finito si y sólo si es inducido por $\beta \in \mathbf{B}$ y que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_\mathcal{E})$ existe $g \in \mathcal{H}(\beta_\mathcal{E})$ con orden distinto de cero si y sólo si este es inducido por $\beta \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$. Uniendo estas dos proposiciones se obtiene que toda función f tiene orden finito y existe g que tiene orden positivo si y sólo si $\mathcal{H}(\beta_\mathcal{E})$ es inducido por $\beta \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$.

Es decir, $\beta_\rho \in (0, \infty)$. □

Por el colorario anterior se tiene que un espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ es un espacio de Hilbert de funciones enteras de orden finito, mientras un espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ es un espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ que tiene al menos una función de orden positivo. Por lo tanto, $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ es un caso especial de $\mathcal{H}(\beta_E)$, $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ es un caso especial de $\mathcal{H}(\beta_\rho)$ y $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ es un caso especial de $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$.

Nota. Es claro que cualquier espacio $E_\gamma^2(T, \tau)$ es un espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$, y cualquier espacio F_α^2 es un espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ con $\beta_n = \sqrt{\alpha^{-n} n!}$. Entonces ambos $E_\gamma^2(T, \tau)$ y F_α^2 pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$. Sin embargo, mientras $E_\gamma^2(T, \tau)$ también pertenece a la subclase $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$, no es cierto para F_α^2 (como $\mu_\beta(n) = \sqrt{\alpha n} \uparrow +\infty$).

3.3.2. Espacios $E^2_\gamma(T,\tau)$ Y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$

En el desarrollo de esta sección se presentaran los espacios $E^2_\gamma(T,\tau)$ y $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$, donde se mencionan sus particularidades, propiedades principales, relaciones entre estos espacios y los espacios que se trataron anteriormente, también se define al operador derivada, y además se establece propiedades importantes con el operador traslación T_b, el cual se define por $T_b f(z) = f(z+b)$, siendo f una función entera. Se finaliza la sección con un diagrama de exclusiones e inclusiones entre los diferentes tipos de espacios.

Nota. Siempre que $\beta \in \mathbf{A}$, para toda $(a_n) \in \ell^2_\beta$, la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ pero el Teorema 2.3.1. Entonces, para todo $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n w^{n-k} \right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n w^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} f^{(k)}(w). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, define $h_n(z) = \beta_n^{-1} z^n$. Claramente, $h_n \in \mathcal{H}(\beta_E)$ y tiene norma $\|h_n\| = 1$ y orden de crecimiento cero. la sucesión (h_n) forman una base ortonormal para $\mathcal{H}(\beta_E)$ y es crucial para el estudio de $\mathcal{H}(\beta_E)$ y sus operadores de composición .
La clase $E^2_\gamma(T)$ fue presentada por Chan and Shapiro [3] cuando el autor investigaba el comportamiento cíclico de los operadores de traslación.
Se ha de destacar que para un espacio $E^2_\gamma(T)$ cualquier operador $T_b (b \in \mathbb{C})$ actuando sobre este es acotado. Con una apropiada modificación, la condición $\beta \in \mathbf{D}$ puede ser omitida y los siguientes resultados, los cuales generalizan el resultado correspondiente en Chan and Shapiro [3], todavía se mantienen.

Proposición 3.3.1. *Sea D el operador derivada actuando en un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ es decir $D(f) = f'$, $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$ y $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Los siguientes resultado son equivalentes:*

i) D es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$.

ii) El operador traslación T_b es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$.

iii) La función μ_β es acotada.

Demostración.

- Se quiere ver que si D es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$ entonces el operador traslación T_b es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$. Suponga que D es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|D(f)\| \leq M\|f\|,$$

pues se tiene ya que $\|f\| < \infty$ y de la acotación de $D(f)$. La nota anterior muestra que

$$f(z+b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} f^k(z),$$

entonces

$$T_b(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} D^k(f)$$

de donde,

$$\|T_b(f)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \|D^k(f)\|$$

por la desigualdad triangular

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \|D^k(f)\| \leq \|f\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} M^k = \|f\| e^{M|b|}$$

- Se mostrará que si el operador traslación T_b es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$ entonces la función μ_β es acotada. Suponga que el operador traslación T_b es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$ entonces existe $M > 0$ tal que $\|T_b(f)\| \leq M\|f\|$, para todo $f \in \mathcal{H}(\beta_E)$. En particular para $f = h_n$, se tiene que $\|T_b(h_n)\| \leq M$ con $h_n(z) = \beta_n^{-1} z^n$ de donde

$$\begin{aligned} T_b(h_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} D^k(\beta_n^{-1} z^n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{z^{n-k}}{\beta_n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b^k \binom{n}{k} \frac{z^{n-k}}{\beta_n} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|T_b(h_n)\| &= \sum_{k=0}^{n} \left| b^k \binom{n}{k} \frac{1}{\beta_n} \right|^2 \beta_n^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} |b|^{2k} \binom{n}{k}^2 \frac{\beta_{n-k}^2}{b_n^2} \leq M^2 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} |b|^2 \mu_\beta(n)^2 &\leq M^2 \\ \mu_\beta(n)^2 &\leq \frac{M}{|b|}. \end{aligned}$$

Por tanto μ_β es acotada.

- Se nota que si la función μ_β es acotada entonces D es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$. Suponga que la función μ_β es acotada entonces existe $M > 0$ tal que $\mu_\beta(n) \leq M$ para todo $n \geq 0$, para cualquier $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\beta_E)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|D(f)\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n n|^2 \beta_{n-1}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \beta_{n-1}^2 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \beta_n^2 \mu_\beta(n)^2 &= \left(n \frac{\beta_{(n-1)}}{\beta_n} \right)^2 \beta_n^2 \\ &= n^2 \frac{\beta_{(n-1)}^2}{\beta_n^2} \beta_n^2 \\ &= n^2 \beta_{(n-1)}^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|D(f)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 \mu_\beta(n)^2 \\ &\leq M^2 \|f\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M^2 |a_n|^2 \beta_n^2 \end{aligned}$$

pues $\mu_\beta(n)^2 \leq M^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 \mu_\beta(n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 M^2$ y como $M^2 \|f\|^2 < \infty$. Por tanto $D(f)$ es acotado.

□

Cabe destacar que por la Proposición 3.3.1, se sigue que

$$\|D\|_{op} = \sup\{\mu_\beta(n), n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.7}$$

donde la notación $\|\cdot\|_{op}$ denota la norma del operador. Esta norma será de gran ayuda para el siguiente capítulo en la sección de norma esencial y compacidad. En la siguiente proposición se va a establecer como actúa el operador derivada en un espacio de Hilbert de funciones enteras.

