

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

CONVERGENCIA ESTADÍSTICA Y SUCESIONES CESÀRO SUMABLES FUERTES

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

Juan Felipe Castañeda Hortua
Dirigido por: Julio Cesar Ramos Fernández

Bogotá DC
Diciembre de 2025

Resumen

El presente trabajo aborda el estudio de la convergencia estadística y su vínculo con las sucesiones Cesàro-sumables por medio de funciones módulo que satisfacen ciertas condiciones de densidad natural y propiedades del análisis matemático, como lo son la continuidad, monotonía y subaditividad. De igual manera, se analiza la relación entre convergencia estadística y la sumabilidad de Cesàro ampliando la comprensión de procesos de convergencia, proporcionando herramientas conceptuales y analíticas para el tratamiento de sucesiones que no convergen en el sentido clásico.

Palabras clave: Densidad natural, función módulo, convergencia estadística, sumabilidad de Cesàro
Clasificación AMS: 40A05, 40A35, 46A45, 40G15
Agradecimientos: Deseo expresar mi sincero agradecimiento a mi director Julio Cesar Ramos por su guía, paciencia y compromiso durante este proceso. A mi esposa y mi hija, por brindarme un horizonte y la fortaleza necesaria para continuar cada día. A mi madre, que nunca dejó de creer en mí. A todos ustedes, gracias por ser parte esencial de este logro.

Índice

1. Introducción **3**

2. Preliminares **4**

3. Convergencia estadística **6**

4. Sucesiones estadísticamente densas. **9**

5. Sucesiones de promedios parciales y varianzas parciales **13**

6. Sucesiones Cesàro sumables **17**

7. Conclusiones **26**

1. Introducción

El principio de convergencia estadística o casi convergencia tiene su primera versión realizada por Zygmund [13] en 1935, el cual expuso ésta como una generalización de la convergencia habitual. Sin embargo, en su caso general, ni los límites usuales ni los límites estadísticos podrían calcularse bajo una gran precisión; desde esta imprecisión se han desarrollado varios enfoques matemáticos, tales como la teoría de conjuntos difusos y lógica difusa, los cuales toman elementos del conjunto de forma parcial y su grado de pertenencia se mide bajo una función

$$\mu_A(x) : X \to [0, 1]$$

que, bajo un conjunto universal X, se dice que la función toma el valor 0 si $x \notin A$, y 1 si $x \in A$; del mismo modo, si $0 < \mu_A(x) < 1$ entonces x está parcialmente contenido en A.

Posteriormente, la convergencia estadística fue caracterizada por Schoenberg [12], el cual, desde la teoría de la probabilidad, describe la convergencia de sucesiones de variables aleatorias. En este contexto, se dice que una sucesión de variables aleatorias X_n converge estadísticamente a una variable aleatoria X si:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

para todo $\epsilon > 0$.

En décadas posteriores, este principio de convergencia ha tenido lugar en campos del análisis, tales como la teoría de la medida, teoría de la aproximación, espacios de Banach, espacios localmente convexos, teoría de la sumabilidad, teoría ergódica, teoría de números, series trigonométricas, análisis de Fourier y optimización. [6]

Autores como Connor [5], Fridy [7] y Salat [14] abordaron la convergencia estadística desde la perspectiva de los espacios de sucesiones; lo que se conoce como teoría de la sumabilidad. Esta se encarga principalmente de extender la noción de series infinitas, sobre todo en aquellas que no convergen en un sentido tradicional; aquí, la teoría de la sumabilidad otorga valores a estas series divergentes. Esta teoría presenta igualmente propiedades de convergencia, como lo son los métodos de sumabilidad de Abel, Cesàro y Borel.

En especial, el método de sumabilidad de Cesàro nos presenta que si la media de las sumas parciales converge, la serie es sumable en el sentido de Cesàro, es decir, que el límite de la media de sus sumas parciales existe y es un número real x.

La idea de función módulo fue presentada por primera vez por Nakano [10], éste da una manera de medir un operador lineal entre espacios de funciones. Al tener las propiedades de monotonía, triangularidad y homogeneidad, esta función módulo de Nakano se presenta como posible vía para evaluar propiedades de funciones que son complicadas de evaluar con otras normas.

Décadas más tarde, y tomando en cuenta la caracterización de funciones módulo no acotadas, las cuales no poseen un límite superior finito; Aizpuru [1], presenta el principio de convergencia no matricial, tal como la convergencia puntual y la convergencia uniforme, que no requieren el uso de matrices directamente al exponerse. De igual manera, este caracteriza la noción de f-densidad, la cual se relaciona con la distribución F, definida como la razón entre dos varianzas. Recientemente, la noción de convergencia estadística se ha extendido a la noción de acotación f-estadística por Bhardwaj [3] quien propone que las sucesiones acotadas son aquellas sucesiones que son acotadas f-estadísticamente para cada módulo no acotado. Esto es que su módulo está acotado por un número finito con probabilidad 1.

Usando funciones módulo como punto de partida, autores como Maddox [9], Connor [4], Ruckle [11], Kramber [8] entre otros, han construido espacios de sucesiones con aplicaciones directas a la convergencia estadística y la sumabilidad fuerte de Cesàro, tratadas juntas especialmente por Connor [5].

Este trabajo muestra detalladamente la teoría de convergencia estadística, hasta el punto de asociación con la sumabilidad de Cesàro y las funciones módulo.

2. Preliminares

En vista que este trabajo trata sobre algunas nociones de convergencias de sucesiones, es pertinente introducir, a manera de preliminares, algunas notaciones y definiciones.

Definición 1 ([2] Sucesión). Se entiende como **sucesión** una función F cuyo dominio es el conjunto de todos los números enteros positivos. El recorrido de F es el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \dots\}$, también notado como $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ y el valor F_n se denomina el n-ésimo término de la sucesión.

Definición 2 ([2] Sucesión convergente). Se dice que una **sucesión** $\{x_n\}$ **converge** a un término x si para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que $n \geq N$ implica que $|x_n - x| < \epsilon$.

Definición 3 ([2] Sucesión de Cauchy). Se dice que una **sucesión** $\{x_n\}$ **es de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que para todos los números enteros positivos $m, n > N$ se tiene $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Definición 4 ([2] Límite superior y límite inferior de una sucesión real). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Supóngase que existe $U \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica

$$x_n < U + \epsilon$$

.

