

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

GEOMETRÍA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DEL CONJUNTO SINGULAR DEL TORO UMBÍLICO

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Juan Pablo Chavarro Sanchez
Dirigido por: Prof. Carlos Ochoa C.
Co-Director: Prof. Martín Barajas S.

Bogotá DC
Julio de 2021

Resumen

En esta monografía se estudiara la proyección ortogonal de la curva que representa el conjunto singular de la superficie del toro umbílico, principalmente investigando cuando el kernel de la proyección muestra una curva con singularidades de punto de cúspide. Se abordara la construcción de la superficie a partir de las formas cubicas reales ya que estas están estrechamente relacionadas con la clasificación de puntos umbílicos a partir de los cuales se obtiene el toro umbílico para finalmente hacer un análisis global de las proyecciones y sus singularidades.

Palabras clave: Toro umbílico, proyección ortogonal, singularidades
Clasificación AMS: 53A04
Agradecimientos: A mis padres por haberme dado todo en la vida, a mi hermano mayor por incentivarme a estudiar matemáticas, a mis profesores en especial al profesor Martín y a todas las personas que en mi vida me han apoyado.

1. Introducción

En la búsqueda de las direcciones de proyección de la curva regular cerrada descrita por el conjunto singular del toro o brazalete umbílico en las cuales la curva proyectada presente puntos de cúspide se enfoca esta monografía, por tanto pretendemos primeramente y a modo de motivación estudiar la estratificación del espacio $\mathbf{R}^4$ de las formas cubicas reales en 2 variables bajo la clasificación en clases de equivalencia que forman un espacio proyectivo tridimensional. [3] considera la acción del grupo lineal de las matrices invertibles para obtener las orbitas y muestra los representante de estas orbitas bajo dicha acción. Zeeman además da lo que como dijimos sera la motivación de esta monografía, una descripción geométrica de dichas orbitas mostrando que ellas forman una rotación de un deltoide al que llama el brazalete umbílico
Además de esto en la sección 3 abordaremos algunos aspectos relevantes de la superficie y esto nos conducirá al estudio de la proyección ortogonal del conjunto singular del brazalete umbílico y es allí en la sección 4 donde se concentra nuestra investigación par poder caracterizar las curvas proyectadas que presentan la singularidad de punto de cúspide, los resultados de la investigación nos conducen a encontrar que estas curvas son una familia de curvas que se aloja en una curva sobre la esfera.
Para las imágenes y los cálculos aquí realizados empleamos el software Maple 2021.

2. Formas cubicas

Sea $G = \mathbf{GL}(2,\mathbf{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas 2×2 con determinante distinto de cero, estas matrices actúan sobre vectores columna por una multiplicación matricial a izquierda, esta acción a izquierda de G induce una acción a derecha de G en $\mathbf{R}^4$, dado $f \in \mathbf{R}^4$, $g \in G$ se define fg por $(fg)v = f(gv)$ con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ esto seria tener la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2,\mathbf{R})$$

y a través de dicha acción por izquierda obtener

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}$$

Definen el estrato que contiene a f para la G-orbita fG. Una orbita es un subconjunto del conjunto de todas las formas, dos orbitas diferentes son disjuntas, la unión de todas las orbitas es una partición

del conjunto de todas las formas. En el caso de $\mathbf{GL}(2,\mathbf{R})$ de Las orbitas de las formas cuadráticas y cubicas estas orbitas son finitas. Las formas cubicas en dos variables con el punto $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ corresponden a la forma

$$f = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \tag{1}$$

Esta clasificación o estratificación antes nombrada la presentamos en el siguiente lema

Lema 1. *[3] Hay 5 estratos o clasificaciones en* $\mathbf{R}^4$*, caracterizadas por el tipo de raíz*

estrato	*dimensión*	*forma normal*	*tipo de raíz*
H, hiperbólico umbílico	*4*	$x^3 + y^3$	*2 complejas, 1 real*
E, elíptico umbílico	*4*	$x^3 - 3xy^3$	*3 reales distintas*
P, parabólico umbílico	*3*	x^2y	*3 reales, 2 iguales*
X, excepcional	*2*	x^3	*3 reales iguales*
O, origen	*0*	*0*	*indeterminado*

