

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Matemáticas

Método de Wavelet-Galerkin para ecuaciones diferenciales

Juan Manuel Sanchez Navarro

20131167076

Director

Samuel Barreto Melo

16 de mayo de 2018

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Método de Wavelet-Galerkin para ecuaciones diferenciales

Juan Sánchez Navarro
Director Samuel Barreto Melo

2018

Proyecto Curricular de Matemáticas

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi profesor Samuel Barreto Melo, bajo cuya supervisión escogí este tema y comencé el trabajo de grado. El Coordinador Milton Lesmes, mi Jurado en las etapas finales del trabajo, también ha sido generosamente servicial, y me ha ayudado de numerosos modos en las bibliografías, y en su recomendación sobre énfasis y tema de este trabajo con grandes instrucciones.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años en la academia y por su gran comprensión, a mi abuela que tanto quiere ver a su nieto graduado, a ella dedico este trabajo.

Índice general

Agradecimientos **3**

Indice de Símbolos **5**

Introducción **6**

1. Objetivos **10**
1.1. Metodología 10
1.2. Objetivo General 10
1.3. Objetivos específicos 11

2. Conceptos Básicos **12**
2.1. Espacio de Hilbert y algunas propiedades 12
2.2. Wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ 16

3. Desarrollo **31**
3.1. Operadores 31
3.2. Método de Galerkin 35
3.3. Método de wavelet-Galerkin 38
3.4. Ejemplo de motivación 42
3.4.1. Solución por diferencias finitas 43
3.4.2. Solución por Wavelet-Galerkin. 45

4. Conclusiones **57**

Bibliografía **58**

Indice de Símbolos

$\mathbb{R}$	—	Números Reales.
$\mathbb{C}$	—	Números Complejos.
$C([0,1])$	—	Espacio de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.
$C^1([0,1])$	—	Espacio de funciones con primera derivada continua en el intervalo $[0,1]$.
$C_0^2([0,1])$	—	Espacio de las funciones de valor complejo, continuas en $[0,1]$ tal que $f(0) = f(1) = 0$ y con segunda derivada continua en $[0,1]$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_0$	—	Producto interno en $H_0^1[0,1]$.
$\| \ \|$	—	Norma en $L^2(\mathbb{R})$.
$\| \ \|$	—	Módulo.
$\overline{g(t)}$	—	Conjugado de g en el valor t.
Λ	—	Conjunto finito de indices.
H_0^1	—	El espacio completado de $C_0^2[0,1]$ con su respectiva norma $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.
MRA	—	Análisis de multi-resolución

Introducción

Desde el inicio de los tiempos la humanidad ha tenido que enfrentarse con distintos problemas y en su proceso de resolución han surgido diversos modelos, por ejemplo una ecuación diferencial[1], se entiende por ecuación diferencial cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. La historia de las ecuaciones diferenciales comenzaron en el siglo $XVII$ cuando Sir. Isaac Newton, Leibniz y la familia Bernoulli resolvieron algunas ecuaciones diferenciales sencillas de primero y segundo orden, muchas leyes de la naturaleza, en física, química, biología o astronomía que encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo en 1822 Fourier publicó su trabajo de transferencia de calor en Théorie analytique de la chaleur[2], en la que basó su razonamiento en la ley del enfriamiento de Newton, esto es, que la transferencia de calor entre dos moléculas adyacentes es proporcional a diferencias extremadamente pequeñas de sus temperaturas. En este libro Fourier expone la ecuación del calor para la difusión conductiva del calor. Esta ecuación en derivadas parciales es actualmente objeto de estudio en la física matemática.

Después se planteron métodos para solucionar ecuaciones diferenciales pero al pasar el tiempo se dieron cuenta que es más fácil determinar la existencia y unicidad de una función solución, otra forma es usar métodos numéricos, un ejemplo de estos es el método de Galekin que fue creado por Boris Grigorievich Galerkin el publicó su método de elementos finitos en 1915 cuando estaba en Europa, este método se caracteriza por colocar algunas restricciones al espacio de funciones

[1]Newton, Isaac (1736) [1671]. Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series)

[2] Fourier, Jean-Baptiste Joseph (1822). Théorie analytique de la chaleur. París: Firmin Didot Père et Fils.

y caracteriza el espacio con un número finito de funciones bases lo que proporciona una potente solución numérica a estas ecuaciones diferenciales, ahora se va ha combinar con las Wavelets, estas han generado un gran interés por parte de los investigadores teóricos y aplicados en las últimas décadas. Meyer, Mallat, Daubechies y muchos otros dieron los conceptos para comprender las wavelets, para mas información ver [5]. Desde entonces, el número de aplicaciones donde se han utilizado las wavelets se ha disparado. En áreas como el análisis de series de tiempo, la teoría de aproximación y las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, las wavelets son reconocidas como armas poderosas y no solo como herramientas.

El método de wavelet-Galerkin es una mejora con respecto al método estándar de Galerkin al usar una base funcional ortogonal. Las traslaciones de una wavelet para todas sus dilataciones forman una base ortonormal incondicional de $L^2(\mathbb{R})$ y las traslaciones de una función de escala para todas las dilataciones forman un sistema ortonormal incondicional para $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, que es una gran mejora sobre una base polinómica estándar o una base trigonométrica que no necesariamente tienen que ser incondicionales. En muchos casos, las wavelets también proporcionan una mejor base de los espacios de aproximación que otras bases en el siguiente sentido. En primer lugar, las representaciones de los operadores diferenciales son casi diagonales con el sistema wavelet, que mejora el acondicionamiento de las ecuaciones algebraicas discretas. En segundo lugar, las representaciones wavelet son efectivas en los procedimientos de adaptación, de modo que se puede reducir la complejidad de los cálculos. Además, la solución tiene una cierta singularidad, su representación wavelet puede capturar automáticamente la singularidad. En este trabajo se explica y aplica el método de wavelet-Galerkin a algunos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville y como guía se sigue principalmente los textos [6] y [7].

Estado del Arte

Niels Henrik Abel: 5 de agosto de 1802 − 6 de abril de 1829. Era un matemático noruego que hizo contribuciones pioneras en una variedad de campos, entre cuyos resultados está el hecho que las ecuaciones polinomiales de grado cinco o mayor no pueden ser resueltas por formulas algebraicas (recuérdese que para las ecuaciones cuadráticas sí existe una fórmula, la que se aprende en la en-

señanza media). Esta pregunta era uno de los problemas abiertos pendientes de su época, y había estado sin resolver durante 250 años. También fue un innovador en el campo de las funciones elípticas y descubridor de las funciones abelianas.

Walther Ritz: 22 de febrero de 1878 − 7 de julio de 1909. Fue un físico teórico suizo. Es más famoso por su trabajo con Johannes Rydberg en el principio de combinación de Rydberg-Ritz. Ritz también es conocido por el método variacional que lleva su nombre, el método de Ritz que son parte de inspiración del método de Galerkin.

Boris Grigorievich Galerkin: El método de Galerkin fue creado por Boris Grigorievich Galerkin publicó su método de elementos finitos en 1915 cuando estaba en Europa este método se caracteriza por poner algunas restricciones al espacio de funciones y caracteriza el espacio con un número finito de funciones bases que proporciona una potente solución numérica a estas ecuaciones diferenciales.

Petrov, Georgii Ivanovich: Nació el 18 de mayo de 1912, en Pinega, en lo que ahora es Arkhangelsk Oblast. Científico soviético en el campo de la mecánica. Petrov trabajó en varios institutos de investigación después de graduarse de la Universidad Estatal de Moscú y propuso el método de Petrov − Galerkin.

Henry E Fettis: Nació alrededor de 1916 en estados unidos, propuso una forma numérica de la solución a la ecuación de Abel utilizando la regla de cuadratura de Gauss−Jacobi.

Jean Céa: Nació en 1932 por inmigrantes españoles en Argelia, el lemma de Céa es un lema en la disertación de matemáticas, es una herramienta importante para probar estimaciones de error para el método de elementos finitos aplicado a ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

Jean Morlet: Nació el 13 de enero de 1931 - 27 de abril de 2007, fue un geofísico francés que fue pionero en el campo del análisis wavelet alrededor del año 1975. Inventó el término wavelet para describir las funciones que estaba utilizando. En 1981, Morlet trabajó con Alex Grossman para desarrollar lo que ahora se conoce

como la transformada de wavelet.

Stéphane Georges Mallat: Hizo algunas contribuciones fundamentales al desarrollo de la teoría wavelet a finales de los años ochenta y principios de los noventa. También ha trabajado en matemáticas aplicadas, procesamiento de señales, síntesis de música y segmentación de imágenes. Específicamente, colaboró con Yves Meyer para desarrollar la construcción del análisis multirresolución (MRA) para wavelets compactas, lo que hizo práctica la implementación de wavelets para aplicaciones de ingeniería al demostrar la equivalencia de bases wavelet y filtros de espejo conjugados utilizados en bancos de filtros multirate discretos en procesamiento de la señal.

Yves F. Meyer: Francia; Nació el 19 de julio 1939. Es un matemático francés, se encuentra entre los progenitores de la teoría de wavelet, propuso el wavelet de Meyer y fue premiado en el 2017 por el premio Abel.

Baronesa Ingrid Daubechies: Nació el 17 de agosto de 1954. Es física y matemática belga. Entre 2004 y 2011 fue la profesora de William R. Kenan, Jr. en los departamentos de matemáticas y matemáticas aplicadas en la Universidad de Princeton. Enseñó en Princeton durante 16 años. En enero de 2011 se mudó a la Universidad de Duke como profesora de matemáticas, fue la primera mujer en ser presidenta de la Unión Matemática Internacional (2011-2014) y es mejor conocida por su trabajo con wavelets en compresión de imágenes.

Capítulo 1

Objetivos

1.1. Metodología

En este trabajo se utilizará el método deductivo, ya que a partir del método de Wavelet−Galerkin para ecuaciones diferenciales, se analizarán los problemas para la solución en un espacio determinado y se tratará de establecer condiciones necesarias o suficientes, sobre las condiciones iniciales con una ecuación diferencial más general. En esta metodología también tenemos las siguientes características.

- Estudio y reconstrucción del capítulo 6 del libro [6], así como del articulo [7].

- Analizar y dar resultados sobre el método de Wavelet-Galerkin para ecuaciones diferenciales.

- Estructurar y redactar.

1.2. Objetivo General

Hacer un estudio de aproximación a la solución de cierta clase de ecuación diferencial usando las wavelets en conjunción con el método de Galerkin y aplicaciones de este.

1.3. Objetivos específicos

1. Reconstruir el método de Galerkin de manera detallada.

2. Definir las Wavelets, dar la relación entre las Wavelets y el método de Galerkin.

3. Establecer las diferencias entre el método de Wavelet-Galerkin con otros métodos.

4. Ilustrar con algunos ejemplos las aplicaciones de cierta clase de ecuaciones diferenciales que se resuelven usando el método de Wavelet-Galerkin.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

2.1. Espacio de Hilbert y algunas propiedades

En esta sección se presentarán los conceptos más importantes de la teoría wavelet y algunos ejemplos para entenderlos.

Definición 2.1.1 (Espacio de Banach)**.** *Sea X un espacio lineal normado. Si X es completo con la métrica d definida desde la norma, dada por $d(x,y) = \|x-y\|$, llamamos X un espacio de Banach.*

Ejemplo 2.1.1 (ℓ^∞)**.** *Sea $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ el conjunto de todas las sucesiones $a_l = \{a_j^{(l)}\}_{j=1}^\infty$ de números complejos tal que para todo $j = 1, 2, \cdots$ tenemos $a_j^l \leq c_a$ Donde c_a es un numero real que puede depender de a pero no depende de j. Más puntual se tiene*

$$\ell^\infty = \{\{a_j^{(l)}\}_1^\infty : \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j^{(l)}| < \infty\}$$

Se define la métrica

$$d(a_l, b_s) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j^{(l)} - b_j^{(s)}|$$

Donde $b_s = \{b_j^{(s)}\}_{j=1}^\infty \in \ell^\infty$. Se probará que es completo. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞, donde $a_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$

$$d(a_m, a_n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon$$

En particular fijando j

$$|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon \tag{2.1}$$

Es decir, para cada j fijo la sucesión $(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \cdots)$ *es una sucesión de Cauchy de números* $\mathbb{C}$*, por ser* $\mathbb{C}$ *completo esta sucesión* $a_j^{(m)} \to a_j$ *cuando* $j \to \infty$*, usando estos limites* $a_1, a_2, \cdots$*, se define* $a = (a_1, a_2, \cdots)$*. Falta demostrar que* $a \in \ell^\infty$ *y* $a_m \to a$*. Haciendo que* $n \to \infty$ *en 2.1 tenemos*

$$|a_j^{(m)} - a_j| < \epsilon \tag{2.2}$$

Entonces

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{(m)}| + |a_j^{(m)}| < \epsilon + c_m$$

Así que $\{a_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^\infty$*. De nuevo por 2.1*

$$d(a_m, a) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j^{(m)} - a_j| < \epsilon$$

Por lo tanto $a_j \to a$*. Finalmente* ℓ^∞ *es completo.*

Definición 2.1.2 (Espacio de Hilbert)**.** *Un espacio de Hilbert* $\mathscr{H}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *con un producto interno tal que* $\mathscr{H}$ *es completo con la métrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Se define el espacio :

$$L^2([0,1]) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} : \int_0^1 |f(\theta)|^2 \, d\theta < \infty \right\}.$$

Nota: Donde se usa la integral de Lebesgue y no la integral de Riemann, recuérdese que f y g son equivalentes si f, g son iguales excepto en un conjunto de medida cero, es decir $f = g$ en casi toda parte. El espacio $L^2([0,1])$ es un espacio vectorial y mejor aún es un espacio de Hilbert con el producto interno definido

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Utilizando la desigualdad de los números complejos $|zw| \leq \frac{|z|^2 + |w|^2}{2}$ se compro-

bará que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ esta bien definido. Sea $f, g \in L^2([0,1])$ entonces

$$\left| \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \right| \leq \int_0^1 \left| f(t)\overline{g(t)}dt \right| \leq \int_0^1 \left(\frac{|f(t)|^2 + |\overline{g(t)}|^2}{2} \right) dt < \infty$$

Ahora se verificará que es un producto interno. Sea $f, g, h \in L^2([0,1])$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (Aditividad.)

$$\langle f+g, h \rangle = \int_0^1 (f(t)+g(t))\overline{h(t)}dt = \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt + \int_0^1 g(t)\overline{h(t)}dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle .$$

- (Homogeneidad.)