2. Dados $\epsilon > 0$ y $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que

$$x_n > U - \epsilon$$

Entonces U se llama el **límite superior** de $\{x_n\}$ y se escribe

$$U = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

La primera condición implica que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ está acotado superiormente. Si ese conjunto no está acotado superiormente, se define $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$.

El **límite inferior** de $\{x_n\}$ se define como sigue:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty} a_n,$$

donde $a_n = -x_n$ para $n = 1, 2, \dots$.

Definición 5 ([14] Densidad Natural). Para un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ y $A(n) = |A \cap \{1, 2, \dots, n\}|$, donde $|E|$ es la cardinalidad del conjunto E, se definen las cantidades

$$\bar{\delta} = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \quad \text{y} \quad \underline{\delta} = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}.$$

Estos son llamados la densidad superior e inferior, respectivamente, del conjunto A. Adicionalmente, si

$$\bar{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) = \delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n},$$

entonces el número $\delta(A)$ se llamará la **densidad natural** del conjunto A.

Ilustramos esta definición con un ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ el conjunto de los números pares. Entre los primeros n números naturales, la cantidad de números pares es la parte entera de $\frac{n}{2}$. Entonces, por definición de parte entera, se tiene

$$\frac{\frac{n}{2}}{n} \leq \frac{A(n)}{n} < \frac{\frac{n}{2}+1}{n}$$

y por el teorema del emparedado, se puede concluir que

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Luego, la densidad de los números pares es $\frac{1}{2}$. □

✓ En lo que sigue, diremos que una sucesión $x = (x_k)$ satisface una propiedad P en **casi cualquier parte** si el conjunto de índice $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que x_k no cumple P tiene densidad natural 0. Ilustramos esta noción con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Considérese la sucesión $a = (a_i)$ cuyos términos son

$$a_i = \begin{cases} i, & \text{cuando } i = n^2 \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Se puede decir que esta sucesión es nula en casi cualquier parte ya que, como vimos anteriormente, el conjunto

$$\{k \in \mathbb{Z}_+ : a_k \neq 0\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

tiene densidad natural cero. □

3. Convergencia estadística

En esta sección se darán definiciones y propiedades de la convergencia estadística de sucesiones numéricas. Se define sucesiones estadísticamente de Cauchy y se muestra que, al igual que ocurre en los números reales, una sucesión es estadísticamente convergente si y sólo si es estadísticamente de Cauchy. En primer lugar, tenemos el siguiente concepto:

Definición 6. (Sucesión estadísticamente convergente) Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales se dice que es **estadísticamente convergente** a $L \in \mathbb{R}$ si para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Es decir, $\delta(\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}) = 0$. En tal caso, escribimos $L = \lim_{stat} x_k$, entendiendo que $k \to \infty$.

Claramente si una sucesión $x = (x_k)$ converge a L, entonces también converge estadísticamente a L pues para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}$ es finito; pero el recíproco NO es cierto tal como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 (Convergencia estadística no implica convergencia usual). Considérese la sucesión $a = (a_i)$ cuyos términos son

$$a_i = \begin{cases} i, & \text{cuando } i = n^2 \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Tomando $L = 0$; los términos distintos de 0 aparecen en las posiciones de los cuadrados perfectos. Luego, para $\epsilon > 0$ cualquiera se tiene que

$$|\{k \leq n : |a_k - L| \geq \epsilon\}| \leq \sqrt{n}$$

pues los valores de k para los cuales $a_i \geq \epsilon$ son $k = i^2$ con $i^2 \leq n$. Usando de nuevo el teorema del emparedado, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |a_k - L| \geq \epsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{stat} a_k = L = 0$; pero esta sucesión no converge en el sentido usual. □

Relacionado con el concepto anterior, también tenemos:

Definición 7. (Sucesión estadísticamente de Cauchy) Una sucesión $x = (x_k)$ se dice que es **estadísticamente de Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$, hay un entero positivo $N = N(\epsilon)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_N - x_k| \geq \epsilon\}| = 0.$$

O equivalentemente, para cada $\epsilon > 0$, se cumple que $\delta(\{k \leq n : |x_N - x_k| \geq \epsilon\}) = 0$.

La relación fundamental entre ser estadísticamente de Cauchy y ser estadísticamente convergente es análoga al sentido usual. Por ello, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1. *La sucesión (x_n) es estadísticamente convergente si y solo si es estadísticamente de Cauchy.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea (x_n) una sucesión estadísticamente convergente a L. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ se tiene

$$\delta\left(\left\{n : |x_n - L| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) = 0.$$

Esto significa que $|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ en casi todo n. Luego, para casi todo n, m, se cumple que

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \epsilon.$$

Por tanto,

$$\delta(\{n : |x_n - x_m| \geq \epsilon\}) = 0$$

lo que implica que (x_n) es estadísticamente de Cauchy.

[$\Leftarrow$] Sea (x_n) una sucesión estadísticamente de Cauchy, entonces existe un conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que la sucesión restringida $(x_n)_{n \in K}$ es de Cauchy en el sentido clásico. Por la completitud de los números reales, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que (x_n) converge a L para $n \in K$. Por lo tanto, (x_n) converge estadísticamente a L. □

A continuación se da un ejemplo que muestre la relación entre ser convergente estadísticamente y estadísticamente de Cauchy.

Ejemplo 4. Considérese la siguiente sucesión $a = (a_i)$ tal que

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{cuando } i = n^2 \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

(a_i) **es estadísticamente convergente a** 0: Sea $A = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ el conjunto de índices donde $a_i \neq 0$, es decir, **el conjunto de los cuadrados perfectos**.
Hasta n, hay aproximadamente $\sqrt{n}$ cuadrados perfectos, por lo tanto, la densidad natural de A es

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\}|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.$$

Esto es, que para n muy grande, los cuadrados perfectos aparecen con menos frecuencia. Luego (a_i) converge estadísticamente a 0.