Para hallar cuando el polinomio(1) posee raíces repetidas es necesario hacer uso del discriminante igualado a cero (2) que al igualmente lo definiremos como $D = P \cup X \cup O$. Pero esto no ayuda a comprender la geometría, por eso se tomara el camino de los números complejos.

$$b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2 = 0 \tag{2}$$

Antes de abordar el tema de los números complejos para entender mejor la geometría, veamos la estratificación de $\mathbf{R}^4$, la cual es suficiente para describir la estratificación inducida en la esfera unitaria $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$. Se podría identificar $\mathbf{S}^3$ aun mas antipodalmente y describir la estratificación inducida en el espacio proyectivo.

Teorema 1. *[3] La estratificación inducida de* $\mathbf{S}^3$ *esta dada en forma de brazalete, con un hipocicloide triangular que gira* $\frac{1}{3}$ *de giro dando un vuelta al rededor del brazalete. Los estratos H, E, P, X se encuentran con* $\mathbf{S}^3$ *en el exterior, interior, superficie y en el borde de cúspide de el brazalete respectivamente.*

Ahora bien, tomando el camino de los números complejos y ya que estos tienen una representación matricial y si tomamos el grupo multiplicativo de los números complejos distintos de cero, este grupo esta en $\mathbf{GL}(2,\mathbf{R})$. Así pues como

$$x + iy \leftrightarrow \rho e^{i\theta}$$
$$e^{i\theta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

por tanto si tomamos $z = x + iy$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, hay una representación en números complejos para las formas reales en 2 variables. La parte real de la forma cubica compleja $(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z})$ es.

$$\mathbf{Re}(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z}) = (\alpha_1 + \beta_1)x^3 + (-3\alpha_2 - \beta_2)x^2 y + (-3\alpha_1 + \beta_1)xy^2 + (\alpha_2 - \beta_2)y^3$$

Realizando el cambio de coordenadas en $\mathbf{R}^4$ para (a, b, c, d), el cual es posible ya que la matriz (3) es no singular

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Se tendría que este cambio viene dado por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

obteniendo así

$$ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3$$

[l] Recordando el discriminante (2) es cero cuando el polinomio y su derivada se hacen cero. Ya que la forma es homogénea cambiando la escala de la variable compleja z por una variable de norma 1, $z = e^{i\theta}$, entonces aplicando esto a la parte real de una forma cubica obtendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z}) &= \mathbf{Re}(\alpha e^{3i\theta} + \beta e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha e^{3i\theta} + \bar{\alpha} e^{-3i\theta} + \beta e^{i\theta} + \bar{\beta} e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

se establece la forma

$$\frac{1}{2}(\alpha e^{3i\theta} + \bar{\alpha} e^{-3i\theta} + \beta e^{i\theta} + \bar{\beta} e^{-i\theta}) = 0 \tag{4}$$

Multiplicando (4) por $e^{i\theta}$, obtenemos $\frac{1}{2}(\alpha e^{4i\theta} - \bar{\alpha} e^{-2i\theta} + i\beta e^{2i\theta} - i\bar{\beta} = 0$ cuya derivada

$$2ie^{4i\theta} - ie^{-2i\theta} + i\beta e^{2i\theta} = 0$$

se anula, entonces con $\alpha = 1$. Es decir $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ y resolviendo para β tenemos que

$$\beta = -2e^{2i\theta} + e^{-4i\theta}$$

Haciendo $2\theta = (\phi - \pi)$ se tiene

$$\beta = 2e^{i\phi} - e^{-2i\phi}, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

La anterior ecuación geométricamente es una curva conocida como el hipocicloide con 3 cúspides o deltoide (ver figura 1), en el plano $\alpha = 1$. Esta curva consiste de los puntos parabólicos umbílicos P y de las cúspides X cuando se tienen dos y tres raíces iguales respectivamente.