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_0^1 \alpha f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha \langle f, g \rangle .$$

- (Simetría conjugado.)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 \overline{\overline{f(t)}g(t)}dt = \overline{\int_0^1 \overline{f(t)}g(t)} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

- (Positividad.) Ya que $|f(t)|^2 \geq 0$ tenemos que

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

  Por un resultado en medida ver (Natanson [8], p. 138) se tiene que

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0 \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ a.e } .$$

Definición 2.1.3. *Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\xi \in \mathbb{R}$, se define*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx. \tag{2.3}$$

Se llama $\hat{f}$ a la transformada de Fourier de f; la aplicación $\hat{}$ es la transformada de Fourier.
Para $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$, defina $\check{g}$ como la transformada inversa de Fourier de g,

por

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

La aplicación ˇ es la transformada inversa de Fourier.

Definición 2.1.4 (Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$)**.** *Suponga que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ para todo n, y tal que f_n converge a f en L^2 cuando $n \to \infty$. Defina $\hat{f}$, la transformada de Fourier de f, siendo el límite en L^2 de la sucesión $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
Definamos $\check{f}$, la transformada de Fourier inversa de f, como el límite en L^2 de la sucesión $\{\check{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nota: Para $f \in L^2(\mathbb{R})$, se define $\hat{f}$ por medio de una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones suficientemente buenas (es decir, tal que $f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ para todo n) que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$, y haciendo $\hat{f}$ el L^2 limite de $\hat{f}_n$ cuando $n \to \infty$, sin embargo, se puede ver que para cualquier sucesión de funciones, buenas o no, que convergen en L^2 a f, su transformada de Fourier converge a $\hat{f}$, en efecto si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^2(\mathbb{R})$ y tal que $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$ entonces por la fórmula de Plancherel

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\| = \sqrt{2\pi}\|f_n - f\| \to 0 \qquad \text{cuando} \;\; n \to \infty$$

Así $\hat{f}_n \to \hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $n \to \infty$. Por tanto si se toma una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\hat{f}_n$ es definido puntualmente por 2.3 y $\hat{f}$ es el L^2 limite de $\hat{f}_n$ cuando $n \to \infty$. Un ejemplo de tal sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$f_n(\chi) = \begin{cases} f(\chi) & si \quad |\chi| \leq n \\ \\ 0 & si \quad |\chi| > n \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\hat{f}_n(\chi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(\chi)e^{-i\chi\xi}d\chi = \int_{-n}^{n} f(\chi)e^{-i\chi\xi}d\chi.$$

Así para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(\chi)e^{-i\chi\xi}d\chi$$

Donde el limite es en el sentido de L^2.

Ejemplo 2.1.2. *Hallar la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ de la función $\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$. Comprobemos que $\chi_{[-\pi,\pi]} \in L^2(\mathbb{R})$, en realidad*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[-\pi,\pi]}(x)\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi < \infty.$$

Ahora utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-\pi,\pi]}(\xi) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \chi_{[-\pi,\pi]}(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-ix\xi} dx \quad \text{con } n \leq \pi \ . \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{in\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-in\xi}}{i\xi} \\ &= 2\frac{\sin(\pi\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

Definición 2.1.5 (Conjunto ortonormal completo)**.** *Suponga que $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto de elementos de $\mathscr{H}$. Entonces $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal completo o sistema ortonormal completo si $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal con la propiedad que el único elemento $w \in \mathscr{H}$ tal que $\langle w, a_j\rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ es $w = 0$.*

Teorema 2.1.1. *Suponga que $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $\mathscr{H}$, entonces $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal completo si y sólo si*

$$f = \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, a_j\rangle a_j \ , \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}$$

2.2. Wavelet en $L^2(\mathbb{R})$

Definición 2.2.1. *Para $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ y $j, k \in \mathbb{Z}$, definase $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$ por*

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x - k\right) \qquad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right) \tag{2.4}$$

Nótese la conveniencia del escalar $2^{j/2}$ en las definiciones de $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ que producen que estas sean invariantes en la norma de L^2 para todos los j, k, es decir:

$$\begin{aligned}\|\psi_{j,k}(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right)\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|^2 dy = \|\psi\|^2 .\end{aligned}$$

Otra forma es

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^j\left(x - 2^{-j}k\right)\right). \tag{2.5}$$

Obsérvese que la ecuación 2.5 produce una dilatación, y una traslación. En efecto si $j > 0$, la gráfica de la función $\psi(2^j x)$ se obtiene a partir de la contracción de la gráfica de la función ψ a lo largo del eje x por un factor de 2^j (para $j < 0$, la gráfica se expande en la dirección x). Por ejemplo, supóngase que ψ tiene soporte compacto[1], y sea $r > 0$ el número más pequeño tal que $\psi(x) = 0$ para todo x tal que $|x| > r$. Entonces $\psi(2^j x)$ tiene soporte compacto, ya que dentro del intervalo $\left[\frac{-r}{2^j}, \frac{r}{2^j}\right]$ se tiene $\psi(2^j x) = 0$ siempre que $|2^j x| > r$, que es, cuando $|x| > \frac{r}{2^j}$.
La gráfica de $\psi(2^j x - k) = \psi(2^j(x - 2^{-j}k))$ se obtiene por traslación de la $\psi(2^j x)$ por $2^{-j}k$ a lo largo del eje x (a la derecha si $k > 0$, a la izquierda si $k < 0$). Por tanto, si ψ tiene soporte compacto en el intervalo $[-r, r]$, entonces $\psi(2^j x - k)$ tiene soporte dentro de $[2^{-j}k - 2^{-j}r, 2^{-j}k + 2^{-j}r]$. Finalmente, por la ecuación 2.5, la gráfica de $\psi_{j,k}$ es obtenida de la gráfica de $\psi(2^j x - k)$ multiplicando por $2^{j/2}$, que escala la gráfica en la dirección y por este factor. Similarmente se tiene para $\varphi_{j,k}$.
A grandes rasgos, las funciones φ y ψ que se consideran están centradas cerca de 0 y se concentran en una escala comparable a 1 (lo que significa que la mayor parte de la masa de la función se encuentra dentro de un intervalo que rodea el origen de la longitud alrededor de n, donde n es un número entero positivo razonablemente pequeño). Entonces $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ se centran cerca del punto $2^{-j}k$ en una escala comparable a 2^{-j}.

Definición 2.2.2 (Wavelet en $L^2(\mathbb{R})$)**.** *Un sistema Wavelet para $L^2(\mathbb{R})$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma*

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

Para algún $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Las funciones $\psi_{j,k}$ son llamadas Wavelets. La función ψ

[1]La adherencia del conjunto de las preimagenes de la función donde la función no es nula es compacto

es llamada la madre Wavelet.

De lo anterior surgen varias preguntas por ejemplo, ¿Como se garantiza la existencia de un sistema wavelet ?, ¿Que ventajas tiene un sistema wavelet con respecto a otros (Sistema de Fourier)?, para garantizar la existencia del sistema wavelet uno de los caminos es primero definir el análisis de multiresolución (MRA) después se comprobará que todo MRA produce un sistema wavelet pero no todos los sistemas wavelet provienen de un (MRA), algunos ejemplos de wavelet que provienen de un MRA son Haar Wavelet, Shannon Wavelet ..., por otro lado si $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de wavelet, entonces por ser un sistema se tiene que cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser escrito en la forma

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \, \psi_{j,k}.$$

Conocida como identidad de wavelet[2], la aplicación que envía f a la sucesión de coeficientes $\{\langle f, \psi_{j,k}\rangle\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ se llama la transformada de wavelet (discreta).

Definición 2.2.3 (MRA)**.** *Un análisis de multiresolución (MRA) con función de escala o padre wavelet φ es una sucesión $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ que tiene las siguientes propiedades:*

I. (Monotonicidad) $V_j \subseteq V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$

II. (Existencia de la función de escala) Existe una función $\varphi \in V_0$ tal que el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal y

$$V_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \tag{2.6}$$

III. (Propiedad de la Dilatación) Para cada j, $f(x) \in V_0$ si y sólo si $f(2^j x) \in V_j$

IV. (Propiedad de intersección) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

V. (Densidad) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$

Otra forma de ver la propiedad V es, para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con cada $f_n \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ tal que $\|f_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

[2]Prof. S.Yu. Slavyanov, St Petersburg State Univercity

Nótese que la propiedad de dilatación (III) dice que V_j consiste de las dilataciones por 2^j de los elementos de V_0 esto quiere decir que para $j \in \mathbb{Z}$

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \tag{2.7}$$

Además $\varphi \in V_0 \subseteq V_1$, por la ecuación 2.7 tenemos

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \tag{2.8}$$

La ecuación 2.8 es conocida como la ecuación de escala y la sucesión $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ en 2.8 es conocida como la sucesión de escala, la propiedad (V) puede ser omitida si se cumple las siguientes condiciones.

Lema 2.2.1. *Suponga que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y es tal que $\hat{\varphi}$ es acotada, $\hat{\varphi}$ es continua en 0, y $\hat{\varphi}(0) = 1$. También, suponga que para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal. Defina $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ por la ecuación 2.7 entonces*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}).$$

Demostración: Ver ([6], p. 417).

Existe una importante relación entre el sistema wavelet y el MRA, que es el siguiente.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Mallat)**.** *Suponga que $\{V_j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un MRA con una función de escala φ y sucesión de escala $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$*[3] *$\in \ell^1$. Se define $v(k)$*[4] *como*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)} \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

y ψ por la ecuación

$$\psi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \tag{2.10}$$

Entonces $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$.

[3] Un resultado que no es difícil de probar es, todo MRA con sucesión de escala u entonces $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$.Donde $R_{2k}u(j) = u(j-2k)$.

[4] Esta definición de v que depende de u es por que $\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forman un sistema ortogonal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$ ver (Michael W. Frazier, 1999, p.314).

Demostración

Se probará que $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal, reemplazando x por $x-k$ en 2.10 tenemos

$$\psi(x-k)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}u(l)\sqrt{2}\varphi(2x-2k-l)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}u(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2x-m)$$

esto es

$$\psi_{0,k}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}u(m-2k)\varphi_{1,m}. \tag{2.11}$$

Sustituyendo 2.11 y 2.10 se tiene

$$\begin{aligned}\langle\psi,\psi_{0,k}\rangle&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}v(j)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\overline{v(m-2k)}\,\langle\varphi_{1,j},\varphi_{1,m}\rangle\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}v(j)\overline{v(j-2k)}\\&=\langle v,R_{2k}v\rangle\\&=\overline{\langle u,R_{2k}u\rangle}\\&=\begin{cases}1 & si \quad k=0\\0 & si \quad k\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Donde $R_{2k}v(j)$[5]$= v(j-2k)$, haciendo un cambio de variables, para $k,l\in\mathbb{Z}$ se tiene $\langle\psi_{0,k},\psi_{0,l}\rangle=\langle\psi,\psi_{0,l-k}\rangle$, así $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal y haciendo un cambio de variable también $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Se define

$$W_j=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}z(k)\varphi_{j,k}:z=(z(k))_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})\right\} \tag{2.12}$$

Algunas observaciones de 2.12.

(a) La propiedad (III) de MRA se cumple para W_j. Efectivamente si $f\in W_0$ entonces $f(2^jx)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{z(k)}{2^{j/2}}2^{j/2}\varphi_{0,k}(2^jx)$ así $f(2^jx)\in W_j$, recíprocamente si $f(2^jx)\in W_j$, haciendo $x=\frac{y}{2^j}$ tenemos $f(y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}r(k)\varphi_{0,k}(y)$ así $f\in W_0$.

