

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

TEORÍA DE CATEGORÍAS PARA ESPACIOS TOPOLÓGICOS

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Daniel Esteban Patiño Aponte
Dirigido por: Ph. D. Carlos A. Giraldo

Bogotá DC
Mayo de 2023

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de algunas nociones categóricas para los espacios topológicos, enfatizando en los conceptos de: funtores, límites, colímites, pullbacks y pushouts. Además, se muestran ejemplos particulares en donde se estudian los espacios topológicos desde una perspectiva categórica apoyados en herramientas algebraicas.

Palabras clave: Categoría, límite, colímite, pullback, pushout.
Clasificación AMS: 18B30, 54Bxx, 54B30.

Agradecimientos: *Primero a Dios y a mi madre por el amor incondicional. A Samuel, mi hijo, quien con su presencia me dio más fuerzas. A mi padre por los grandes consejos. A Maria Angelica por el apoyo absoluto. A mis hermanos Natalia y Diego, quienes me brindaron su cariño y sus palabras de motivación. A mi querido amigo Sergio, quien me apoyo incondicionalmente en este trabajo, a Juan Diego, quien me brindó sus ideas. Al profesor Carlos Orlando Ochoa que en paz descanse; el maestro que me guio en el comienzo de este camino. Al profesor Carlos Giraldo, quien me brindó su tiempo y sabiduría. A cada maestro que me dedico su tiempo, Gracias infinitas.*

Para terminar, le agradezco a las Matemáticas, gracias a ellas me siento libre.

A la memoria de mi abuela Maria del Carmen.

1. Introducción

La teoría de categorías es el estudio general de las estructuras en matemáticas; esta permite analizar, describir y relacionar las diversas áreas por medio de un lenguaje unificado. Riehl menciona en su libro *"Category theory in context"* [13, pg. x] que la teoría de categorías proporciona un lenguaje interdisciplinario diseñado para delinear fenómenos generales obteniendo transparencia de ideas de un área de estudio a otra, por ende, encuentra nuevas conexiones entre distintas áreas de las matemáticas, dando solución a diferentes problemas matemáticos. Es el caso de Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane quienes en la decada de los 40 estudiaron la relación existente entre la geometría y el álgebra[8], surgiendo así un artículo en 1945 con el nombre *"A general theory of natural equivalences"* [4]. Posteriormente, Lane en 1971 publicaría *"Categories for the working mathematician"* [9]. Hoy día, la teoría de categorías ha tomado fuerza en las matemáticas y en otras áreas de estudio como la informática y la física.[2][6].

Dada la fuerza que ha tomado la teoría de categorías en los últimos años, surge el interes de estudiarla particularmente en la topología, cuyo fruto se ejemplificará en esta monografía. Se usará el lenguaje que brinda la teoría de categorías en el estudio de relaciones estructurales de los espacios topológicos, para después encontrar analogías que existen entre estas relaciones topológicas y las que se encuentran en el álgebra.

Esta monografía ilustrará en la sección 2 las nociones topológicas y algebraicas que servirán para contextualizar al lector con los objetivos de este trabajo. Seguido en la sección 3 se nombrarán los conceptos categóricos, mostrando algunos ejemplos aplicados a la topología y el álgebra, los cuales son una parte fundamental del objetivo de esta monografía. En la sección 4 se presentarán ejemplos particulares a nivel topológico desde una perspectiva categórica.

2. Nociones algebraicas y topológicas

Las nociones algebraicas y topológicas que se darán a continuación servirán como ilustración a nivel categórico en el desarrollo de esta monografía. Por ejemplo, un anillo R muestra las interacciones entre el álgebra y la topología, ya que los cerrados de un cierto conjunto de ideales primos de R definen una topología y esta relación es funtorial como se verá más adelante. Estas ideas se encontrarán también en el grupo fundamental y la acción de un grupo sobre un conjunto.

Definición 1. [5, §16] Sean G un grupo y X un conjunto. Una **acción** de G sobre X es una aplicación $\bullet\colon G \times X \to X$, denotada por $\bullet(g,x) = g \bullet x$, para cada $g \in G$ y cada $x \in X$. Esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

1. $e \bullet x = x$, para todo $x \in X$, donde e es el elemento neutro de G,

2. $g_1 \bullet (g_2 \bullet x) = (g_1 g_2) \bullet x$ para cada $x \in X$ y cada $g_1, g_2 \in G$.

Bajo estas condiciones, X se llama $G - conjunto$.

Para X un conjunto no vacío, $Sym(X)$ se entenderá como el conjunto de todas las biyecciones de X en sí mismo, es decir, el grupo simétrico de X. ([3, §1]).

Teorema 1. *[3, §1] Sea G un grupo y X un conjunto. Cada acción de G sobre X define un homomorfismo de G en $Sym(X)$ y cada homomorfismo de G en $Sym(X)$ define una acción de G sobre X.*

Demostración: Primero se mostrará que cada acción de G sobre X define un homomorfismo de grupo $\varphi\colon G \to Sym(X)$. Dado $a \in G$ un elemento fijo, se define $\varphi(a)\colon X \to X$ por, $\varphi(a)(x) = a \bullet x$, para cada $x \in X$. Observe que esta aplicación es biyectiva: si $\varphi(a)(x) = \varphi(a)(y)$,

$$\begin{aligned} a \bullet x &= a \bullet y \\ a^{-1} \bullet (a \bullet x) &= a^{-1} \bullet (a \bullet y) \\ (a^{-1}a) \bullet x &= (a^{-1}a) \bullet y \\ e \bullet x &= e \bullet y \\ x &= y \end{aligned}$$

luego $\varphi(a)$ es inyectiva. De otra parte, si $y \in X$, entonces,

$$\varphi(a)(a^{-1} \bullet y) = a \bullet (a^{-1} \bullet y) = (aa^{-1}) \bullet y = e \bullet y = y$$

así $\varphi(a)$ es sobreyectiva, luego $\varphi(a) \in Sym(X)$. Se verifica que $\varphi\colon G \to Sym(X)$ es un homomorfismo, ya que si se toma $x \in X$ y $a, b \in G$ se tiene que:

$$\varphi(ab)(x) = ab \bullet x = a \bullet (b \bullet x) = \varphi(a)(b \bullet x) = \varphi(a)(\varphi(b)(x)) = (\varphi(a) \circ \varphi(b))(x),$$

por lo tanto, $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$.