(a_i) **es estadísticamente de Cauchy**: Tomando N tal que $a_N = 0$, se sigue que

$$|a_k - a_N| = |a_k - 0| = |a_k|$$

Los índices k donde $|a_k| > \epsilon$ que tienen densidad natural 0, son los cuadrados perfectos. Por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_N - x_k| \geq \epsilon\}| = 0.$$

✓ Es importante destacar que no todas las propiedades de sucesiones convergentes son verdaderas para sucesiones estadísticamente convergentes. Por ejemplo, toda subsucesión de una sucesión convergente a L es convergente al mismo valor L. Sin embargo, en la convergencia estadística, esta propiedad no es verdad tal como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Considérese la sucesión $a = (a_i)$ cuyos términos son

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ no es cuadrado perfecto,} \\ 1, & \text{si } i \text{ es cuadrado perfecto.} \end{cases}$$

Esta sucesión es estadísticamente convergente. De hecho, $\lim_{stat} a_k = L = 0$.

Ahora se construye una subsucesión que solo contenga el 0 y el 1 alternadamente.

$$a_{i_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } i_k \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } i_k \text{ es par.} \end{cases}$$

De hecho, podemos elegir los índices i_k de tal manera que uno sea un cuadrado perfecto, y el siguiente no lo sea. Por ejemplo, $i_k = 1, 2, 4, 5, 9, 10, 16, 17, \cdots$. Luego, la subsucesión es $(1, 0, 1, 0, \dots)$. Ahora, para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\left| \left\{ k \leq n : \left| a_{i_k} - 0 \right| \geq \frac{1}{2} \right\} \right| = \frac{n}{2}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |a_{i_k} - 0| \geq \frac{1}{2}\}| = \frac{1}{2} \neq 0$$

y esta subsucesión no es estadísticamente convergente a $L = 0$. □

4. Sucesiones estadísticamente densas.

Ya teniendo la definición de sucesiones estadísticamente convergentes y la densidad natural, podemos relacionarlas con las siguientes propiedades.

Definición 8. (Conjunto estadísticamente denso) Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{N}$ se dice **estadísticamente denso** si $\delta(K) = 1$.

Veamos un ejemplo de este concepto.

Ejemplo 6. El conjunto $\{i \neq n^2 : i = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots\}$ es estadísticamente denso, mientras que el conjunto $K = \{3i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ no lo es. En efecto, ya vimos que el conjunto $U = \left\{k = i^2 : i \in \mathbb{Z}^+\right\}$

tiene densidad natural nula. En consecuencia, su complemento debe tener densidad 1. Similarmente, el número de elementos del conjunto $\{3i : i = 1, 2, 3, \dots\} \cap \{1, 2, ..., n\}$ se puede acotar por $\frac{n}{3}$ y $\frac{n}{3} + 1$ y por esa razón $\delta(K) = \frac{1}{3}$. Luego, K no es estadísticamente denso.

También requerimos de la siguiente definición:

Definición 9. Sea B subconjunto de $A \subseteq \mathbb{Z}^+$. Se dice que B es estadísticamente denso en A si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|} = 1.$$

A continuación establecemos algunas propiedades de los conjuntos estadísticamentes densos:

Teorema 2. *(Densidad estadística) Las siguientes propiedades son verdaderas:*

1. *Un subconjunto estadísticamente denso de un conjunto estadísticamente denso es un conjunto estadísticamente denso.*
2. *La intersección y la unión de conjuntos estadísticamente densos son conjuntos estadísticamente densos.*

Demostración. **1**. Sea A un subconjunto estadísticamente denso de $\mathbb{Z}^+$ y sea $B \subseteq A$. Se definen las sucesiones

$$a_n = \frac{|B \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}.$$

Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Luego, por la regla del producto de límites de sucesiones, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 1 \cdot 1 = 1$$

y por lo tanto, B es estadísticamente denso.

2. Ahora supongamos que A y B son estadísticamente densos en $\mathbb{Z}^+$. Vamos a mostrar que $A \cap B$ es también estadísticamente denso. Para esto, se consideran los complementos $A^c = \mathbb{N} - A$ y $B^c = \mathbb{N} - A$, como A y B son estadísticamente densos, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A^c \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|B^c \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n} = 0.$$

Como $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$|(A \cap B)^c \cap \{1, 2, \dots, n\}| = |(A^c \cup B^c) \cap \{1, 2, \dots, n\}| \leq |A^c \cap \{1, 2, \dots, n\}| + |B^c \cap \{1, 2, \dots, n\}|.$$

Dividiendo por n y aplicando límite, se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|(A\cap B)^c \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n} \leq 0+0=0.$$

Luego, como la densidad natural de $(A\cap B)^c$ es cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A\cap B)\cap \{1,2,\dots,n\}|}{n} = 1$$

y esto significa que $A\cap B$ es estadísticamente denso.

Ahora vamos a mostrar que $A\cup B$ es también estadísticamente denso. Para todo n se cumple

$$|(A\cup B)\cap\{1,2,\dots,n\}| \geq |A\cap\{1,2,\dots,n\}|.$$

Dividiendo por n y aplicando límites, se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|(A\cup B)\cap\{1,2,\dots,n\}|}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|A\cap\{1,2,\dots,n\}|}{n} = 1.$$

La única posibilidad es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A\cup B)\cap\{1,2,\dots,n\}|}{n} = 1.$$

Luego $A\cup B$ es estadísticamente denso y el teorema está demostrado. □

Ahora trasladamos esta noción de densidad al contexto de sucesiones y subsucesiones:

Definición 10 (Subsucesiones estadísticamente densa). Una subsucesión h de una sucesión l es llamada **estadísticamente densa** en l si el conjunto de todos los índices de elementos de h es estadisticamente denso.

Con el anterior teorema y esta definición, se da el siguiente resultado importante dirigido a subsucesiones estadísticamente convergentes.

Teorema 3. *(Densidad estadística en subsucesiones) Sea l una sucesión de números complejos. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. *Una subsucesión estadísticamente densa de una subsucesión estadísticamente densa en l, también es estadísticamente densa en l.*
2. *La intersección y unión de dos subsucesiones estadísticamente densas son subsucesiones estadísticamente densas.*

Demostración. **1.** Sean (x_n) una sucesión y $\left(x_{n_k}\right)$ una subsucesión cuyos índices $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tienen densidad 1, y adicionalmente, sea $(x_{n_{k_j}})$ otra subsucesión con índices $B = \{n_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ estadísticamente densa en relación a A, entonces, por el teorema anterior, B tiene densidad 1. Esto significa que la sucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ es estadísticamente densa en la sucesión original.

