UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

"Kirigami, La Magia De Los Recortes"

Leidy Sofia Parada Rico

Cód. 20151145002

Edwin Alfredo Carranza Vargas

Director

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Bogotá, 2021



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

"Kirigami, La Magia De Los Recortes"

Leidy Sofia Parada Rico

Cód. 20151145002

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:

Licenciatura en Matemáticas

Edwin Alfredo Carranza Vargas

Director

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Bogotá, 2021

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado a mis padres, hermano y familiares maternos más cercanos, quienes me han apoyado en todo mi proceso educativo tanto moral, emocional y económicamente, sin sus consejos y palabras de aliento, los momentos de duda, angustia, estrés y desesperación, hubieran dificultando en gran medida la posible culminación del mismo. Por último, se lo dedico a esa persona que hace un par de años, llego a apoyarme a alcanzar mis metas a través de su amor y paciencia.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas como a la comunidad LEBEM/LEMA, por el apoyo y las oportunidades que me brindo durante mi primer paso en el proceso de formación profesional, como docente de matemáticas. A todos mis profesores y secretarias del proyecto, dado que en ellos siempre pude encontrar algún apoyo por más mínimo que este hubiera sido. Quiero resaltar a mis docentes Magda González, Claudia Castro, Edwin Carranza, Juan Albadan, Jorge Rodríguez y José Torres quienes han dejado en mí una marca especial desde lo profesional y lo emocional. A mi director de monografía le agradezco mucho haber creído en mí y brindarme su apoyo, pues parte de su visión de la educación matemática, me dio la inspiración para la creación del presente trabajo. Finalmente, agradezco a Dios por darme la posibilidad de pasar por esta etapa de mi vida y darme la fortaleza necesaria para sobre pasar todos los momentos de dificultad.

Contenido

Resumen 10

Abstract 11

¿Por qué se hace la investigación? 12

Problema a trabajar 13

Objetivos 14

Objetivo General 14

Objetivos Específicos 14

Referentes Teóricos 15

Kirigami 15

Matemática implicada 16

Sistematización 21

Desarrollo Del Trabajo 22

Kirigami - Pop up geometric 22

Identificación 23

Modelos Usados. 24

Destreza presente 27

La geometría y las transformaciones en el plano 28

Operatividad en el kirigami 31

Experimentación y análisis 32

Ángulos en el kirigami 39

¿Doblez redondo? 45

Identificación visual. 47

¿Qué podemos deducir? 51

Bibliografía 54

Índice de figuras

Figura 1. *Kirigami en China* 15

Figura 2. *Kirigami en Polonia* 15

Figura 3. *Kirigami en Francia* 15

Figura 4. *Kirigami en México* 15

Figura 5. *Kirigami en Estados unidos* 16

Figura 6. *Kirigami en Perú* 16

Figura 7. *Kirigami de una hoja con doblez base* 22

Figura 8. *Kirigami sin doblez base* 22

Figura 9. *Kirigami circular* 23

Figura 10. *Kirigami con dos hojas* 23

Figura 11. *Plantilla onda* 24

Figura 12. *Modelo onda* 24

Figura 13. *Plantilla huevo* 24

Figura 14. *Modelo huevo* 24

Figura 15. *Plantilla pirámides* 24

Figura 16. *Modelo pirámides* 24

Figura 17. *Plantilla olas* 25

Figura 18. *Modelo olas* 25

Figura 19. *Plantilla cubos* 25

Figura 20. *Modelo cubos* 25

Figura 21. *Plantilla estrella* 25

Figura 22. *Modelo estrella* 25

Figura 23. *Plantilla ondas* 26

Figura 24. *Modelo ondas* 26

Figura 25. *Rotación del plano* 30

Figura 26. *Traslación del plano* 30
Figura 27. *Casa modelo* 32
Figura 28. *Frente de la casa* 34
Figura 29. *Plantilla y proceso de modelo* 34
Figura 30. Tiras de soporte 34
Figura 31. *Perfil izquierdo de la estructura* 36
Figura 32. *Perfil derecho de la estructura* 36
Figura 33. *Constante de proporcionalidad* 36
Figura 34. *Forma de cambio en lo horizontal y vertical* 38
Figura 35. *Paralelogramos y su relación con el plano original* 38
Figura 36. *Segundo prototipo de la casa* 39
Figura 37. *Trozo de papel* 40
Figura 38. *Trozo de papel doblado* 40
Figura 39. *Estructura con menos de 90°* 41
Figura 40. *Estructura con más de 90°* 41
Figura 41. *Tira con 90° en un ángulo menor a 90°* 42
Figura 42. *Tira con 90° en un ángulo mayor 90°* 42
Figura 43. *Problema de las tangencias* 46
Figura 44. *Croquis frontal* 48
Figura 45. *Croquis perfil* 48
Figura 46. *Plano* 49
Figura 47. *Modelo* 49
Figura 48. *Plano* 49
Figura 49. *Modelo* 49
Figura 50. *Vista de perfil* 50

Índice de tablas

Tabla 1. *Características generales para el kirigami - pop up geometric* 23

Tabla 2. *Niveles de dificultad al trabajar el kirigami* 27

Tabla 3. *La transformación del plano original* 29

Tabla 4. *La relación entre las longitudes y los ángulos* 43

Resumen

Las matemáticas son una ciencia que por el común de la gente, es concebida como un conjunto de términos numéricos los cuales pueden ser manejados únicamente en espacios y situaciones específicas, pero en la licenciatura de matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, es posible reconocer que estas son una herramienta factible de ser usadas y encontradas en diferentes ámbitos de manera implícita y sin conciencia de su existencia. Situación que es posible de ser evidenciada en la etnomatemática, por ejemplo.

Para el desarrollo del presente documento, se tendrá en cuenta la matematización desarrollada por Freudenthal, la cual sustentará el proceso de sistematización de la investigación realizada con el kirigami pop-up geometric. Se reconocerán técnicas de trabajo como objetos matemáticos que no siempre están presentes de manera simple y para esto se hará uso de imágenes con el fin de apoyar el proceso de comprensión. Con esto se concluirá, como además de lo visualmente reconocible, muchos de los desarrollos y elementos a tener en cuenta durante su producción están relacionados con la matemática sin necesidad alguna de hacer uso de expresiones simbólicas.

Palabras clave: kirigami, matematización, etnomatemática, plano, matemáticas

Abstract

Mathematics is a science that for the common people, is conceived as a set of numerical terms which can be handled only in specific spaces and situations, but in the degree of mathematics of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas, it is possible to recognize that these are a feasible tool to be used and found in different areas implicitly and without awareness of its existence. This situation can be evidenced in ethnomathematics, for example.

For the development of this paper, the mathematization developed by Freudenthal will be taken into account, which will support the systematization process of the research carried out with the kirigami pop-up geometric. Working techniques will be recognized as mathematical objects that are not always present in a simple way and for this, images will be used in order to support the comprehension process. With this, it will be concluded that, in addition to what is visually recognizable, many of the developments and elements to be taken into account during its production are related to mathematics without the need to make use of symbolic expressions.

Keywords: kirigami, mathematization, ethnomathematics, plane, mathematics.

¿Por qué se hace la investigación?

La presente investigación tiene la intención de observar y determinar cómo, elementos matemáticos pueden ser vistos o trabajados en diferentes instancias de la vida, la práctica diaria y/o profesional aun cuando estos no son usados de manera consciente, situación que llevó a determinar el uso de una de las técnicas de desarrollo del kirigami, a causa del dinamismo, creatividad e impacto visual que este arte contempla, al igual que los pocos desarrollos que este tiene en la matemática al momento de ser elaborado. Cabe destacar que se escoge con la intención de ser trabajado y analizado desde la perspectiva matemática de la investigadora, sin apoyo de la comunidad que trabaja con dichas técnicas, dado que es un elemento que presenta pocas investigaciones y desarrollo técnico sobre el mismo.

Lo anterior también busca dar a conocer, elementos generales de trabajo con este arte, que pueden ser usados y trabajados al momento de querer desarrollar alguna práctica docente vinculada a la matemática, haciendo uso de esta manera de una etnomatemática, la cual es definida por Barton (1996a, como se citó en Albanese y Perales, 2014) como "un programa de investigación de la forma en que los grupos culturales entienden, articulan y usan los conceptos y prácticas que describimos como matemáticas, ya sea que el grupo cultural tenga o no un concepto de matemáticas" (p. 263). Pues se tiene como interés la identificación de las prácticas matemáticas en las diferentes culturas, con un enfoque cualitativo para la determinación de elementos y acciones que pueden pasar como normales y naturales pero que cuentan con unas matemáticas implicadas.

Problema a trabajar

La matemática es una ciencia que por lo general se considera relacionada únicamente a los procesos numéricos y la identificación de teorías o propiedades ya determinadas, puesto que pocas veces esta es ligada con situaciones artísticas y culturales, por consiguiente, es importante comenzar a observar que la mayoría de cosas que se realizan contienen matemáticas de contra fondo y que en ocasiones son las que guían la forma de trabajo aunque no sea de manera consciente, situación que lleva a que las matemáticas en ocasiones sean percibidas como algo molesto y/o poco ajustadas a la realidad. Pero las matemáticas en realidad pueden ser trabajadas desde lo visual, manipulativo, auditivo y demás sentidos con los que el humano cuenta. Esta situación se ha podido experimentar en algunas ocasiones en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dado que en varias instancias se ha observado como el uso de diferentes herramientas y prácticas de la cotidianidad se encuentran relacionadas con la matemática, dándole así, un sentido mucho más real y práctico a las mismas.

Con respecto a las prácticas docentes que se llevan a cabo durante la licenciatura, en ellas se logró percibir que en cualquier nivel de educación escolar, la mayoría de los estudiantes muestran interés por actividades que están relacionadas con el manejo del papel y el resultado final del mismo, por lo cual al querer determinar qué elementos trabajar y teniendo en cuenta que el presente documento pueda ser usado como referente mediacional para la creación de secuencias de trabajo, se hizo una exploración de diferentes técnicas de trabajo, llegando al kirigami, arte que cuenta con pocos aspectos matemáticos estudiados y guarda relación con la etnomatemática desde el interés de investigación, pues sus principios, los cuales son determinados por Gerdes (1996, como se citó en Albanese y Perales, 2014),son los siguientes:

- ✓ adoptar un concepto amplio de matemáticas.