Ahora se mostrará que todo homomorfismo $h\colon G \to Sym(X)$ define una acción de G sobre X. Dado $a \in G$ y $x \in X$ se define $a \bullet x = h(a)(x)$. Para probar este hecho es necesario probar dos condiciones:

1. $e \bullet x = h(e)(x) = id_x(x) = x$, para todo $x \in X$.
2. $(ab) \bullet x = h(ab)(x) = [h(a) \circ h(b)](x) = h(a)(h(b)(x)) = a \bullet (b \bullet x)$, para cada $a, b \in G$ y cada $x \in X$.

Definición 2. [10, §2] Sean R un anillo conmutativo con unidad sin divisores de cero, y A un ideal de R, el cual se denota $A \leq R$. Sea **Spec(R)** el conjunto de todos los ideales primos de R, con excepción de R, ya que no se cuenta como ideal primo en sí mismo, pero (0) si es primo. Se define el conjunto

$$V(A) = \{\mathrm{I} \in Spec(R) \mid I \supseteq A\}.$$

Teorema 2. *[10, §2] La colección de subconjuntos $Z = \{V(A) \mid A \leq R\}$ define una topología por cerrados sobre* ***Spec(R)****, llamada* ***topología de Zariski****.*

Demostración:

1. $V(R) = \emptyset$, luego $\emptyset \in Z$. y $V((0)) =$ **Spec(R)**, por lo tanto **Spec(R)** $\in Z$.

2. Sea $\mu = \{V(A_\alpha)\}_{\alpha \in J} \subseteq Z$.

$$\begin{aligned} I \in \bigcap_{\alpha \in J} V(A_\alpha) &\leftrightarrow (\forall \alpha \in J)(I \in V(A\alpha)) \\ &\leftrightarrow (\forall_{\alpha \in J})(I \supseteq A_\alpha) \\ &\leftrightarrow I \supseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \\ &\leftrightarrow I \supseteq \sum_{\alpha \in J} A_\alpha \\ &\leftrightarrow I \in V\left(\sum_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\bigcap_{\alpha \in J} V(A_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in J} A_\alpha)$$

3. Sean $V(A), V(B) \in Z$.

$$\begin{aligned} I \in V(A) \cup V(B) &\leftrightarrow I \in V(A) \quad o \quad I \in V(B) \\ &\leftrightarrow I \supseteq A \quad o \quad I \supseteq B \\ &\rightarrow I \supseteq A \cap B \\ &\leftrightarrow I \in V(A \cap B) \end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$V(A) \cup V(B) \subseteq V(A \cap B).$$

   De otra parte, $I \in V(A \cap B) \leftrightarrow I \supseteq A \cap B$.

Suponga que $I \supsetneq A$ y $I \supsetneq B$. Entonces, existe $x \in A$ y $y \in B$ tal que $x, y \notin I$. Luego A y B son ideales de R, $xy \in A$ y $xy \in B$, es decir, $xy \in A \cap B$. puesto que $A \cap B \subseteq I$, tenemos que $xy \in I$ y como I es primo, $x \in I$ o $y \in I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $I \supseteq A$ o $I \supseteq B$, luego $I \in V(A) \cup V(B)$.

Definición 3. [11, §9] Sea $I = [0,1]$. Dos caminos $f, f' \colon I \to X$ se dicen homotópicos si existe una aplicación continua $F \colon I \times I \to X$, tal que, $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = f'(s)$, $F(0,t) = x_0$ y $F(1,t) = x_1$.

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de **homotopía de caminos** entre f y f'.

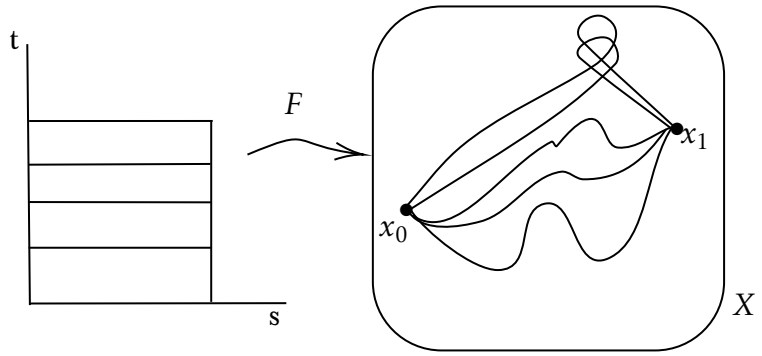


Figura 1: Homotopía de caminos [11, §9]

Observe que la aplicación $F(s,0) = f(s)$ significa que se empieza un proceso de desformación continua para cada valor de t hasta obtener $F(s,1) = f'(s)$, donde los puntos extremos x_0 y x_1 permanecen fijos durante la desformación.

Lema 1. *[11, §9] La relación de homotopía de caminos es de equivalencia,*

Si f es un camino, su clase de equivalencia se denota por $[f]$.

Definición 4. [11, §9] Si f es un camino en X de x_0 a x_1, y g es un camino en X de x_1 a x_2, se define el **producto** $f * g$ de f y g, como el camino h dado por las ecuaciones

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & para \quad s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1) & para \quad s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

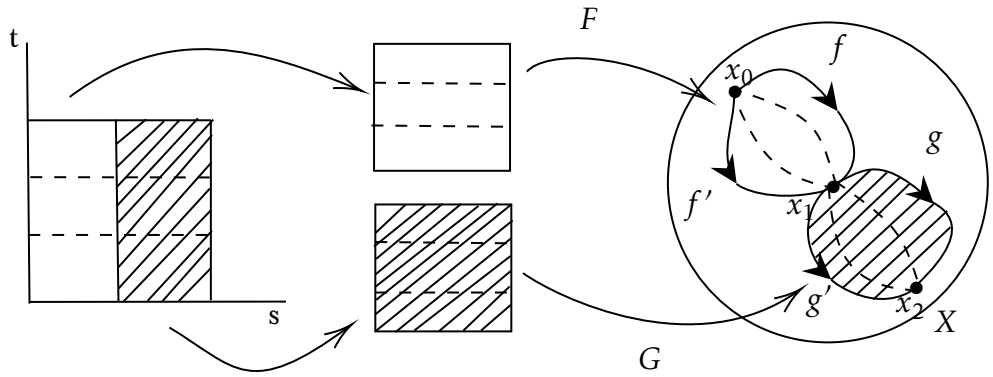


Figura 2: Producto de homotopía de caminos [11, §9].