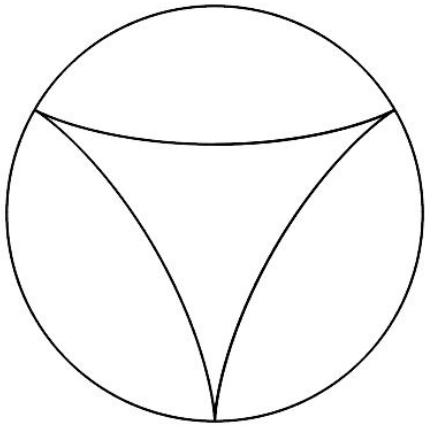


Figura 1: Deltoide

Además como el grupo de los números complejos distintos de cero como vimos contiene la rotación $e^{i\theta}$ la cual actúa sobre la forma cubica, si tomamos $g_\theta = e^{i\theta}z$ entonces la acción $(f g_\theta)z = \mathbf{Re}(\alpha e^{3i\theta}z^3 + \beta e^{i\theta}z^2\bar{z})$ luego $(\alpha, \beta) \to (\alpha e^{3i\theta}, \beta e^{i\theta})$. Esto geométricamente indica que α gira tres veces mientras que β solo una.
El plano $\alpha = 1$ o el plano v se mueven por el grupo del circulo, esto esto significa que el hipocicloide gira aplicando un giro $0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}$ a una cúspide mientras que $\alpha = 1$ se mueve y regresa a si mismo. El hipocicloide tiene una simetría triple, por lo que el resultado se cierra y forma un toro, que como vimos ya en teorema 1. los estratos P están en la superficie de dicho toro y los estratos X en el borde en cúspide. La superficie parametrizada tiene la forma exponencial

$$(\theta, \phi) \to (e^{3i\theta}, 2e^{i\theta+\phi} - e^{i(\theta-2\phi)}), 0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi.$$

3. Toro umbílico y proyección ortogonal

La superficie del del toro umbílico es una superficie no regular compacta la cual presenta singularidad a lo largo de su borde en cúspide ya que no esta bien definido un campo normal a lo largo de dicho borde, además la superficie no tendría su primer forma fundamental bien definida. Es por ello que nos interesa dicha curva singular sobre la superficie por tanto presentamos la parametrización local(5) con $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ y cuya gráfica esta dada en la Figura 2.

$$X(u,v) = \left(\sin(u)\left(7+\cos\left(\frac{u}{3}-2v\right)+2\cos\left(\frac{u}{3}+v\right)\right), \cos(u)\left(7+\cos\left(\frac{u}{3}-2v\right)+2\cos\left(\frac{u}{3}+v\right)\right), \sin\left(\frac{u}{3}-2v\right)+2\sin\left(\frac{u}{3}+v\right)\right) \tag{5}$$

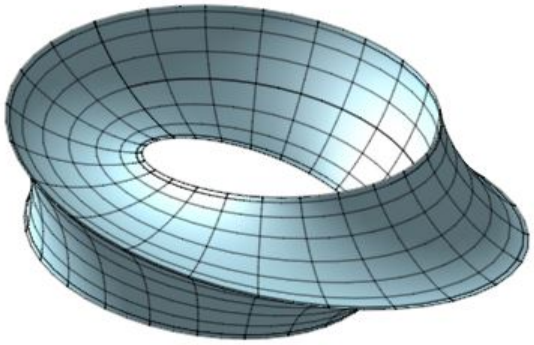


Figura 2: Toro umbílico

Como ya hemos dicho debido a la singularidad de su borde en cúspide, calcularemos esta curva sobre la superficie a partir del normal a la superficie, dicha curva de 3 giros sera el conjunto singular de X