- ✓ enfatizar la implicación de factores socioculturales en la enseñanza, aprendizaje y desarrollo de las matemáticas.
- ✓ las técnicas y verdades matemáticas son un producto cultural.
- ✓ buscar elementos y actividades culturales como puntos de partida para hacer y elaborar matemáticas en la escuela.
- ✓ interpretar desde la perspectiva social la educación matemática, de manera que sea un instrumento de reflexión sobre la realidad. (p. 264)

Por ende, como otro aspecto de interés, el querer incentivar la importancia del trabajo de la etnomatemática y con base en los anteriores, se llega al planteamiento del problema de la presente investigación ¿Cuales son las matemáticas implicadas que se encuentran detrás de una de las técnicas usadas en el kirigami?

Objetivos

Objetivo General

- Identificar algunos de los objetos matemáticos que se encuentran en el arte del kirigami pop-up geometric

Objetivos Específicos

- Experimentar el kirigami desde plantillas encontradas, describiendo algunos procesos de manipulación encontrados y realizados.

- Sistematizar la matematización realizada con el kirigami (experimentación, análisis y establecimiento de objetos matemáticos en la elaboración)

Referentes Teóricos

Kirigami

Es el arte milenario derivado del origami y creado desde la invención del papel pues como sus palabras lo indican, “kiru” cortar y “kami” papel, consiste en el uso de papel, sin marca alguna, haciendo uso de tijeras para la creación de figuras. Su creación, según Castillo (2016), se dio en la antigua China en la cual se comenzó la creación desde lo artístico y lo decorativo, pero es algo que ha tenido diferentes tratamientos a través del tiempo, situación que lleva a que se generen gran cantidad de técnicas y no únicamente la dada por los chinos en la antigüedad, como se ve a continuación:

Figura 1. *Kirigami en China*



Nota. Garza [Fotografía], de PippaDyrlaga, 2016,PippaDyrlaga (https://www.pippadyrlaga.com/feather/pmgedqo23a4m14m3t86ef44j61bul1).

Figura 2. *Kirigami en Polonia*



Nota. Simetría, de Josemaria, 2013, La nube artística (http://www.lanubeartistica.es/dibujo_artistico_2/Unidad2/DA2_U2_T3_Contenidos_v01/5_arte_enredado.html)

Figura 3. *Kirigami en Francia*



Nota. Siluetas [Fotografía], de Irene Tobón, 2006, Flickr (https://www.flickr.com/photos/airin/3389087972) CC BY-NC-SA 2.0

Figura 4. *Kirigami en México*



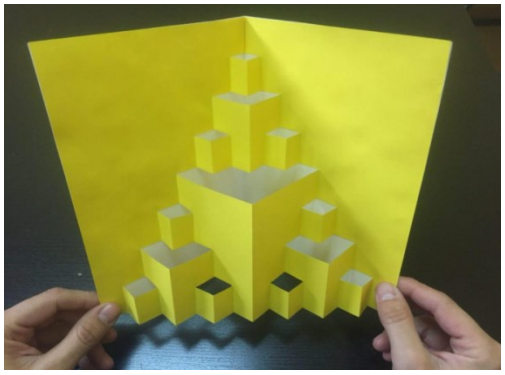
Nota. DIY para hacer guirnaldas de papel, de Maura, S.f, Centros de mesa (https://centrosdemesa.co/decoracion-dia-de-muertos/)

Figura 5. *Kirigami en Estados unidos*



Nota. Tarjeta de flores pop up [Fotografía], de Lily Lopez, 2010-2018, Craftología (https://www.craftologia.com/tips/manualidades/regalos-originales-para-el-dia-de-las-madres/tarjeta-de-flores-pop-up)

Figura 6. *Kirigami en Perú*



Nota. Un triángulo de Sierpinski con papel [Fotografía],S.f, Divermates (http://divermates.es/blog/triangulo-sierpinski-kirigami/)

Si bien el kirigami, como se puede ver anteriormente, ha tenido una gran variedad de usos y técnicas, cada una de ellas se ha seguido transformando de manera tal que ha conseguido nuevas formas de tratamiento y desarrollo, generándose elementos y ámbitos tanto artísticos como educativos en diferentes áreas del aprendizaje. Con base en esto, se hace uso de una técnica la cual se encuentra actualmente mucho más elaborada, esto con el fin de estudiarla e identificar objetos matemáticos que ayudan a justificar su forma de elaboración desde cero. La técnica que se trabaja es el pop up geometric (kirigami de Perú).

Matemática implicada

Durante el desarrollo investigativo con cada una de las técnicas escogidas y pertenecientes al kirigami, se encuentran diferentes objetos matemáticos relacionales a los procesos de creación y configuración de las mismas, por ende, es importante reconocer las definiciones conceptuales de cada uno con el fin de evidenciar y comprender durante el desarrollo del trabajo la implicación de las mismas. Con base en esto se tendrán en cuenta los siguientes conceptos:

- **Destreza físico motora:** La destreza es una dinámica que se busca desarrollar desde la infancia pues esta es la que determina los procesos que una persona puede realizar, según Granillo y Macias (2013), las destrezas no son algo innato en el ser humano por lo cual deben ser construidas y desarrolladas mediante el adiestramiento, pues constituyen la dinámica del aprendizaje; teniendo en cuenta la forma de trabajo del kirigami se tiene en cuenta las destrezas físico motoras, las cuales están relacionadas con la coordinación entre las partes que integran el cuerpo, principalmente la correspondencia entre lo visual y la motricidad fina, dado que permite la manipulación de elementos con precisión ya que se desarrollan los músculos de las manos.

- **Pensamiento matemático para llegar al espacial:** Un elemento de gran importancia para el desarrollo y comprensión de la investigación es el reconocimiento del pensamiento espacial para el trabajo del kirigami, pues con base en este los desarrollos son más óptimos y consientes. Para la definición de este se acude tanto a los lineamientos curriculares como a los estándares básicos de competencias en matemáticas (EBCM),en los cuales se determina que a partir del pensamiento matemático surge el pensamiento espacial, uno de los tantos que integran a este. El pensamiento espacial es determinado como "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (MEN, 1998, p. 37).Por lo cual es importante el trabajo de elementos geométricos que permitan el desarrollo del pensamiento lógico para su perfeccionamiento. El concepto antes presentado conlleva el reconocimiento, la creación, manipulación y ubicación del estudiante en un espacio especifico con respecto a los objetos que

lo rodean, lo cual conlleva una serie de procesos y comprensiones que se complejizan cada vez más pero que le dan a la persona la posibilidad del manejo de sistemas geométricos desde lo mental con los cuales puede interactuar para la generación de representaciones (MEN, 2006). Esto permite un mejor desenvolvimiento de competencias que inciden en el diario vivir.

- **Razonamiento inductivo:** En primera instancia es importante recordar que el razonamiento es uno de los procesos generales, que se tienen contemplado, para el trabajo y desarrollo del pensamiento matemático, el cual depende de otros para poder darse. Este proceso es de aspecto progresista el cual incrementa con base a trabajos anteriores, pero debe tenerse en cuenta que este se desarrollara dependiendo del nivel cognitivo en el cual se encuentre la persona, pues con base en esto se dará la forma en cómo se generan y dan a expresar conjeturas, estrategias y formas de abordaje de una situación dada, justificando y argumentando el porqué de las cosas, dado que las matemáticas más que memorizarlas permiten trabajar tanto la capacidad de pensamiento como el desarrollo de competencias (MEN, 1998). Con respecto a la forma de razonamiento, esta se distingue por la construcción de generalidades a partir descubrimientos y consolidación de aspectos particulares que permiten validar una afirmación (propiedad) determinada (Alsina, Fortuny y Burgués, 1997)

- **Bidimensionalidad (2D)y tridimensionalidad (3D):** Son espacios en los cuales se encuentra inmerso el mundo. El 2D está contemplado por dos dimensiones, el alto y el ancho y es representado en un único plano y el 3D, está conformado por el alto, el ancho y la profundidad, en donde con dos planos que se intersecan entre sí, ya es posible obtener una tercera dimensión.

- **Transformaciones geométricas:** Son presentadas como los cambios que se pueden generar en un plano con base a un conjunto de puntos que presentan una correspondencia establecida con otro conjunto. Este proceso se establece mayormente en la bidimensionalidad, pero las dos primeras y la última, que se mencionaran, son completamente adaptables en una tercera dimensión dado que a los conjuntos de puntos solo es necesario agregarle una tercera coordenada espacial. Existen cuatro transformaciones básicas: Godino y Ruíz (2002), establecen que, la **traslación** es el movimiento de un conjunto de puntos en la misma dirección y esto está determinado por un vector el cual da la distancia y el curso en el cual se mueven los puntos que se trabajan; **rotación,** se presenta en el momento en que, una figura (conjunto de puntos) cambia su posición con base en un punto fijo en un determinado ángulo; la **simetría** está determinada como el movimiento rígido que ocurre en el plano, en el cual se establece un eje o recta, representando una mediatriz entre los puntos originales y los puntos correspondientes; y **simetría con deslizamiento,** la cual consiste en la composición entre una simetría y una traslación.

  Con respecto a la simetría, esta transformación presenta una gran variedad de tipos de movimientos, acá solo se resaltarán dos de ellas, dado lo trabajado con el kirigami. Con base en Godino y Ruíz (2002), la **simetría axial**, se da en el momento en que se establece una recta, ya sea sobre o fuera de la figura, como eje, generándose una reflexión; y la **simetría central**, se da con base en un punto determinado, el cual es usado como eje de rotación o simetría en donde el conjunto de puntos tiene sus correspondientes.

- **Proporcionalidad (constante):** Si se tienen dos magnitudes proporcionales y una función la cual determina la relación entre las cantidades respectivas de las

magnitudes, existirá un k que representará la correspondencia entre la primera y la segunda magnitud en sus unidades(Fiol y Fortuny, 1990).