Proposición 3.3.2. *El operador derivada D actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ es compacto si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$

Demostración. Para mostrar esta proposición se hace uso del siguiente resultado " Un operador lineal L actuando en un espacio de Hilbert H es compacto si sólo si para todo (x_n) que converge a cero débilmente, $(L(x_n))$ converge a cero fuertemente".
Se mostrará ahora en base a lo anterior la necesidad de la proposición, es decir que si el operador derivada es compacto entonces el $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$.

Suponga que el operador derivado D es compacto en $\mathcal{H}(\beta_E)$. Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{H}(\beta_E)$, entonces $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \beta_n^2\right)^{1/2} < +\infty$, por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \beta_n^2 < +\infty$, de acá se tiene que $\lim_{n\to\infty} |b_n|^2 \beta_n^2 = 0$ de esto $\lim_{n\to\infty} |b_n| \beta_n = 0$, de lo cual

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle h_n, g\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \beta_n^{-1} z^n, \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^k \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \beta_n^{-1} \overline{b_n} \beta_n^2 \end{aligned}$$

esto se tiene ya que los demás términos son cero exceptuando el n-ésimo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle h_n, g\rangle &= \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \beta_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto h_n converge débilmente a cero. La compacidad de D implica que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|D(h_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| D\left(\frac{1}{\beta_n} z^n\right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{1}{\beta_n} n z^{(n-1)}\right) \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{\beta_n} \right|^2 \beta_{n-1}^2 \right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\beta_{n-1}}{\beta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0. \end{aligned}$$

El $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$ ya que si el operador derivada actúa sobre una sucesión que converge débilmente a cero, su imagen converge fuertemente a cero. Ahora se va a mostrar la suficiencia de la proposición, es decir, que si $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$ entonces el operador derivada D actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$ es compacto.
Suponga que $\mu_\beta(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea (f_m) una sucesión arbitraria en $\mathcal{H}(\beta_E)$ que converge débilmente a cero, donde $f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} z^n$. Como el espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ es un espacio completo y normado entonces es un espacio de Banach, así por el principio

de acotación uniforme, entonces existe $A > 0$ tal que $\|f_m\| \leq A$. Se demostrará que $D(f_m)$ converge fuertemente a cero. Con este fin, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $\mu_\beta(n) < (A\sqrt{2})^{-1}\epsilon$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|D(f_m)\|^2 &= \|na_n^{(m)} z^{n-1}\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_{(n-1)}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \beta_{(n-1)}^2}{\beta_n^2} |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{2A^2} |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2A^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2A^2} \|f_m\|^2.
\end{aligned}$$

Luego, como $\|f_m\|^2 < A^2$ se obtiene

$$\|D(f_m)\|^2 < \sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \tag{3.8}$$

Por otro lado como $\mu_\beta(n)$ converge a cero, sea U una cota superior de μ_β. Como (f_m) converge débilmente a cero se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \langle f_m, h_n \rangle = \lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} \beta_n = 0,$$

para todo n. De acá para todo $n \in \{1, 2, ..., N\}$ existe un M_n tal que para todo $m > M_n$,

$|a_n^{(m)}|\beta_n < \dfrac{\epsilon}{U\sqrt{2N}}$. Así para $n > k := Max\{M_1, M_2, ..., M_N\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 &< \sum_{n=1}^{N} U^2 \frac{\epsilon^2}{2NU^2} \\ &= \frac{\epsilon^2}{2N} \sum_{n=1}^{N} 1 \\ &= \frac{\epsilon^2}{2N} N \\ &= \frac{\epsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_\beta(n)^2 |a_n^{(m)}|^2 \beta_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2} < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2$$

Así, $\|D(f_m)\| < \epsilon$. Por tanto como (f_m) converge débilmente a cero y $D(f_m)$ converge fuertemente a cero, entonces D es compacto en $\mathcal{H}(\beta_E)$. □

Como $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ es un espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$, con $\beta \in \mathbf{C} \cap \mathbf{G}$, como consecuencia de la Proposición 3.3.1, cualquier operador de traslación actuando sobre este espacio es invariante y acotado. Es más $E_\gamma^2(T, \tau)$ es un caso especial de $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$.
Se denotará por $\{\mathcal{H}(\beta_E)\}$ el conjunto de todos los espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\beta_E)$, y similarmente a esta notación $\{\mathcal{H}(\beta_\rho)\}, \{\mathcal{H}(\beta_\rho^+)\}, \{\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)\}, \{E_\gamma^2\}, \{E_\gamma^2(T)\}$ y $\{E_\gamma^2(T, \tau)\}$. Note que por las proposiciones anteriores se tiene que $(\mathbf{C} \cap \mathbf{G}) \backslash (\mathbf{D} \cap \mathbf{G}) \neq \emptyset$ y $(\mathbf{D} \cap \mathbf{G}) \backslash (\mathbf{C} \cap \mathbf{G}) \neq \emptyset$, las dos clases $\{E_\gamma^2(T)\}$ y $\{\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)\}$ no están contenidos uno en el otro. La siguiente cadena de inclusiones y exclusiones, como corolario de la Proposición 3.2.1, resume lo que se discutió en la presente sección.

Corolario 3.3.2. *El siguiente diagrama de exclusiones e inclusiones es verdadero*

$$\begin{array}{ccccccc} \{E_\gamma^2(T,\tau)\} & & & \subsetneq & \{E_\gamma^2(T)\} & \subsetneq & \{E_\gamma^2\} \\ \subsetneq & & & & \subsetneq & & \subsetneq \\ \{\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)\} & \subsetneq & \{\mathcal{H}(\beta_\rho^+)\} & \subsetneq & \{\mathcal{H}(\beta_\rho)\} & \subsetneq & \{\mathcal{H}(\beta_E)\} \end{array}$$

Capítulo 4

Operadores de composición en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ y $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$

Sea $\mathcal{H}(\beta_E)$ un espacio de Hilbert inducido por $\beta = \{\beta_n\}$ y φ una función entera. Se define el operador de composición C_φ, inducido por φ, actuando sobre $\mathcal{H}(\beta_E)$ como

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in \mathcal{H}(\beta_E).$$

Las propiedades como la invarianza, acotación, compacidad, rango finito, norma esencial, entre otras, son los temas usuales en el estudio de operadores de composición, para el lector interesado en profundizar sobre estos temas, puede consultar el texto Cowen and MacCluer [5]. A pesar de que los criterios para tales propiedades en el caso más general $\beta \in A$ aún son problemas abiertos, por lo tanto han habido estudios para el caso especifico donde $\beta \in \mathbf{H}$.

Para cualquier espacio $E^2_\gamma(T, \tau)$, es decir, el espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ con $\beta \in \mathbf{H}$, el criterio para la acotación y compacidad de C_φ se descubrieron en Chacón et al. [2]. En las técnicas usadas por estos autores se debe utilizar la hipótesis $\mu_\beta(n) \downarrow \tau > 0$. Una pregunta natural surge ¿que tal un caso más general cuando β está en algún conjunto que contiene a $\mathbf{H}$?