Observe que el camino g empieza donde termina el camino f. Para cada camino existe una homotopía de caminos $F, G\colon I \times I \to X$, así se puede definir

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & para \quad s \in [0,1/2] \\ \\ G(2s-1,t) & para \quad s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Dado que $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ para todo t, la aplicación H está bien definida y es continua por el lema del pegamiento, por tanto es la homotopía requerida para los caminos $f * g$ y $f' * g'$.[11, §9] Dicho de otra manera, f hace su recorrido el doble de rápido en $[0,1/2]$, al igual que g en $[1/2,1]$. Así la ecuación $[f] * [g] = [f * g]$ cobra sentido.

Este producto cumple las propiedades: asociativa, neutro a izquierda y derecha además del inverso. El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio topológico X con esta operación no es un grupo, porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido, ya que no existe una restricción para aquellos caminos que empiezan y acaban en el mismo punto. Si se considera un punto x_0 en X que nos sirva como punto base para restringir aquellos caminos, entonces, el conjunto de clases de homotopía de caminos con el producto es un grupo y es llamado grupo fundamental del espacio topológico X [11, §9].

3. Teoría de categorías

En esta sección se desarrollará los conceptos categóricos que se pretenden plasmar a nivel topológico, los cuales podemos ver su desarrollo en la sección 4. Con el fin de contextualizar al lector con las

relaciones categóricas entre la topología y el álgebra, se exponen las definiciones seguidas de ejemplos, los cuales servirán posteriormente en este estudio.

Definición 5. [13, §1] **Una categoría** $\mathcal{C}$ consiste de una colección de objetos $X, Y, Z...$ y una colección de morfismos $f, g, h...$ tal que:

1. A cada morfismo le corresponde dos objetos, un dominio y un codominio; la notación $f: X \to Y$ significa que f es un morfismo con dominio X y codominio Y.
2. A cada objeto le corresponde un morfismo $1_X: X \to X$ llamado morfismo identidad.
3. A cada par de morfismos $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$, le corresponde un morfismo $(g \circ f): X \to Z$, que representa la composición en $\mathcal{C}$.

Los morfismos están sujetos a los siguientes axiomas:

1. Para cualquier morfismo $f: X \to Y$ se satisface: $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.
2. Para la tripla de morfismos $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ y $h: Z \to W$, se satisface: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Ejemplo 1. [13, §1] Un grupo G define una categoría BG con un solo objeto. Cada elemento de G representa un morfismo distinto, la composición otorgada por la operación del grupo y el morfismo identidad está dado por la identidad del grupo. Por ejemplo, para $\mathbb{Z}_5$ es la categoría asociada $B\mathbb{Z}_5$, se muestra en la figura 3.

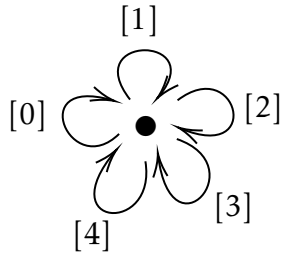


Figura 3: $B\mathbb{Z}_5$[13, §1].

Ejemplo 2. [13, §1] Un Poset $(P, \leqslant)$ se considera una categoría. Los elementos de P son los objetos, además existe un único morfismo $f: x \to y$ si $x \leqslant y$ para x, y en P. La reflexibidad implica el morfismo identidad y la transitividad la composición.

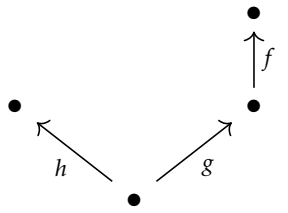


Figura 4: Poset, categoría del conjunto parcialmente ordenado [13, §1].

Definición 6. [1, §1] Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, la categoría dual $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es la **categoría opuesta** donde cada morfismo $f\colon X \to Y$ de $\mathcal{C}$ se invierte de tal forma que $f^{\mathrm{op}}\colon Y \to X$ es un morfismo de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y la composición $f \circ g\colon X \to Z$ en $\mathcal{C}$ se invierte de tal forma que $(f \circ g)^{\mathrm{op}}\colon Z \to X$, para cada par de morfismos $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ en $\mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{op}$ tienen los mismos objetos y morfismos, excepto por la dirección.

Ejemplo 3. Dada la categoría Poset en el ejemplo 2, se puede verificar la categoría $\mathrm{Poset}^{\mathrm{op}}$ la cual se tienen, los mismos morfismos excepto por la dirección.

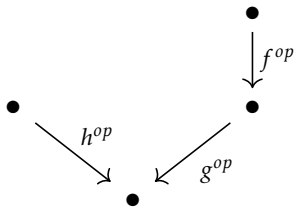


Figura 5: $\mathrm{Poset}^{\mathrm{op}}$[13, §1].

Definición 7. [13, §1] Un **isomorfismo** en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo $f\colon X \to Y$, para el cual existe un morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Los objetos X y Y se dicen isomorfos y se denota por $X \cong Y$. Además un morfismo cuyo dominio y codominio son iguales se llama **endomorfismo** y un endomorfismo que sea un isomorfismo se llama **automorfismo**. Se puede evidenciar en la categoría BG del ejemplo 1, todo morfismo es un automorfismo.

En teoría de categorías la forma de relacionar dos categorías es por medio de un funtor.

Definición 8. [13, §1] Un **funtor** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías consta de los siguientes datos:

1. Un objeto $F(c) \in \mathcal{D}$, para cada objeto $c \in \mathcal{C}$.

2. Un morfismo $F(f)\colon F(c) \to F(c')$ en $\mathcal{D}$, para cada morfismo $f : c \to c'$ en $\mathcal{C}$.

Estas asignaciones deben satisfacer las siguientes propiedades:

1. Para cualquier par de morfismos $f, g \in \mathcal{C}$ componibles, se tiene que: $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$.
2. Para cada objeto $c \in \mathcal{C}$ se tiene que: $F(1_c) = 1_{F(c)}$.