- **Ángulo diedro:** Según Verástegui(2009):

  Dados dos planos $\pi 1$ y $\pi 2$, secantes en L, osea $\pi 1 \cap \pi 2 = L$, sean $S1$ un semiplano de $\pi 1$ con borde L y $S2$ un semiplano de $\pi 2$ con borde L; al conjunto $S1 \cup S2 \cup L$ se llama un ángulo diedro de arista L y caras $S1$ y $S2$, y se denota $S1 - L - S2$. (p.173)

Sistematización

Con base en el desarrollo para el cumplimiento de los objetivos, se identifica que el proceso de matematización desarrollado por Freudenthal, permite describir y dar una estructura para la sistematización de la información recolectada durante la experimentación, pues Freudenthal (1983, como se citó en Puig, 1994) plantea que la fenomenología de las matemáticas es una característica que se puede dividir en dos partes, como lo es el noumenon, el cual se vincula a los objetos matemáticos y se relaciona con el phaninomenon, que determina la experimentación y/o trabajo con aquellos objetos; cabe destacar, que las partes llevan de los objetos mentales a los conceptos y para su organización es importante tener en cuenta los conceptos, estructuras e ideas matemáticas que apoyen el proceso anterior; para explicar este proceso, el autor hace uso de la triada de Bruner "enactivo, simbólico, icónico", los cuales para la fenomenología anterior presentan una forma de estudio de los fenómenos a estudiar, pues al tener lo enactivo, lo cual permite identificar el problema a trabajar, se pasa a lo simbólico, en el cual se traduce dicho problema a un lenguaje cercano a lo matemático para terminar en el icónico, en donde esté determina ya el lenguaje tanto formal como técnico desde las matemáticas del problema trabajado.

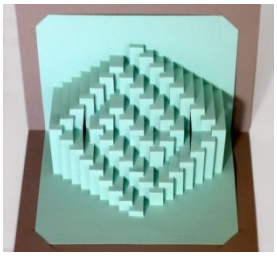
Desarrollo Del Trabajo

En el siguiente apartado se describe la técnica a usar del kirigami y por consiguiente el desarrollo y comprensión que se tiene de la misma al momento de ser, tanto analizada como tratada. Para esto se hace uso de la forma de matematización planteada por Freudenthal para la sistematización de la información.

Kirigami - Pop up geometric

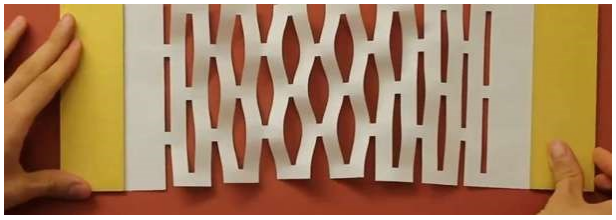
La presente técnica está fuertemente ligada a los antecedentes reconocidos en el Perú, en el cual se es necesario de un modelo previo para la obtención de objetos diseñados, pero cabe mencionar que esta se ha desarrollado en otros países del mundo generando así una gran cantidad de diseños y formas de trabajo. Esta forma de Kirigami se puede presentar de diversas formas, como por ejemplo haciendo uso de una sola hoja o varias de ellas con el fin de obtener figuras 3D, como se muestra a continuación:

Figura 7. *Kirigami de una hoja con doblez base*



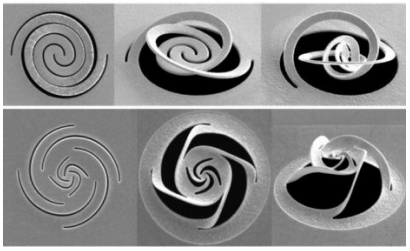
Nota. Adaptado de *9x9 Meander*, de Ullagami, geometrickirigami pop-ups,S.f, Ullagami, geometrickirigami pop-ups (http://ullagami.com/gallery.php#.WULSq6hwU4o.pinterest)

Figura 8. *Kirigami sin doblez base*



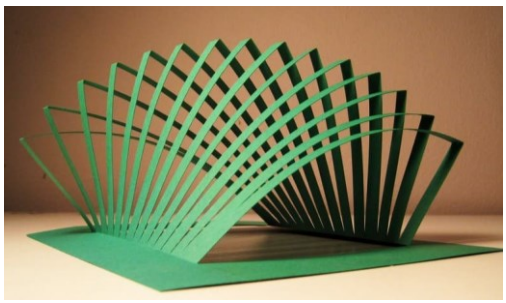
Nota. Adaptado de*Grafeno que se dobla como papel para construir nanomáquinas,* de Angela Bernardo, 2015, Blogthinkbig.com (https://blogthinkbig.com/grafeno-se-dobla-papel-construir-nanomaquinas) CC BY-SA 3.0

Figura 9. *Kirigami circular*



Nota. Adaptado de *Kirigami-inspired technique manipulates light at the nanoscale*, de D. Chandler, 2018, MIT News on campus and around the world (https://news.mit.edu/2018/kirigami-inspired-technique-manipulates-light-nanoscale-0706)

Figura 10. *Kirigami con dos hojas*



Nota. Adaptado de Arte cinético #1, de Parametrichouse, S.f, Parametrichouse(https://parametrichouse.com/kinetic-architecture-2-2/)

Teniendo en cuenta que el trabajo a desarrollar debe estar limitado con el fin de desarrollar los objetivos propuestos, en esta técnica se hará uso del kirigami de una hoja con doblez base.

Identificación

Esta primera etapa consiste en hacer uso de plantillas encontradas en diferentes sitios web, con el fin de reconocer e identificar como es el proceso de generar esta técnica de kirigami a partir de las mismas. Se seleccionan 7 modelos con diferentes estructuras y elementos a reconocer (amplitud, cantidad de dobleces, formas de corte, entre otros) de tal manera que permita tener un primer reconocimiento y manipulación en este espacio artístico. Se observa que todas las plantillas tienen un mismo patrón para dar a conocer por donde debe cortarse y por donde doblarse de una manera en específica. Por lo cual se tomará como regla general las siguientes indicaciones:

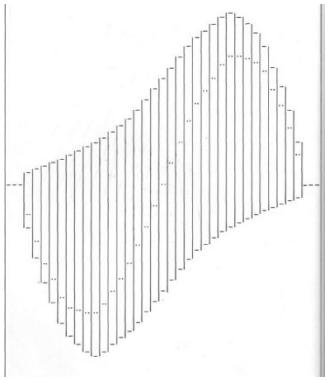
Tabla 1. *Características generales para el kirigami - pop up geometric*

Tipo de línea	Representación	Acción
Línea continua		Cortar sobre ella
Línea discontinua		Doblar en forma de valle
Línea punteada		Doblar en forma de montaña

Nota. Datos tomados de las diferentes plantillas usadas

Modelos Usados.

Figura 11. *Plantilla onda*



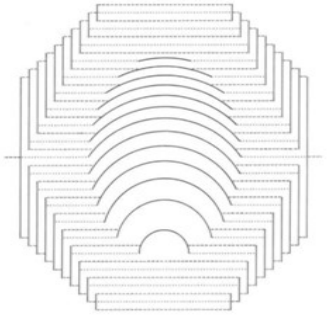
Nota. Adaptado de *Wave pattern.png*, de make and learn, 2017, make and learn (https://drive.google.com/file/d/1qY3C8hj_fx-sxltstKz6--7YgPPxErLY/view)

Figura 12. *Modelo onda*



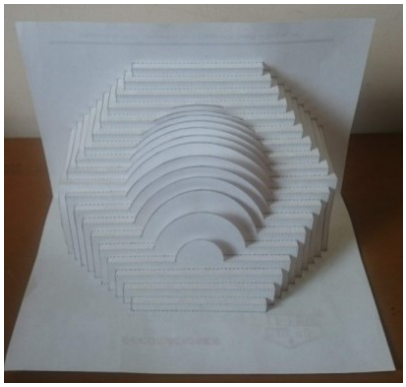
Nota. Fuente propia

Figura 13. *Plantilla huevo*



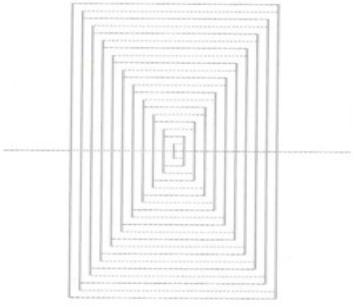
Nota. Adaptado de*3.jpg*, de The x, 2020, The X (https://thexstuff.blogspot.com/2020/08/is-kirigami-patterns-link-download.html) CC BY3.0

Figura 14. *Modelo huevo*



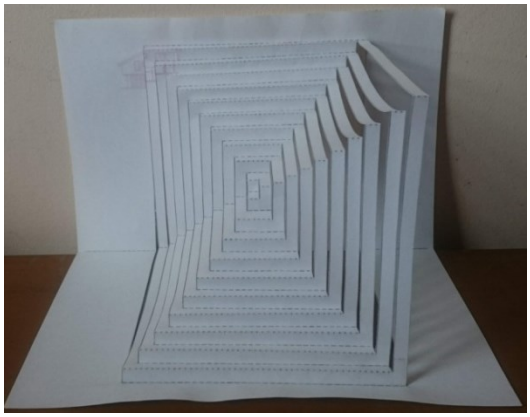
Nota. Fuente propia

Figura 15. *Plantilla pirámides*



Nota. Adaptado de 5*.jpg*, de The x, 2020, The X (https://thexstuff.blogspot.com/2020/08/is-kirigami-patterns-link-download.html) CC BY 3.0

Figura 16. *Modelo pirámides*



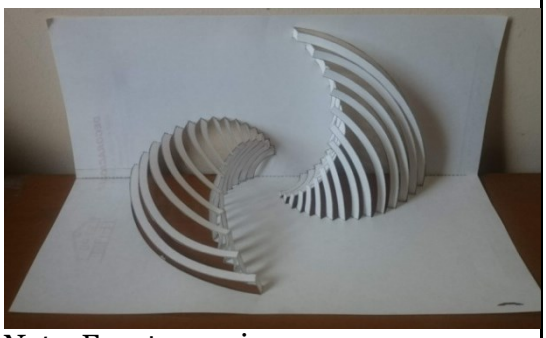
Nota. Fuente propia

Figura 17. *Plantilla olas*



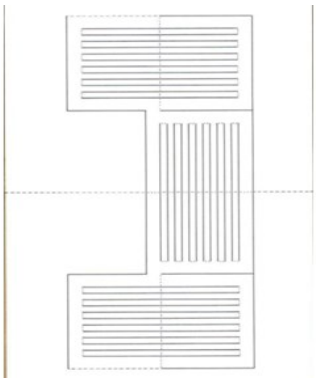
Nota. Adaptado de *9e70cc00dae8417224895172baa8e049.jpg*, de make and learn, 2018, make and learn (https://drive.google.com/file/d/1M-lTZCnmtMpHhVYhbgXWckpjs7HTCF3v/view)