Esté capítulo generaliza los resultados de Chacón et al. [2] sobre los espacios $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ (es decir, $\beta \in \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$) y $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ (es decir, $\beta \in \mathbf{C} \cap \mathbf{G}$). El enfoque al problema indudablemente no considera la existencia de τ.

4.1. Invarianza y Acotación

Primero se nota que los conceptos de invarianza y acotación son distintos. Un operador lineal L actúa sobre un espacio normado X es invariante si L es un mapeo en sí mismo esto es $L(X) \subseteq X$.Así mientras la acotación implica invarianza, el recíproco no siempre

es cierto. Sin embargo, en el caso de que X es un espacio funcional de Banach, (es decir, si las operaciones vectoriales son operaciones puntuales, $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$ implica $f = g$, $f(x) = f(y)$ para cada función en el espacio implica $x = y$, y para cada $x \in X$, el funcional lineal $f \mapsto f(x)$ es continuo) estas dos propiedades (acotación e invarianza) son equivalentes, si se desea profundizar sobre estos temas, puede consultar el texto Cowen and MacCluer [5]. Como cualquier espacio $\mathcal{H}(\beta_E)$ es un espacio funcional de Banach C_φ es invariante si y sólo si es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$.

A continuación se presentará el teorema de Bohr el cual da herramientas que se utilizarán a lo largo de esta sección.

Teorema 4.1.1 (BOHR)**.** *Se supone que $f(z), g(z), h(z)$ son funciones integrables conectadas por la relación*

$$f(z) = g(h(z)).$$

Se supone además que

$$h(0) = 0. \tag{4.1}$$

Sea $F(r), G(r), H(r)$ que denotan el módulo máximo de $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ respectivamente en el círculo $|z| \leq r$. Entonces existe un número c definido entre cero y uno, independiente de $g(z), h(z)$ y r, y tal que

$$F(r) \geq G\left(cH\left(\frac{1}{2}r\right)\right).$$

Nota. Se puede sustituir $\frac{1}{2}$ por cualquier fracción positiva, siempre que c sea reemplazada por alguna otra constante adecuada.
Se observa que la desigualdad opuesta.

$$F(r) \leq G(H(r))$$

es una consecuencia inmediata de las definiciones.

Demostración. (El Teorema de Bohr)
Se supone que ρ es un número dado con $0 < \rho < 1$ y $w = \phi(z)$ es cualquier función regular (analítica e inyectiva) para $|z| \leq 1$ y que satisface las condiciones

$$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \max_{|z|=\rho} |\phi(z)| = 1. \tag{4.2}$$

Sea r_ϕ que denota el radio de la más grande circunferencia $|w| = r_\phi$ cuyos puntos representa todos los valores que toma $\phi(z)$ en el dominio $|z| \leq 1$. Entonces r_ϕ no es menor que c, con $C = c(\rho)$ es un número positivo que sólo depende de ρ. Para fijar las ideas se toma $\rho = \frac{1}{2}$, asignando $C\left(\frac{1}{2}\right) = c$ y aplique el teorema a la función

$$\phi(z) = \frac{h(rz)}{H(\frac{1}{2}r)},$$

que satisface las condiciones de la ecuación (4.2). Se puede observar que la función $w = h(z)$ recorre el dominio circular $|z| \leq r$ en una superficie de Riemann extendida sobre el plano w cuyas diversas capas cubren toda la longitud de un cierto círculo de centro en $w = 0$ y de radio R, siendo R no menor que $cH(\frac{1}{2}r)$.

Se supone que w_0 es un punto en el círculo $|w| = R$, tal que

$$|g(w_0)| = G(|w_0|) = G(R)$$

entonces existe al menos un punto z_0 dentro de $|z| \leq r$, tal que

$$h(z_0) = w_0.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} G\left(cH\left(\frac{1}{2}r\right)\right) &\leq G(|w_0|) \\ &= |g(w_0)| \\ &= |g(h(z_0))| \\ &\leq F(r). \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. □

Los siguientes resultados claves sobre composición de funciones enteras se deben a Pólya, si el lector se encuentra interesado en estos resultados, se puede remitir al texto Pólya [9], para poder establecer las propiedades de C_ϕ también se requiere el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sean g y h funciones enteras tales que $f = g \circ h$ es una función entera de orden finito. Entonces se tiene que se satisface alguno de los siguientes items*

(1) h es un polinomio y g es de orden finito, o

(2) h no es un polinomio, pero es una función de orden finito, y g es de orden 0.

Demostración. El caso donde $g(z)$ o $h(z)$ son constantes es inmediato ya que en ambos casos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se limita al primer término y el orden seria cero, es decir finito.
Ahora si se considera, si es necesario $h(z) - h(0)$ en lugar de $h(z)$, y $g(w + h(0))$ en lugar de $g(w)$, se puede y se debe suponer que $(h(0) = 0)$ como se muestra en la ecuación (4.1) es verdadero. Entonces se tiene, adoptando la notación $(f(z) = g(h(z))$ se obtiene que

$$F(r) \geq G(cH(2^{-1})r) \tag{4.3}$$

Observe que $F(r)$, $G(r)$ y $H(r)$ son funciones crecientes. Se puede expresar la hipótesis de que $f(z)$ es de orden finito por la desigualdad

$$F(r) < Ae^{r^a}. \tag{4.4}$$

Se asume

$$h(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_m z^m + ...,$$

es decir

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

y se supone $|a_m| > 0$. Se tiene que

$$H(r) \geq |a_m| r^m \tag{4.5}$$

y en virtud de (4.3), (4.4) y (4.5)

$$G(c|a_m|2^{-m} r^m) \leq G(cH(2^{-1}r)) \leq F(r) < Ae^{r^a},$$
$$G(c|a_m|2^{-m} r) \leq Ae^{r^{a/m}}.$$