(b) $V_{j+1}=V_j\bigoplus W_j$. En efecto si $f\in V_{j+1}\Rightarrow f(\frac{x}{2^j})\in V_1$ de donde

$$f\left(\frac{x}{2^j}\right)=f_1(x)+f_2(x)\text{ con }f_1\in V_0\text{ y }f_2\in W_0$$

[5]Sea $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$ y $B=\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}\cup\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$, Si B es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$ se llama a B un sistema wavelet de primer grado para $\ell^2(\mathbb{Z})$

Lo anterior se tiene por que $V_1 = V_0 \bigoplus W_0$ ver libro (Michael W. Frazier, 1999, p.389), usando la observación (a) tenemos $f(x) \in V_j \bigoplus W_j$ .Recíprocamente si $f(x) \in V_j \bigoplus W_j$ entonces usando de nuevo (a) y $V_1 = V_0 \bigoplus W_0$, tenemos $f(\frac{x}{2^j}) \in V_1 \Rightarrow f(x) \in V_{j+1}$.

Se mostrará que

$$B = \{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Solo falta mostrar que $\psi_{j,k}$ es ortogonal a $\psi_{l,m}$ cuando $j \neq l$, supóngase que $j > l$. Entonces $\psi_{l,m} \in W_l \subseteq V_{l+1} \subseteq V_{l+2} \subseteq \ldots \subseteq V_j$ pero $\psi_{j,k} \in W_j$ y W_j es ortogonal a V_j por lo tanto $\psi_{j,k}$ es ortogonal a $\psi_{l,m}$ de aquí B es ortonormal.

Se culminará probando que el conjunto B es un sistema ortonormal completo, supóngase que $f \in L^2(\mathbb{R})$ y es ortogonal a cada elemento de B, es decir $\langle f, \psi_{j,k}\rangle = 0$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$ lo que implica que $f \perp W_j$ para $j \in \mathbb{Z}$, sea $P_j(f)$ la proyección de f en V_j definida como:

$$P_j(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \, \varphi_{j,k}. \tag{2.13}$$

Por definición $P_j(f) \in V_j$. Del mismo modo $f - P_j(f) \perp V_j$, ya que para $l \leq j-1$ se tiene $W_l \subseteq V_{l+1} \subseteq \ldots \subseteq V_j$ y así $f - P_j(f)$ es ortogonal a W_l para cada $l \leq j-1$, y como $f \perp W_j$ por la linealidad $P_j(f) \perp W_l$ para todo $l \leq j-1$ esto implica que $P_j(f) = 0$ [6] para todo $j \in \mathbb{Z}$, ya que $P_j(f) = 0$ es la mejor aproximación a f en V_j, esto quiere decir que

$$\|f\| = \|f - P_j(f)\| \leq \|f - h\| \tag{2.14}$$

Usando la propiedad V de la definición de MRA, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_n \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $\|f - f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por la ecuación 2.14 se debe tener que $\|f\| = 0$ y así $f = 0$. Esto prueba la completez de B. □

El teorema anterior afirma que dada una función de escala φ para un MRA, le corresponde una sucesión de escala $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ con la propiedad que las traslaciones pares de números enteros de u son ortonormales en $\ell^2(\mathbb{Z})$, ahora la sucesión u

[6] Para probar esto se procede por el argumento de inducción demostrando que si existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $P_j(f) \in V_j$ y $P_j(f) \perp W_l$ para todo $l \leq j-1$ entonces $P_j(f) \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, por ejemplo para $j = 2$ si $P_2(f) \in V_2$ y $P_2(f) \perp W_2 \Rightarrow P_2(f) = v_1 + w_1$ con $w_1 \in W_1$ y $v_1 \in V_1$ ya que $\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1\rangle = \langle v_1 + w_1, w_1\rangle = \langle P_2(f), w_1\rangle = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \Rightarrow P_2(f) \in V_1$.

tiene un compañero v (2.9), tal que u y v generan el primer grado de sistema wavelet para $\ell^2(\mathbb{Z})$. De la misma manera que a φ le corresponde un u se define un ψ correspondiente a un v. Esto produce una partición ortogonal de $V_1 = V_0 \bigoplus W_1$, por la dilatación tenemos $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$ en cada grado. Tomando la unión del sistema ortonormal $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ para los espacios de complemento ortogonal W_j produce un sistema wavelet para $L^2(\mathbb{R})$. Resumiendo lo anterior en lo siguiente.

$$
\begin{array}{ll}
L^2(\mathbb{R}) & \ell^2(\mathbb{Z}) \\
MRA : \varphi \xrightarrow{\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}} & u : \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ es ortonormal en } \ell^2(\mathbb{Z}) \\
 & \Big\downarrow {\scriptstyle v(k)=(-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}} \\
\psi \xleftarrow{\psi=\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}} & v : \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}} \\
Madre\ \ Wavelet & \text{es un conjunto ortonormal completo en } \ell^2(\mathbb{Z})
\end{array}
$$

A continuación se mostrarán ejemplos que pueden ayudar.

Ejemplo 2.2.1 (Haar MRA)**.** *Para cada $j, k \in \mathbb{Z}$, sea*

$$I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$$

un intervalo de la forma $I_{j,k}$ se llama intervalo diádico. Para $j \in \mathbb{Z}$ sea

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \textit{Para todo } k \in \mathbb{Z}, f \textit{ es constante en } I_{j,k} \right\}.$$

Probaremos que $V_j \subseteq V_{j+1}$. Sea $f \in V_j$ entonces f es constante en $I_{j,k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, de donde. Si k es par $I_{j+1,k} \subseteq I_{j,k/2}$ por propiedades de un intervalo diádico y así f es constante en $I_{j+1,k/2}$. Si k es impar por propiedades de un intervalo diádico $I_{j+1,k} \subseteq I_{j,(k-1)/2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces f es contante en $I_{j+1,k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Se define

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x < 0 \ o \ 1 \leq x \end{cases} \tag{2.15}$$

Entonces $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal ya que los soportes de diferentes $\varphi_{0,k}$ no se

superponen y $\int_k^{k+1} 1dx = 1$, *además para todo* $f \in V_0$ *es decir para todo* $k \in \mathbb{Z}, f$ *es constante en* $I_{0,k}$ *y este puede ser escrito como*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$$

Donde c_k *es el valor de la función* f *en el intervalo* $[k, k+1)$, *es más* $\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_{0,k}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k\varphi_{0,k}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2 = \|f\|^2 < \infty$, *recíprocamente si* $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k}$ *entonces* f *toma el valor constante* $z(k)$ *en* $[k, k+1)$ *y así se mantiene la ecuación 2.6. Probaremos la propiedad* (III) *del MRA como sigue*

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(x) = cte \text{ en } I_{0,k} \tag{2.16}$$

$$\Leftrightarrow f(2^j x) = cte \text{ en } I_{j,k} \tag{2.17}$$

$$\Leftrightarrow f(2^j x) = cte \in V_j \tag{2.18}$$

Para probar la propiedad (IV) *suponga que* $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *entonces* f *es constante en* $[0, 2^j)$ *y* $[-2^j, 0)$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *entonces* f *es constante en* $[0, \infty)$ *y* $(-\infty, 0)$ *y como* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *se debe tener que* $f = 0$, *y así* $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$. *Se probará la propiedad* (V) *con el Lema 2.2.1 en consiguiente*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-i\xi x}dx = \int_0^1 e^{-i\xi x}dx = e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{sen(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}}$$

Para $\xi \neq 0$ *y* $\hat{\varphi}(0) = 1$, *por lo tanto* $|\hat{\varphi}(\xi)|$ *es acotado por 1 y continuo en 0. Por el Lema 2.2.1 se tiene la propiedad (V) del MRA.*
Por lo anterior ya se tiene un ejemplo de un MRA, ahora se producirá un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ *con este, la clave esta en encontrar los coeficientes* $u(k), k \in \mathbb{Z}$ *en la ecuación de escala 2.8, por que*

$$\langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle = \langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(l)\varphi_{1,l}, \varphi_{1,k} \rangle = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(l)\langle \varphi_{1,l}, \varphi_{1,k} \rangle = u(k)$$

Nótese que

$$\varphi_{1,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & si \quad \frac{k}{2} \leq x < \frac{k+1}{2} \\ 0 & si \quad x < \frac{k}{2} \text{ o } \frac{k+1}{2} \leq x \end{cases} \tag{2.19}$$

Ahora calculando $u(k), k \in \mathbb{Z}$,

$$u(0) = \langle \varphi, \varphi_{1,0} \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$u(1) = \langle \varphi, \varphi_{1,1} \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$u(j) = \langle \varphi, \varphi_{1,j} \rangle = \int_{\frac{j}{2}}^{\frac{j+1}{2}} 0 \cdot \sqrt{2} dx = 0 \qquad j \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$$

Usando lo anterior en la ecuación de escala 2.8 se obtiene

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1).$$

Por la formula 2.9 se halla a $v(k)$ *resultando así* $v(0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $v(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *y* $v(j) = 0$ *para* $j \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$. *Así por la ecuación 2.10, la madre wavelet es*

$$\psi(x) = -\psi(2x) + \psi(2x - 1) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x < 0 \ o \ 1 \leq x \end{cases} \tag{2.20}$$

entonces

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2} & si \quad \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ 2^{j/2} & si \quad \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & si \quad x < \frac{k}{2^j} \ o \ \frac{k+1}{2^j} \leq x \end{cases} \tag{2.21}$$

Se va a comprobar que el conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ *es ortonormal.*
Primero se fija j *y se supone que* $k \neq k' \Rightarrow I_{j,k} \neq I_{j,k'} \quad \wedge \quad I_{j,k} \cap I_{j,k'} = \emptyset$

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \psi_{j,k} \cdot 0 dx + \int_{2^{-j}k'}^{2^{-j}(k'+1)} \psi_{j,k'} \cdot 0 dx = 0$$

Ahora fijemos k, *si* $j \neq j' \Rightarrow I_{j,k} \neq I_{j',k} \quad \wedge \quad I_{j,k} \cap I_{j',k} = \emptyset$,

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j',k} \rangle = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \psi_{j,k} \cdot 0 dx + \int_{2^{-j'}k}^{2^{-j'}(k+1)} \psi_{j,k'} \cdot 0 dx = 0$$

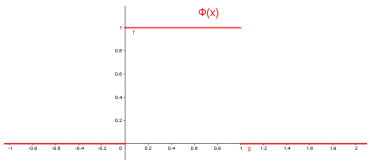
De nuevo fijemos k, si $j \neq j' \Rightarrow I_{j,k} \neq I_{j',k} \quad \wedge \quad I_{j,k} \cap I_{j',k} \neq \emptyset \Rightarrow I_{j,k} \subset I_{j',k}$,

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j',k} \rangle = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}k+2^{-(j+1)}} (-2^{\frac{j}{2}}) \cdot 2^{\frac{j'}{2}} dx + \int_{2^{-j}k+2^{-(j+1)}}^{2^{-j}(k+1)} 2^{\frac{j}{2}} \cdot 2^{\frac{j'}{2}} dx = 0$$

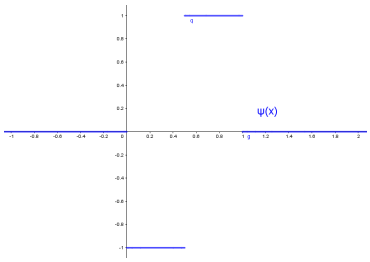
Por último si $j = j'$ y $k = k'$ entonces

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j',k} \rangle = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}k+2^{-(j+1)}} (-2^{\frac{j}{2}}) \cdot (-2^{\frac{j}{2}}) dx + \int_{2^{-j}k+2^{-(j+1)}}^{2^{-j}(k+1)} 2^{\frac{j}{2}} \cdot 2^{\frac{j}{2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

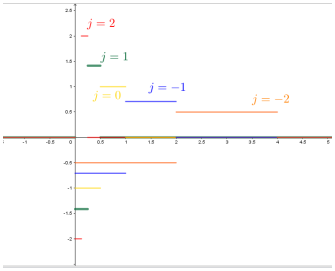
Por lo tanto el conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ es ortonormal y por el teorema de Mallat es completo, a continuación se ve sus respectivas gráficas.



(a) Función escala



(b) Madre Wavelet



(c) Definición 2.2.1

Otro ejemplo de Wavelet es

Ejemplo 2.2.2 (Shannon Wavelet)**.** *Para $j \in \mathbb{Z}$, sea*

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : supp\ \hat{f} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]\}.$$

Se probará que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un MRA, pero antes se verificará que cada V_j es un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$. Por definición $V_j \subseteq L^2(\mathbb{R})$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
Si $f, g \in V_j$ entonces supp $\hat{f} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$ y supp $\hat{g} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$ y por propiedades supp $(\hat{f} + \hat{g}) \subseteq$ supp $\hat{f} \cup$ supp $\hat{g} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$.
Por otra parte si $f \in V_j$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces supp $\alpha\hat{f} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$.