2. Del mismo modo, si (x_n) es una sucesión, y $A, B \subset \mathbb{N}$ son los conjuntos de índices de dos subsucesiones con $\delta(A) = \delta(B) = 1$, entonces las subsucesiones correspondientes a $A \cap B$ y $A \cup B$ también son estadísticamente densas en la sucesión original. □

Ahora podemos dar la caracterización de la convergencia estadística en términos de subsucesiones:

Teorema 4. *Una sucesión l es estadísticamente convergente si y solo si cualquier subsucesión estadísticamente densa de l es estadísticamente convergente.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $l = (a_i)$ es estadísticamente convergente y sea $h = \{b_k; k = 1, 2, 3, \dots\}$ una subsucesión estadísticamente densa de l. Debemos mostrar que h también es estadísticamente convergente.

Supongamos que h diverge estadísticamente. Entonces, para cualquier número real L, hay algún $\epsilon > 0$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|H_{n,\epsilon}(L)| = d > 0$$

para algún $d \in (0, 1)$, donde

$$H_{n,\epsilon}(L) = \{k \leq n; |b_k - L| > \epsilon\}.$$

Como h es una subsucesión de l, se tiene que $\hat{H}_{n,\epsilon}(L) \supseteq H_{n,\epsilon}(L)$ donde

$$\hat{H}_{n,\epsilon}(L) = \{i \leq n; |a_i - L| > \epsilon\}.$$

Consecuentemente,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\hat{H}_{n,\epsilon}(L)| \geq d > 0,$$

lo cual implica que $\delta(\{i; |a_i - L| > \epsilon\}) \neq 0$. Por lo tanto, l es también estadísticamente divergente.

El recíproco es trivialmente cierto ya que l es una subsucesión estadísticamente densa de sí misma. □

Como consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene:

Corolario 1. *Una subsucesión estadísticamente densa de una sucesión estadísticamente convergente es estadísticamente convergente al mismo valor.*

5. Sucesiones de promedios parciales y varianzas parciales

Ahora vamos a relacionar el límite estadístico con el límite de los promedios. Con este fin, para cada sucesión $l = \{a_i; i = 1, 2, 3, \dots\}$ de números reales, es posible corresponder una nueva sucesión de sus promedios parciales $\mu(l) = \{\mu_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ mediante la expresión

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1}$$

Con esta notación, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5. *Si $a = (a_i)$ es una sucesión acotada estadísticamente convergente a L, entonces*

$$L = \lim_{stat} a_k = \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

Demostración. Por hipótesis $L = \lim_{stat} a_k$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{i \leq n : |a_i - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Ahora, $a = (a_i)$ es una sucesión acotada y por esa razón, existe $m > 0$ tal que $|a_i| < m$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto último implica que , existe un número $K > 0$ tal que $|a_i - L| < K$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A saber, $|a_i - L| \leq |a_i| + |L| \leq m + |L| = K$. Tomando el conjunto

$$H_{n,\epsilon}(L) = \{i \leq n : |a_i - L| \geq \epsilon\}$$

ahora, denotando $\left|H_{n,\epsilon}\right|$ como u_n, se tiene el siguiente sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} \left|\mu_n - L\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - L\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i - L| \\ &\leq \frac{1}{n}\left(K u_n + (n - u_n)\,\epsilon\right) \leq \frac{1}{n}\left(K u_n + n\epsilon\right) = \epsilon + K\left(\frac{u_n}{n}\right). \end{aligned}$$

Luego, para un n lo suficientemente grande, se tiene la desigualdad $\left|\mu_n - L\right| < \epsilon + K\epsilon$. Por lo tanto, $L = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ que era lo que se quería demostrar. □

Es natural preguntarse si el recíproco del resultado anterior es cierto. En el siguiente ejemplo, vemos que la convergencia de los promedios parciales de una sucesión no implica la convergencia estadística de esta sucesión.

Ejemplo 7. Consideramos la sucesión $l = \{a_i; i = 1, 2, 3, \dots\}$ cuyos términos son $a_i = (-1)^i \sqrt{i}$. Esta sucesión es estadísticamente divergente a pesar de que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

A continuación vemos la relación entre la convergencia estadística y la convergencia de las desviaciones estándar parciales. Con este fin, sea $a = (a_i)$ una sucesión de números reales, se define la sucesión de desviaciones estándar $\sigma = (\sigma_n)$ mediante la expresión

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_n)^2},$$

donde μ_n es el promedio parcial definido en (1). Como es usual, las varianzas parciales de (a_k) es la sucesión $\sigma^2 = \left(\sigma_n^2\right)$. Con estas notaciones, entonces se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6. *Si $a = (a_i)$ es una sucesión acotada que converge estadísticamente a a L, entonces* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Demostración. En primer lugar, vemos que existe $m > 0$ tal que $|a_i| \leq m$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ ya que por hipótesis esta sucesión es acotada. Se mostrará que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$. En efecto, por definición de los promedios parciales tenemos que

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mu_n^2.$$

De aquí que,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \lim_{n\to\infty} \mu_n^2.$$

Ahora, como $a = (a_i)$ es una sucesión acotada, podemos encontrar $K > 0$ tal que $|a_i^2 - L^2| < K$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, como antes, consideramos el conjunto $H_{n,\epsilon}(L) = \{i \leq n, i \in \mathbb{N}; |a_i - L| \geq \epsilon\}$ y denotando $\left|H_{n,\epsilon}(L)\right|$ como u_n, y usando la hipótesis de que $|a_i| < m$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mu_n^2\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - L^2) - (\mu_n^2 - L^2)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^2 - L^2\right| + \left|\mu_n^2 - L^2\right| < \frac{K}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i - L| + \left|\mu_n^2 - L^2\right| \\
&< \frac{K}{n}(u_n + (n - u_n)\epsilon) + \left|\mu_n^2 - L^2\right| < \frac{K}{n}(u_n + n\epsilon) + \left|\mu_n^2 - L^2\right| = K\left(\frac{u_n}{n}\right) + \epsilon K + \left|\mu_n^2 - L^2\right|,
\end{aligned}$$

donde hemos usados que $\left|a_i^2 - L^2\right| = |a_i - L||a_i + L| \leq K|a_i - L|$ en la segunda desigualdad. Ahora, por el teorema anterior, se tiene $L = \lim_{n\to\infty} \mu_n$, lo cual garantiza que $\lim_{n\to\infty} \mu_n^2 = L^2$, y teniendo en cuenta que

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 \leq K\epsilon$$

y el resultado sigue por la arbitrariedad del $\epsilon > 0$. □

Una consecuencia inmediata de la demostración anterior es referente a la sucesión de las varianzas parciales.