Es decir, el orden de $g(z)$ no excede a/m. Si $h(z)$ no es un polinomio, m puede ser escogido arbitrariamente grande y en este caso el orden de $g(z)$ es cero. En cualquier caso existe una desigualdad para $g(z)$, análoga a (4.5), que permite afirmar que

$$G(r) \geq |b_n| r^n \text{ siempre que } |b_n| > 0, n \geq 1.$$

Combinando esto con (4.3) y (4.4), se obtiene

$$|b_n| c^n (H(2^{-1}r))^n \leq G(cH(2^{-1}r)) \leq F(r) < Ae^{r^a},$$

esto dice que el orden de $h(z)$ no es más grande que a. El punto principal está establecido por el Teorema de Bohr, naturalmente no hay dificultad para encontrar relaciones más cercanas entre los órdenes de magnitud de $F(r)$, $G(r)$ y $H(r)$. El caso 2 de este lema es en realidad posible. Sea

$$g(w) = 1 + 2^{-1}w + 2^{-4}w^2 + 2^{-9}w^3 + ..., \qquad H(z) = e^z.$$

la composición de estás funciones es

$$g(h(z)) = 1 + 2^{-1}e^z + 2^{-4}e^{2z} + 2^{-9}e^{3z} + ..., \tag{4.6}$$

es la mitad superior de una serie Theta. Los ceros y el orden de magnitud de toda la serie theta son perfectamente conocidos, se concluye que la función (4.6) es de orden 2. Se puede obtener fácilmente información más precisa por cálculo directo. Sea $M(r)$ que denota el módulo máximo y $N(r)$ el número de ceros de la función (4.6) en el círculo $|z| \leq r$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} r^{-2} \log M(r) &= 2 \lim_{r\to\infty} r^{-2} N(r) \\ &= \frac{1}{4\log(2)}. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es un resultado importante para esta sección, ya que presenta la relación entre un operador de composición acotado y la forma de la función entera de la cual esta inducido

Teorema 4.1.2. *Si un operador de composición C_φ, inducido por una función entera φ, es acotado en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$, entonces $\varphi(z) = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$ y $|a| \leq 1$.*

Demostración. Sea C_φ acotado, por el Corolario 3.3.1 item (iii) existe $f \in \mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ con orden creciente positivo, entonces el caso (2) de Lema (4.1.1) no puede ocurrir, por tanto φ debe ser un polinomio. De donde $\varphi(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0$ donde $b_m \neq 0$.
Como C_φ es acotado, existe algún $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|C_\varphi(h_n)\| \leq M\|h_n\| = M$$

para esté caso

$$\begin{aligned} C_\varphi(h_n)(z) &= h_n \circ \varphi(z) \\ &= \frac{1}{\beta_n}(\varphi(z))^n \end{aligned}$$

con lo cual

$$\leq \left\| \frac{1}{\beta_n}(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0)^n \right\| \leq M.$$

Pues $\|h_n\| = 1$. El coeficiente principal de $(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0)^n$ es b_m^n (de los z^{mn} términos).
Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|b_m|^n \beta_{mn}}{\beta_n} = \sqrt{\frac{|b_m|^{2n} \beta_{mn}^2}{\beta_n^2}} \leq \left\| \frac{1}{\beta_n}(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0)^n \right\| \leq M. \tag{4.7}$$

se va a mostrar por contradicción que $m \leq 1$.
Se supone que $m \geq 2$, (4.7) es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{|b_m|^n \beta_{mn}}{\beta_n} &\leq M \\ \sqrt[n]{\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}} &\leq \sqrt[n]{\frac{M}{|b_m|^n}} \\ \sqrt[n]{\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}} &\leq \frac{\sqrt[n]{M}}{|b_m|}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, $\left(\sqrt[n]{\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ está acotada, por

$$S = \sup\left\{\frac{\sqrt[n]{M}}{|b_m|}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para $S > 1$. Entonces,

$$\sqrt[n]{\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}} \leq S, \ \sqrt[mn]{\frac{\beta_{m^2n}}{\beta_{mn}}} \leq S, \ \sqrt[m^2n]{\frac{\beta_{m^3n}}{\beta_{m^2n}}} \leq S, ...$$

Esto dice que para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\beta_{m^k n}}{\beta_n} = \prod_{p=1}^{k} \frac{\beta_{m^p n}}{\beta_{m^{p-1} n}} \leq \prod_{p=1}^{k} S^{m^{p-1}n} = S^{n\frac{m^k-1}{m-1}}. \tag{4.8}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = +\infty$ se puede encontrar N lo suficientemente grande tal que $\sqrt[N]{\beta_N} > S$. Fije N y considere $\sqrt[N]{\beta_N} > S$ como una constante, se puede encontrar N' tal que $\sqrt[n]{\beta_n} > \sqrt[N]{\beta_N}$ para todo $n > N'$.

Se escoge $k : m^k n > N'$, entonces

$$\sqrt[m^k n]{\beta_{m^k n}} > \sqrt[N]{\beta_N}.$$

De donde

$$\frac{\beta_{m^k N}}{\beta_N} > \frac{\beta_N^{m^k}}{\beta_N} = \beta_N^{m^k-1} > S^{N(m^k-1)} \geq S^{N\frac{m^k-1}{m-1}} \quad \text{como } m \geq 2,$$

lo cual contradice (4.8). Entonces, $m = 1$ y el enunciado de la ecuación (4.7) queda dado para algún $M > 0, |b_1|^n \leq M$ para todo n,

$$\frac{|b_m|^n \beta_{mn}}{\beta_n} \leq M \ \text{ como } m = 1$$
$$\frac{|b_1|^n \beta_{1n}}{\beta_n} = \frac{|b_1|^n \beta_n}{\beta_n} = |b_1|^n \leq M.$$

Pero esto ocurre si y sólo si $|b_1| \leq 1$. De donde, $\varphi(z) = az + b$ para algún $a \in \mathbb{C}$ con $|a| \leq 1$. Es decir, como

$$\varphi(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0$$

pero como $m = 1$, entonces

$$\varphi(z) = b_1 z^1 + b_0 z^0 = b_1 z + b_0$$

con $b_1 \in \mathbb{C}$, $|b_1| \leq 1$ y $b_0 \in \mathbb{C}$. □

Nota. En la demostración de la necesidad para la acotación de operadores de composición en $E^2_\gamma(T,\tau)$ obtenida en Chacón et al. [2], los autores principalmente siguieron la hipótesis $\mu_\beta(n) \downarrow \tau > 0$, es decir $\beta \in \mathbf{H}$, para mostrar que $\varphi(z) = az+b$. Esté resultado es similar a la demostración del Teorema 4.1.2, pero este método de demostración puede ser aplicado a cualquier espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$.

Ejemplo. Recuerde que $\beta = \beta^{(3)}$ donde

$$\beta^{(3)}_n = \begin{cases} n! \text{ si } n \text{ es impar} \\ 2n! \text{ si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

en la prueba de la Proposición 3.2.1. Se tiene $\beta_\rho \leq 1$, $\mu_\beta(n) \leq 2$ y β creciente. Esto es que $\beta \in (\mathbf{C} \cap \mathbf{G}) \setminus \mathbf{H}$, entonces $\beta^{(3)}$ es un espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ (y además un espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$), pero no un espacio $E^2_\gamma(T,\tau)$. Mientras que el resultado de Chacón et al. [2] no puede ser aplicado, el Teorema 4.1.2 se mantiene, es decir, cualquier operador C_φ acotado en este espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$ puede ser inducido por algún $\varphi(z) = az + b$ con $|a| \leq 1$. Se obtiene la necesidad para la acotación de C_φ en cualquier espacio $\mathcal{H}(\beta^+_\rho)$. Particularmente para el caso $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$, el recíproco es verdadero.