I. *Si $f \in V_j$ entonces supp $\hat{f} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi] \subseteq [-2^{j+1}\pi, 2^{j+1}\pi]$ por lo tanto $f \in V_{j+1}$.*

II. *Se define*

$$\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq \xi \leq \pi \\ 0 & si \quad |\xi| > \pi \end{cases}$$

Sea

$$\varphi(x) = (\chi_{[-\pi,\pi]})^{\vee}(x) = \frac{sen(\pi x)}{\pi x}.$$

Como las funciones senc(x) son ortonormales entonces

$$\langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{sen(\pi x - \pi k)}{\pi x - \pi k} \frac{sen(\pi x - \pi l)}{\pi x - \pi l} = \begin{cases} 1 & si \quad k = l \\ 0 & si \quad k \neq l \end{cases}$$

Si $f \in V_0$ entonces se puede expandir $\hat{f}$ en series de Fourier sobre $[-\pi, \pi)$

$$\hat{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{-ix\xi} \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi),$$

Para algún $(a(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Nótese que

$$(\varphi_{0,k})^{\wedge}(\xi) = e^{-ix\xi} \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$$

Por la inversión de Fourier se debe tener

$$f(x) = (\hat{f})^{\vee}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)(e^{-ix\xi}\chi_{[-\pi,\pi]})^{\vee}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)((\varphi_{0,k})^{\wedge})^{\vee}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\varphi(x-k).$$

Ahora si $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\varphi(x-k)$ con $(a(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ entonces

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)(\varphi_{0,k})^{\wedge}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k) e^{-ix\xi} \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$$

De lo anterior supp $\hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]$ y así $f \in V_0$.

III. *Sea $f \in V_0$, haciendo un cambio de variable tenemos*

$$\hat{f}(2^j\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix2^j\xi} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} f\left(\frac{u}{2^j}\right) \frac{1}{2^j} du = \hat{f}_{2^j}(\xi) = \frac{1}{2^j}\hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \tag{2.22}$$

Por lo tanto supp $\hat{f}_{2^j} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$. El reciproco se hace utilizando otra vez 2.22 y así se tiene la propiedad de dilatación.

IV. *Sea $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, se tiene supp$\hat{f} \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$ parar todo $j \in \mathbb{Z}$ en particular cuando $j \to -\infty$ se tiene supp $\hat{f} \subseteq [0, 0]$ así $f = 0$ a.e.*

V. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ *y* f_n *tal que*

$$\hat{f}_n(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi) & si \quad -2^n\pi \leq \xi \leq 2^n\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$ *que es* $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx$ *como esta suma converge* $\lim_{k\to\infty} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx = 0$, *usando lo anterior*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n - \hat{f}|^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{2^n\pi}^{\infty} |\hat{f}|^2 + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-2^n\pi} |\hat{f}|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{2^n\pi}^{2^{n+1}\pi} |\hat{f}|^2 + \int_{2^{n+1}\pi}^{2^{n+2}\pi} |\hat{f}|^2 + \cdots \right) \\ &+ \lim_{n\to\infty} \left(\cdots + \int_{-2^{n+2}\pi}^{-2^{n+1}\pi} |\hat{f}|^2 + \int_{-2^{n+1}\pi}^{-2^n\pi} |\hat{f}|^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un MRA, el siguiente paso es ver las wavelets producidas por este MRA, pero antes se utilizará lo siguiente*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{1,k}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \sqrt{2}\varphi(2x-k) \\ &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta\xi/2} e^{-ik\xi/2} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik\xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned}$$

Asumiendo que se puede cambiar limite con integral y aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 2.8 se tiene

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{2.23}$$

Donde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} \tag{2.24}$$

Por un argumento similar al anterior con la ecuación 2.10

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k) e^{-ik\xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{2.25}$$

Ahora definiendo

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k) e^{-ik\xi}. \tag{2.26}$$

entonces

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{2.27}$$

Observe que m_1 es 2π- periódica y que $m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}(-\xi)$ donde $\hat{v}$ es la transformada de Fourier en $\ell^2(\mathbb{Z})$ por la relación entre u y v se tiene

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}. \tag{2.28}$$

Continuando por la ecuación 2.23

$$m_0(\frac{\xi}{2}) = \frac{\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)}{\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi/2)} = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$$

Luego $m_0(\xi) = \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\xi)$. Se hallará $m_1(\xi)$ por la ecuación 2.28

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi+\pi)} = \begin{cases} e^{-i\xi} & si \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \xi \leq -\frac{\pi}{2} \\ e^{-i\xi} & si \quad \frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases} \tag{2.29}$$

Ya que $\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) = \chi_{[-2\pi,2\pi]}(\xi)$ y usando la ecuación 2.27 se obtiene

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\chi_{\{\xi:\pi\leq|\xi|\leq 2\pi\}}(\xi)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \psi(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{-i\xi/2}e^{ix\xi}d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\xi/2}e^{ix\xi}d\xi \\ =& \frac{1}{2\pi i(x-\frac{1}{2})}\left(e^{-i\pi(x-\frac{1}{2})} - e^{-i2\pi(x-\frac{1}{2})} + e^{i2\pi(x-\frac{1}{2})} - e^{i\pi(x-\frac{1}{2})}\right) \\ =& \frac{1}{\pi(x-\frac{1}{2})}\left(sen2\pi\left(x-\frac{1}{2}\right) - sen\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Que son llamadas las Wavelets de Shanon en $\mathbb{R}$. Cuyas respectivas gráficas están en la Figura 2.2.

Ejemplo 2.2.3 (Daubechies Wavelet)**.** *Las wavelets de Daubechies son funciones con soporte compacto, por lo cual son muy utilizadas en las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En 1988, Ingrid Daubechies definió la función de escala como*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(2x-k), \tag{2.30}$$

Donde N denota el género del Wavelet de Daubechies. La función generada con esos coeficientes tendrán $supp\varphi = [0, N-1]$ y $\frac{N}{2} - 1$ momentos de desaparición de wavelets. Algunas veces la función de escala está definida como

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi(2x-k), \tag{2.31}$$

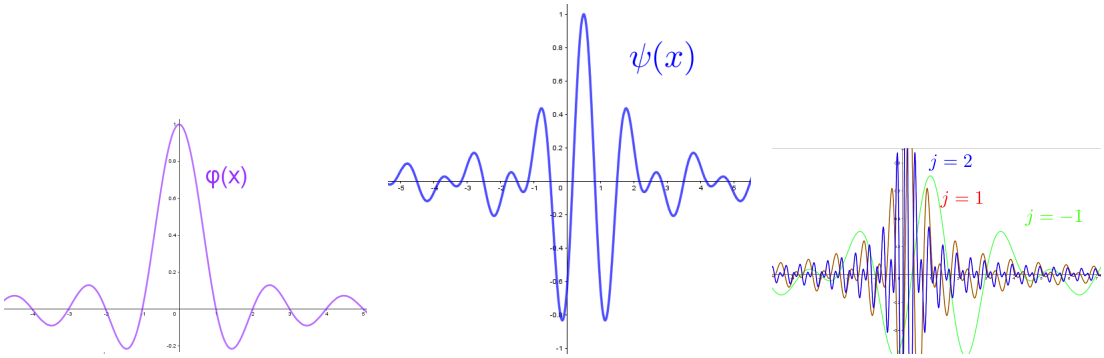
Donde $a_k = \sqrt{2}c_k$, con la propiedad que $\sum_{k=0}^{N-1} c_k = \sqrt{2}$. En el articulo [14] ya están calculados los coeficientes de Daubechies para $N = 4, 6, 8, 10, 12$, en la siguiente tabla se muestran algunos coeficientes

k	*N=4*	*N=6*	*N=8*	*N=10*	*N=12*	*N=14*	*N=16*
0	*0.4830*	*0.3327*	*0.2304*	*0.1601*	*0.1115*	*0.0779*	*0.0544*
1	*0.8365*	*0.8069*	*0.7148*	*0.6038*	*0.4946*	*0.3965*	*0.3129*
2	*0.2241*	*0.4599*	*0.6309*	*0.7243*	*0.7511*	*0.7291*	*0.6756*
3	*-0.1294*	*-0.1350*	*-0.0280*	*0.1384*	*0.3153*	*0.4698*	*0.5854*
4		*-0.0854*	*-0.1870*	*-0.2423*	*-0.2263*	*-0.1439*	*-0.0158*
5		*0.0352*	*0.0308*	*-0.0322*	*-0.1298*	*-0.2240*	*-0.2840*
6			*0.0329*	*0.0776*	*0.0975*	*0.0713*	*0.0005*
7			*-0.0106*	*-0.0062*	*0.0275*	*0.0806*	*0.1287*
8				*-0.0126*	*-0.0316*	*-0.0380*	*-0.0174*
9				*0.0033*	*0.0006*	*-0.0166*	*-0.0441*
10					*0.0048*	*0.0126*	*0.0140*
11					*-0.0011*	*0.0004*	*0.0087*
12						*-0.0018*	*-0.0049*
13						*0.0004*	*-0.0004*
14							*0.0007*
15							*-0.0001*

El wavelet asociado es dado por

$$\psi(x) = \sum_{k=2-N}^{1} (-1)^k a_{1-k} \varphi(2x - k). \tag{2.32}$$

En la Figura 2.3 se muestran las gráficas de la función escala y wavelet en algunos casos de la familia de Daubechies hechas en MATLAB.



(a) Función escala (b) Madre Wavelet (c) Definición 2.2.1

Figura 2.2: Wavelet de Shanon

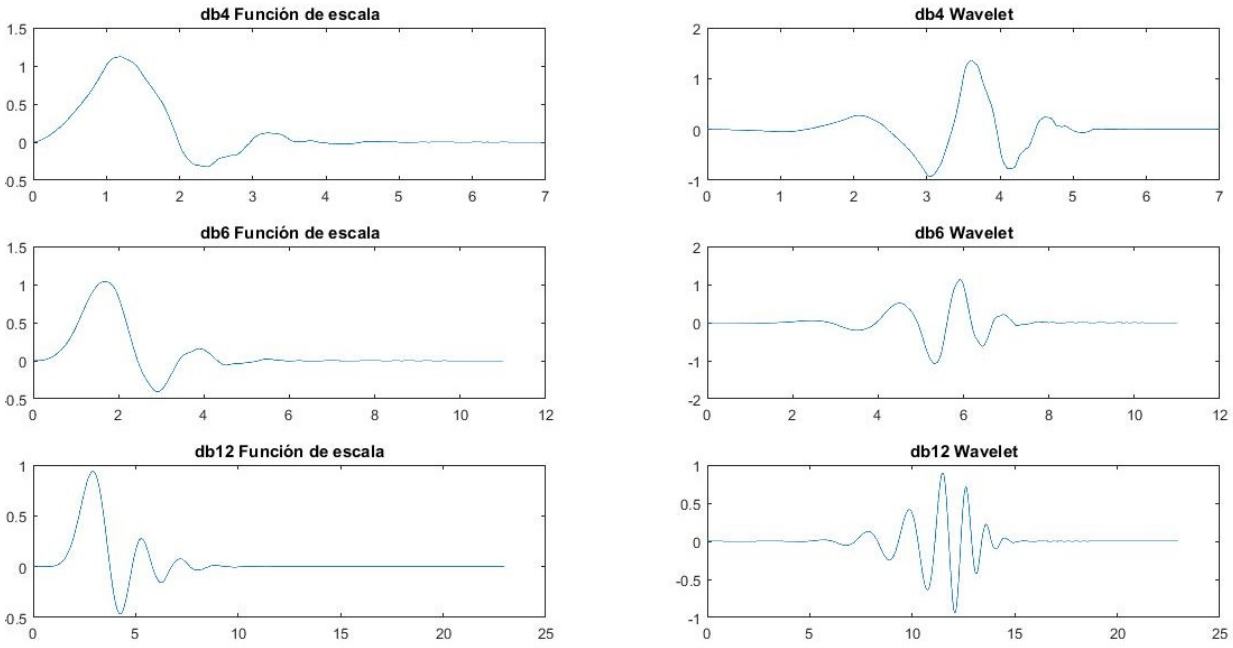


Figura 2.3: Familia Daubechies

Capítulo 3

Desarrollo

3.1. Operadores

Definición 3.1.1 (Operador Lineal)**.** *Dados los espacios vectoriales arbitrarios (complejos) V_1 y V_2, un mapeo $T : V_1 \to V_2$ es lineal si*

$$T(\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \alpha T(\boldsymbol{v}) + \beta T(\boldsymbol{w}), \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_1. \tag{3.1}$$

En el contexto de un espacio vectorial normado, es costumbre usar la palabra *Operador* en vez de *mapeo*. Se denotará la acción de un operador lineal T sobre un vector $\mathbf{v}$ como $T\mathbf{v}$ o $T(\mathbf{v})$. Muchos espacios vectoriales normados son de dimensión infinita, un ejemplo es el siguiente

Ejemplo 3.1.1 (Operador Diferenciación)**.** *Considere el espacio vectorial*

$$C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] := \left\{ f : C\left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{C} : f \textit{ es diferenciable y } f' \textit{ es continua.} \right\}$$

Entonces $C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]$ es un subespacio de $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ mejor aún son espacios vectoriales normados con la norma del supremo, y considere el siguiente mapeo.

$$\mathcal{D} : C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \to C\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (Df)(x) = f'(x),\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Entonces $\mathcal{D}$ es un operador lineal, en efecto si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in C^1[0, \frac{1}{2}]$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\alpha f + \beta g)(x) =& (\alpha f + \beta g)'(x) \\ =& (\alpha f)'(x) + (\beta g)'(x) \\ =& \alpha f'(x) + \beta g'(x) \\ =& \alpha(\mathcal{D}f)(x) + \beta(\mathcal{D}g)(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

Nota: El operador $\mathcal{D}$ es utilizado también en las ecuaciones diferenciales ya que las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma

$$Ly = f$$

Donde el operador diferencial L es una operador lineal, y es una función desconocida y f una función dada con el mismo dominio de y, La condición de linealidad en L descarta operaciones tales como tomar el cuadrado de la derivada de y; pero permite tomar mayores derivadas de y, por composición de operadores lineales que son a su vez lineales. Un operador diferencial lineal, que involucra la $n-$ésima derivada, L_n es considerado de la forma

$$L_n[y(t)] = (\mathcal{D}^n + A_1(t)\mathcal{D}^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(t)\mathcal{D} + A_n(t))[y].$$

Donde $\mathcal{D}^k y = \frac{d^k y}{dx} = y^{(k)}$. El uso de operadores en ecuaciones diferenciales es común y de uso conveniente para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales por ejemplo considérese la clase de ecuación diferencial ordinaria, conocida como *ecuación de Sturm−Liouville* de la forma

$$L\left(u(t)\right) = -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + b(t)u(t) = f(t), \quad \texttt{Para } 0 \leq t \leq 1 \tag{3.2}$$

Con las condiciones de Dirichlet.