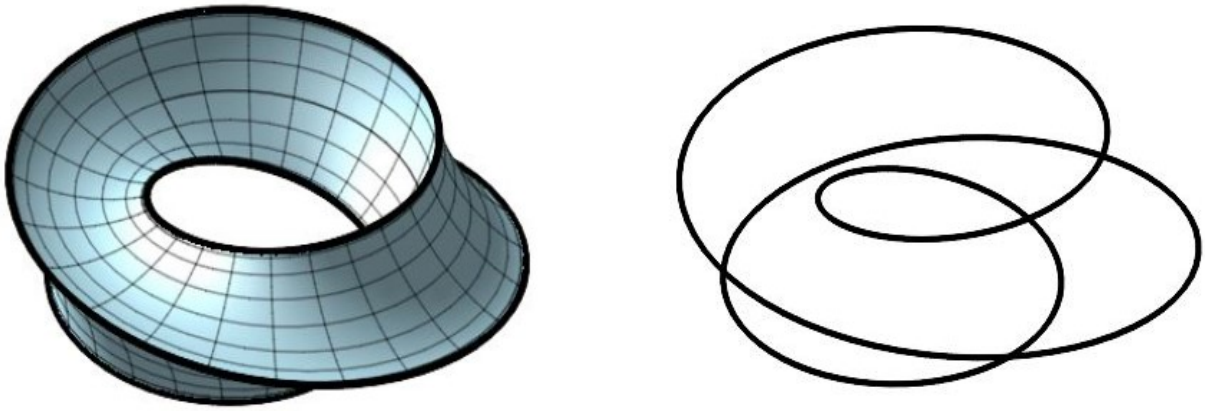
el cual basta con hallar cuando se anula

$$X_u \times X_v = \Big(2\sin(u)\Big(\cos\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)\Big)^2 + \Big(2\cos(u)\sin\Big(\frac{u}{3}+v\Big)+2\sin(u)\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)+14\sin(u)\Big)$$
$$\cos\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)-2\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)\Big(\cos(u)\sin\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)+2\sin(u)\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)+7\sin(u)\Big),$$
$$2\cos(u)\Big(\cos\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)\Big)^2 + \Big(2\cos(u)\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)-2\sin(u)\sin\Big(\frac{u}{3}+v\Big)+14\cos(u)\Big)$$
$$\cos\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)+2\sin(u)\sin\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)-4\Big(\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)+\frac{7}{2}\Big)\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)$$
$$\cos(u),-2\Big(-\sin\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)+\sin\Big(\frac{u}{3}+v\Big)\Big)\Big(7+\cos\Big(\frac{u}{3}-2v\Big)+2\cos\Big(\frac{u}{3}+v\Big)\Big)$$

El cual se anula cuando $v=0$, así pues al tener que $X_u \times X_v = 0$, evaluamos $X|_{v=0}$ y así obtenemos nuestro conjunto singular Σ dado por la curva.

$$\alpha(t) = \Big(\sin(t)\Big(7+3\cos\Big(\frac{t}{3}\Big)\Big), \cos(t)\Big(7+3\cos\Big(\frac{t}{3}\Big)\Big), 3\sin\Big(\frac{t}{3}\Big)\Big) \tag{6}$$

Dicho conjunto singular es una curva cerrada sobre la superficie del toro umbílico (ver figura 3a) el cual es el borde de la superficie y esta dado por la curva regular cerrada (ver figura 3b). descrita por la ecuación (6). Esta sera la curva a la cual le aplicaremos la proyección ortogonal.



(a) Curva sobre el toro (b) conjunto singular

Figura 3: Superficie y su conjunto singular

Para definir la familia de proyecciones ortogonales [2] en un plano consideraremos el contacto de la curva α con lineas. Agrupando todas las lineas paralelas y representándolas por su vector unitario de

dirección $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$. Precisamente el vector $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^2$ es el kernel de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en un plano $\mathbf{V}$, este plano sera ortogonal a $\mathbf{v}$. Este sera $\mathbf{T_v}\mathbb{S}^2$, es decir el espacio tangente a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en $\mathbf{v}$. Tomaremos entonces una transformación como la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{T_v}\mathbb{S}^2$ paralela a $\mathbf{v}$. Así entonces si tomamos un punto u en la curva α, este sera proyectado a un punto $q = u + \lambda v$. Como $q \in \mathbf{T_v}\mathbb{S}^2$ entonces $\langle q, v\rangle = 0$ y de esto tenemos que $\lambda = -\langle u, v\rangle$. Si movemos $\mathbf{v}$ en $\mathbf{S}^2$ obtenemos la familia de proyecciones ortogonales $P : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{T}\mathbb{S}^2$ dada por

$$P(u, v) = (v, \alpha(u) - \langle \alpha(u), v\rangle v) \tag{7}$$

Esta proyección ortogonal se puede ilustrar en la figura 4, en la que podemos ver como sobre la hélice cilíndrica actúa la proyección ortogonal cuyo kernel es el vector en la esfera y se proyecta en un plano ortogonal a la esfera, obteniendo así una curva plana en el plano tangente a la esfera en dicho vector.