Corolario 2. *Si $a = (a_i)$ es una sucesión acotada que converge estadísticamente a a L, entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$.*

Ahora vemos un resultado en la cual la convergencia de los promedios parciales implica la convergencia estadística.

Teorema 7. *Sea $a = (a_i)$ una sucesión de números reales. Si su sucesión de promedios parciales $\mu = (\mu_n)$ converge a L y $a_i \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n$ (o $a_i \geq \lim_{n\to\infty} \mu_n$) para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $a = (a_i)$ converge estadísticamente a L.*

Demostración. Se asume que $L = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ y que $a_i \leq L$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ y sea $\epsilon > 0$ cualquiera.

Como antes, se considera el conjunto $H_{n,\epsilon}(L) = \{i \leq n, i \in \mathbb{N}; |a_i - L| \geq \epsilon\}$ y se denota $\left|H_{n,\epsilon}(L)\right|$ como u_n. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\left|L - \mu_n\right| &= \left|L - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L - a_i)\right| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L - a_i) \geq \frac{1}{n}\sum_{i\in H_{n,\epsilon}(L)}(L - a_i) \geq \left(\frac{u_n}{n}\right)\epsilon.\end{aligned}$$

consecuentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{\epsilon}\lim\left|L - \mu_n\right| = 0$$

lo cual significa que $a = (a_i)$ converge estadísticamente a L. Es decir, $\lim_{stat} a_k = L$. El caso que $a_i \geq L$ para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$ es similar. □

Finalmente caracterizamos la convergencia estadística en términos de las convergencias de las sucesiones de promedios parciales y de desviaciones estándar parciales.

Teorema 8. *La sucesión de números reales $a = (a_i)$ converge estadísticamente a L si y sólo si su sucesión de promedios parciales $\mu = (\mu_n)$ converge a L y su sucesión de desviaciones estándar $\sigma = (\sigma_n)$ converge a 0.*

Demostración. Ya hemos establecidos que si $a = (a_i)$ converge estadísticamente a L, entonces su sucesión de promedios parciales $\mu = (\mu_n)$ converge a L y su sucesión de desviación estándar $\sigma = (\sigma_n)$ converge a 0; así que solamente debemos establecer el recíproco. Supongamos entonces que $L = \lim_{n\to\infty} \mu_n$, que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ y sea $\epsilon > 0$ cualquiera.

Por definición de límite, para $0 < \lambda < \epsilon$, existe N tal que$\lambda > |L - \mu_n|$ para cada $n \geq N$. Entonces, para tales $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_n)^2 \geq \frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}(a_i - \mu_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}((a_i - L) + (L - u_n))^2 \\
&> \frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}((a_i - L) \pm \lambda)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}\left((a_i - L)^2 \pm 2\lambda(a_i - L) + \lambda^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}(a_i - \mu_n)^2 \pm 2\lambda\frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}(a_i - L) + \lambda^2,
\end{aligned}$$

donde hemos escrito $(a_i - \mu_n) = (a_i - L) + (L - \mu_n)$, se toma $+\lambda$ o $-\lambda$ de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Si $a_i - L \geq 0$ y $L - \mu_n \geq 0$, entonces $(a_i - L) + (L - \mu_n) \geq (a_i - L) > (a_i - L) - \lambda$, en este caso se toma $-\lambda$;

2. Si $a_i - L \geq 0$ y $L - \mu_n \leq 0$, entonces $(a_i - L) + (L - \mu_n) \geq (a_i - L) - |L - \mu_n| > (a_i - L) - \lambda$, en este caso se toma $-\lambda$;

3. Si $a_i - L \leq 0$ y $L - \mu_n \geq 0$, entonces $|(a_i - L) + (L - \mu_n)| = |(L - a_i) - (L - \mu_n)| > |(L - a_i) - \lambda| = |(a_i - L) + \lambda|$, en este caso se toma $+\lambda$;

4. Si $a_i - L \leq 0$ y $L - \mu_n \leq 0$, entonces $|(a_i - L) + (L - \mu_n)| \geq |L - a_i| > |(a_i - L) + \lambda|$, y como $a_i - L < -\epsilon$, en este caso se toma $+\lambda$;

En esta expresión, es posible tomar la sucesión $\{\lambda_k : k = 1, 2, 3, \dots\}$ tal que la sucesión λ_k^2 converge a 0, esto porque la sucesión $\mu = (\mu_n)$ converge a L cuando $n \to \infty$.

La suma

$$2\lambda\frac{1}{n}\sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon}(a_i - L)$$

también converge a 0 cuando $n \to \infty$ porque λ_k converge a 0 y

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - L) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |a|) \leq m + |a|.$$

Al mismo tiempo, $\sigma = (\sigma_n)$ también converge a 0. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon} (a_i - \mu_n)^2 = 0.$$

Finalmente, se tiene que

$$\epsilon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{i \leq n : |a_i - L| \geq \epsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i:|a_i - L|\geq\epsilon} |a_i - \mu_n|^2 = 0$$

lo cual significa que $L = \lim_{stat} a_k$. Esto culmina la demostración del teorema. □

6. Sucesiones Cesàro sumables

A continuación, se dará la definición de la función módulo, la cual nos ayudará a generalizar los conceptos de densidad y de sucesiones estadísticamente convergentes.

Definición 11 (Función módulo). Una función creciente y continua $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ se denomina *función módulo* (o simplemente *módulo*) si escumple las siguientes propiedades:

1. $f(h) = 0$ si y solo si $h = 0$;
2. $f(h_1 + h_2) \leq f(h_1) + f(h_2)$ para todo $h_1, h_2 \in [0, +\infty)$.