El siguiente teorema brinda las condiciones que se debe tener para que un operador de composición sea acotado

Teorema 4.1.3. *Sea C_φ un operador de composición inducido por alguna función entera φ actuando en $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$. Si $\varphi(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ donde $|a| \leq 1$, entonces C_φ es acotado en $\mathcal{H}(\beta^+_\rho, T)$.*

Demostración. Se supone primero $b = 0$, entonces $\varphi(z) = az$, con $|a| \leq 1$. Para toda función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\beta^+_\rho, T),$$

se tiene que si $\varphi(z) = az$ y $|a| \leq 1$ entonces como $f \in (\mathcal{H}(\beta_E)$, luego

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ f \circ \varphi(z) &= f(\varphi(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varphi(z))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n z^n, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\|C\varphi(f)\|^2 &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n z^n\right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |a^n|^2 \beta_n^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |a|^{2n} \beta_n^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \|f\|^2 < +\infty,\end{aligned}$$

entonces C_{az} es acotado.

En el caso $\varphi(z) = az + b$ con $b \neq 0$, por la Proposición 3.3.1 item (ii) (el operador traslación T_b es acotado en $\mathcal{H}(\beta_E)$), y como C_{az} es acotado, entonces

$$C_\varphi = C_{az} \circ T_b,$$

por tanto C_φ es acotado en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$. □

4.2. Norma Esencial y Compacidad

En esta sección se estudia la compacidad de los operadores de composición actuando en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ para esto es necesario el siguiete lema:

Lema 4.2.1. *Sea X, Y dos espacios de Banach de funciones analíticas en U, un dominio de $\mathbb{C}$. se supone que*

1. *Los funcionales evaluación puntual en Y soncontinuos.*
2. *la bola unitaria cerrada en X es un subconjunto compacto de X en la topología de convergencia uniforme en conjuntos compactos.*
3. *$T : X \to Y$ es continua cuando X y Y tienen la topología de convergencia uniforme de conjuntos compactos.*

Entonces, T es un operador compacto si y sólo si para cada sucesión (f_n) acotada en X tal que $f_n \to 0$ uniformemente en conjuntos compactos, se tiene que la sucesión $(T f_n)$ converge a cero en la norma de Y.

Demostración. Primero se supone que T es un operador compacto y sea (f_n) una sucesión acotada en X tal que $f_n \to 0$ uniformemente en conjuntos compactos, cuando $n \to \infty$. Para el resto de esta prueba, se utilizará $|\cdot|_Y$ para denotar la norma en el

espacio Y. Si la conclusión es falsa existe un $\epsilon > 0$ y una subsucesión $n_1 < n_3 < n_3 < \dots$ tal que

$$|Tf_{n_j}|_Y \geq \epsilon, \text{ para todo } j = 1, 2, 3, \dots \tag{4.9}$$

ya que (f_n) es una sucesión acotada y T es un operador compacto se puede encontrar otra subsucesión $n_{j_1} < n_{j_2} < \dots$ y $f \in Y$ tal que

$$|Tf_{n_{j_k}} - f|_Y \to 0, \tag{4.10}$$

cuando $k \to \infty$. Por (1) los funcionales evaluaciones puntuales son continuos, por lo tanto para cualquier $z \in U$.

$$|(Tf_{n_{j_k}} - f)(z)| \leq C|Tf_{n_{j_k}} - f|_Y \tag{4.11}$$

luego por (4.10) y (4.11) se tiene,

$$|Tf_{n_{j_k}} - f|_Y \to 0 \tag{4.12}$$

uniformemente en conjuntos compactos, como $f_{n_{j_k}} \to 0$ uniformemente en conjuntos compactos, de (3) se tiene que, $Tf_{n_{j_k}} \to 0$ uniformemente en conjuntos compactos. Así por (4.12) $f = 0$. luego por (4.10) se tiene que $|Tf_{n_{j_k}}|_Y \to 0$ cuando $k \to \infty$, que contradice (4.9). por lo tanto se debe tener

$$|Tf_n|_Y \to 0, \text{ Cuando } n \to \infty.$$

Recíprocamente, si es $\{f_n\}$ una sucesión acotada en X. Se mostrará que la sucesión $\{Tf_n\}$ tiene una subsucesión convergente en norma. Sin pérdida de generalidad $\{f_n\}$ pertenece a la bola unitaria en X. Por (2) existe una subsucesión $n_1 < n_2 < \dots$ tal que $f_{n_j} \to f$ uniformemente en conjuntos compactos, para algún $f \in X$. Por tanto, por hipótesis, $|Tf_{n_j} - Tf|_Y \to 0$, cuando $j \to \infty$. Esto finaliza la prueba del Lema. □

Nota. $\Rightarrow$) solo usa (1) y (3) $\Leftarrow$) solo usa (2).

De los resultados anteriores, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *Si un operador de composición C_φ inducido por una función entera φ es compacto en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+)$, entonces $\varphi(z) = az + b$, con $|a| < 1$.*

Demostración. Como C_φ es compacto, por definición C_φ es necesariamente acotado. Ahora por el Teorema 4.1.2 entonces se tiene que $\varphi(z) = az + b$ con $(a, b \in \mathbb{C})$ y $|a| \leq 1$. Se debe mostrar ahora porque la desigualdad es propia es decir $(|a| < 1)$.
Como (h_n) converge débilmente a 0, entonces

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{\beta_n} = 0,$$

luego $C_\varphi(h_n)$ converge fuertemente a 0, ya que

$$C_\varphi(h_n) = h_n \circ \varphi = \frac{(\varphi(z))^n}{\beta_n} = \frac{(az+b)^n}{\beta_n}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} C_\varphi(h_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(az+b)^n}{\beta_n} = 0$$

Nota. A partir de un b se sigue manteniendo la desigualdad entre las dos sucesiones y converge fuertemente a cero porque $|a| \leq 1$, es más como $az + b = b + az$ entonces

$$\begin{aligned} C_\varphi(h_n) &= \frac{(b+az)^n}{\beta_n} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k}(az)^k}{\beta_n} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k}a^k z^k}{\beta_n} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(h_n)\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\binom{n}{k} b^{n-k}a^k}{\beta_n} \right|^2 \beta_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2 |b|^{2(n-k)}|a|^{2k}}{\beta_n^2} \beta_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} 0\beta_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |b|^{2(n-k)}|a|^{2k} \frac{\beta_k^2}{\beta_n^2}. \end{aligned}$$

El último término de la sumatoria cuando $k = n$ será

$$\binom{n}{n}^2 |b|^{2(n-n)}|a|^{2n} \frac{\beta_b^2}{\beta_n^2} = |a|^{2n},$$

se sigue que

$$|a|^{2n} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |b|^{2(n-k)}|a|^{2k} \frac{\beta_k^2}{\beta_n^2},$$

luego como $C_\varphi(h_n)$ converge fuertemente a 0 entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |a|^{2n} &\leq \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi(h_n)\|^2 \\ \lim_{n\to\infty} |a|^{2n} &= 0, \end{aligned}$$

por tanto $|a| < 1$. □

De manera similar, el resultado de acotación, particularmente para el espacio $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$, la necesidad para la compacidad de un operador C_φ es también su suficiencia. Esto puede derivarse del estudio de la norma esencial de estos operadores que se da a continuación.