Figura 18. *Modelo olas*



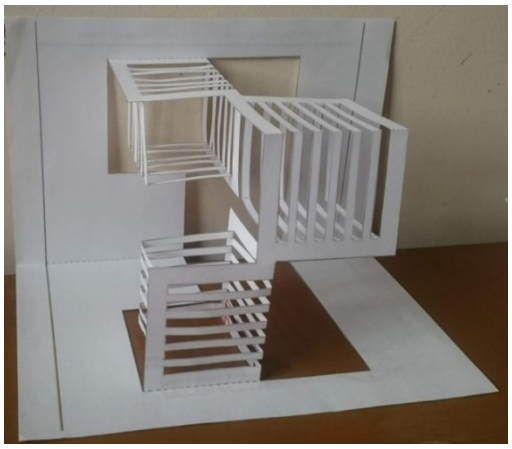
Nota. Fuente propia

Figura 19. *Plantilla cubos*



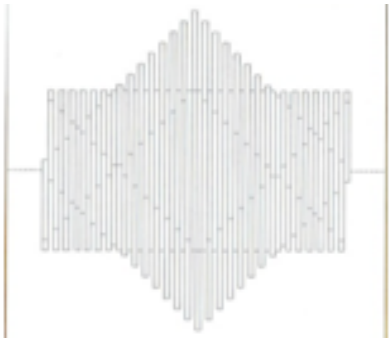
Nota. Adaptado de 1.*jpg*, de The x, 2020, The X (https://thexstuff.blogspot.com/2020/08/is-kirigami-patterns-link-download.html) CC BY 3.0

Figura 20. *Modelo cubos*



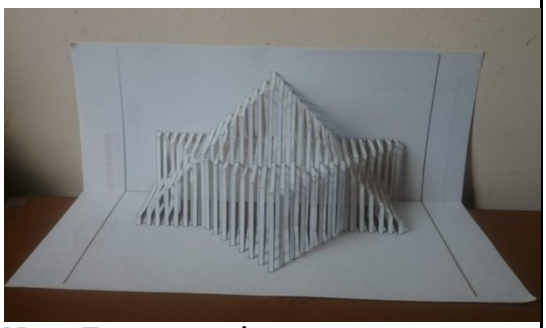
Nota. Fuente propia

Figura 21. *Plantilla estrella*



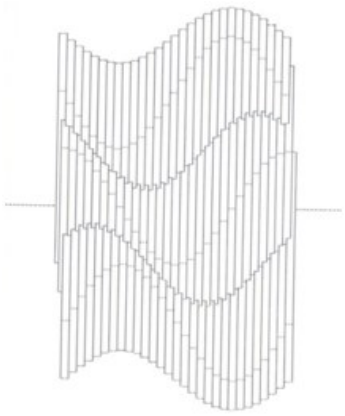
Nota. Adaptado de 6.*jpg*, de The x, 2020, The X (https://thexstuff.blogspot.com/2020/08/is-kirigami-patterns-link-download.html) CC BY 3.0

Figura 22. *Modelo estrella*



Nota. Fuente propia

Figura 23. *Plantilla ondas*



Nota. Adaptado de 4.*jpg*, de The x, 2020, The X (https://thexstuff.blogspot.com/2020/08/is-kirigami-patterns-link-download.html) CC BY 3.0

Figura 24. *Modelo ondas*



Nota. Fuente propia

La anterior tabla, muestra tanto las plantillas como los modelos generados a partir de las mismas, para la primera experimentación, en la cual también se refleja el nivel de dificultad que se tiene al momento de ejecución, esto se da de manera descendente. A continuación, se presentan diferentes situaciones que se identificaron durante el proceso de reconocimiento:

- En todas las estructuras, la hoja y los dobleces tiene un ángulo de 90°, nunca es mayor o menor que este.
- Es importante demarcar los lugares por donde se realiza pliegues, esto se puede hacer con un esfero sin tinta no realizando mucha fuerza, luego realizar los cortes por los lugares indicados y para finalizar, hacer los dobleces que están en los extremos de los cortes (doblar de afuera hacia adentro) buscando llegar al doblez que se encuentra en la hoja (casi siempre se encuentra en el medio).Al terminar el proceso se identifica que el kirigami queda totalmente “guardado” ya que el doblez que atraviesa la hoja permite que la estructura quede "plana" con los dobleces ya realizados y se forme al soltarlo, con ángulos de 90° en todos los pliegues.

A continuación se presentan las dificultades que se tuvieron durante el uso de las plantillas, para obtener los modelos anteriormente mencionados. Para esto, se establecen niveles

de manera ascendente en donde el nivel uno, es el más sencillo y el ultimo el más complicado de abordar. Estos aspectos están relacionados con la realización de los dobleces y el uso del material. Cabe aclarar que se realizan con base en lo experimentado, pero claramente pueden existir mucho más.

Tabla 2. *Niveles de dificultad al trabajar el kirigami*

<table>
<tr><th>Niveles</th><th>Aspectos de dificultad</th></tr>
<tr><td>Nivel 1</td><td>Al realizar los dobleces, en ocasiones se presenta confusión y temor con respecto a la forma en que esto se debe realizar, por la posibilidad de daños en la estructura.</td></tr>
<tr><td>Nivel 2</td><td>Si los cortes, se realizan a mano alzada y por alguna situación el corte queda diferente al deseado (con hendidura(s) por ejemplo), esto presentará dificultades al momento de obtener la estructura deseada, pues si hay tiras de papel contiguas estas presentaran roces y bloquearan la movilidad o posición esperada.</td></tr>
<tr><td>Nivel 3</td><td>Una de las dificultades para la realización de las estructuras depende del tipo de material con el cual se trabaje, pues los pliegues serán más sencillos o difíciles de realizar, dado que en ocasiones o los pliegues se separan o son muy difíciles de moldear.
<table>
<tr><th>Tipo de papel</th><th>Aspectos a tener en cuenta</th></tr>
<tr><td>Hoja común</td><td>Presentará gran dificultad dado que los dobleces se separarán con mayor facilidad</td></tr>
<tr><td>Hoja para membretes</td><td>Material que es recomendado, pero se debe tener especial cuidado de no realizar los dobleces muchas veces y muy marcados, dado que la hoja tiende a cortarse.</td></tr>
<tr><td>Cartulina</td><td>El material más indicado para el trabajo del kirigami dado que al momento de manipularlo es mucho más sencillo y los pliegues no son frágiles, se debe tener cuidado al doblar con el fin de que estos queden rectos y por el lugar indicado.</td></tr>
<tr><td>Opalina</td><td>A causa del grosor del material, realizar dobleces pequeños o muy juntos presentará dificultad al igual que al momento de realizar los cortes necesarios dado que se necesita de la aplicación de fuerza extra.</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Nivel 4</td><td>Algunas estructuras son más difíciles de doblar en su totalidad dado que sus dobleces no son ni totalmente perpendiculares o paralelos al pliegue principal.</td></tr>
<tr><td>Nivel 5</td><td>Otras estructuras presentan mayor dificultad, puesto que algunos pliegues y formas no se soportan de la hoja de papel base, sino de una de las estructuras formadas por los cortes y dobleces, situación que se da con el modelo cubos.</td></tr>
</table>

Nota. Fuente propia

Destreza presente

Habiendo realizado la experimentación, se pueden obtener diferentes elementos a resaltar los cuales describen los procesos realizados durante la misma, uno de ellos se relaciona

con el trabajo viso manual o coordinación óculo manual. Esta destreza, la cual es comenzada a desarrollarse desde la infancia, es de gran importancia en el desarrollo y realización del kirigami, ya que abarca cerca del 80% de la labor y creación de un modelo, pues esto conlleva la elaboración de la plantilla con lápiz y regla, la ejecución de los cortes necesarios para el establecimiento de la estructura como también la producción de los dobleces ya sean valle o montaña. En todos estos procesos es de gran importancia la coordinación existente entre ojos y manos que, si bien conlleva la integración con otras destrezas, la mencionada es la más importante y presenta una relación con la matemática desde el ámbito geométrico-espacial, dado que es la que permite la creación de los espacios necesarios. Con respecto a los tipos de doblez que se generan al realizar un modelo, cada uno conlleva un grado de precisión que depende de la estrategia usada para su realización, pero que de manera implícita conlleva la identificación de elementos geométricos como lo es la perpendicularidad de la cual se hablará más adelante.

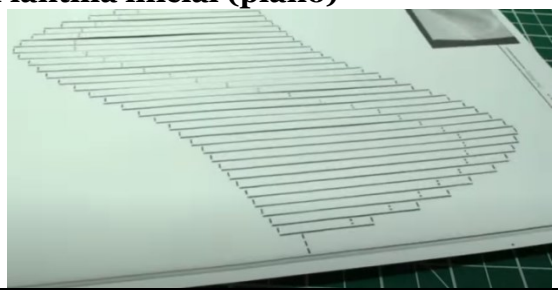
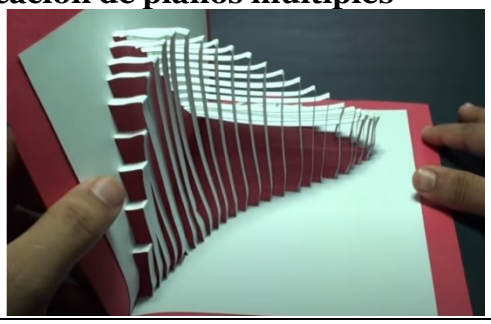
La geometría y las transformaciones en el plano

Luego de haber manipulado las plantillas para la realización de los modelos, se puede determinar que el plano (hoja) sufre cambios y transformaciones desde diferentes aspectos. En primera instancia, el realizar cortes hace que el plano sea rotó y se vuelva múltiple; y además, al doblar estos elementos que se cortaron (que casi siempre son tiras), los planos se dividen en más de ellos. Cabe resaltar que el proceso que acá ocurre es interesante porque si bien de un solo plano se obtienen múltiples planos, estos no tienen la necesidad de ser unidos manualmente dado que nunca fueron separados y pertenecen al original.