Bajo las condiciones de la definición 8 el funtor F se llama **covariante**. Si existe un morfismo $F(f)\colon F(c') \to F(c)$ en $\mathcal{D}$, para cada morfismo $f : c \to c'$ en $\mathcal{C}$, entonces el funtor se llama **contravariante**.

Ejemplo 4. Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X, entonces es posible definir un funtor $F\colon \mathrm{BG} \to \mathrm{Set}$.

Como G actúa sobre X, existe un homomorfismo de grupo $\varphi\colon G \to Sym(X)$ (1). teniendo en cuenta φ, el funtor F se puede definir como sigue:

1. $F(\bullet) = X$, donde $X \in \mathrm{Set}$.
2. Si $g\colon \bullet \to \bullet$, entonces $F(g) = F(g)$

Se compruba que: $F(e) = \varphi(e) = id_x = 1_{F(\bullet)}$. Además, sean $g_1 : \bullet \to \bullet$ y $g_2\colon \bullet \to \bullet$ morfismos en BG, entonces,

$$F(g_2) \circ F(g_1) = \varphi(g_2) \circ \varphi(g_1) = \varphi(g_2 g_1) = F(g_2 g_1).$$

Un funtor define un diagrama, el cual es necesario para los conceptos de límite y colímite, como sigue.

Definición 9. [1, §3] Un **diagrama** en una categoría $\mathcal{A}$ es un funtor $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ con codominio $\mathcal{A}$, el dominio $\mathcal{I}$, representa la categoría indexada y es llamada **esquema** del diagrama.

Ejemplo 5. Un diagrama D envía objetos en objetos y morfismos en morfismos de la categoría $\mathcal{I}$ a la categoría $\mathcal{A}$. Generalmente se le llama diagrama a la imagen del funtor, por tanto, se referirá de esa manera en este trabajo. La siguiente figura muestra distintos diagramas los cuales se usarán a lo largo de la monografía.

Esquema del diagrama en $\mathcal{I}$	Funtor	Diagrama en $\mathcal{A}$
$\bullet \quad \bullet$	$\xrightarrow{D}$	A B
$\bullet \quad \bullet \cdots \bullet$	$\xrightarrow{D}$	$X_0 \quad X_1 \cdots X_n$
$\bullet \longrightarrow \bullet$	$\xrightarrow{D}$	$X \longrightarrow Y$
$\begin{array}{c}\bullet \\ \downarrow \\ \bullet \longrightarrow \bullet\end{array}$	$\xrightarrow{D}$	$\begin{array}{c}B \\ \downarrow \\ A \longrightarrow C\end{array}$
$\begin{array}{c}\bullet \longrightarrow \bullet \\ \downarrow \\ \bullet\end{array}$	$\xrightarrow{D}$	$\begin{array}{c}C \longrightarrow A \\ \downarrow \\ B\end{array}$
$\bullet \rightrightarrows \bullet$	$\xrightarrow{D}$	$X \rightrightarrows Y$

Figura 6: Diagramas.

Sea $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ Un diagrama.

Definición 10. [1, §3] Una **fuente** para un diagrama D es un par $(A, f_i)_{i\in ob(\mathcal{I})}$ que consiste de un objeto A y una familia de morfismos $(f_i\colon A \to D_i)_{i\in ob(\mathcal{I})}$. A es el dominio de la fuente y la familia $(D_i)_{i\in ob(\mathcal{I})}$ es el codominio de la fuente. La fuente se dice **natural** siempre que para cada morfismo $d\colon i \to j$ en $\mathcal{I}$ se cumpla que $D(d) \circ f_i = f_j$.

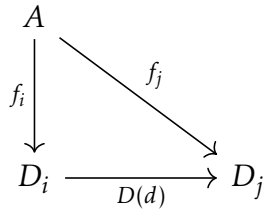


Figura 7: Fuente natural.

Definición 11. [1, §3] Un **límite** de D es una fuente natural $(l_i\colon L \to D_i)_{i\in ob(\mathcal{I})}$ para D con la propiedad **universal** de que cada fuente natural $(f_i\colon A \to D_i)_{i\in ob(\mathcal{I})}$ para D tenga una factorización única, es decir, para cada fuente existe un único morfismo $f\colon A \to L$ tal que $f_i = l_i \circ f$ con $i \in ob(\mathcal{I})$.

Ejemplo 6. Sea X un conjunto no vacío, y $\wp(X)$ es la colección de todos los subconjuntos de X. Observe que con la relación de orden dada por la inclusión $\wp(X)$ se puede ver como un Poset (ver

ejemplo 2). Considere el diagrama $D\colon \mathcal{I} \to \text{Poset}$ como ($A \qquad B$) como en la figura 6. Un límite para D es la fuente natural $A \xleftarrow{i_a} A \cap B \xrightarrow{i_b} B$, tal que para la fuente natural $A \xleftarrow{f_a} C \xrightarrow{f_b} B$ existe un único morfismo $\psi\colon C \to A \cap B$ tal que $i_a \circ \psi = f_a$ y $i_b \circ \psi = f_b$, este hecho se muestra en la figura 8.

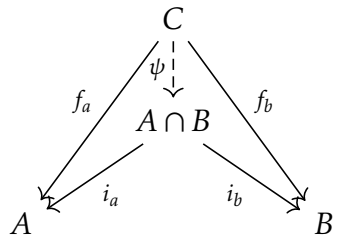


Figura 8: Límite.

En este caso hay que tener en cuenta que todas las aplicaciones son inclusiones.

Para comprobar este hecho, basta con ver que el diagrama de la figura 8 conmuta y que ψ es única.

Observe que $C \subseteq A$ y $C \cap B$, por lo tanto, $C \subseteq A \cap B$. La unicidad de ψ está dada por la forma como se define los morfismos en Poset.