Definición 3. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{K}(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en X. La norma esencial de un operador lineal acotado L en X, denotado como $\|L\|_e$, está definido como

$$\|L\|_e = \text{ínf}\{\|L - K\|_{op} : K \in \mathcal{K}(X)\},$$

donde $\|T\|_{op}$ denota la norma del operador definida en (3.7). Claramente, L es compacto si y sólo si $\|L\|_e = 0$.

Con esta definición se puede dar paso al siguiente lema

Lema 4.2.2. *Para cada $p \in \mathbb{N}$, el operador lineal*

$$K_p : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$$

es compacto en $\mathcal{H}(\beta_E)$.

Demostración. Claramente es compacto pues el rango de K_p será el conjunto de los polinomios de grado $\leq p$, es decir,

$$\text{Ran}(K_p) = P_p[z]$$

que tiene dimensión finita p, por tanto K_p tiene rango finito y por el Teorema 4.2.1 es compacto en $\mathcal{H}(\beta_E)$. □

Se define $0 \leq \mathcal{D}_* := \text{ínf}\{\mu_\beta(n), n \in \mathbb{N}\} \leq \mathcal{D}^* := \sup\{\mu_\beta(n), n \in \mathbb{N}\} < \infty$ con lo cual se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2. *Sea C_φ un operador de composición acotado en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ inducido por $\varphi(z) = az + b$. Entonces*

$$\|C_\varphi\|_e \approx \lim_{n\to\infty} |a|^n.$$

más precisamente

$$\sqrt{|a|^2 + |b|^2\mathcal{D}_*^2} \lim_{n\to\infty} |a|^n \leq \|C_\varphi\|_e \leq e^{|b|\mathcal{D}^*} \lim_{n\to\infty} |a|^n.$$

Demostración. Se nota que $\|D\|_{op} = \mathcal{D}^*$ por (3.7), también por el Teorema 4.1.2 se tiene que $|a| \leq 1$, luego

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |a|^n = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \begin{cases} 0, \text{ si } |a| < 1, \\ 1, \text{ si } |a| = 1. \end{cases}$$

•**Cota Inferior:** Tome $\epsilon > 0$ arbitrario. Considere la sucesión definida por $h_n(z) = \frac{z^n}{\beta_n}$ que tiene norma $\|h_n\| = 1$ y (h_n) converge débilmente a 0 por 3.3.2. Por definición de norma esencial, existe un operador compacto K tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|C_\varphi\|_e &= \text{ínf}\{\|C_\varphi - K\|_{op}\} \geq \|C_\varphi - K\|_{op} - \frac{\epsilon}{2} \\ &\geq \|(C_\varphi - K)(h_n)\| - \frac{\epsilon}{2} \geq \|C_\varphi(h_n)\| - \|K(h_n)\| - \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

ya que $T : X \to Y$ y $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1}\{\|T_x\|_y\} \geq \|T_x\|_y$ siempre que $\|x\| = 1$ y luego por propiedades de norma se tiene la ecuación anterior. Es más, como (h_n) converge a 0 y K es compacto entonces $\lim_{n\to\infty} \|K(h_n)\| = 0$, luego, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|K(h_n)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq N$, por definición de convergencia, pero esto es equivalente a $-\|K(h_n)\| \geq -\frac{\epsilon}{2}$, de esto se tiene que para $n \geq N$

$$\begin{aligned}\|(C_\varphi - K)(h_n)\|_e &\geq \|C_\varphi(h_n)\| - \|K(h_n)\| - \frac{\epsilon}{2} \\ &\geq \|C_\varphi(h_n)\| - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &\geq \|C_\varphi(h_n)\| - \epsilon.\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\|(C_\varphi - k)(h_n)\| &= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |b|^{2(n-k)}|a|^{2k}\frac{\beta_k^2}{\beta_n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\beta_n^2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |a|^{2k}|b|^{2(n-k)}\beta_k^2}, \qquad (4.13)\end{aligned}$$

cuando $k = n$

$$\frac{1}{\beta_n^2}\binom{n}{n}^2 |a|^{2n}|b|^{2(n-n)}\beta_n^2 = \frac{\beta_n^2}{\beta_n^2}(1)^2|a|^{2n}|b|^{2(0)} = |a|^{2n},$$

cuando $k = n - 1$

$$\frac{1}{\beta_n^2}\binom{n}{n-1}^2 |a|^{2(n-1)}|b|^{2(n-(n-1))}\beta_{n-1}^2 = \frac{1}{\beta_n^2}(n)^2|a|^{2(n-1)}|b|^2\beta_{n-1}^2,$$

luego

$$
\begin{aligned}
(4.13) \quad &\geq \sqrt{|a|^{2n} + |a|^{2(n-1)}|b|^2 \frac{n^2\beta_{n-1}^2}{\beta_n^2}} \\
&= \sqrt{|a|^{2(n-1)}|a|^2 + |a|^{2(n-1)} \frac{|b|^2 n^2 \beta_{n-1}^2}{\beta_n^2}} \\
&= \sqrt{\|a\|^{2(n-1)} \left(|a|^2 + \frac{|b|^2 n^2 \beta_{n-1}^2}{\beta_n^2} \right)} \\
&= |a|^{(n-1)} \sqrt{|a|^2 + \frac{|b|^2 n^2 \beta_{n-1}^2}{\beta_n^2}} \\
&= |a|^{(n-1)} \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mu_\beta(n)^2} \\
&\geq |a|^{(n-1)} \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \operatorname{ínf}\{\mu_\beta(n)^2\}} \\
&= |a|^{(n-1)} \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mathcal{D}_*^2},
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\|C_\varphi\|_e &\geq \|C_\varphi(h_n)\| - \epsilon \geq \inf_{n \geq N} \|C_\varphi(h_n)\| - \epsilon \\
&\geq \inf_{n \geq N} \left(|a|^{(n-1)} \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mathcal{D}_*^2} \right) - \epsilon,
\end{aligned}
$$

como no depende de n y es $\mathcal{D}_*^2$ el $\operatorname{ínf}\{\mu_\beta(n)^2\}$

$$
= \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mathcal{D}_*^2} \inf_{n \geq N} |a|^{(n-1)} - \epsilon,
$$

por hipótesis $\inf_{n \in \mathbb{N}} |a|^n = \lim_{n \to \infty} |a|^n$ luego

$$
= \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mathcal{D}_*^2} \lim_{n \to \infty} |a|^n - \epsilon,
$$

como ϵ es arbitrariamente pequeño, se obtiene la cota inferior

$$
\|C_\varphi\|_e \geq \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \mathcal{D}_*^2} \lim_{n \to \infty} |a|^n
$$