Si bien se pasa de la bidimensionalidad a la tridimensionalidad sin la necesidad de hacer uso de módulos o el uso de pegante para esto, esta tridimensionalidad presenta diferencias a la conocida comúnmente, dado que si bien hay la sensación de un espacio creado, no se tiene una figura cerrada que determine la existencia de un volumen, pues los cortes que se realizan en el plano (hoja), generan huecos en el espacio y en la estructura dado que no se usa otro plano

adicional, teniendo así una geometría que vive de la superficie (tiras de papel). Con respecto a este aspecto no se encontraron evidencias sobre el tipo de geometría a la cual podría pertenecer este hecho en la cual se permita la creación de cortes en el plano. Las transformaciones antes mencionadas se pueden ver en la **Tabla 3.**

Tabla 3. *La transformación del plano original*

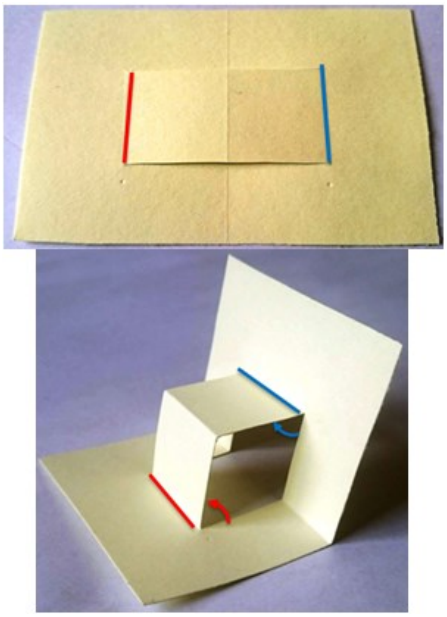
Plantilla inicial (plano) 	**Corte del plano** 
División del plano 	**Creación de planos múltiples** 

Nota. La presente tabla representa la secuencia de pasos que permite identificar la división de un solo plano. Tomado de *How to make a wave pop up card. Free template-(kirigami 3D) Ocean Wave Greeting card!*, de SunderOri, 2014, Youtube (https://www.youtube.com/watch?v=raHXz56UCi4&t=99s)

Un segundo aspecto son las transformaciones geométricas que se dan y/o pueden darse al momento de crear un modelo, después de haber cortado el plano, en otras palabras, se tiene como énfasis la creación de los dobleces para el prototipo del kirigami. Cabe destacar que no se tiene en cuenta la homotecia, ya que está se reflejaría mayormente y posiblemente en los procesos de creación de la plantilla. Con respecto a las demás transformaciones, se identifica que dos procesos siempre se encuentran en la creación de cualquier modelo y tres están presentes en algunas de las estructuras de los kirigami. Aquellas que están continuamente presentes son, la

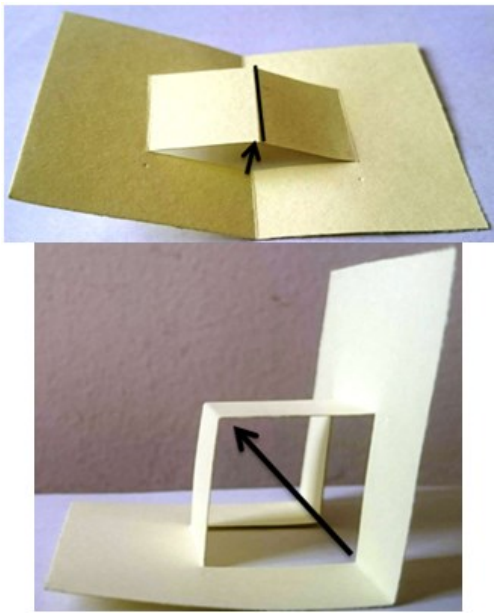
rotación, la cual se da siempre que se genera un pliegue, pues al dividir un plano, una de las partes del mismo se traslada sobre el eje de rotación (línea roja y azul) creado (doblez) hasta tomar la posición deseada como se puede ver en la **Figura 25** y la traslación, de igual manera se genera en el momento en que se realiza un pliegue pero esto se da ya que el doblez central (línea negra) cambia su posición y provoca que la tira de papel cambie su posición inicial, esto se puede ver más explícitamente en la **Figura 26.**

Figura 25. *Rotación del plano*



Nota. Fuente propia

Figura 26. *Traslación del plano*



Nota. Fuente propia

Las trasformaciones que no siempre están son, la simetría, dado que en ocasiones las tiras de papel realizadas (cuentan con dobleces valle en sus extremos y un doblez montaña en el centro de la tira o viceversa) presentan un doblez en el medio haciendo que las dos partes tengan una misma longitud, un caso claro puede ser la **Figura 26,** pues la parte vertical y horizontal de la tira presentan la característica mencionada. La simetría axial la cual es posible de observarse en las Figuras 14, 16 y 22; en la **Figura 14**se tiene un único eje de simetría el cual es vertical y atraviesa todo el centro de la estructura; la **Figura 16**, el eje de simetría también es único dado que este solo pasa de manera diagonal y esta simbolizado por los pliegues que sobre salen mayor

mente de la estructura y pasa por los dobleces que más cerca se encuentran de la hoja original; y en la **Figura 22**, se pude observar un fenómeno totalmente diferente dado que esta estructura tiene 4 ejes de simetría (vertical, horizontal, y las dos diagonales de la figura) los cuales pasan por en medio de la estructura. Como se puede observar estas estructuras cuentan con simetrías axiales dado que los puntos "extremos" de los modelos son trasladados y rotados con base en el eje de simetría que cada uno tiene. Y la simetría central se logra detallar en algunos modelos que cuentan con esta transformación, como lo son las **Figuras 12 y 18** dado que estas estructuras al trazarles dos ejes de simetría perpendiculares que atraviese el modelo, los puntos que se encuentran reflejados mantienen la misma distancia al punto de origen, el cual es el punto de corte entre los dos ejes.

Operatividad en el kirigami

Durante la identificación, se quiso observar y determinar la existencia de posibles propiedades operativas que se relacionen a las realizadas con el plano como, por ejemplo, la conmutatividad, el neutro e inverso, en especial estas tres, dado que como se dijo anteriormente se trabaja con un único plano, el cual solo se transforma al ser cortado y doblado. Con respecto al elemento neutro, se identifica que este se relaciona en el momento en que la hoja está en su originalidad con la plantilla realizada sin cortes y pliegues algunos, pues esta aun no se encuentra alterada. No existe inverso, ya que luego de alterar el plano no se es posible obtener nuevamente la hoja como era en su originalidad, pues si bien se puede desdoblar los pliegues realizados no se podrá obtener un único plano que no se encuentre cortado. Y la conmutatividad, la cual se refiere al orden en que se opera, durante la identificación se pudo observar que no importando por el doblez que se empiece a generar el modelo, esto no alterara el resultado del mismo pues, aunque hay estrategias para esto que facilitan el proceso, estas no son totalmente necesarias para darle forma al kirigami.

Experimentación y análisis

Luego de usarlas plantillas encontradas, se construye una desde el inicio, con el fin de experimentar e identificar aspectos que son necesarios tener en cuenta para conseguir una estructura deseada, por lo cual se hace uso de la imagen de una casa y se comienza a crear el plano. La imagen usada es la siguiente:

Figura 27. *Casa modelo*



Nota: Adaptado de *Las partes de la casa en francés,* de Esid2020, 2019, Esid Idiomas (https://www.esididiomas.es/las-partes-de-la-casa-en-frances/)

Para la realización de la plantilla y modelo de la casa, en el estilo kirigmi escogido, se crearon 2 prototipos, el primero presenta diferentes fallas, teniendo en cuenta que se realiza de manera intuitiva, las cuales ayudan a comprender diversos elementos, características y aspectos, esenciales al momento de construir una plantilla. En este proceso se puede observar el primer nivel de construcción del pensamiento espacial determinado en los EBCM (2006), pues estos determinan que el primer momento no se encuentra relacionado con las mediciones sino únicamente con los elementos y espacios involucrados.

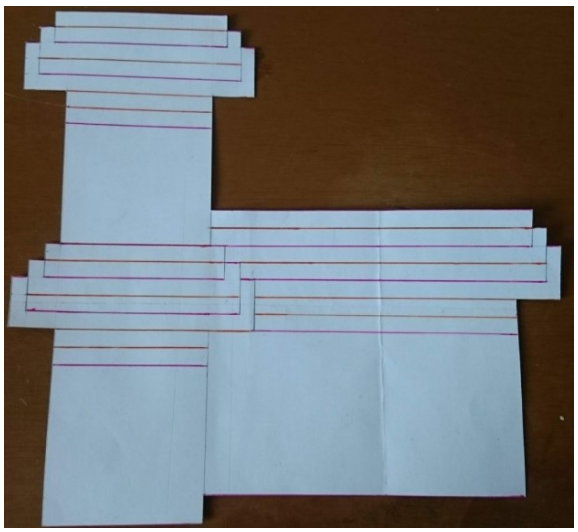
Por lo cual, con base en esto, se realiza un segundo prototipo aplicando lo observado en el intento anterior y se perfeccionan las conjeturas desarrolladas, todo esto haciendo uso del

razonamiento inductivo el cual permite desde algo específico explicitar características de aspectos más generales con el fin de validar algo (Alsina et al., 1997)y de manera paralela establecer los objetos matemáticos inmersos que se usan para el proceso. Estableciendo la forma en que se trabaja, se presenta tanto lo desarrollado como lo encontrado.