Definición 12. [1, §3] Sea $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ un diagrama. Un **límite** para este diagrama es una fuente naturaĺ $A \xleftarrow{\overline{g}} P \xrightarrow{\overline{f}} B$, tal que para la fuente natural $A \xleftarrow{\hat{g}} \hat{P} \xrightarrow{\hat{f}} B$ existe un único morfismo $\psi\colon \hat{P} \to P$ tal que $\overline{g} \circ \psi = \hat{g}$ y $\overline{f} \circ \psi = \hat{f}$, es decir el diagrama de la figura 9 conmuta.

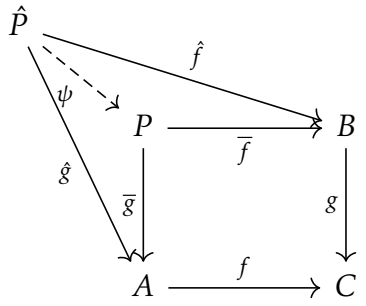


Figura 9: Pullback.

La fuente $A \xleftarrow{\overline{g}} P \xrightarrow{\overline{f}} B$ es llamada **pullback** de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ y $\overline{f}$ es llamada un pullback de f a lo largo de g.

Definición 13. [1, §2] Sea $f, g \colon A \rightrightarrows B$ un diagrama. Un morfismo $e \colon E \to A$ es llamado **igualador** de f y g siempre que cumpla las siguientes condiciones:

1. $f \circ e = g \circ e$
2. Para cualquier morfismo $e' \colon E' \to A$ con $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único morfismo $\overline{e} \colon E' \to E$ tal que $e' = e \circ \overline{e}$.

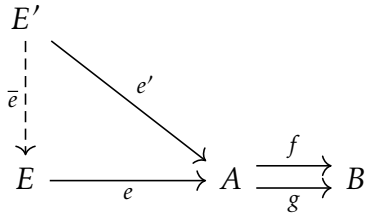


Figura 10: Igualador

Definición 14. [1, §3] Un **sumidero** para un diagrama D es un par $(f_i, A)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ que consiste de un objeto A el cual es el codominio del sumidero y una familia de morfismos $(f_i \colon D_i \to A)_{i \in ob(\mathcal{I})}$. La familia $(D_i)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ es llamado dominio del sumidero. Un sumidero se dice que es **natural** para D si para cada morfismo $d \colon i \to j$ de $\mathcal{I}$ se cumple que: $f_j \circ D(d) = f_i$, es decir, la figura 11 conmuta.

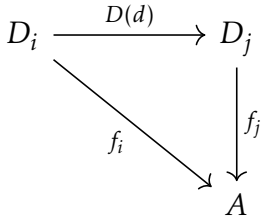


Figura 11: Sumidero natural.

Definición 15. [1, §3] Un **colimite** del diagrama D es un sumidero natural $(c_i : D_i \to K)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ para D con la propiedad **universal** de que para cada sumidero natural $(g_i : D_i \to A)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ existe un único morfismo $f : K \to A$, tal que $f \circ c_i = g_i$ con $i \in ob(\mathcal{I})$.

Ejemplo 7. Considere el diagrama ($A \quad B$) de la figura 6, en Poset. Un colímite para este diagrama es un sumidero natural $A \xrightarrow{i_a} A \cup B \xleftarrow{i_b} B$, tal que para el sumidero natural $A \xrightarrow{f_a} C \xleftarrow{f_b} B$ existe un único morfismo $\eta : A \cup B \to C$ tal que $\eta \circ i_a = f_a$ y $\eta \circ i_b = f_b$.

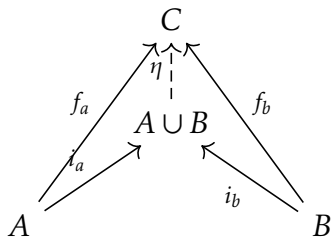


Figura 12: Colímite.

Para comprobar que lo anterior es cierto basta con ver que el diagrama de la figura 12 conmuta y que η es única. Observe que si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$. La unicidad de η está dada por la forma en que se definen los morfismos en Poset.

Definición 16. [1, §3] Sea $B \xleftarrow{g} C \xrightarrow{f} A$ un diagrama, un colímite para este diagrama es una sumidero natural $A \xrightarrow{\overline{g}} P \xleftarrow{\overline{f}} B$, tal que para el sumidero natural $A \xrightarrow{\hat{g}} \hat{P} \xleftarrow{\hat{f}} B$ existe un único morfismo $\eta : P \to \hat{P}$ tal que $\eta \circ \overline{f} = \hat{f}$ y $\eta \circ \overline{g} = \hat{g}$, es decir la figura 13 conmuta.

El sumidero $B \xrightarrow{\overline{f}} P \xleftarrow{\overline{g}} A$ es llamado **pushout** de $B \xleftarrow{g} C \xrightarrow{f} A$ y $\overline{f}$ es llamado pushout de f a lo largo de g.

Definición 17. [1, §2] Sea $f, g : A \rightrightarrows B$ morfismos. Un morfismo $c : B \to C$ es llamado **coigualador** de f y g siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. $c \circ f = c \circ g$
2. Para cualquier morfismo $c' : B \to C'$ con $c' \circ f = c' \circ g$, existe un único morfismo $\overline{c} : C \to C'$ tal que $c' = \overline{c} \circ c$.

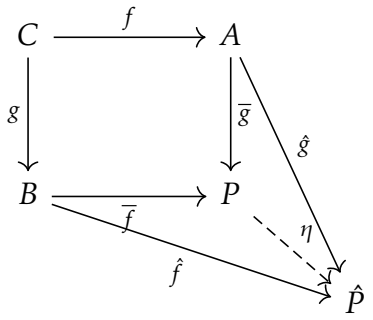


Figura 13: Pushout

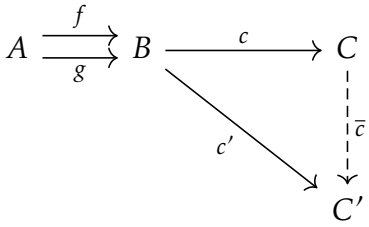


Figura 14: Coigualador.