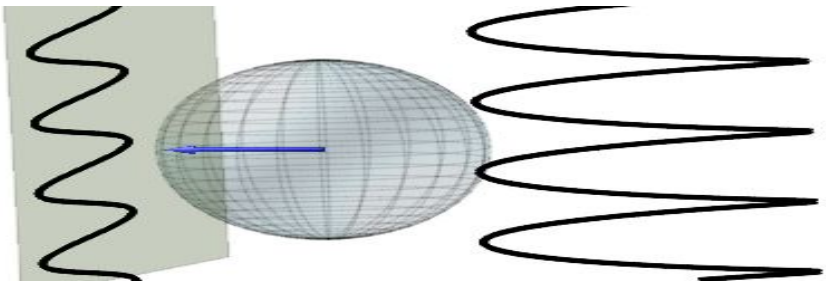
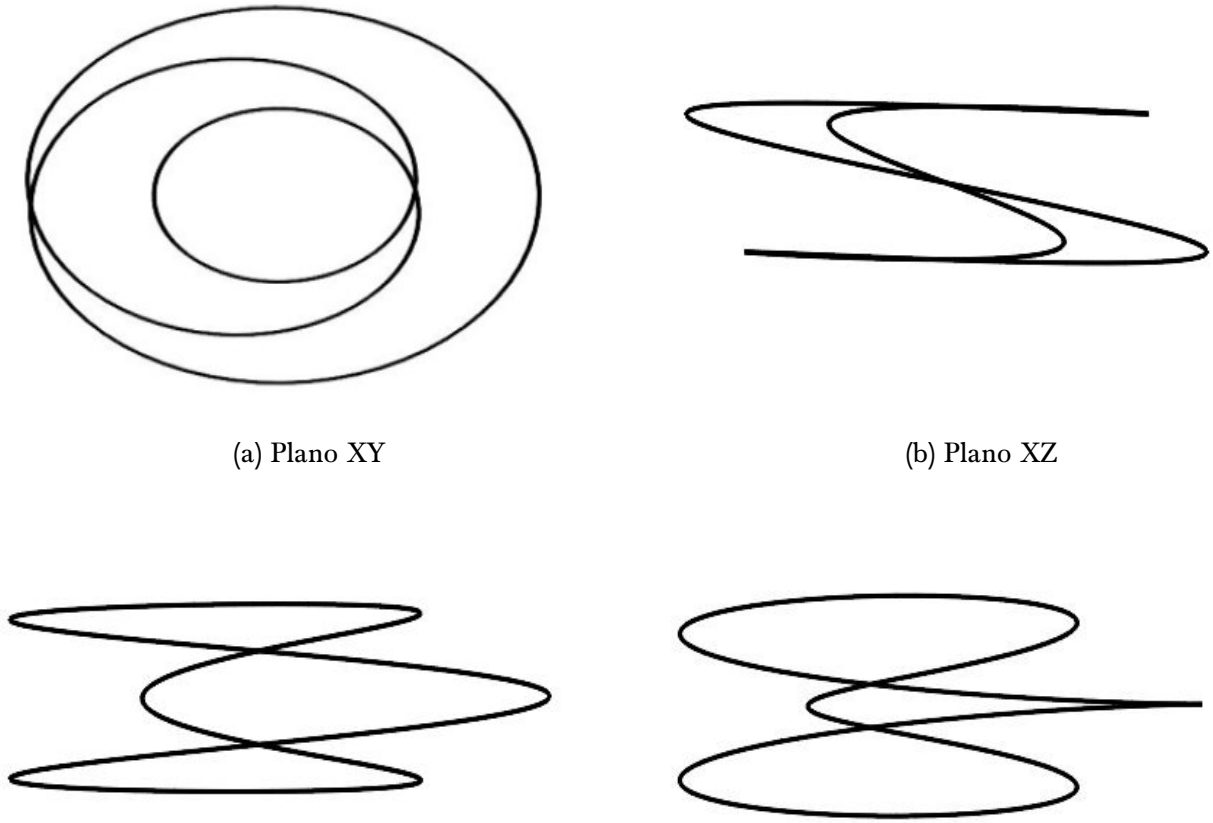