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.3}$$

Donde a, b y f son funciones de valor real y queremos encontrar u. Se asume que f y b son funciones continuas, $a \in C^1\left[0, 1\right]$ y tiene derivada acotada. Definimos

$$C_0^2([0,1]) = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$$

Ya que $C_0^2([0,1])$ no es completo, trabajaremos sobre su espacio completado que es el espacio de Sobolev H_0^1, mismo al mencionado en el libro de Brezis ([3], p. 202) para mas propiedades de los espacios de Sobolev ver [11]. La norma en H_0^1 es inducida por el siguiente producto interno.

$$\langle f, g\rangle_0 = \langle L(f), g\rangle = \int_0^1 [(-af')'(t) + bf(t)]\overline{g(t)}dt.$$

Donde el operador L se define como

$$L : H_0^1([0,1]) \longrightarrow \qquad L^2([0,1])$$

$$u \qquad\qquad \longrightarrow L(u(t)) = f(t)$$

Observe que L puede ser un operador diferencial de coeficiente variable ya que $a(t), b(t)$ no son necesariamente constante además se supone que el operador es uniformemente elíptico esto es, existen constantes finitas C_1, C_2, C_3 tal que

$$0 < C_1 \leq a(t) \leq C_2 \quad \wedge \quad 0 \leq b(t) \leq C_3 \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \tag{3.4}$$

por la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única función u que satisface la ecuación diferencial y las condiciones de frontera. Se verificará que L es un operador lineal.
Sea $u, v \in H_0^1([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} L[(u+v)(t)] &= -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{d(u+v)}{dt}\right) + b(t)(u+v)(t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt} + a(t)\frac{dv}{dt}\right) + b(t)u(t) + b(t)v(t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + b(t)u(t) - \frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{dv}{dt}\right) + b(t)v(t) \\ &= Lu(t) + Lv(t) \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} L[(\alpha u)(t)] &= -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{d(\alpha u)}{dt}\right) + b(t)(\alpha u)(t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\alpha \cdot a(t)\frac{du}{dt}\right) + \alpha \cdot b(t)u(t) \\ &= -\alpha \cdot \frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + \alpha \cdot b(t)u(t) \\ &= \alpha L u(t) \end{aligned}$$

Se comprobará que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ es un producto interno. Usaremos la linealidad del operador L e integración por partes.
* (Aditividad.)

$$\langle f+g, h\rangle_0 = \langle L(f+g), h\rangle = \langle L(f)+L(g), h\rangle = \langle L(f), h\rangle + \langle L(g), h\rangle = \langle f, h\rangle_0 + \langle g, h\rangle_0$$

* (Homogeneidad.)

$$\langle \alpha f, g\rangle_0 = \langle L(\alpha f), g\rangle = \langle \alpha L(f), g\rangle = \alpha\langle L(f), g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle_0$$

* (Simetría conjugado.)

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_0 = \langle L(f), g\rangle &= \int_0^1 [(-af')'(t) + bf(t)]\overline{g(t)}dt \\ &= \int_0^1 (-af')'(t)\overline{g(t)} + \int_0^1 b\overline{g(t)}f(t)dt \\ &= \int_0^1 a\overline{g'(t)}f'(t) + \int_0^1 b\overline{g(t)}f(t)dt \\ &= \int_0^1 (-a\overline{g'(t)})'f(t) + \int_0^1 b\overline{g(t)}f(t)dt \\ &= \overline{\int_0^1 [(-ag'(t))' + bg(t)]\overline{f(t)}dt} \\ &= \overline{\langle L(g), f\rangle} = \overline{\langle g, f\rangle_0}. \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado integración por partes dos veces y las condiciones 3.3.

* Positividad

$$\langle f, f\rangle_0 = \langle L(f), f\rangle = \int_0^1 [(-af')'(t) + bf(t)]\overline{f(t)}dt = \int_0^1 (a+b)(t)|f(t)|^2 \geq 0$$

En lo anterior se ha utilizado integración por partes y las condiciones 3.4. De igual manera se tiene que $f = 0$ ya que el peso $(a+b)(t)$ siempre es positivo. Otro operador importante pero no se verificará es el siguiente,

Definición 3.1.2. *Sea A una matriz de $n \times n$. Se define $\|A\|$, llamado el operador norma, o tan solo norma de A por*

$$\|A\| = \sup \frac{\|Az\|}{\|z\|}.$$

Donde el supremo es tomado sobre todos los vectores diferentes de cero en $\mathbb{C}^n$.

Definición 3.1.3 (Condición de Número)**.** *Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Se define $C_{\#}(A)$, la condición de número de A, por*

$$C_{\#}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Si A no es invertible entonces $C_{\#}(A) = +\infty$.

Nótese que

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = C_{\#}(A).$$

Ahora entre más cerca este $C_{\#}(A)$ de 1, la matriz A será mas estable.

3.2. Método de Galerkin

Supóngase que $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo para $L^2([0,1])$, y que cada $v_j \in C^2[0,1]$, satisface.

$$v_j(0) = v_j(1) = 0$$

Se selecciona un conjunto finito $\Lambda = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$ de indices j y se considera el subespacio.

$$S = span\,\{v_j : j \in \Lambda\}$$

Notesé que una aproximación a la solución u de nuestra ecuación diferencial es de la forma.

$$u_s = \sum_{k\in\Lambda} x_k v_k = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in S \tag{3.5}$$

Donde los x_k son escalares complejos. El criterio para determinar los coeficientes x_k es que u_k debe comportarse como la verdadera solución u en el subespacio S, es decir, que

$$\langle Lu_s, v_j\rangle = \langle f, v_j\rangle \quad \texttt{para todo } \; j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.6}$$

Por linealidad, se sigue que para todo $g \in S$.

$$\begin{aligned}
\langle Lu_s, g\rangle &= \left\langle Lu_s, \sum_{k=1}^{n} y_k v_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{y_k} \langle Lu_s, v_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{y_k} \langle f, v_k\rangle \\
&= \left\langle f, \sum_{k=1}^{n} y_k v_k \right\rangle \\
&= \langle f, g\rangle
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que la solución aproximada u_s satisface automáticamente las condiciones de frontera $u_s(0) = u_s(1) = 0$. Por la escogencia de los v_j con sus condiciones de frontera resulta que u_s determinado por la ecuación 3.5 es la mejor aproximación en S a u, con respecto a la norma de H_0^1, no con la norma de L^2. Si se sustituye la ecuación 3.5 en la ecuación 3.6 se obtiene.

$$\left\langle L\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right), v_j \right\rangle = \langle f, v_j\rangle$$

para todo $j = 1, 2, \cdots, n-1, n$ o lo que es lo mismo.

$$\left\langle L\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right), v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle Lv_k, v_j\rangle x_k = \langle f, v_j\rangle \quad \texttt{para } \; j = 1, \cdots, n \tag{3.8}$$

Si x denota el vector $(x_k)_{k=1}^n$ y sea $(y_k)_{k=1}^n$, donde $y_k = \langle f, v_k \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle Lv_1, v_1\rangle x_1 + \langle Lv_2, v_1\rangle x_2 + \cdots + \langle Lv_{n-1}, v_1\rangle x_{n-1} + \langle Lv_n, v_1\rangle x_n &= \langle f, v_1\rangle = y_1 \\
\langle Lv_1, v_2\rangle x_1 + \langle Lv_2, v_2\rangle x_2 + \cdots + \langle Lv_{n-1}, v_2\rangle x_{n-1} + \langle Lv_n, v_2\rangle x_n &= \langle f, v_2\rangle = y_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\
\langle Lv_1, v_n\rangle x_1 + \langle Lv_2, v_n\rangle x_2 + \cdots + \langle Lv_{n-1}, v_n\rangle x_{n-1} + \langle Lv_n, v_n\rangle x_n &= \langle f, v_n\rangle = y_n
\end{aligned}$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \langle Lv_1, v_1\rangle & \langle Lv_2, v_1\rangle & \cdots & \langle Lv_n, v_1\rangle \\ \langle Lv_1, v_2\rangle & \langle Lv_2, v_2\rangle & \cdots & \langle Lv_n, v_2\rangle \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \langle Lv_1, v_n\rangle & \langle Lv_2, v_n\rangle & \cdots & \langle Lv_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Sea A la matriz cuyas columnas y filas están indexadas por $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, lo que significa que, $A = [a_{j,k}]_{j,k\in\{1,2,\cdots,n\}}$, donde

$$a_{j,k} = \langle Lv_k, v_j\rangle$$

Así, la ecuación 3.8 es un sistema lineal de ecuaciones.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k = y_j \ \texttt{para todo} \ j = 1, 2, \cdots, n$$

Que se puede ver como

$$Ax = y \tag{3.9}$$

En el método de Galerkin, para cada subconjunto Λ se obtiene una aproximación $u_s \in S$ para u, al resolver el sistema lineal 3.9 para x y usando estas componentes para determinar u_s como combinación lineal de v_k se espera que cuando se incremente el conjunto Λ la aproximación u_s converge a la solución u. A continuación se probará que u_s es en verdad la función más cerca de S a u en H_0^1, en efecto este problema se reduce a probar que $P_S(u) = u_s$, puesto que $\|u - P_S(u)\| \leq \|u - s\|$ para todo $s \in S$.

Ya que $u_s \in S$ y $P_S(u) \in S$ entonces $u_s - P_s(u) \in S$ por ser S un espacio vectorial.

Ahora se mostrará que $u_s - P_S(u) \in S^{\perp}$ pues de hecho.

$$\begin{aligned}\langle u_s - P_S(u), s\rangle_0 =& \langle L(u_s - P_S(u)), s\rangle \\ =& \langle L(u_s), s\rangle - \langle L(P_S(u)), s\rangle \\ =& \sum_{k=1}^{n} \overline{y}\langle L(u_s), v_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{y}\langle L(P_S(u)), v_k\rangle \\ =& \sum_{k=1}^{n} \overline{y}\langle f, v_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{y}\langle f, v_k\rangle = 0\end{aligned}$$

Por tanto $u_s - P_S(u) \in S \cap S^{\perp} = \{0\}$ y así $u_s = P_S(u)$. La principal preocupación es la naturaleza del sistema lineal 3.9 que resulta de la elección de una base de wavelet para el método de Galerkin como opuesto a alguna otra base, por ejemplo, alguna base de Fourier. Por propósitos numéricos, hay dos propiedades que convienen a la Matriz A en el sistema lineal 3.9. En primer lugar, se quiere que A tenga una condición de número pequeña, de esta forma tener estabilidad de la solución bajo pequeñas perturbaciones de los datos. En segundo lugar, para realizar cálculos con A rápidamente, se eligen matrices de dispersión, es decir, matrices A que tienen una gran cantidad de entradas nulas o casi nulas. El mejor caso es cuando A es diagonal, y el segundo mejor caso es cuando la matriz A es de dispersión, puede verse que este no es el único método para aproximar soluciones a ecuaciones diferenciales, para más información véase [10].