4. Teoría de categorías en espacios topológicos

En esta sección se desarrollará la segunda parte del objetivo de esta monografía, el cual es plasmar los conceptos categóricos desarrollados en la sección 3, a través de ejemplos topológicos.

4.1. Categorías

Ejemplo 8. [1, §1] La categoría Top de los espacios topológicos, tiene como objetos los espacios topológicos y aplicaciones continuas como morfismos.

Ejemplo 9. [13, §4] La categoria Haus de los espacios topológicos de hausdorff, tiene como objetos los espacios T_2 y los morfismos son aplicaciones continuas.

Ejemplo 10. La categoria TopGroup tiene como objetos los grupos topológicos y los morfismos son homomorfismos continuos de grupos.

Ejemplo 11. La categoría HTop_c de homotopias de caminos de un espacio topológico, tiene como objetos los puntos del espacio y los morfismos son clases de homotopía de caminos entre los puntos.

Ejemplo 12. Dado un espacio topológico X se puede definir una categoría Open_x, de la siguiente forma: los objetos de Open_x son los abiertos U de X, además existe un único morfismo de U en V siempre que $U \subseteq V$.

Dado que las categorías se relacionan por medio de funtores, en está subsección se quiere mostrar la relación que existe entre las categorías ya nombradas.

4.2. Funtores

Ejemplo 13. Para cada categoría de los ejemplos anteriore, se tiene el funtor **identidad**.

Ejemplo 14. [13, §1] El funtor **olvido** es un término general que se usa para cualquier funtor que se olvide de la estructura, donde el codominio es la categoría de los conjuntos, en particular el funtor $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$, envía un espacio topológico a su conjunto y una función continua a la correspondiente función entre conjuntos.

Ejemplo 15. [13, §1] El funtor $O\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Poset}$, que lleva un espacio X a su Poset $O(X)$ de subconjuntos abiertos es contravariante en la categoria de los espacios: Una función continua $f : X \to Y$ es enviada a una función $O(f) =: O(Y) \to O(X)$, donde $O(f) = f^{-1}$. Que lleva un subconjunto abierto $U \subset Y$ a su preimagen $f^{-1}(U)$, que es abierto en X.

Ejemplo 16. [13, §1] Hay un funtor contravariante $\mathrm{Spec}\colon \mathrm{CRing} \to \mathrm{Top}$ que envía un anillo conmutativo al espacio $\mathrm{Spec}(R)$, de ideales primos de R con la topología de Zariski visto en el Teorema 2.

Ejemplo 17. [13, §1] El funtor que envia un espacio topologico a su grupo fundamental y las aplicaciones continuas se envían a homomorfismos de grupos.

Ejemplo 18. [12] Dado un espacio topológico (X, τ) es posible construir un espacio de Kolmogorov, es decir, un espacio T_0. Esta construcción es funtorial: se define la relación de equivalencia $\backsim$ en X por: $a \backsim b \Leftrightarrow (\forall U \in \tau, a \in U \Leftrightarrow b \in U)$. Considere el conjunto cociente $X/\backsim$ con la topología inducida por τ. Este cociente se notará como $KQ(X)$. Se define el funtor $K\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$, en objetos como $K(X) = KQ(X)$. Para cualquier función continua $f : X \longrightarrow Y$, el cociente de Kolmogorov induce una función continua canónica $KQ(f)\colon KQ(X) \to KQ(Y)$, la cual define el funtor K en morfismos como $K(f) = KQ(f)$.

En la siguiente sección se verá como se comportan los límites y colímites en las categoría Top y Open_x.

4.3. Limites

Ejemplo 19. Considere el diagrama $X_0 \quad X_1 \cdots X_n$. Un límite para este diagrama es una fuente natural $(\pi_i : L \to X_i)_{i \in ob(I)}$, con la propiedad de que para cada fuente natural $(g_i : A \to X_i)_{i \in ob(I)}$ existe un único morfismo $\psi : A \to L$, tal que $\pi_i \circ \psi = g_i$ para cada $i \in ob(I)$.

Se mostrará que $L = \prod_{i=1}^{n} X_i$, donde $\psi : A \to \prod_{i=1}^{n} X_i$, se debe por $\pi_i = (g_1(a), g_2(a), ..., g(g_n))$.

Para ver este hecho debemos mostrar que $\pi_i \circ \psi = g_i$ y que ψ sea única además de continua.

1. Sea $a \in A$, $(\pi_i \circ \psi)(a) = \pi_i(\psi(a)) = \pi_i(g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a)) = g_i(a)$ para $i \in obj(\mathcal{I})$.
2. Supongamos $\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} X_i$, se debe mostrar que $\phi = \psi$.
   Sea $a \in A$, $\psi(a) = (g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a)) = (\pi_1(\phi(a), \pi_2(\phi(a)), ..., \pi_n(\phi(a)) = \phi(a)$.
3. ϕ es continua, tomando la topología producto sobre $\prod_{i=1}^{n} X_i$. Este hecho se puede ver en la figura 15.

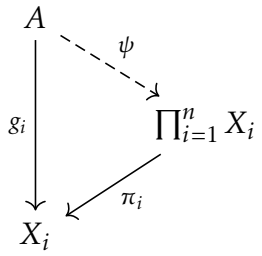


Figura 15: Producto. Límite en Top.

Ejemplo 20. Sea $D : \mathcal{I} \to \text{Top}$.

Un límite para el diagrama $X \xrightarrow{s} Z \xleftarrow{t} Y$, es una fuente natural $X \xleftarrow{\pi_x} P \xrightarrow{\pi_y} Y$, donde $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid s(x) = t(y)\}$, con la topología del subespacio sobre $X \times Y$. Tal que para la fuente natural $X \xleftarrow{g_x} \hat{P} \xrightarrow{g_y} Y$ existe un único morfismo $\psi : \hat{P} \to P$ tal que $\pi_x \circ \psi = g_x$ y $\pi_y \circ \psi = g_y$.

La fuente $X \xleftarrow{\pi_x} P \xrightarrow{\pi_y} Y$ es un **pullback** del diagrama y π_y es **pullback** de s a lo lartgo de t. Esta interacción se puede observar en la figura 16.