Figura 4: Proyección ortogonal

al proyectar la curva obtenemos una familia de curvas cerradas planas, algunas de estas curvas planas proyectadas en dirección ortogonal a los planos xy, xz, yz y una dirección oblicua son (ver figura 5).

Algunas de estas curvas como la figura 5d presentan cúspides, a medida que variamos el kernel de la proyección, otras simplemente y como figura 5a, figura 5b, figura 5c solamente presentan auto intersecciones, por ello el estudio estará enfocado encontrar aquellas direcciones de proyección en las que como en la figura 5d obtengamos singularidades de puntos de cúspide, para ello aplicamos a (6) la proyección ortogonal (7), tomando un punto $v = (a, b, c) \in \mathbf{S}^2$ obteniendo así una familia de curvas dadas por la ecuación



(a) Plano XY

(b) Plano XZ

(c) Plano YZ

(d) Dirección oblicua

Figura 5: Algunas direcciones de proyección

$$
\begin{aligned}
P(t) = &\left(\sin(t)\left(7+3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)-\left(3\sin(t)a\cos\left(\frac{t}{3}\right)+3\cos(t)b\cos\left(\frac{t}{3}\right)+7\sin(t)a+7\cos(t)b\right.\right.\\
&\left.+3\sin\left(\frac{t}{3}\right)c\right)a,\cos(t)\left(7+3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)-\left(3\sin(t)a\cos\left(\frac{t}{3}\right)+3\cos(t)b\cos\left(\frac{t}{3}\right)+7\sin(t)a\right.\\
&\left.+7\cos(t)b+3\sin\left(\frac{t}{3}\right)c\right)b,3\sin\left(\frac{t}{3}\right)-\left(3\sin(t)a\cos\left(\frac{t}{3}\right)+3\cos(t)b\cos\left(\frac{t}{3}\right)+7\sin(t)a\right.\\
&\left.+7\cos(t)b+3\sin\left(\frac{t}{3}\right)c\right)c
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Como se desea saber cuando (8) no es regular es necesario saber cuando $P' = 0$ en alguna dirección $(a, b, c) \in \mathbf{S}^2$, así pues veamos

$$\begin{aligned} P' =& [\cos(t)\left(7 + 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{t}{3}\right) - \left(3\cos(t)\,a\cos\left(\frac{t}{3}\right) - \sin(t)\,a\sin\left(\frac{t}{3}\right) - 3\sin(t)\right. \\ & b\cos\left(\frac{t}{3}\right) - \cos(t)\,b\sin\left(\frac{t}{3}\right) + 7\cos(t)\,a - 7\sin(t)\,b + \cos\left(\frac{t}{3}\right)c\Big)a, -\sin(t)\left(7 + 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right) \\ & -\cos(t)\sin\left(\frac{t}{3}\right) - \left(3\cos(t)\,a\cos\left(\frac{t}{3}\right) - \sin(t)\,a\sin\left(\frac{t}{3}\right) - 3\sin(t)\,b\cos\left(\frac{t}{3}\right) - \cos(t)\right. \\ & b\sin\left(\frac{t}{3}\right) + 7\cos(t)\,a - 7\sin(t)\,b + \cos\left(\frac{t}{3}\right)c)\Big)b, \cos\left(\frac{t}{3}\right) - \left(3\cos(t)\,a\cos\left(\frac{t}{3}\right) - \sin(t)\right. \\ & a\sin\left(\frac{t}{3}\right) - 3\sin(t)\,b\cos(t/3) - \cos(t)\,b\sin\left(\frac{t}{3}\right) + 7\cos(t)\,a - 7\sin(t)\,b + \cos\left(\frac{t}{3}\right)c\Big)c] \end{aligned} \tag{9}$$