3.3. Método de wavelet-Galerkin

En este texto todavía no se ha discutido las Wavelets en el intervalo [0, 1]. Por lo que se asumirá los siguientes hechos. Existe una manera de modificar el sistema Wavelet de $L^2(\mathbb{R})$ para obtener un sistema ortonormal completo.

$$\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)} \in \Gamma$$

Para $L^2([0,1])$. El conjunto Γ es un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ahora se extrae de igual forma una base similar y con la mismas condiciones. Para cada $(j,k) \in \Lambda$, $\psi_{j,k}$ es $C^2[0,1]$ y satisface las condiciones de frontera.

$$\psi_{j,k}(0) = \psi_{j,k}(1) = 0$$

El sistema wavelet $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)} \in \Gamma$ también satisface el siguiente estimador clave: existen constantes $C_4, C_5 > 0$ tal que para todas las funciones g de la forma

$$g = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k} \tag{3.10}$$

Donde esta suma es finita, se tiene

$$C_4 \sum_{j,k} 2^{2j}|c_{j,k}|^2 \leq \int_0^1 |g'(t)|^2 \leq C_5 \sum_{j,k} 2^{2j}|c_{j,k}|^2 \tag{3.11}$$

Un estimador de esta forma es llamado norma equivalente; es decir $\sum_{j,k} 2^{2j}|c_{j,k}|^2$ y $\int_0^1 |g'(t)|^2 dt$ son equivalentes, una idea intuitiva de probar 3.11 es ver que $|\psi_{j,k}|$ se comporta de manera similar y en la misma escala que $|\psi'_{j,k}|$. La notación utilizada para aplicar el método de Galerkin con las wavelet es algo confusa debido al hecho de que las wavelets están indexadas por dos enteros. Por lo tanto, para las wavelets se escribe la ecuación 3.5 como

$$u_s = \sum_{(j,k)\in\Lambda} x_{j,k}\psi_{j,k}$$

De donde

$$\sum_{(j,k)\in\Lambda} \langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle \, x_{j,k} = \langle f, \psi_{l,m}\rangle$$

Para todo $(l,m) \in \Lambda$, y algún conjunto finito de indices Λ. Se puede considerar esto como una ecuación matricial $Ax = y$, donde los vectores $x = (x_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ e $y = (y_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$, y la matriz

$$A = [a_{l,m;j,k}]_{(l,m),(j,k)\in\Lambda}$$

Definida por

$$a_{l,m;j,k} = \langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle$$

Tiene sus filas indexada por las parejas $(l,m) \in \Lambda$ y sus columnas indexada por las parejas $(j,k) \in \Lambda$, ya que Λ puede ser reindexado para tener la forma usual, pero no existe una indexación natural, y la indexación wavelet tradicional es útil. Lo más conveniente es que A sea dispersa y que tenga una condición de número pequeña, esta no necesariamente tiene una condición de número pequeña pero

se puede reemplazar el sistema $Ax = y$ por un sistema equivalente $Mz = v$, donde la matriz M tiene las propiedades deseadas. Sea la nueva matriz diagonal $D = [d_{l,m;j,k}]_{(l,m),(j,k)\in\Lambda}$ como

$$d_{l,m;j,k} = \begin{cases} 2^j & si \quad (l,m) = (j,k) \\ 0 & si \quad (l,m) \neq (j,k) \end{cases} \tag{3.12}$$

También defina $M = [m_{l,m;j,k}]_{(l,m),(j,k)\in\Lambda}$ por

$$M = D^{-1}AD^{-1} \tag{3.13}$$

O en forma componente

$$m_{l,m;j,k} = 2^{-j-l}a_{l,m;j,k} = 2^{-j-l}\langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle \tag{3.14}$$

Por tanto el sistema $Ax = y$ es equivalente a

$$D^{-1}AD^{-1}Dx = D^{-1}y.$$

De igual manera haciendo $z = Dx$ y $v = D^{-1}y$, el sistema es equivalente a

$$Mz = v \tag{3.15}$$

La norma equivalente 3.11 tiene una consecuencia sobre el sistema 3.15, este será bien condicionado, como se demostrará después pero antes se necesita del siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Sea L el operador de Sturm-Liouville uniformemente elíptico (el operador de la ecuación 3.2 con las condiciones 3.4) suponga que $g \in L^2(\mathbb{R})$ además es de $C^2[0,1]$ y satisface $g(0) = g(1) = 0$. Entonces*

$$C_1 \int_0^1 |g'(t)|^2 dt \leq \langle Lg, g\rangle \leq (C_2 + C_1)\int_0^1 |g'(t)|^2 dt \tag{3.16}$$

Demostración: Ver ([6], p.476).

Teorema 3.3.1. *Sea L el operador de Sturm-Liouville uniformemente elíptico (es decir el operador de la ecuación 3.2 con las condiciones 3.4) sea $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\Gamma}$ un sistema ortonormal completo para $L^2([0,1])$ tal que, cada $\psi_{j,k} \in C^2$ y satisface*

$\psi_{j,k}(0) = \psi_{j,k}(1) = 0$, y tal que la norma equivalente 3.11 se mantiene. Sea Λ un subconjunto finito de Γ. Sea M la matriz 3.13, entonces la condición de número de M satisface

$$C_{\#}(M) \leq \frac{(C_2 + C_3)C_5}{C_1 C_4}. \tag{3.17}$$

Para cualquier conjunto finito Λ, Donde C_1, C_2 y C_3 son las constantes de 3.4 y C_4, C_5 son las constantes de 3.11.

Demostración: Sea $z = (z_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ cualquier vector con $\|z\| = 1$. Para D como en la ecuación 3.12, sea $w = D^{-1}z$, que es, $w = (w_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$, donde

$$w_{j,k} = 2^{-j} z_{j,k}.$$

Defina

$$g = \sum_{(j,k)\in\Lambda} w_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Entonces por 3.14

$$\begin{aligned}
\langle Mz, z\rangle &= \sum_{(l,m)\in\Lambda} (Mz)_{l,m}\overline{z_{l,m}} \\
&= \sum_{(l,m)\in\Lambda} \sum_{(j,k)\in\Lambda} \langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle 2^{-j} z_{j,k} 2^{-l}\overline{z_{l,m}} \\
&= \left\langle L\left(\sum_{(j,k)\in\Lambda} w_{j,k}\psi_{j,k}\right), \sum_{(l,m)\in\Lambda} w_{l,m}\psi_{l.m}\right\rangle = \langle Lg, g\rangle
\end{aligned}$$

Ya que $2^{-j}z_{j,k} = w_{j,k}$ y $2^{-l}z_{l,m} = w_{l,m}$. Aplicando el lema y la ecuación 3.11 se tiene

$$\langle Mz, z\rangle = \langle Lg, g\rangle \leq (C_2 + C_3)\int_0^1 |g'(t)|^2 dt \leq (C_2 + C_3)C_3 \sum_{(j,k)\in\Lambda} 2^{2j}|w_{j,k}|^2.$$

y

$$\langle Mz, z\rangle = \langle Lg, g\rangle \geq C_1\int_0^1 |g'(t)|^2 dt \geq C_1 C_4 \sum_{(j,k)\in\Lambda} 2^{2j}|w_{j,k}|^2.$$

Sin embargo

$$\sum_{(j,k)\in\Lambda} 2^{2j}|w_{j,k}|^2 = \sum_{(j,k)\in\Lambda} |z_{j,k}|^2 = \|z\| = 1.$$

Así para cualquier z con $\|z\| = 1$,

$$C_1C_4 \leq \langle Mz, z\rangle \leq (C_2 + C_3)C_5.$$

Ahora si λ es un autovalor de M, se puede normalizar el autovector asociado z para obtener

$$\langle Mz, z\rangle = \langle \lambda z, z\rangle = \lambda\langle z, z\rangle = \lambda\|z\| = \lambda.$$

Por lo tanto todo autovalor λ de M satisface

$$C_1C_4 \leq \lambda \leq (C_2 + C_3)C_5. \tag{3.18}$$

Ahora se probará que M es una matriz hermitiana, en efecto

$$\begin{aligned}
m_{l,m;j,k} =& 2^{-j-l}\langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle = 2^{-j-l}\int_0^1 L\psi_{j,k}\overline{\psi_{l,m}}dt \\
=& 2^{-j-l}\left(\int_0^1 -\frac{d}{dt}(a(t)\frac{d\psi_{j,k}}{dt})\overline{\psi_{l,m}} + \int_0^1 b(t)\psi_{j,k}\overline{\psi_{l,m}}dt\right) \\
=& 2^{-j-l}\left(\int_0^1 -\frac{d}{dt}\overline{(a(t)\frac{d\psi_{l,m}}{dt})}\psi_{j,k} + \int_0^1 b(t)\psi_{j,k}\overline{\psi_{l,m}}dt\right) \\
=& 2^{-j-l}\left(\int_0^1 -\overline{\frac{d}{dt}(a(t)\frac{d\psi_{l,m}}{dt})}\psi_{j,k} + \int_0^1 b(t)\psi_{j,k}\overline{\psi_{l,m}}dt\right) \\
=& 2^{-j-l}\langle \psi_{j,k}, L\psi_{l,m}\rangle = 2^{-j-l}\overline{\langle L\psi_{l,m}, \psi_{j,k}\rangle} = \overline{m_{j,k;l,m}}.
\end{aligned}$$

Ya que M es hermitiana también es una matriz normal, esto implica que

$$C_{\#}(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Entonces por 3.18

$$C_1C_4 \leq \lambda_{max} \leq (C_2 + C_3)C_5 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{1}{\lambda_{min}} \leq \tfrac{1}{C_1C_4}$$

Y así se tiene 3.17. □

3.4. Ejemplo de motivación

Considere la ecuación:

$$u''(t) - u(t) = t - 1, \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.19}$$

Con las condiciones de Dirihlet $u(0) = u(1) = 0$.
Que es la ecuación de un oscilador armónico con forzamiento $(t - 1)$.

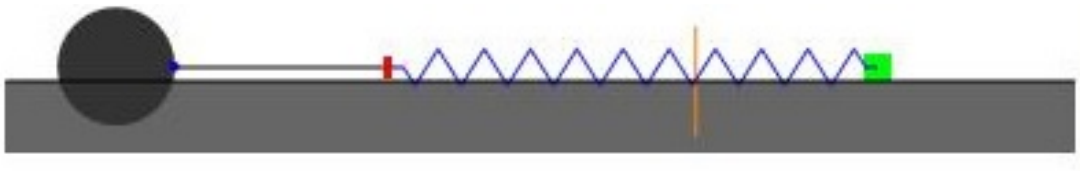


Figura 3.1: p1

Cabe aclarar que una forma de solucionar esta ecuación es resolverla por los métodos clásicos, para observar este caso consulte ([2], p. 52). La solución exacta de esta ecuación es

$$u(t) = -\frac{1}{1-e^2}e^t + \frac{e^2}{1-e^2}e^{-t} - t + 1.$$

3.4.1. Solución por diferencias finitas

Considere el problema 3.19 y llámese $f(t) = t - 1$, se utilizará el método de diferencias finitas propuesto en el libro ([4], p. 628),

$$u(0) = u(1) = 0$$

Suponga ahora que se tiene n puntos de discretización del intervalo $[0, 1]$, así que

$$u_i = u(i\Delta x)$$
$$f_i = f(i\Delta z)$$

Donde

$$i = 0, 1, 2, 3, ..., n - 1$$

y

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

La aproximación de diferencia finita a u'' es entonces

$$(u'')_i = \frac{1}{\Delta x}(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Y así la forma discreta de la ecuación 3.19 es

$$u_{i+1} + (-2 - \Delta x)u_i + u_{i-1} = f_i(\Delta x)^2 \ ; \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

o

$$u_{i+1} + ru_i + u_{i-1} = f_i(\Delta x)^2 \ ; \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Donde

$$r = -2 - \Delta x.$$

Observe que $U_{-1} = u_{n-1}$ y $u_0 = u_n$ este sistema de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} r & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & r & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & \ddots & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ : \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ : \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

o

$$CU = F.$$

Nótese que C es una matriz circulante, Ahora haciendo $n = 10$, se tiene que $\Delta x = 0,1$ y el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 2,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2,1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2,1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & \ddots & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2,1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ : \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0,9 \\ -0,8 \\ -0,7 \\ -0,6 \\ : \\ -0,2 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el vector

$$U = 0{,}01 \begin{pmatrix} -0{,}9728 & 0{,}3384 & -0{,}6378 & 0{,}2010 & -0{,}4842 & 0{,}2160 & -0{,}4693 & 0{,}3695 & -0{,}6067 & 0{,}7045 \end{pmatrix}^T$$

En la siguiente tabla se aborda la comparación de resultados.

t	u_0	u	Error Absoluto
0	-0.009728	0	0.009728
0.1	0.003384	0.0265183	0.0231343
0.2	-0.006378	0.0442945	0.0506725
0.3	0.002010	0.0545074	0.0524974
0.4	-0.004842	0.0582599	0.0631019
0.5	0.002160	0.0565906	0.0544306
0.6	-0.004693	0.0504834	0.0551764
0.7	0.003695	0.0408782	0.03718320
0.8	-0.006067	0.0286795	0.0347465
0.9	0.007045	0.0147663	0.0077213
1	0	0	0

3.4.2. Solución por Wavelet-Galerkin.

Sea la solución $u(t)$ de la ecuación 3.19, ahora esta se va aproximar por su función expansión del j-ésimo nivel de escala sobre el intervalo $(0, 1)$ que es la siguiente

$$u_j(t) = \sum_{k=1-L}^{2^j} c_k \varphi_{j,k}(t), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3.20}$$

Donde φ es la función de escala del MRA y c_k son coeficientes desconocidos que deben ser determinados, la ecuación 3.20 tiene su explicación por Latto en [1], nótese que entre más grande sea el entero j, más precisión tiene $u_j(t)$, los límites del soporte de la ecuación 3.20 son $\frac{1-L}{2^j}$ y $\frac{L-1+2^j}{2^j}$ posteriormente, los límites originales 0 y 1 ahora se cambian a límites ficticios, es decir, los límites en ambos lados de 0 y 1 se amplían en una cantidad $\frac{L-1}{2^j}$ sin afectar la solución dentro de $[0, 1]$, por lo que la solución afectada está también en los intervalos $\left[\frac{1-L}{2^j}, 0\right]$ y $\left[1, \frac{L-1+2^j}{2^j}\right]$.