En el primer prototipo, se tiene en cuenta los diseños trabajados en la experimentación, situación que lleva a querer complejizar, un poco, la creación de la plantilla de manera tal que no se obtuviera únicamente un plano vertical de la casa que sobresaliera de la hoja, generando una profundidad básica (en la que se corta únicamente el perfil de la estructura a modelar y se doblan unas pocas pestañas con el fin de generar profundidad al mismo), sino que se pueda obtener diferentes características más reales a la misma. Con base en la imagen guía, algunos elementos para la construcción son ajustados a las posibilidades conocidas, por ende, los techos son cambiados a un aspecto más rectangular y escalonado, como también se dieron profundidades diferentes. El desarrollo es bastante ingenuo, pues se cree que únicamente se necesita:

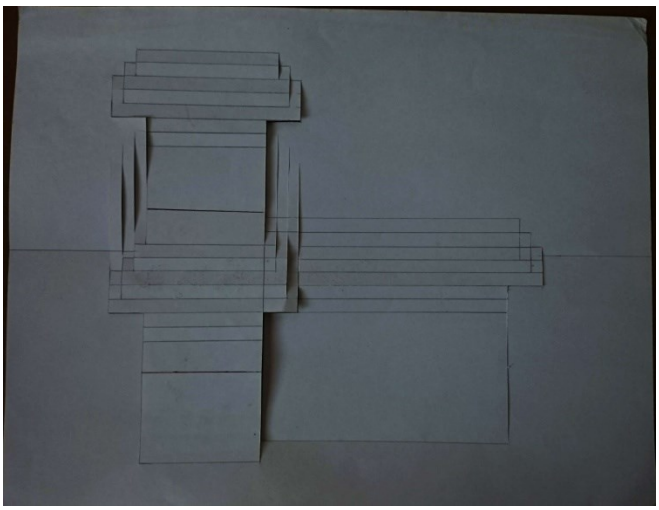
- Realizar la silueta de la casa, haciendo uso de una medida estándar. En otras palabras, establecer una unidad de medida la cual permita realizar cambios en el tamaño de la casa cuando esto se requiera.
- Indicar visualmente el tipo de doblez necesario para la creación del modelo (se asignaron colores con el fin de que sea más sencilla su identificación, en donde el color rosado indica doblez valle y naranja doblez montaña) **Figura 28.**
- Tomar una hoja del material en el cual se hará la plantilla y por consiguiente el modelo, trazar una línea discontinua horizontal por el medio de la misma (tomando la hoja horizontalmente, valga la redundancia) con el fin de hacer un doblez valle y trazar el eje central.
- Sobre la hoja se dibuja la silueta de la casa que se realizó al inicio, de tal manera la mitad de la misma quede sobre la línea discontinua realizada. **Figura 29**

Figura 28. *Frente de la casa*



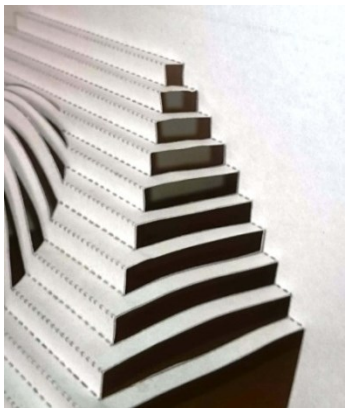
Nota. Fuente propia

Figura 29. *Plantilla y proceso de modelo*



Nota. Fuente propia

Figura 30. Tiras de soporte



Nota: Fuente propia

Luego de realizar los pasos anteriores, se hacen los cortes necesarios, ahora se debe identificar las tiras de papel que soportan las partes de la casa (por ejemplo, los techos), como lo muestra la **Figura 30,** para que estas tengan estabilidad y generen la percepción en 3D, pero al momento de realizar este proceso se tiene dificultades dado que no se tiene el espacio necesario para las mismas.

Otro aspecto que se agrega a la casa, es la creación de un canal (canaleta) con el fin de usar una forma distinta a las ya trabajadas, puesto que esta tendrá forma de prisma rectangular, pero sin 3 de sus caras. Lo anterior es posible de obtener implementando, un doblez valle, dos veces seguidas el doblez montaña y por ultimo un doblez valle, pero durante el proceso se reconoce que este no es factible por la falta de tiras de papel que soporten dicha forma en la hoja, pues a causa del peso y los pocos soportes, no se tiene estabilidad y parte de la estructura se desplaza hacia abajo sin mantener el ángulo de 90º que se requiere para obtener la estructura

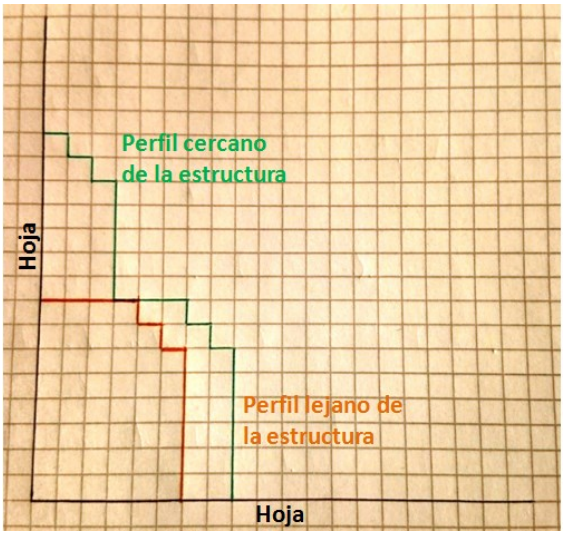
deseada. A causa de esto la idea se descarta para el segundo prototipo y solo se realizará un doblez tipo montaña, seguido de uno valle, para el despliegue de la pared de la casa.

Con respecto al procedimiento realizado anteriormente, en donde se ubica la mitad de la silueta sobre la mitad de la hoja, se identifica que este proceso no siempre es posible a causa de los obstáculos que se presentan durante el proceso (mencionados anteriormente) y que al momento de querer doblar la hoja principal a la mitad, el modelo de la casa se tiende a doblar por lugares en donde no se había presupuestado, por lo cual se deja de trabajar en el primer prototipo y se realizan cambios con base en lo anterior para la generación del segundo.

Antes de la construcción del segundo prototipo, se realiza un análisis con respecto a cómo identificar cuáles son las medidas tanto de la silueta como de las tiras de papel, necesarias antes y después del doblez central, para que al doblar todo el modelo obtenga un ángulo de 90º en sus pliegues, situación que se torna confusa al no lograr tener las medidas de las tiras de papel las cuales son la base de los techos escalonados. Este aspecto lleva a retomar los modelos realizados y experimentados anteriormente, con la intención de encontrar una estrategia válida y sustentable para relacionar el 2D con el 3D (plantilla con el modelo). Para esto, se observan los modelos desde diferentes ángulos, llegando a querer identificar características y elementos relacionados al espacio existente entre la hoja y la estructura (profundidad), de manera más detallada.

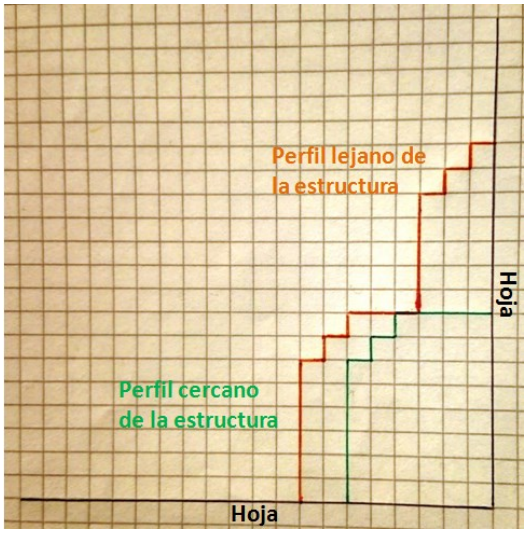
La estrategia que se encuentra, es usar la visión del modelo de la casa, desde el perfil de la misma, para lo cual se usa una hoja cuadriculada que ayuda a tener una perspectiva con respecto a las medidas y la proporcionalidad existente.

Figura 31. *Perfil izquierdo de la estructura*



Nota. Fuente propia

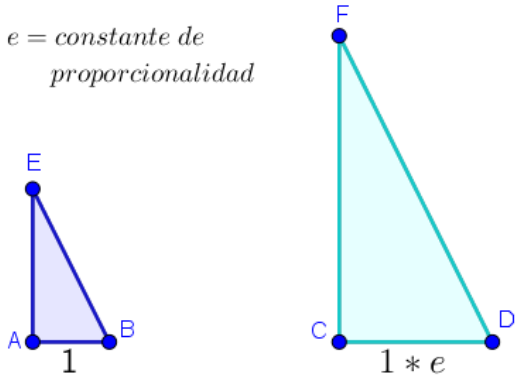
Figura 32. *Perfil derecho de la estructura*



Nota. Fuente propia

Como se ve en las imágenes anteriores, el proceso que se realiza ayuda a determinar las medidas que se deben tener en cuenta, claramente desde una escala(se toma como base la longitud de un lado de los cuadrados), la cual es ajustable dependiendo del tamaño que se quiera para el modelo, haciendo uso de la proporcionalidad. Pues es importante identificar que para trabajar en la construcción de plantillas o en este caso la vista de perfil, con escala, es importante realizar los esquemas con una longitud que se caracterice como unidad, para así poder determinar una constante de proporcionalidad que establece la forma de crecimiento que tendrá la vista de perfil que se quiere al hacer el modelo.