Para hallar la dirección (a, b, c) procederemos a resolver b en la primer componente de la curva 9, tomaremos x y y como el numerador y denominador respectivamente para ayudar la muestra de los cálculos

$$\begin{aligned} x =& \left(3\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)a^2 - \sin(t)\sin\left(\frac{t}{3}\right)a^2 + 7\cos(t)\,a^2 + \cos\left(\frac{t}{3}\right)ac\right. \\ & -3\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right) + \sin(t)\sin\left(\frac{t}{3}\right) - 7\cos(t) \\ y =& a\left(\cos(t)\sin\left(\frac{t}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\sin(t) + 7\sin(t)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces de (10) tomamos x y y como ya lo habíamos dicho y se expresa la resolución de b como

$$\frac{x}{y} \tag{11}$$

Evaluando entonces la solución encontrada (11) de b, en la segunda componente de (9), tomaremos solo el numerador de esta x, y resolveremos para para c

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)}\left(256\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^8\right. \\ & +896\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^7 + 336\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^6 - 1456\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^5 - 948\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 - 8a^2\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 \\ & \left.+644\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 42a^2\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 413\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 50a^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora bien para encontrar soluciones para a se reemplazaran las soluciones ya encontradas para b y c en (11), (12) respectivamente y estas las reemplazaremos en la tercera componente de (9), teniendo

así dos soluciones a_1 y a_2

$$a_1 = \frac{1}{\left(81\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 - 864\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 2500\right)}\left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\right.$$
$$\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3\right. \tag{13}$$
$$\left.\left.-14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = -\frac{1}{\left(81\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 - 864\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 2500\right)}\left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\right.$$
$$\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3\right. \tag{14}$$
$$\left.\left.-14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Con estas 2 soluciones para a procedemos a reemplazarlas en (12) obteniendo así 2 soluciones para c respectivamente.

$$c_1 = \left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4\right.\right.$$
$$\left.\left.+28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\right)^{-1}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2\right. \tag{15}$$
$$\left.-42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)$$

$$c_2 = -\left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4\right.\right.$$
$$\left.\left.+28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\right)^{-1}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2\right. \tag{16}$$
$$\left.-42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)$$

Ya que obtuvimos soluciones para a y c solo resta reemplazar cada una de ellas en (11) y así obtener

soluciones para b

$$b_1 = -\left(\left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)^2\right)^{-1/2}\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 6\cos\left(\frac{t}{3}\right) - 7\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\sin\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$b_2 = \left(\left(\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)^2\right)^{-1/2}\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 6\cos\left(\frac{t}{3}\right) - 7\right)\left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\sin\left(\frac{t}{3}\right)$$

Ahora bien, para que todas estas cuentas tengan sentido es necesario que estas soluciones estén en $\mathbf{S}^2$, por ellos se confirma que

$$(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2 = 1$$
$$(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2 = 1$$

Así pues como tenemos las componentes del punto $(a, b, c) \in \mathbf{S}^2$ tales que estas anulan P', entonces con cada entrada hallada que depende de un parámetro t, podemos construir las 2 curvas espaciales que están sobre la esfera $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$. En (17) se presenta la ecuación parametrica de una de estas curvas.

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(t) = \Bigg[& \frac{1}{\left(81\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 - 864\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 2500\right)} \Bigg(\Bigg(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50 \Bigg) \\
& \left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2 \left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 \right. \\
& \left. -14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)\Bigg)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \Bigg(\Bigg(\Bigg(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50 \Bigg) \\
& \left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)^2 \left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 \right. \\
& \left. -21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)^{2-1/2} \left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 6\cos\left(\frac{t}{3}\right) - 7\right)\Bigg(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 \\
& -42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\Bigg)\Bigg(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\Bigg) \\
& \sin\left(\frac{t}{3}\right), \Bigg(\Bigg(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 + 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\Bigg)\Bigg(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\Bigg)^2 \\
& \left(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\right)^2\Bigg)^{-1} \cos\left(\frac{t}{3}\right) \\
& \left(9\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 - 42\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 50\right)\Bigg(16\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^4 + 28\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^3 - 14\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)^2 \\
& -21\cos\left(\frac{t}{3}\right) + 1\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Es claro que como $\gamma_1(t) = (a_1, b_1, c_1)$ esta es una parte de la curva cobre la esfera, pero como todos estos son puntos antipodales podemos decir que $\gamma_1(t) = -\gamma_2(t) = (a_2, b_2, c_2)$, estas curvas sobre la esfera