Es importante destacar que existen funciones módulo acotadas y no acotadas. Por ejemplo, la función $f(h) = \dfrac{h}{h+1}$ define un módulo acotada; mientras que la función $f(h) = \log(h + 1)$ es un módulo no acotado. En el siguiente enunciado, se presentan otras propiedades importantes de las funciones módulo.

Lema 1 (Propiedades de las funciones módulos). *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función módulo.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto de los enteros positivos, se cumple que $f(nh) \leq nf(h)$.*
2. *El límite $\lim_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h}$ existe. De hecho,*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} = \inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{h}.$$

Demostración. La primera propiedad es consecuencia de aplicar inducción a la segunda condición de la definición de la función módulo. Así que mostraremos el ítem 2. Tomando el resultado de la primera propiedad para todo $t > 0$, para $n \geq 1$ y dividiendo por nt se obtiene

$$\frac{f(nt)}{nt} \leq \frac{f(t)}{t}.$$

Por tanto, para cada $t > 0$ se tiene que $\text{ínf}_{h>0} \frac{f(h)}{h} \leq \frac{f(t)}{t}$. Tomando el ínfimo sobre t, se da

$$\inf_{h>0} \frac{f(h)}{h} \leq \inf_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n}.$$

Ahora, para un $h > 0$ arbitrario, se escribe $h = nt + r$ con $n = \lfloor h/t \rfloor$ y$0 \leq r < t$. Ahora, usando subaditividad

$$f(h) \leq f(nt + r) \leq f(nt) + f(r) \leq nf(t) + f(r).$$

Dividiendo por $h = nt + r$ se obtiene

$$\frac{f(h)}{h} \leq \frac{nf(t)}{nt + r} + \frac{f(r)}{nt + r} = \frac{f(t)}{t}.\frac{nt}{nt + r} + \frac{f(r)}{nt + r}.$$

Ahora, para t fijo, cuando $h \to \infty$, se tiene que $n \to \infty$ y por tanto $\frac{nt}{nt+r} \to 1$ y $\frac{f(r)}{nt+r} \to 0$. De aquí se sigue que

$$\limsup_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} \leq \frac{f(t)}{t}$$

y tomando el ínfimo sobre t, se obtiene

$$\limsup_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} \leq \inf_{t>o} \frac{f(t)}{t}.$$

Por otro lado, se cumple que por definición de ínfimo

$$\inf_{t>o} \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(h)}{h}$$

y por tanto

$$\inf_{t>o} \frac{f(t)}{t} \leq \liminf_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h}$$

Luego,

$$\limsup_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} \leq \inf_{t>o} \frac{f(t)}{t} \leq \liminf_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h}.$$

De aquí se deduce que $\lim\inf = \lim\sup$, por tanto, el límite existe y vale

$$\lim_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{f(t)}{t}.$$

Esto culmina la demostración del teorema. □

También se recurre a la siguiente definición que asocia las funciones módulo con la densidad natural.

Definición 12. (f−densidad de un conjunto) Sea f una función módulo. La f−densidad de un subconjunto $U \subseteq \mathbb{N}$ se define como

$$\delta_f(U) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(|\{k \leq n : k \in U\}|\right),$$

siempre que el límite de la derecha exista.

✓ Claramente, cuando f es la función identidad, se recupera la definición de densidad de un conjunto dado previamente. Proveemos otro ejemplo:

Ejemplo 8. Consideremos el conjunto de los números pares $U = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ y la función módulo $f(x) = \sqrt{x}$. Como dijimos anteriormente, $|U \cap \{1, 2, \dots, n\}|$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$. Así que, usando el hecho que f es creciente, se tiene

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \frac{f\left(|\{k \leq n : k \in U\}|\right)}{f(n)} \leq \frac{\sqrt{\frac{n}{2}+1}}{\sqrt{n}}.$$

Luego, por el teorema del emparedado, en este caso, se puede concluir que $\delta_f(U) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Con la noción de f−densidad, es inmediato definir sucesiones f−estadísticamente convergentes.

Definición 13 (Sucesiones f-estadísticamente convergente). Sea f una función módulo no acotada. Entonces la sucesión $x = (x_k)$ es f−**estadísticamente convergente a** L si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|\right) = 0.$$

En tal caso, escribimos $L = \lim_{f-stat} x_k$ y decimos que L es el límite f−estadístico de (x_k).

✓ Es claro que cuando f es la función identidad, la convergencia $f-$estadística coincide con la convergencia estadística estudiada previamente. Además tenemos la siguiente propiedad:

Lema 2 (Unicidad del límite $f-$estadístico). *Sea f una función módulo no acotada. Si $x=(x_k)$ es una sucesión que converge $f-$estadísticamente a L, entonces su límite $f-$estadístico es único.*

Demostración. Se ha de mostrar que si (x_k) converge $f-$estadísticamente a L y a M, entonces $L=M$. Supongamos que $x_k \xrightarrow{f-st} L$ y $x_k \xrightarrow{f-st} M$ con $L \neq M$. Se define $\rho = |L-M| > 0$ y se toma $\epsilon = \rho/2 > 0$. Se consideran los siguientes conjuntos de índices

$$A = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \epsilon\},$$

y

$$B = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - M| \geq \epsilon\}.$$

Por definición se tiene que $\delta_f(A) = \delta_f(B) = 0$.

Como para cualquier $k \in \mathbb{N}$ no puede cumplirse al tiempo que $|x_k - L| < \epsilon$ y $|x_k - M| < \epsilon$ ya que por desigualdad triangular

$$|L-M| \leq |L-x_k| + |x_k - M| < \epsilon + \epsilon = \rho.$$

Lo cual no puede suceder, luego, o sucede que $|x_k - L| \geq \epsilon$, o $|x_k - M| \geq \epsilon$. Es decir,

$$A \cup B = \mathbb{N}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ se puede definir

$$a_n = |A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$$

y

$$b_n = |B \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$$

Entonces como $(A \cup B) \cap \{1, 2, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ que tiene n elementos, se cumple

$$a_n + b_n \geq |(A \cup B) \cup \{1, 2, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, n\}| = n$$

Ahora, por la monotonía y subaditividad de f , se tiene

$$f(n) \leq f(a_n + b_n) \leq f(a_n) + f(b_n).$$

Para n suficientemente grande, $f(n)$ es no acotada y creciente, por lo cual, podemos dividir entre ella

$$1 \leq \frac{f(a_n)}{f(n)} + \frac{f(b_n)}{f(n)}.$$

Aplicando el límite cuando $n \to \infty$ y usando que $\delta_f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{f(n)} = 0$ y análogamente $\delta_f(B) = 0$, se llega a la contradicción

$$1 \leq 0 + 0 = 0.$$

Por lo tanto $L \neq M$ es falsa y L debe ser igual a M, es decir, el límite $f-$estadístico es único. □

Ahora se introduce otra clase de sucesiones que se relacionan con las funciones módulos.