En este ejemplo no se utilizará las wavelets de Daubechies por razones que se

argumentarán después. Se trabajará con la función de escala

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2+t)^3 & si \quad t \in [-2,-1] \\ \frac{1}{6}(4-6t^2-3t^3) & si \quad t \in [-1,0] \\ \frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3) & si \quad t \in [0,1] \\ \frac{1}{6}(2-t)^3 & si \quad t \in [1,2] \\ 0 & si \quad t \notin [-2,2] \end{cases} \tag{3.21}$$

Cuya gráfica es la Figura 3.2. El principal objetivo es la aplicación de este método a ecuaciones diferenciales no homogéneas, y por lo tanto, se usa la función φ dada por 3.21. Esta función satisface la siguiente ecuación de dilatación

$$\varphi(t) = \frac{1}{8}\varphi(2t+2) + \frac{1}{2}\varphi(2t+1) + \frac{3}{4}\varphi(2t) + \frac{1}{2}\varphi(2t-1) + \frac{1}{8}\varphi(2t-2).$$

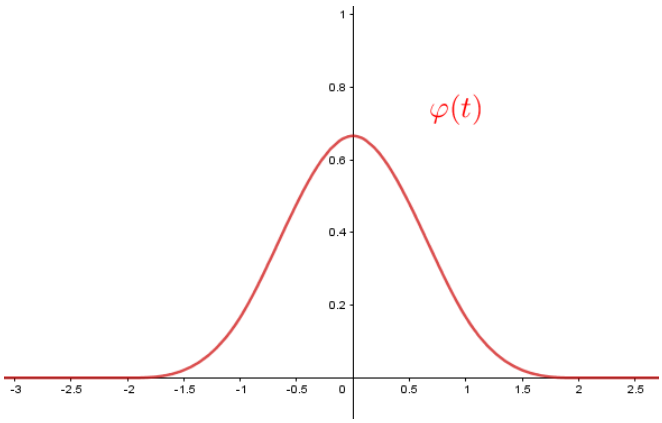


Figura 3.2: Función escala

Así que $L = 5$. Tomamos $j = 0$ en 3.20, lo que resulta

$$u_0(t) = \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(t-k), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.22}$$

Sustituyendo 3.22 en 3.19 se llega a

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(t-k) - \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(t-k) = t-1 \tag{3.23}$$

Ahora tomando el producto interno con $\varphi(t-n)$, $n \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$ se tiene

$$\sum_{k=-4}^{1} c_k \int_{\frac{1-L}{2^j}}^{\frac{L-1+2^j}{2^j}} \varphi''(t-k)\varphi(t-n)dt - \sum_{k=-4}^{1} c_k \int_{\frac{1-L}{2^j}}^{\frac{L-1+2^j}{2^j}} \varphi(t-k)\varphi(t-n)dt = \int_{\frac{1-L}{2^j}}^{\frac{L-1+2^j}{2^j}} (t-1)\varphi(t-n)dt.$$

O de otra forma más resumida

$$\sum_{k=-4}^{1} c_k \Omega_{n-k} - \sum_{k=-4}^{1} c_k a_{n,k} = b_n \qquad n \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\} \tag{3.24}$$

Donde

$$\Omega_{n-k} = \int_{-4}^{5} \varphi''(t-k)\varphi(t-n)dt, \tag{3.25}$$

$$a_{n,k} = \int_{-4}^{5} \varphi(t-k)\varphi(t-n)dt, \tag{3.26}$$

$$b_n = \int_{-4}^{5} (t-1)\varphi(t-n)dt, \tag{3.27}$$

El que problema puede surgir de la fórmula 3.27 para los coeficientes b_n es si $f(t)$ en 3.2 es un polinomio, ya que la wavelet ψ tiene $(\frac{L}{2}-1)$ momentos de desaparición, se llama momentos de desaparición a la definición dada por ([12], p. 450) que en pocas palabras ψ tiene n momentos de desaparición si

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)dt = 0 \qquad para \quad 0 \leq k < n$$

Entonces, es mejor trabajar con la función de escala $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto de un MRA pues si esto ocurre siempre se va a tener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \neq 0.$$

Que es mucho más adecuado. Ahora usando las condiciones de frontera de Dirichlet se tienen las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(-k) = 0 \\ &= c_{-4}\varphi(4) + c_{-3}\varphi(3) + c_{-2}\varphi(2) + c_{-1}\varphi(1) + c_0\varphi(0) + c_1\varphi(-1) = 0 \end{aligned}$$

y

$$u_0(1) = \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(1-k) = 0$$
$$= c_{-4}\varphi(5) + c_{-3}\varphi(4) + c_{-2}\varphi(3) + c_{-1}\varphi(2) + c_0\varphi(1) + c_1\varphi(0) = 0$$

Estas últimas dos ecuaciones dan información de los coeficientes c_k, así que estarán en la primera y última fila, y así se tiene la siguiente ecuación matricial.

$$AX = Y$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & \varphi(0) & \varphi(-1) \\ \Omega_1 - a_{-3,-4} & \Omega_0 - a_{-3,-3} & \Omega_{-1} - a_{-3,-2} & \Omega_{-2} - a_{-3,-1} & \Omega_{-3} - a_{-3,0} & \Omega_{-4} - a_{-3,1} \\ \Omega_2 - a_{-2,-4} & \Omega_1 - a_{-2,-3} & \Omega_0 - a_{-2,-2} & \Omega_{-1} - a_{-2,-1} & \Omega_{-2} - a_{-2,0} & \Omega_{-3} - a_{-2,1} \\ \Omega_3 - a_{-1,-4} & \Omega_2 - a_{-1,-3} & \Omega_1 - a_{-1,-2} & \Omega_0 - a_{-1,-1} & \Omega_{-1} - a_{-1,0} & \Omega_{-2} - a_{-1,1} \\ \Omega_4 - a_{0,-4} & \Omega_3 - a_{0,-3} & \Omega_2 - a_{0,-2} & \Omega_1 - a_{0,-1} & \Omega_0 - a_{0,0} & \Omega_{-1} - a_{0,1} \\ \varphi(5) & \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

Y

$$X = \begin{pmatrix} c_{-4} \\ c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{-3} \\ b_{-2} \\ b_{-1} \\ b_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se usarán las fórmulas 3.25, 3.26 y 3.27 para producir los elementos de la matriz A y Y con los programas Geogebra y MATLAB 2017. Entonces primero se crea la función de escala en Geogebra en este caso se llamará f

$f(x) = Si(x < -2, 0, -2 \leq x \leq -1, 1/6(2+x)^3, -1 \leq x \leq 0, 1/6(4 - 6x^2 - 3x^3), 0 \leq x \leq 1, 1/6(4 - 6x^2 + 3x^3), 1 \leq x \leq 2, 1/6(2-x)^3, 2 < x, 0)$

Se hallan también sus derivadas y se abre la hoja de cálculo donde se calcula 3.25 en cada celda

```
Derivada(f)
Derivada(f')
f(4)
f(3)
f(2)
f(1)
f(0)
f(-1)
=Integral(f''(x+4)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x+3)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x+2)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x+1)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x-1)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f''(x+4)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x+3)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x+2)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x+1)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x-1)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f''(x+4)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x+3)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x+2)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x+1)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x-1)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f''(x+4)*f(x),-4,5)
=Integral(f''(x+3)*f(x),-4,5)
=Integral(f''(x+2)*f(x),-4,5)
=Integral(f''(x+1)*f(x),-4,5)
=Integral(f''(x)*f(x),-4,5)
=Integral(f''(x-1)*f(x),-4,5)
...
f(0)
```

Resultando así la Figura 3.3.

Ahora se van a calcular los elementos de 3.26 con el siguiente código

```
=Integral(f(x+3)*f(x+4),-4,5)
=Integral(f(x+3)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f(x+3)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f(x+3)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f(x+3)*f(x),-4,5)
```

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4		0	0	0	0.16667	0.66667	0.16667
5		0.18333	-0.7	0.125	0.2	0.00833	0
6		0.2	0.125	-0.66667	0.125	0.2	0.00833
7		0.00833	0.2	0.125	-0.66667	0.125	0.2
8		0	0.00833	0.2	0.125	-0.66667	0.125
9		0	0	0	0	0.16667	0.66667
10							

Figura 3.3

```
=Integral(f(x+3)*f(x-1),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x+4),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x),-4,5)
=Integral(f(x+2)*f(x-1),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x+4),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x),-4,5)
=Integral(f(x+1)*f(x-1),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+4),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+2),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+1),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x-1),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+3),-4,5)
=Integral(f(x)*f(x+3),-4,5)
          ...
=Integral(f(x-1)*f(x-1),-4,5)
```

Finalmente se calculan los coeficientes de la ecuación 3.27, como sigue

```
=Integral(f(x+3)*(x-1),-4,5)
=Integral(f(x+2)*(x-1),-4,5)
=Integral(f(x+1)*(x-1),-4,5)
=Integral(f(x)*(x-1),-4,5)
```

Cuyos cálculos están en la Figura 3.4

						b
0	0	0	0	0	0	0
0.210714286	0.4753968254	0.236309508	0.0238095341	0.0001984126	0	-3.7833333324
0.0238095225	0.236309508	0.4793650794	0.2363095331	0.0238095238	0.00019841...	-3.0000000312
0.0001984128	0.0238095341	0.2363095331	0.4793650828	0.2363095249	0.02380952...	-2.0000000023
0	0.0001984126	0.0238095238	0.2363095249	0.4793650755	0.23630952...	-1.0000000242
0	0	0	0	0	0	0

Figura 3.4

O de forma matricial como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}1666667 & 0{,}666667 & 0{,}1666667 \\ -0{,}0273809 & -1{,}1759682 & -0{,}1113095 & 0{,}17619047 & 0{,}008134 & 0 \\ 0{,}17619047 & -0{,}1113095 & -1{,}146031744 & -0{,}1113095 & 0{,}17619047 & 0{,}0081349 \\ 0{,}0081349 & 0{,}17619047 & -0{,}1113095 & -1{,}1460317 & -0{,}1113095 & 0{,}17619047 \\ 0 & 0{,}0081349 & 0{,}17619047 & -0{,}1113095 & -1{,}1460317 & -0{,}1113095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1666667 & 0{,}6666667 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ : \\ c_6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3{,}7833333 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando el algoritmo de eliminación Gaussiana o en MATLAB 2017 con el siguiente código

```
format long
A=[0 0 0 0.16667 0.66667 0.16667; -0.02738 -1.17937 -0.11131
    0.17619 0.00813 0; 0.17619 -0.11131 -1.14603 -0.11131 0.17619
    0.00813; 0.00813 0.17619 -0.11131 -1.14603 -0.11131 0.17619; 0
    0.00813 0.17619 -0.11131 -1.14603 -0.11131; 0 0 0 0 0.16667
    0.66667]
Y=[0; -3.78333; -3; -2; -1; 0 ]
X=inv(A)*Y
```

se obtiene

$$X = \begin{pmatrix} -71{,}23999514182 & 6{,}22316688108 & -9{,}38294499120 & 3{,}22441857600 & -0{,}859859570933 & 0{,}214968117190 \end{pmatrix}^T$$

Ahora solo es reemplazar los anteriores coeficientes c_k en la solución aproximada

$$u_0(t) = \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(t-k), \qquad t \in [0,1] \tag{3.28}$$

En la siguiente tabla se comparan los resultados

t	u_0	u	Error Absoluto
0	0	0	0
0.1	0.0276352	0.0265183	0.00111691
0.2	0.0453501	0.0442945	0.00105559
0.3	0.0545619	0.0545074	0.0000544741
0.4	0.0566876	0.0582599	0.00157229
0.5	0.0531447	0.0565906	0.0034459
0.6	0.0453501	0.0504834	0.00513329
0.7	0.0347212	0.0408782	0.00615698
0.8	0.0226751	0.0286795	0.00600449
0.9	0.0106289	0.0147663	0.00413736
1	0	0	0

La Figura 3.5 muestra mejor la diferencia con la solución analítica. No se utilizó los wavelets de Daubechies ya que no hay fórmulas explicitas (closed form) para las wavelets de Daubechies y las funciones de escala. Los elementos de la matriz Y no se pueden calcular. Por lo tanto, el método wavelet-Galerkin basado en las funciones de escala de Daubechies se puede aplicar solo a ecuaciones diferenciales homogéneas cuando $f(t) = 0$ en 3.2. En ese caso el vector que llamaremos Y es una matriz nula y $a_{n,k} = \delta_{n,k}$ ya que la escala de las funciones $\varphi_{j,k} \quad j,k \in \mathbb{Z}$ son ortonormales.