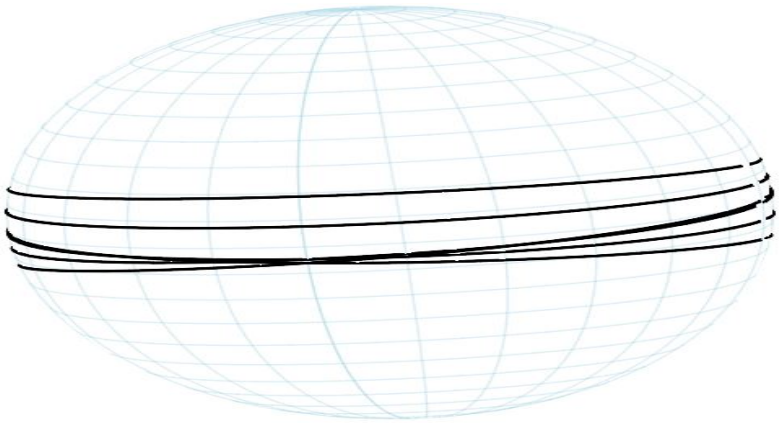


Figura 6: Curva sobre la esfera

Así pues hemos logrado definir una familia de curvas proyectadas cuyo kernel vive en $\{\gamma_1 \cup \gamma_2\}$, tales que dicha familia $\hat{P} : \mathbf{R}^3 \times \{\gamma_1 \cup \gamma_2\} \subset \mathbf{S}^2 \to \mathbf{TS}^2$. Además de esto en los puntos de auto intersección de la curva γ dicha proyección presenta en la curva $\hat{P}$ 2 puntos de cúspide.
Los resultados antes mostrados se resumen en el siguiente teorema

Teorema 2. *Sea M la superficie del toro umbílico cuyo conjunto singular esta dado como en (6), y sea $v \in \mathbf{S}^2$ el kernel de la proyección P_v, entonces toda curva proyectada con kernel en $\{\gamma_1 \cup \gamma_2\}$ tiene al menos un punto de cúspide.*

La demostración de este teorema es una estrategia usada para hallar dichas curvas que generan la familia de curvas proyectadas que poseen puntos de cúspide, esta estrategia se puede emplear para hallar estas mismas curvas sobre la esfera que indiquen la dirección de proyección de algunas curvas espaciales cerradas en la cuales la curva proyectada tendrá una o mas cúspides.

4. Conclusiones

El objetivo de esta tesis era hacer un análisis global de las singularidades de la proyección ortogonal de una curva ya que en la literatura esta ampliamente estudiado desde el punto de vista local y semi local, pero de un análisis global se encuentra muy poca información, es por ello que en esta monografía se caracterizaron y capturaron todas aquellas curvas γ pertenecientes a la familia de proyecciones ortogonales de 6 que presentasen puntos de cúspide y además la estrategia que se empleo se puede aplicar a diversas curvas con el mismo fin.
Invito a la comunidad académica a seguir investigando en este análisis global de proyecciones ortogonales ya que hay problemas bastante interesantes que aun no se abordan.

Referencias

[1] Helaman Ferguson. Two theorems, two sculptures, two posters. *The American Mathematical Monthly*, 97(7):589–610, 1990.

[2] Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, and Farid Tari. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*. World Scientific, 2016.

[3] EC Zeeman. The umbilic bracelet and the double-cusp catastrophe. In *Structural stability, the theory of catastrophes, and applications in the sciences*, pages 328–366. Springer, 1976.