Definición 14 (Funciones $f-$Cesàro sumables). Sea f una función módulo. Se dice que la sucesión (x_k) es $f-$**Césaro sumable fuertemente** a L si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(|x_k - L|\right) = 0.$$

La clase de todas las sucesiones $f-$Césaro sumables fuertemente se denota por ω_f.

✓ La definición anterior no requiere que la función módulo f sea no acotada. A continuación damos un resultado que relacionan clases de funciones Cesàro sumables:

Teorema 9. *Sea f y g funciones módulo. Si*

$$\sup_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} < \infty$$

entonces $w_g \subset w_f$.

Demostración. Se asume que

$$p = \sup_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} < \infty$$

Entonces, por definición de supremo, para todo $h \in [0,\infty)$ se tiene que $f(h) \leq pg(h)$. Ahora, sea $x = (x_k)$ una sucesión que es $g-$Césaro sumable fuertemente a L, se puede escribir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(|x_k - L|\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} pg\left(|x_k - L|\right).$$

Aplicando los límites de ambos lados cuando $n \to \infty$, y usando el hecho que $x \in w_g$, se obtiene que $x \in w_f$ y esto demuestra el resultado. □

A continuación damos un ejemplo que muestra que en general la contención en el teorema anterior puede ser estricta.

Ejemplo 9. Consideramos las funciones módulos definidas por $f(h) = \dfrac{h}{h+1}$ y $g(h) = h$. Claramente,

$$\sup_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} = 1 < \infty$$

y por el teorema anterior ya sabemos que $w_g \subseteq w_f$. Vamos a ver que en este caso, la contención es propia. Con este fin, consideramos la sucesión $x = (x_k)$ definida por

$$x_k = \begin{cases} k & \text{si } k = n^3 \text{ para } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Entonces, usando el hecho de que $f(0) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1/k=m^3}^{n} f(x_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1/k\neq m^3}^{n} f(0) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1/k=m^3}^{n} \frac{k}{1+k} < \frac{1}{n}\sum_{k=1/k=m^3}^{n} 1 \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{n} \end{aligned}$$

Como $\frac{\sqrt[3]{n}}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $x \in w_f$. Sin embargo, también tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(|x_k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1/k=m^3}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=1/k\neq m^3}^{n} g(0) \\ &= \frac{1}{n}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + i^3\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\frac{(\sqrt[3]{n}-1)(\sqrt[3]{n})}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos que $i = \max\left\{k \in \mathbb{N} : k^3 \leq n\right\}$; es decir, i es la parte entera de $\sqrt[3]{n}$. Ahora, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(\sqrt[3]{n}-1)(\sqrt[3]{n})}{2}\right)^2 = \infty,$$

podemos concluir que $x \notin w_g$. Por lo tanto $x \in w_f - w_g$ y la contenencia es estricta. □

Como consecuencia inmediata del resultado anterior tenemos:

Corolario 3. *Sean f y g funciones módulo.*

1. *Si* $\inf\limits_{h\in(0,\infty)} \dfrac{f(h)}{g(h)} > 0$, *entonces* $w_f \subseteq w_g$.

2. *Si* $0 < \inf\limits_{h\in(0,\infty)} \dfrac{f(h)}{g(h)} \leq \sup\limits_{h\in(0,\infty)} \dfrac{f(h)}{g(h)} < \infty$, *entonces* $w_f = w_g$.

3. Si $\inf\limits_{h\in(0,\infty)} \dfrac{f(h)}{h} > 0$, *entonces* $w_f = w$. *Es decir, Cesàro sumables fuertemente en el sentido ordinario.*

Demostración. Es suficiente establecer el primer item. En efecto, si

$$q = \inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} > 0,$$

entonces

$$\sup_{h\in(0,\infty)} \frac{g(h)}{f(h)} \leq \frac{1}{q} = p < \infty$$

y el resultado sigue del teorema anterior. □

Ahora es el turno de estudiar la relación que existe entre la convergencia $f-$estadísticas y sucesiones fuertemente Cesàro sumables. El primer resultado que presentamos es el siguiente:

Teorema 10. *Sean* f *y* g *funciones módulo tales que*

$$\inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} > 0$$

y supongamos además que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{g(h)}{h} > 0.$$

Entonces cada sucesión $f-$*Césaro sumable fuertemente es* $g-$*estadísticamente convergente, esto es,* $w_f \subset S_g$

Demostración. Supongamos que

$$\beta = \inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{g(h)} > 0$$

Entonces, por definición de ínfimo, para cada $h > 0$, se tiene que $\beta g(h) \leq f(h)$. Ahora, si $x = (x_k)$ es cualquier sucesión $f-$Césaro sumable fuertemente a L y $\epsilon > 0$ es cualquiera, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k - L|) &\geq \beta\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(|x_k - L|) \geq \beta\frac{1}{n}\sum_{k:|x_k-L|\geq\epsilon}^{n} g(|x_k - L|) \\
&\geq \beta\frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|g(\epsilon) \\
&\geq \beta\frac{1}{n}g(|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|)\frac{g(\epsilon)}{g(1)} \\
&= \frac{g(|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|)}{g(n)}\frac{g(n)}{n}\frac{g(\epsilon)}{g(1)}\beta.
\end{aligned}$$

Luego, tomando límites a ambos lados cuando $n \to \infty$, usando el hecho que $x \in w_f$ y la hipótesis que $\lim_{h\to\infty} \frac{g(h)}{h} > 0$ podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|)}{g(n)} = 0$$

lo cual significa que $x \in S_g$ y esto demuestra el teorema. □

Veamos un ejemplo que muestre que la conclusión del teorema anterior puede ser una inclusión propia.