Ejemplo 3.4.1 (Ecuación de Van Der Pol)**.** *Considere la ecuación*

$$u''(t) + \mu(t^2-1)u'(t) = -t, \qquad 0 \le t \le 1, \mu \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

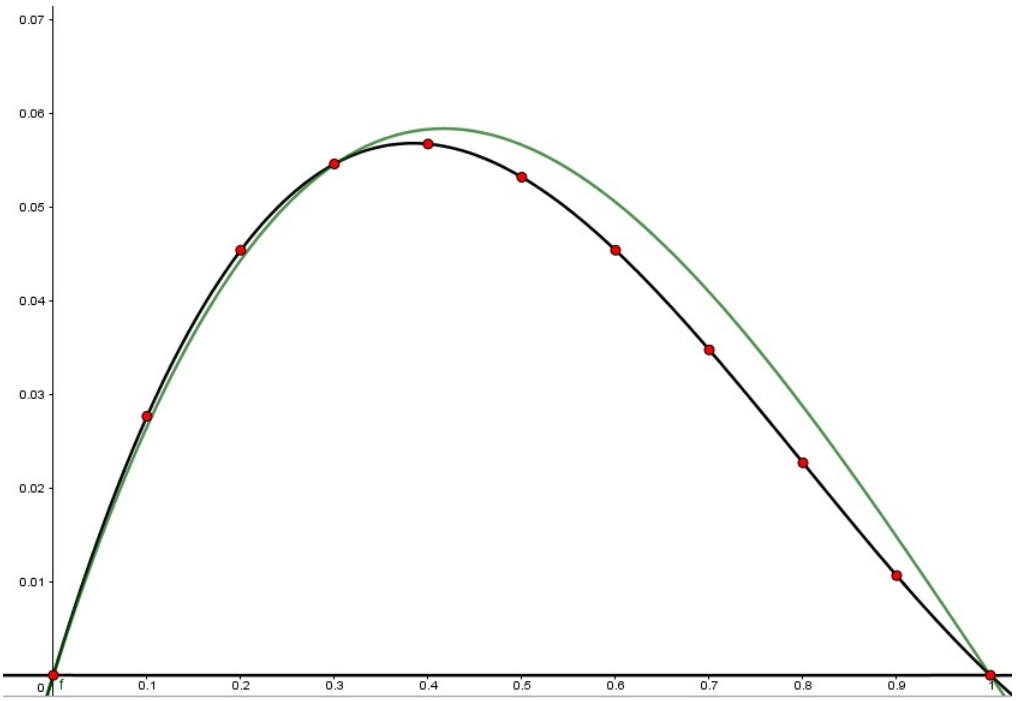


Figura 3.5

Con las condiciones de Dirichlet

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.30}$$

El oscilador de Van der Pol fue propuesto originalmente por el ingeniero eléctrico y físico holandés Balthasar van der Pol mientras trabajaba en Philips. Van der Pol encontró oscilaciones estables, que llamó oscilaciones de relajación y ahora se conocen como ciclos límite, en circuitos eléctricos que emplean tubos de vacío. La ecuación de Van der Pol tiene una larga historia de uso en las ciencias físicas y biológicas. La ecuación también se ha utilizado en sismología para modelar las dos placas en una falla geológica, para mas información ver M. Tsatsos en [13]. Supóngase que la solución aproximada es la ecuación 3.22. Ahora reemplazando la ecuación 3.22 en 3.29 se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{k=-4}^{1} c_k\varphi(t-k)+\mu(t^2-1)\frac{d}{dt}\sum_{k=-4}^{1} c_k\varphi(t-k) = -t \qquad 0 \le t < 1, \mu \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

En nuestro caso $\mu = 0{,}05$ *para algunos otros resultados ver [7]. Tomando el*

producto interno con $\varphi(t-n),\ n \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$ *se obtiene*

$$\sum_{k=-4}^{1} c_k \Omega_{n-k} + \sum_{k=-4}^{1} c_k d_{n,k} = b_n \tag{3.32}$$

con $n \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$, *donde*

$$\Omega_{n-k} = \int_{-4}^{5} \varphi''(t-k)\varphi(t-n)dt, \tag{3.33}$$

$$d_{n,k} = \int_{-4}^{5} \mu(t^2-1)\varphi'(t-k)\varphi(t-n)dt, \tag{3.34}$$

$$b_n = \int_{-4}^{5} f(t)\varphi(t-n)dt. \tag{3.35}$$

Se consigue la siguiente ecuación matricial

$$AC = B \tag{3.36}$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & \varphi(0) & \varphi(-1) \\ \Omega_1 - d_{-3,-4} & \Omega_0 - d_{-3,-3} & \Omega_{-1} - d_{-3,-2} & \Omega_{-2} - d_{-3,-1} & \Omega_{-3} - d_{-3,0} & \Omega_{-4} - d_{-3,1} \\ \Omega_2 - d_{-2,-4} & \Omega_1 - d_{-2,-3} & \Omega_0 - d_{-2,-2} & \Omega_{-1} - d_{-2,-1} & \Omega_{-2} - d_{-2,0} & \Omega_{-3} - d_{-2,1} \\ \Omega_3 - d_{-1,-4} & \Omega_2 - d_{-1,-3} & \Omega_1 - d_{-1,-2} & \Omega_0 - d_{-1,-1} & \Omega_{-1} - d_{-1,0} & \Omega_{-2} - d_{-1,1} \\ \Omega_4 - d_{0,-4} & \Omega_3 - d_{0,-3} & \Omega_2 - d_{0,-2} & \Omega_1 - d_{0,-1} & \Omega_0 - d_{0,0} & \Omega_{-1} - d_{0,1} \\ \varphi(5) & \varphi(4) & \varphi(3) & \varphi(2) & \varphi(1) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} c_{-4} \\ c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{-3} \\ b_{-2} \\ b_{-1} \\ b_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando las ecuaciones 3.33, 3.35 y el código de Geogebra como el anterior ejem-

plo. Se obtiene los coeficientes de la matriz T y B respectivamente

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} - \frac{16553\mu}{5040} & -\frac{2}{3} + \frac{1359\mu}{1120} & \frac{1}{8} + \frac{8203\mu}{3360} & \frac{1}{5} + \frac{61\mu}{210} & \frac{1}{120} + \frac{\mu}{480} & 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{353\mu}{630} & \frac{1}{8} - \frac{1411\mu}{1120} & -\frac{2}{3} + \frac{302\mu}{315} & \frac{1}{8} + \frac{8507\mu}{10080} & \frac{1}{5} + \frac{\mu}{30} & \frac{1}{120} - \frac{\mu}{1120} \\ \frac{1}{120} - \frac{23\mu}{3360} & \frac{1}{5} - \frac{41\mu}{210} & \frac{1}{8} - \frac{1361\mu}{10080} & -\frac{2}{3} + \frac{151\mu}{315} & \frac{1}{8} - \frac{7\mu}{96} & \frac{1}{5} - \frac{43\mu}{630} \\ 0 & \frac{1}{120} - \frac{\mu}{672} & \frac{1}{5} + \frac{\mu}{70} & \frac{1}{8} + \frac{1039\mu}{3360} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} - \frac{1039\mu}{3360} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}825 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Utilizando el algoritmo de eliminación gaussiana o MATLAB con el siguiente código

```
format long
T=[0  0  0  1/6  2/3  1/6;  1/8-16553/5040*0.05  -2/3+1359/1120*0.05
    1/8+8203/3360*0.05  1/5+61/210*0.05  1/120+0.05/480  0;
    1/5-353/630*0.05  1/8-1411/1120*0.05  -2/3+302/315*0.05
    1/8+8507/10080*0.05  1/5+0.05/30  1/120-0.05/1120 ;
    1/120-23/3360*0.05  1/5-41/210*0.05  1/8-1361/10080*0.05
    -2/3+151/315*0.05  1/8-7/96*0.05  1/5-43/630*0.05;  0
    1/120-0.05/672  1/5+0.05/70  1/8+1039/3360*0.05  -2/3
    1/8-1039/3360*0.05;  0  0  0  0  1/6  2/3]
B=[0;  113/40;  2;  1;  0;  0 ]
V=inv(T)*B
```

se encuentran los coeficientes c_k obteniendo así

$$c_{-4} = 28{,}5271675 \qquad c_{-3} = -5{,}74253713 \qquad c_{-2} = 3{,}7253043$$
$$c_{-1} = -2{,}1511673 \qquad c_0 = 0{,}5736446 \qquad c_1 = -0{,}14341115$$

Luego es reemplazar y así obtener la solución aproximada

$$u_0(t) = \sum_{k=-4}^{1} c_k \varphi(t-k), \qquad t \in [0,1], \quad t \in (0,1).$$

Comparación de resultados: Las soluciones wavelet tienen una precisión mucho mejor, pero toman demasiado tiempo y es un poco más lento que la solución de diferencias finitas debido a la necesidad de transformar las muestras del espacio físico en espacio wavelet y viceversa. Esta sobrecarga se hace menos significativa a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Más importante aún, hay una variación insignificante en el tiempo de cálculo a medida que aumenta el soporte de wavelet. Por lo tanto, la solución de wavelet es favorable.

Capítulo 4

Conclusiones

Las wavelets tienen la capacidad de proporcionar una descripción multinivel de la solución y esta es una de las razones que se diferencia del sistema de Fourier. La propiedad multirresolución de las wavelets junto con su propiedad de localización, sugiere que se puede obtener una descripción aproximada inicial de la solución con poco esfuerzo computacional y luego refinar sucesivamente la solución en las regiones de interés con un mínimo esfuerzo adicional. En los conceptos básicos se vieron las ventajas de las wavelets e indican la mejor forma de obtenerlas ya que es difícil encontrar estas funciones especiales pero gracias a Mallat es suficiente encontrar un MRA, el método de wavelet-Galerkin tiene gran ventaja en la condición de número con respecto al de diferencias finitas en efecto se demostró que la condición de número de wavelet-Galerkin es acotada mientras que la de diferencias finitas es N^2 lo cual no conviene cuando la matriz es muy grande.

Las soluciones obtenidas con las wavelets de coeficientes de Daubechies se han comparado con la solución de diferencias finitas, y la solución de wavelet se ha aproximado más a la solución analítica que la solución de diferencias finitas. Aunque las soluciones wavelet requieren un esfuerzo computacional ligeramente mayor que la solución de diferencias finitas (véase Qian y Weiss [9]) las ganancias en la precisión con las wavelets de orden superior, superan con creces el aumento de precisión, además las wavelets tienen la capacidad de representar soluciones a diferentes niveles de resolución, lo que las hace particularmente útiles para desarrollar soluciones jerárquicas a problemas.

Bibliografía

[1] H.L. Resnikoff A. Latto y E. Tenenbaum. The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets. *Proceedings of the French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence*, Princeton, 1991.

[2] Fonda. Alessandro. *Playing Around Resonance An Invitation to the Search of Periodic Solutions for Second Order Ordinary Differential Equations.* Birkhauser, 2016.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[4] Steven C. Chapra. *Applied numerical methods with matlab for engineers and scientists.* McGraw Hill, 2012.

[5] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Society for industrial and Applied Mathematics, 1992.

[6] Michael W. Frazier. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, 1999.

[7] Hadzi Katerina Saneva Velkova Kostadinova Sanja, Buralieva Jasmina. Wavelet-galerkin solution of some ordinary differential equations. *Proceedings of the XI International Conference ETAI 2013, 26th -28th of September 2013*, págs. 1–6, 2013.

[8] I.P Natanson. *Theory of functions of a real variable.* Traducción de LEO F. BORON, 1964.

[9] Qian y Weiss. *Wavelets and the numerical solution of partial differential equations.* J. Comp. Physl, 1993.

[10] A. Quarteroni y A. Valli. Numerical approximation of partial differential equations. *Springer-Verlag, Berlin*, 2:39–78, 1994.

[11] Adams R.A. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.

[12] Abul Hasan Siddiqi. *Applied Functional Analysis: Numerical Methods, Wavelet Methods and Image Processing*. Marcel Dekker, Inc., 2004.

[13] M. Tsatsos. Theoretical and numerical study of the van der pol equation. *Doctoral desertation*, 2006.

[14] Sabina V. Mishra. Wavelet galerkin solutions of ordinary differential equations. *Int. Joirnal of Math.Analysis*, 5:407–424, 2001.