Figura 33. *Constante de proporcionalidad*

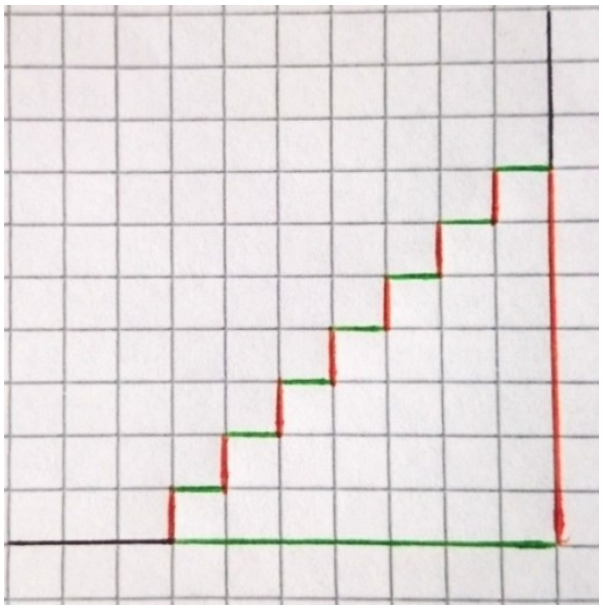


Nota. Fuente propia

Con este procedimiento se puede garantizar que la hoja al ser doblada a la mitad,(no es indispensable que esto ocurra en el medio de la hoja inicial, ya que el modelo puede ser ajustado según sea necesario, siempre garantizando que las medidas queden dentro del mismo plano) el modelo quede doblado sin inconvenientes, pues es importante que al usar la estrategia se modelen las distancias de manera tal que se ajusten a una realidad. Por ejemplo, en las imágenes, las líneas negras determinan el largo de la hoja o plano original y que esta estará doblada a la mitad en un ángulo de 90º, las líneas verdes y naranjas representan el perfil de la estructura por cada uno de sus lados, lo cual garantiza que la estructura que se genere podrá ser doblada totalmente sin mayor inconveniente, esto se da ya que se presenta una relación entre la parte horizontal y vertical que se corta, la relación se presentará más adelante. Un aspecto que se debe tener en cuenta es que este procedimiento puede presentar inconvenientes si se quiere ver algún otro elemento diferente a la proporcionalidad del modelo, pues al trabajar el perfil desde 2D, se dificulta observar los elementos de profundidad que tendría una estructura 3D desde su perfil, ya que no es clara la percepción de cómo se daría esto.

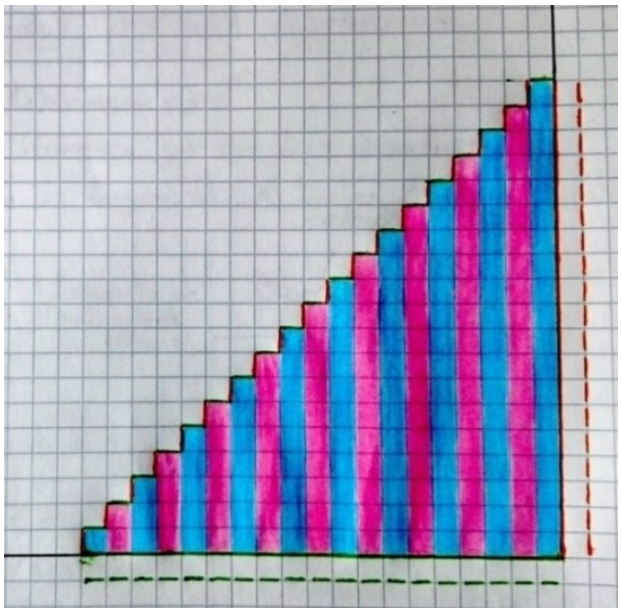
Otro elemento que se identifica, de manera más específica en lo anterior, es la relación que tienen las medidas horizontales con las verticales según el tipo de doblez que se realiza para el proceso de construcción de la plantilla, pues cuando se establece un doblez valle se genera un cambio en las medidas horizontales y no verticales, lo cual ocurre de la misma manera con el doblez montaña pero en sentido contrario, ya que se genera un cambio en las medidas verticales y no en las horizontales, condición que se puede complementar teniendo en cuenta que toda la estructura debe generar un paralelogramo en el cual el lado horizontal de la parte de abajo, debe ser igual a las partes horizontales de la estructura, juntas; esto mismo debe ocurrir con las partes verticales, como se puede ver en las **Figuras 34 y 35.**

Figura 34. *Forma de cambio en lo horizontal y vertical*



Nota. Fuente propia

Figura 35. *Paralelogramos y su relación con el plano original*



Nota. Fuente propia

Con los elementos anteriores, se procede a construir el segundo prototipo **Figura 36**, para el cual se toma como medida guía, el grosor de los techos escalonados, esto con el fin de aplicar el criterio de proporcionalidad para conocer las medidas a usar. En este proceso aún se tenía confusión con respecto a cómo generar las tiras de soporte para los techos de las casas. Pues teniendo en cuenta que la estructura (modelo) no representa la construcción de un sólido el desarrollo del pensamiento espacial para la ubicación en el plano cambia por lo cual se presentan confusiones para las tiras de soporte, obligando así a retroceder en el proceso de experimentación en el trabajo del pensamiento espacial, dado que nuevamente se recurre a la ubicación dimensional para luego recurrir a los aspectos longitudinales.

Figura 36. *Segundo prototipo de la casa*



Nota: Fuente propia

En la imagen se puede detallar que el proceso de creación de las tiras es confuso en un inicio (ya que se generaron cortes más largos de lo necesario y se hizo uso de cinta adhesiva), en el cual se cortan tiras con una longitud x con el fin de doblar por completo el modelo y así conocer la longitud necesaria de las mismas dado que con el procedimiento se generaran pliegues tipo valle. Al realizar esto, se procede a medir las longitudes horizontales y analizar el por qué de las mismas; con esto se reconoce que hay relación con lo anterior, en donde las partes horizontales pertenecientes a la estructura, desde la visión de perfil, deben ser equivalentes a su lado paralelo que se encuentra en la hoja cortada, con respecto a la longitud, esto también ocurre con las partes verticales. De forma paralela se observa que se tiene una serie de paralelogramos que sustentan los procesos realizados y la forma de la estructura, como se observa en la **Figura 35.**

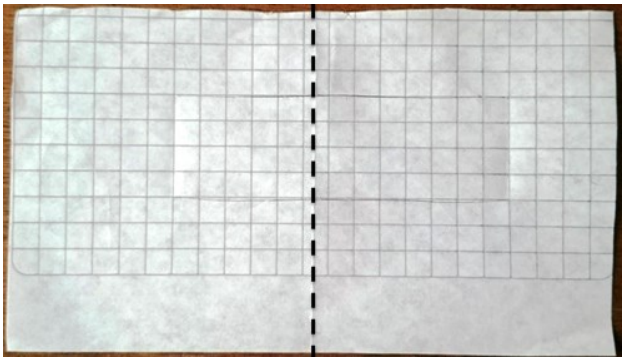
Ángulos en el kirigami

Habiendo identificado algunos elementos necesarios para la creación de un kirigami geométrico, desde cero, se quiere determinar la posibilidad de creación de estructuras iguales a

las realizadas en un inicio, pero haciendo que el ángulo de toda la hoja (del plano original) sea mayor o menor a 90º, pues todos los modelos siempre han usado el ángulo rectángulo.

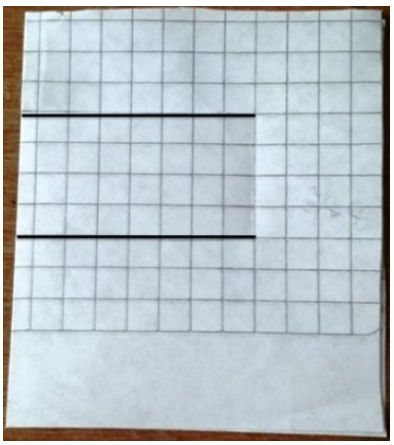
Para este proceso, se realiza un reconocimiento de manera manual, en donde se hace uso de trozos de papel con 7 cm de ancho y 11 cm de largo, las cuales son dobladas a la mitad por su parte larga y se realizan dos cortes paralelos con la misma longitud dentro de los mismos, comenzando en la mitad del trozo doblado hasta el pliegue realizado, esto con el fin de obtener una tira de papel con la cual experimentar. Con la tira de papel se realiza un doblez valle tanto en el inicio como al final de los cortes realizados y uno montaña en el medio de la tira esto con el fin de modelar una pequeña estructura similar a las ya trabajadas, con lo cual se puede corroborar que si la tira cuenta con partes iguales entre sus dobleces los ángulos de la tira serán de 90º al igual que la del trozo.

Figura 37. *Trozo de papel*



Nota: Fuente propia

Figura 38. *Trozo de papel doblado*



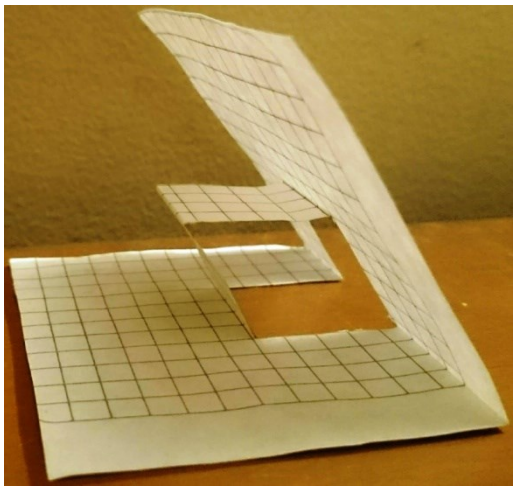
Nota: Fuente propia

Cuando el ángulo del trozo de papel es cambiado a uno menor de 90º, la tira de papel también pierde su ángulo y empieza a sobresalir dado que se inclina hacia delante siendo el ángulo interno del doblez montaña también menor a 90º. Con base en esto, en primera instancia se cree que la parte vertical de la tira de papel debe ser más corta, para que el ángulo del pliegue medio de la tira, sea de 90º, por lo cual se realizan modificaciones al momento de hacer las tiras. Ahora, se cambia de posición al doblez montaña que se realiza en la tira de papel para que las

dos partes de la tira no queden de la misma longitud, con esto se reconoce que es posible conseguir un ángulo de 90º, teniendo el trozo de papel un ángulo diferente al ángulo recto, pero la tira desde lo visual genera la percepción de una pendiente en su parte más larga, lo cual no ayudara a que una estructura quede igual, teniendo toda la hoja principal un ángulo mayor o menor que 90º.

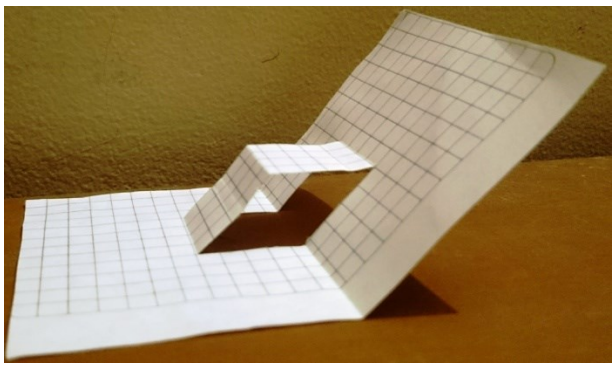
Otra estrategia que se usa, es hacer que las partes cortadas desde el inicio siguieran siendo paralelas pero sin tener la misma longitud en los dos lados del doblez inicial (de igual manera en el trozo de papel), pero se obtiene el mismo resultado, además de que al querer doblar por completo el trozo de papel esto no es posible, por lo cual esta forma de trabajo es desechada ya que no es del todo claro, por qué cuando se trabaja con un ángulo menor de 90º, tiende a sobrar en el largo de la tira y cuando el ángulo es mayor tiende a hacer falta para obtener un ángulo de 90º en el pliegue central, esto puede ser visto en las siguientes imágenes.