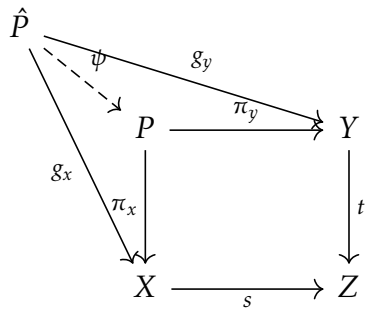


Figura 16: Pullback en Top.

Ejemplo 21. Un **igualador** $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ en la categoría Top es la inclusión $i\colon E \subseteq X$ E tiene la topología del subespacio. Como se muestra en la figura 17.

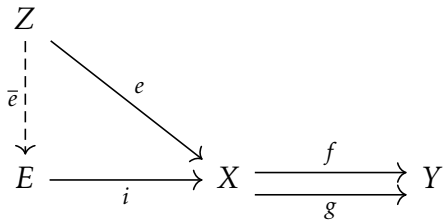


Figura 17: igualador en Top.

Ejemplo 22. Sea $D\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Open}_x$ donde la categoría $\mathcal{I}$ tiene 2 objetos. Un **límite** para D es una fuente natural $A \xleftarrow{i_a} (A \cap B) \xrightarrow{i_a} B$, tal que para la fuente natural $A \xleftarrow{g_a} W \xrightarrow{g_b} B$ existe un único morfismo $\psi\colon W \to A \cap B$, tal que $i_a \circ \psi = g_a$ y $i_b \circ \psi = g_b$. Como $W \subseteq A$ y $W \subseteq B$, entonces $W \subseteq A \cap B$ y ψ es la inclusión.

Ejemplo 23. Considere $D\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Open}_x$, un diagrama $A \xrightarrow{s} C \xleftarrow{t} B$. Un límite para este diagrama es la fuente natural $A \xleftarrow{p_a} A \cap B \xrightarrow{p_b} B$, tal que para la fuente natural $A \xleftarrow{g_a} \hat{P} \xrightarrow{g_b} B$ existe un morfismo $\psi\colon \hat{P} \to A \cap B$, tal que $p_a \circ \psi = g_x$ y $p_b \circ \psi = g_y$. Como se observa en la figura 18.

Como $\hat{P} \subseteq A$ y $\hat{P} \subseteq B$, entonces $\hat{P} \subseteq A \cap B$, con lo cual ψ es la inclusión de $\hat{P}$ en $A \cap B$. Por lo tanto, $A \cap B$ con la inclusíon es un pullback.

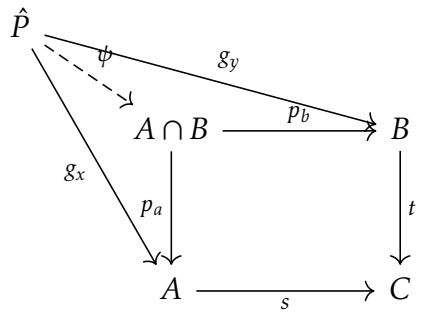


Figura 18: Pullback en Open_x.

Ejemplo 24. Un **igualador** $f, g\colon U \rightrightarrows Y$ en la categoría Open_x es la identidad $id_u\colon U \to U$, la cual hace que la figura 19 sea conmutativa.

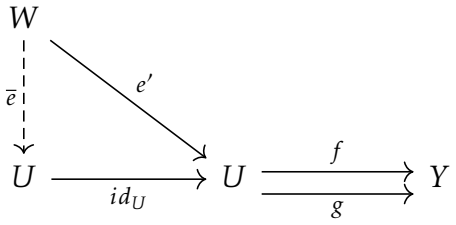


Figura 19: Igualador en Open_x.

Hay definiciones duales a las anteriores, las cuales se mostrarán a continuación.

4.4. Colímites

Ejemplo 25. Considere el diagrama $D\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Top}$, donde la categoría $\mathcal{I}$ tiene n objetos. Un **colímite** de D es un sumidero natural $c_i\colon X_i \to \coprod_{i=1}^n X_i$, definido como $c_i(x) = x$ para $x \in X_i$, con la propiedad universal de que para cada sumidero natural $(g_i\colon X_i \to A)_{i \in ob(\mathcal{I})}$, existe un único morfismo $\eta\colon (\coprod_{i=1}^n X_i) \to A$ tal que $\eta \circ c_i = g_i$ para cada $i \in ob(\mathcal{I})$. Como se muestra en la figura 20.

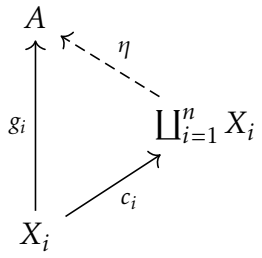


Figura 20: Colímite en Top.

Ejemplo 26.

Lema 2. *[7, §1] Los **pushouts** existen en* Top *y están dados por la figura 21. Donde " $\backsim$ " es la relación de*

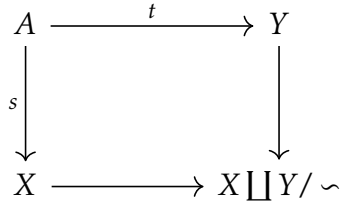


Figura 21: Sumidero en Top.

equivalencia más fina en $X \coprod Y$ tal que $s(a) \backsim t(a)$ para todo $a \in A$ y $X \coprod Y/\backsim$ está dotada de la topología cociente con respecto a " $\backsim$ ".

Demostración: Para esto se debe construir a η en la figura 22 y mostrar que es única.

El coproducto, $f_x \coprod f_y \colon X \coprod Y \to \hat{P}$ envía puntos equivalentes de $X \coprod Y$ al mismo punto en $\hat{P}$, por lo tanto, desciende a una función continua $\eta \colon (X \coprod Y/\backsim) \to \hat{P}$, por la propiedad universal de la topología cociente, entonces η existe. Por otro lado η factoriza $f_x \coprod f_y$ a través de $(X \coprod Y/\backsim)$, así η es única.