•**Cota Superior:** Por el Lema 4.2.2 cada operador K_p es compacto y también $K_p \circ C_\varphi$ lo es, luego

$$
\|C_\varphi\|_e \leq \inf_{p \in \mathbb{N}} \|C_\varphi - K_p \circ C_\varphi\|_{op},
$$

para cualquier $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$, por la Nota 3.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi - K_p \circ C_\varphi)(f)\| &= \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} a^k z^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n b^{n-k} \right) \right\| \\
&\leq |a|^{p+1} \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n b^{n-k} \right\| \\
&= |a|^{p+1} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} a_{m+k} z^k \right\| \\
&\leq |a|^{p+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} a_{m+k} z^k \right\| \\
&\leq |a|^{p+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} a_{m+k} z^k \right\| \\
&= |a|^{p+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \|D^m(f)\| \\
&\leq |a|^{p+1} \|f\| e^{|b|\mathcal{D}^*},
\end{aligned}$$

ya que $\|D^m(f)\| \leq (\|D\|_{op})^m$ entonces, para todo $p \in \mathbb{N}$, $\|C_\varphi - K_p \circ C_\varphi\| \leq |a|^{p+1} e^{|b|\mathcal{D}^*}$. □

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene:

Corolario 4.2.1. *Sea C_φ un operador de composición en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ inducido por algún $\varphi(z) = az + b$. Luego C_φ es compacto si y sólo si $|a| < 1$.*

Demostración. Suponga que C_φ es compacto, por el Teorema 4.2.1 y como $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T) \subsetneq \mathcal{H}(\beta_\rho^+)$ entonces $|a| < 1$.
Ahora suponga que $|a| < 1$, por el Teorema 4.2.2 se tiene que

$$\|C_\varphi\|_e \approx \lim |a|^n = 0.$$

y de los hechos anteriores se tiene que L es compacto si y sólo si $\|L\|_e = 0$. Por tanto C_φ es compacto si y sólo si $|a| < 1$. □

4.3. Diferencia compacta de dos operadores de composición en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$.

En esta sección, se estudiara la compacidad de la diferencia de dos operadores de composición acotada que actúan en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$.

Sean C_φ y C_ψ inducidas por $\varphi(z) = az + b$ y $\psi(z) = cz + d$, respectivamente ($|a| \leq 1, |c| \leq 1$). Ya que el operador de traslación T_d es acotado en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ y

$$C_\varphi - C_\psi = (C_{az+b-d} - C_{cz}) \circ Td,$$

la diferencia es compacta si y sólo si $C_{az+b-d} - C_{cz}$ es compacta (porque T_d, que es precisamente C_{z+d}, no es compacto, por Corolario 4.2.1). Por lo tanto, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $d = 0$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *Sean C_φ y C_ψ operadores de composición acotados en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ inducidas por $\varphi(z) = az + b$ y $\psi(z) = cz$ respectivamente. Si la diferencia $C_\varphi - C_\psi$ es compacta, entonces exactamente uno de los siguientes items se satisfacen:*

1. *Ambos C_φ y C_ψ son compactos (es decir, $|a| < 1, |c| < 1$);*
2. *Ambos C_φ y C_ψ no son compactos (es decir, $|a| = |c| = 1$) y $a = c$.*

Demostración. Se supone que $C_\varphi - C_\psi$ es compacto. Entonces o ambos C_φ y C_ψ son compactos, o ambos C_φ y C_ψ no son compactos. Para el primer caso, se supone que alguno de los dos no es compacto, sin perdida de generalidad se toma $|a| = 1$ y $|c| < 1$, luego como $C_\varphi - C_\psi$ es compacta entonces debe ocurrir que

$$\|C_\varphi - C_\psi\|_e \approx \lim_{n\to\infty} |a^n - c^n| = 0, \tag{4.14}$$

pero por desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |a^n - c^n| &\geq \lim_{n\to\infty} (|a^n| - |c^n|) \\ &= \lim_{n\to\infty} |a^n| - \lim_{n\to\infty} |c^n| \\ &= 1 - 0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con la ecuación (4.14), por tanto, ambos C_φ y C_ψ son compactos.

Para el segundo caso, se tiene que $|a| = |c| = 1$. Se asume por el contrario que $a \neq c$. Se considera la sucesión (h_n) de la sección anterior, que converge débilmente a 0, entonces $(C_\varphi - C_\psi)(h_n)$ converge fuertemente a 0, cuando $n \to \infty$, por Lema 4.2.1.

Ya que

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi - C_\psi)(h_n)\|^2 &= \|(h_n \circ \varphi) - (h_n \circ \psi)\|^2 \\
&= \left\| \frac{(az+b)^n}{\beta_n} - \frac{(cz)^n}{\beta_n} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\beta_n^2} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (az)^k b^{n-k} - (cz)^n \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\beta_n^2} \left\| (az)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (az)^k b^{n-k} - (cz)^n \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\beta_n^2} \left\| (az)^n - (cz)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (az)^k b^{n-k} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\beta_n^2} \left\| (a^n - c^n) z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^k z^k b^{n-k} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\beta_n^2} \left(|a^n - c^n|^2 \beta_n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 |a|^{2k} \beta_k^2 |b|^{2(n-k)} \right) \\
&= |a^n - c^n|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 |a|^{2k} |b|^{2(n-k)} \frac{\beta_k^2}{\beta_n^2} \\
&\geq |a^n - c^n|^2,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi - C_\psi\|_e \approx \lim_{n\to\infty} |a^n - c^n| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{a}{a}\right)^n - \left(\frac{c}{a}\right)^n \right| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |1 - y^n| = 0, \\
y &= \frac{c}{a} \neq 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto, para $\epsilon = \frac{|1-y|}{2} > 0$ existe $N > 0$ tal que $|1 - y^n| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq N$. Entonces,

$$2\epsilon = |1 - y| = |y|^N |y - 1| = |y^{N+1} - y^N| \leq |1 - y^{N+1}| + |1 - y^N| < \epsilon,$$

(ya que $|y| = 1$) lo cual es imposible. □

El caso (2) en la Proposición 4.3.1 conduce al siguiente resultado.