Ejemplo 10. Consideramos las funciones módulos f y g definidas por $f(h) = g(h) = h$ y consideramos la sucesión $x = (x_k)$ del ejemplo anterior. Entonces, claramente se tiene que $\inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{h} > 0$ y $\lim_{h\to\infty} \frac{g(h)}{h} > 0$ y también

$$\frac{1}{g(n)} g(|\{k \leq n : |x_k - 0|\}|) \leq \frac{g(\sqrt[3]{n})}{g(n)}.$$

Luego, tomando los límites de ambos lados cuando $n \to \infty$, se obtiene que $x \in S_g$; pero sin embargo, $x \notin w_f$. Esto culmina el ejemplo. □

Como consecuencias inmediatas e importantes del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4. *Supónganse que f es una función módulo no acotada.*

1. *Si $\lim_{h\to\infty} \frac{f(h)}{h} > 0$, entonces cada sucesión $f-$Césaro sumable fuertemente es $f-$estadísticamente convergente.*
2. *Si $\inf_{h\in(0,\infty)} \frac{f(h)}{h} > 0$, entonces cada sucesión $f-$Césaro sumable fuertemente es estadísticamente convergente.*
3. *Una sucesión Césaro sumable fuertemente es estadísticamente convergente.*

En el siguiente resultado se relacionan las sucesiones acotadas $f-$estadísticamente convergentes con las sucesiones Cesàro fuertemente sumables.

Teorema 11. *Supóngase f, g funciones módulo no acotadas. Entonces, cada sucesión $f-$estadísticamente convergente acotada es una sucesión $g-$Cesàro sumable fuertemente, es decir, $l_\infty \cap S_f \subset w_g$.*

Demostración. Se asume que f y g son funciones módulo no acotadas. Cómo $S_f \subset S$ por corolario 4, y como $l_\infty \cap S \subset w$ por teorema 9, se tiene que $l_\infty \cap S_f \subset l_\infty \cap S \subset w$, esto es, $l_\infty \cap S_f \subset w$. De otro modo, como $w \subset w_g$ para cualquier módulo g por el teorema anterior, para el caso $\alpha = 1$, se sigue que $l_\infty \cap S_f \subset w_g$. □

Es necesario un ejemplo para entender que en este último resultado, la contención puede ser estricta.

Ejemplo 11. Considérese la sucesión $x = (x_k)$ como

$$x_k = \begin{cases} k & \text{si } k = n^2 \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } k \neq n^2 \end{cases}$$

y tomando las funciones módulo $g(h) = f(h) = \log(h+1)$. Entonces, usando la igualdad $g(0) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(|x_k - 0|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k:k=n^2} g(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1/k\neq n^2}^{n} g(0) \\ = \frac{1}{n}\sum_{k:k=n^2} \log(2) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}\log(2) \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ y así que $x \in w_g$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : |x_k| \geq \epsilon\}) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(\sqrt{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\sqrt{n})}{\log(n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Esto es, $x \notin S_f$. Esto significa que la inclusión $l_\infty \cap S_f \subset w_g$ es estricta. □

Como consecuencia inmediata del estudio realizado a través de estas secciones se puede escribir:

Corolario 5. *Si f es cualquier función módulo no acotada, entonces se tiene:*

1. $l_\infty \cap S_f \subset w_f$
2. $l_\infty \cap S_f \subset w$
3. $l_\infty \cap S \subset w_f$

7. Conclusiones

En el transcurso de este estudio se tiene las siguientes conclusiones:

1. La convergencia estadística constituye una extensión natural de la convergencia clásica, ya que permite caracterizar el comportamiento límite de sucesiones que presentan irregularidades locales o fluctuaciones finitas. Se demostró que toda sucesión convergente en el sentido ordinario es necesariamente estadísticamente convergente, lo cual evidencia que la convergencia estadística amplía el marco tradicional sin contradecirlo.

2. La relación entre convergencia estadística y sumabilidad de Cesàro muestra una profunda conexión estructural, en tanto ambas nociones describen formas de convergencia promedio. Se estableció que si una sucesión es estadísticamente convergente, la sucesión de sus promedios parciales también converge y su desviación estándar tiende a cero, lo que permite interpretar la convergencia estadística como una generalización teórica de la convergencia de Cesàro.

3. El estudio de la densidad natural, las funciones módulo y la f-densidad permitió formular un marco unificado para el análisis de convergencia generalizada. Dichas herramientas facilitan la caracterización de conjuntos estadísticamente densos y de subsucesiones estadísticamente convergentes, contribuyendo al desarrollo de criterios más flexibles para estudiar el comportamiento límite de sucesiones en contextos donde los métodos clásicos resultan insuficientes.

Referencias

[1] M. L.-G. A. Aizpuru and F. Rambla-Barreno. Density by moduli and statistical convergence. *Quaestiones Mathematicae*, 37(4):525–530, 2014.

[2] T. M. Apostol. *Análisis matemático: : introducción moderna al cálculo superior.* Reverté, primera edición edition, 1960.

[3] V. Bhardwaj, S. Dhawan, and S. Gupta. Density by moduli and statistical boundedness. *Abstract and Applied Analysis*, 2016:1–6, 01 2016.

[4] J. Connor. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canadian Mathematical Bulletin*, 32(2):194–198, 1989.

[5] J. S. Connor. The statistical and strong p-cesaro convergence of sequences. *Analysis*, 8(1-2):47–64, 1988.

[6] O. Duman. Generalized Cesàro summability of Fourier series and its applications. *Constr. Math. Anal.*, 4(2):135–144, 2021.

[7] J. A. Fridy. On statistical convergence. *Analysis*, 5(4):301–314, 1985.

[8] E. Kamber. Journal of inequalities and special functions intuitionistic fuzzy i-convergent difference sequence spaces defined by modulus function. 10:93–100, 04 2019.

[9] I. J. Maddox. Sequence spaces defined by a modulus. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100(1):161–166, 1986.

[10] H. NAKANO. Concave modulars. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 5(1):29 – 49, 1953.

[11] W. H. Ruckle. Fk spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Canadian Journal of Mathematics*, 25(5):973–978, 1973.

[12] I. J. Schoenberg. The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, 66(5):361–375, 1959.

[13] A. Zygmund. *TRIGONOMETRIC SERIES*, page xiii–xvi. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2003.

[14] T. Šalát. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, 30(2):139–150, 1980.