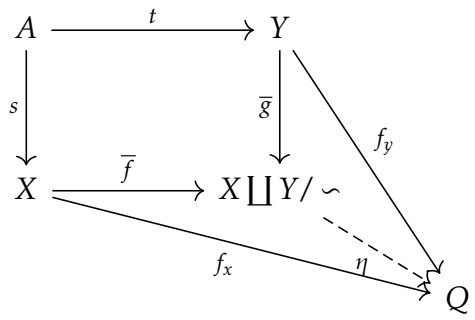


Figura 22: Coproducto. Pushout en Top.

Ejemplo 27. [7, §1] Sea $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ un diagram, en Top el **coigualador** de f y g es la aplicación $q\colon Y \to Q$ donde $Q = Y/\backsim$ para la relación de equivalencia más fina en Q, con $f(x) \backsim (x)$ para todo $x \in X$, Q esta dotado de la topologia cociente.

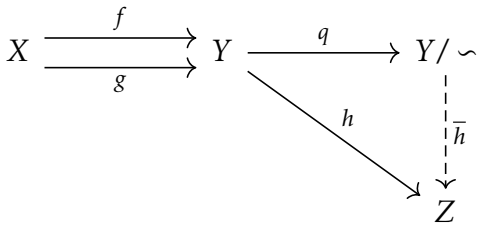


Figura 23: Coigualador de Top.

Ejemplo 28. Sea $D\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Open}_x$, donde la categoría $\mathcal{I}$ tiene 2 objetos. Un **colímite** para D es una fuente natural $A \xrightarrow{i_a} (A \cup B) \xleftarrow{i_a} B$, tal que para la fuente natural $A \xrightarrow{g_a} W \xleftarrow{g_b} B$ existe un único morfismo $\eta\colon A \cup B \to W$ definido como $A \cup B \subseteq W$, tal que $\eta \circ i_a = g_a$ y $\eta \circ i_b = g_b$. La figura 24 ilustra este colímite.

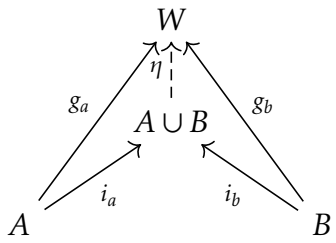


Figura 24: Colímite en Open_x.

Ejemplo 29. Considere $D\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Open}_x$, dado por el diagrama $A \xleftarrow{t} C \xrightarrow{s} B$. Un colímite para este diagrama es un sumidero natural $A \xrightarrow{p_a} A \cup B \xrightarrow{p_b} B$, tal que para el sumidero natural $A \xrightarrow{g_a} \hat{P} \xleftarrow{g_b} B$, existe un único morfismo $\eta\colon A \cup B \to \hat{P}$, tal que la figura 25 conmuta. es decir, $A \subseteq P \subseteq \hat{P}$, entonces

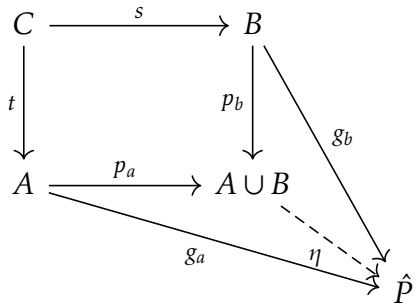


Figura 25: Pushout en Open_x.

$A \subseteq \hat{P}$ y $B \subseteq P \subseteq \hat{P}$, entonces $B \subseteq \hat{P}$ por tanto es un **pushaut**.

Ejemplo 30. Un **coigualador** $f, g\colon A \rightrightarrows V$ en la categoría Open_x es la identidad $id_V\colon V \to V$ la cual hace que el siguiente diagrama conmute.

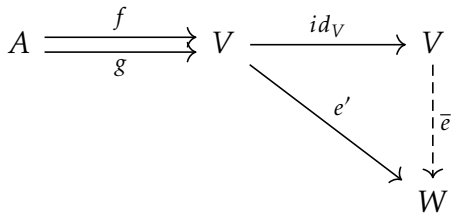


Figura 26: Coigualador en Open_x.

5. Conclusiones

La teoría de categorías se usa ampliamente en la topología contemporánea. Estas proporcionan un lenguaje preciso y abstracto para definir y construir objetos topológicos, por ejemplo los coproductos y productos en la categoría Top del ejemplo 8, además de las intersecciones y las uniones en la categoría Open_x del ejemplo 12. De otra parte, el estudio de los funtores proporciona un análisis sintético que se utiliza para relacionar diferentes estructuras matemáticas, como por ejemplo el funtor contravariante **Spec** del ejemplo 16 que lleva un anillo conmutativo a un espacio topológico con la topológia de Zarisky, o el funtor del ejemplo 17 que lleva un espacio topológico a su grupo fundamental. En el primer caso, el funtor está relacionando una estructura algebraica con una estructura topológica, en el segundo caso, al contrario. Por lo tanto la teoría de categorías es una herramienta usada en la resolución de problemas actuales en diferentes áreas como la física, la informática, las matemáticas, entre otras; gracias a su aplicación ofrece un espacio de comunicación interdisciplinaria que permite una amplía investigación con óptimos resultados.

Referencias

[1] Jirı Adámek, Horst Herrlich, and George E Strecker. Abstract and concrete categories; the joy of cats 2004. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, 2009.

[2] Glen E Bredon. *Sheaf theory*, volume 170. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Peter J Cameron. *Permutation groups*. Number 45. Cambridge University Press, 1999.

[4] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.

[5] John B Fraleigh, Mateos Lopez, et al. Algebra abstracta. Addison Wesley, 1987.

[6] Robert Goldblatt. *Topoi: the categorial analysis of logic*. Elsevier, 2014.

[7] Holger Kammeyer. *Introduction to Algebraic Topology*. Springer Nature, 2022.

[8] F William Lawvere and Stephen Hoel Schanuel. *Matemáticas conceptuales: una primera introducción a categorías*. Siglo XXI, 2002.

[9] S Mac Lane. Categories for the working mathematician graduate texts in mathematics, 1971.

[10] David Mumford. *The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians*, volume 1358. Springer Science & Business Media, 1999.

[11] James R Munkres. Topología (2ª edición), Prentice Hall, 2002.

[12] Teemu Pirttimäki. A survey of kolmogorov quotients. *arXiv preprint arXiv:1905.01157*, 2019.

[13] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.