Proposición 4.3.2. *Suponga $|a| = 1$ y $b \neq 0$, la diferencia $C_{az+b} - C_{az}$ es compacta si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$.*

Demostración.
•**Necesidad:** Se supone que $C_{az+b} - C_{az}$ es compacta, como en la prueba de la Proposición 4.3.1, ya que $|a| = 1$,

$$\begin{aligned}
\|(C_{az+b} - C_{az})(h_n)\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 |a|^{2k}|b|^{2(n-k)} \frac{\beta_k^2}{\beta_n^2} \\
&\geq \binom{n}{n-1}^2 |a|^{2(n-1)}|b|^{2(n-(n-1))} \frac{\beta_{n-1}^2}{\beta_n^2} \\
&= \left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)^2 |b|^2 \frac{\beta_{n-1}^2}{\beta_n^2} \\
&= n^2|b|^2 \frac{\beta_{n-1}^2}{\beta_n^2} \\
&= \left(|b|\frac{n\beta_{n-1}^2}{\beta_n^2}\right)^2 \\
&= (|b|\mu_\beta(n))^2,
\end{aligned}$$

ya que $(C_{az+b} - C_{az})(h_n)$ converge fuertemente a 0, $\lim\limits_{n\to\infty} |b|\mu_\beta(n) = 0$, que da

$$\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$$

•**Suficiencia:** Se supone ahora que $\mu_\beta(n)$ converge a 0, el operador derivada D es compacto por la Proposición 3.3.2. Esto es, que para cualquier sucesión (f_m) que converge débilmente a 0, $\|D(f_m)\|$ converge a 0.
Sea $f_m(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} z^n (m \in \mathbb{N})$. De la Nota 3.3.2, ya que $|a| = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|(C_{az+b} - C_{az})(f_m)\| &= \|C_{az+b}(f_m) - C_{az}(f_m)\| \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \sum_{k=0}^{n} (az+b)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} (az)^n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (az)^{n-k} b^k - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} (az)^n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (az)^{n-k} b^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} (az)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} (az)^n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_n^{(m)} (az)^{n-k} b^k \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n^{(m)} (az)^{n-k} \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n^{(m)} (az)^{n-k} \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \sqrt{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!^2}{(n-k)!^2} |a_n^{(m)}|^2 \beta_{n-k}^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \|D^k(f_m)\| \qquad .\\
&\leq \|D(f_m)\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \|D\|_{op}^{k-1} \\
&\leq \frac{\|D(f_m)\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b|^k}{k!} \|D\|_{op}^{k}}{\|D\|_{op}} \\
&\leq \|D(f_m)\| \frac{e^{|b|\mathcal{D}^*}}{\mathcal{D}^*},
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{D}^* = \|D\|_{op} = \sup\{\mu_\beta(n), n \in \mathbb{N}\}$. En consecuencia, $\lim_{m\to\infty} \|(C_{az+b} - C_a)(f_m)\| = 0$, entonces $C_{az+b} - C_{az}$ es compacta. □

Finalmente, como consecuencia de la Proposición 4.3.1 y la Proposición 4.3.2, se obtiene el siguiente criterio acerca de la compacidad de la diferencia de dos operadores de composición acotados C_φ y C_ψ en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$.

Teorema 4.3.1. *Sean C_φ y C_ψ dos operadores de composición acotados en $\mathcal{H}(\beta_\rho^+, T)$ inducido por $\varphi(z) = az + b$ y $\psi(z) = cz + d$ respectivamente. La diferencia $C_\varphi - C_\psi$ es compacto si y sólo si cualquier de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *Ambos C_φ y C_ψ son compactos (es decir, $|a| < 1, |c| < 1$);*
2. $|a| = |c| = 1$ *y* $\begin{cases} a = c, & \text{si } \lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0 \\ a = c, b = d, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Demostración. El ítem 1 se obtiene por el Teorema 4.3.1, ítem (1).

En el ítem 2 la parte de $|a| = |c| = 1$ se obtiene por el Teorema 4.3.1, ítem (2), la parte de $a = c$ si $\lim_{n\to\infty} \mu_\beta(n) = 0$ se tiene de la Proposición 4.3.2 y finalmente el caso donde $a = c, b = d$ sera el caso trivial cuando $C_\varphi - C_\psi = 0$. □

Capítulo 5

Conclusiones

En el anterior trabajo se desgloso en su totalidad el artículo Hilbert Space of Entire Functions and Composition Operators (Minh Luan Doan. Le Hai Khoi, 2015), se realizo el desarrollo de este trabajo primero pasando por el espacio ℓ^2_β, donde β es una sucesión de peso, cuando la sucesión varia, esta genera un nuevo espacio ℓ^2_β, es por esto que se realiza el análisis de las relaciones entre estos espacios cuando se varia la sucesión de peso.

seguidamente en el trabajo se relacionaron estos espacios con las funciones enteras, es de ahí donde salen los espacios de Hilbert de funciones enteras, los cuales son espacios ℓ^2_β que se intersecan con las funciones enteras, se establece también cuando estos espacios pueden llegar a ser un espacio de Banach.

Un resultado importante en el trabajo es la cadena de inclusiones y exclusiones de los diferentes tipos de espacios de Hilbert, seguidamente de los operadores de composición, propiedades de invarianza, acotación, norma esencial, compacidad y la diferencia compacta entre dos operadores de composición.

Bibliografía

[1] Robert Gardner Bartle and Donald R Sherbert. *Introduction to real analysis*. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.

[2] Gerardo A. Chacón, Gerardo R. Chacón, and José Giménez. Composition operators on spaces of entire functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(7): 2205–2218, 2007. ISSN 0002-9939. doi: 10.1090/S0002-9939-07-08764-3. URL https://doi.org/10.1090/S0002-9939-07-08764-3.

[3] Kit C. Chan and Joel H. Shapiro. The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(4): 1421–1449, 1991. ISSN 0022-2518. doi: 10.1512/iumj.1991.40.40064. URL https://doi.org/10.1512/iumj.1991.40.40064.

[4] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990. ISBN 0-387-97245-5.

[5] Carl C. Cowen and Barbara D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. ISBN 0-8493-8492-3.

[6] William R Derrick et al. *Variable compleja con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica,, 1987.

[7] Minh Luan Doan and Le Hai Khoi. Hilbert spaces of entire functions and composition operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 10(1): 213–230, 2016. ISSN 1661-8254. doi: 10.1007/s11785-015-0497-0. URL https://doi.org/10.1007/s11785-015-0497-0.

[8] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. ISBN 0-471-50459-9.

[9] G. Pólya. On an Integral Function of an Integral Function. *J. London Math. Soc.*, 1(1):12–15, 1926. doi: 10.1112/jlms/s1-1.1.12. URL https://doi.org/10.1112/jlms/s1-1.1.12.

[10] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988. ISBN 0-02-404151-3.

[11] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1976. ISBN 0-07-085613-3. International Series in Pure and Applied Mathematics.