Figura 39. *Estructura con menos de 90º*



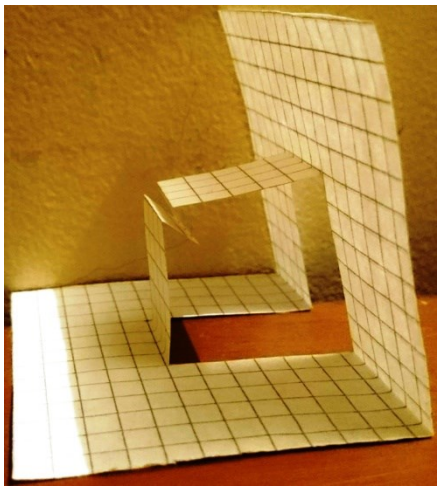
Nota: Fuente propia

Figura 40.*Estructura con más de 90º*



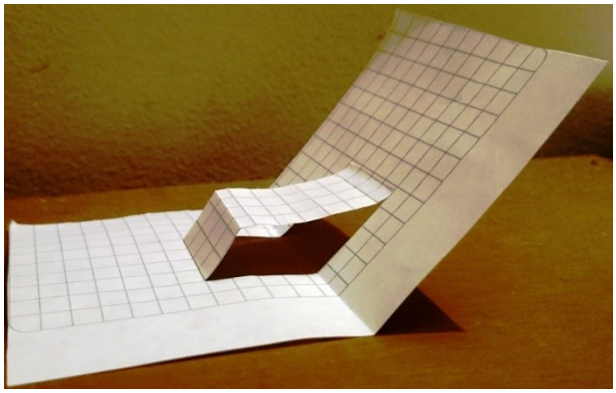
Nota: Fuente propia

Figura 41. *Tira con 90º en un ángulo menor a 90º*



Nota: Fuente propia

Figura 42.*Tira con 90º en un ángulo mayor 90º*



Nota: Fuente propia

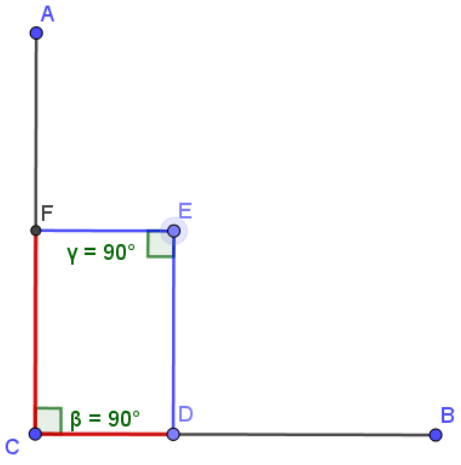
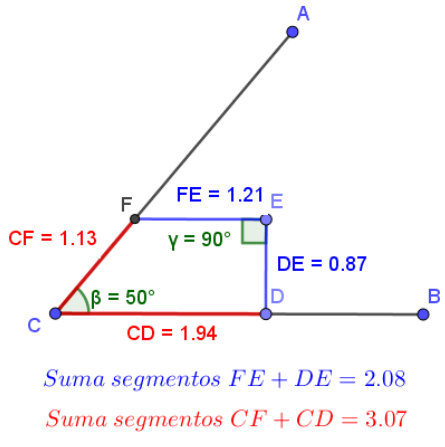
Teniendo en cuenta la dificultad que se presenta al momento de experimentar el caso de los ángulos de manera directa con los trozos de papel, se traslada el proceso a un espacio digital en el cual se usa el software geogebra, esto con el fin de obtener datos precisos y encontrar elementos que puedan justificar lo que ocurre al cambiar el ángulo de la hoja en la cual está realizada la estructura, pues cabe destacar que esta herramienta por su dinamismo ofrece una gran variedad de opciones que permitirán un mejor desarrollo y observación. Como aquello que se está observando es relacionado con los ángulos, se hará uso nuevamente del perfil para el desarrollo.

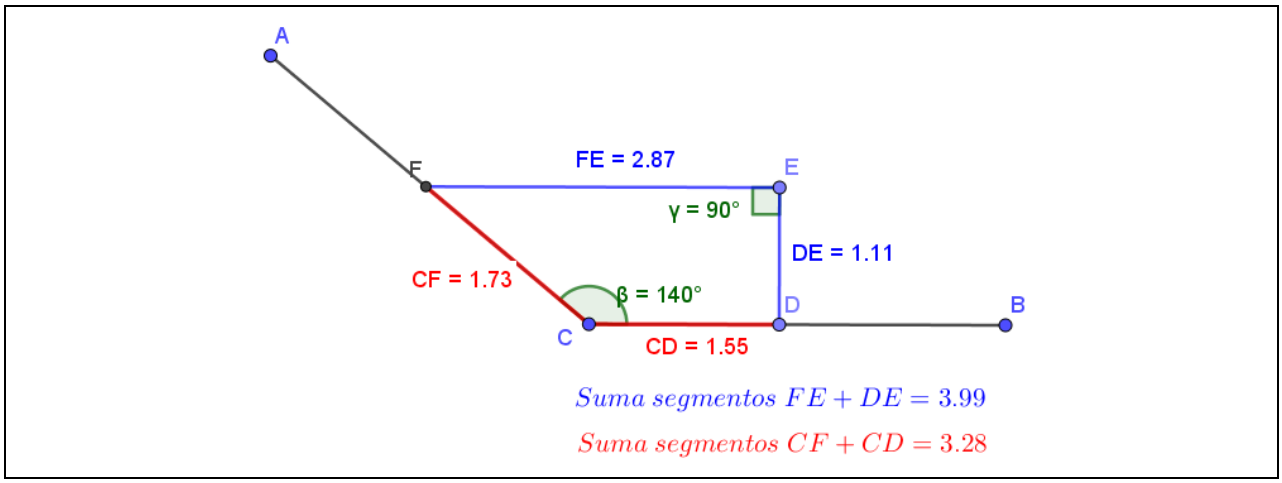
Se comienza con el caso, ya conocido, en el cual el trozo de papel tiene un ángulo de 90º y la tira de papel tiene 3 pliegues con uno de montaña en la mitad. Para el trabajo con el programa se señala aquello que se corta del trozo de papel (rojo), la tira que podría estar doblada (azul), el ángulo del trozo de papel y el ángulo de la tira que se realiza. Con este primer caso se puede observar que se genera un paralelogramo, de lo que se corta, junto con la forma de la tira. Luego de esto, se hace un cambio de 90º a 50º del trozo de papel y teniendo en cuenta que se está buscando que la tira de papel tenga un ángulo de 90º para que al momento de cambiar el ángulo

de la hoja, la estructura siga teniendo la misma forma, los segmentos azules se construyen con la herramienta de recta perpendicular con el fin de garantizar las condiciones necesarias.

Al experimentar con el programa se presenta la necesidad de conocer la longitud de cada segmento para encontrar relaciones existentes, en las condiciones anteriormente establecidas, pero se observa que la suma de segmentos azules y rojos no son iguales entre sí en ningún momento, como también que los segmentos azules siempre son menores a los rojos, por lo cual al poner esto en el contexto del trabajo con el papel, se reconoce que el proceso no es factible, ya que al ser los puntos F y D en donde se hacen pliegues tipo valle y al no tener las mismas longitudes los segmentos azules de los rojos, es imposible generar dicha situación ya que al existir dicha diferencia, la forma que se desea darle a la tira no se puede generar ya que sobraría una parte de la misma, dificultando así la creación de la estructura. Con respecto a cuándo se trabaja un ángulo mayor a 90° en el trozo de papel, se hace uso de un ángulo de 140°, con el que se puede identificar que la suma de segmentos se invierte, ya que siempre los azules son mayores a los rojos, situación que también se torna imposible de realizarse ya que de lo cortado no se puede obtener una tira mayor a lo realizado.

Tabla 4. *La relación entre las longitudes y los ángulos*



Nota: Fuente propia

Los procedimientos anteriores se realizan varias veces con diferentes ángulos obteniendo las mismas conclusiones, por lo cual se concluye que no es posible obtener un ángulo de 90º en el doblez de montaña de la tira de papel, cuando el trozo de papel tiene un ángulo mayor o menor a 90º ya que al no formarse un paralelogramo con la parte cortada y la parte doblada (la cual conserva un ángulo de 90º) esto exige que hayan diferencias longitudinales entre los segmentos de colores, llevando a que en el actuar con las hojas no sea posible de realizar.

De lo anteriormente trabajado se identifica que el trabajo con los dobleces se caracterizan desde la matemática como ángulos diedros teniendo en cuenta que estos están definidos "por los semiplanos de dos caras adyacentes y la arista común a ellas" (Redolfi, 2013, p.397) y esto ocurre al momento de generar un kirigami dado que el plano original al ser doblado está siendo dividido, generando así un ángulo diedro convexo principal y los dobleces (que se pueden tomar como aristas de los ángulos diedros) de la estructura también son ángulos diedros tanto convexos (doblez valle) como cóncavos(doblez montaña), lo cual sustenta los múltiples planos que se generan al realizar un modelo del kirigami geométrico, dado que cada tira de papel que tenga un pliegue representa dos planos diferentes.

Con respecto a por qué los ángulos de los modelos deben ser perpendiculares, se hará uso de algunos de los elementos trabajados con anterioridad. En principio, cabe recordar lo trabajado y experimentado con los ángulos, con lo cual se verificó la necesidad de que lo cortado

sea lo mismo que lo doblado para poder obtener un ángulo de 90º. Por otro lado se tiene lo observado con respecto a la visión de perfil que se tiene de los modelos, en los cuales se generan una serie de paralelogramos los cuales fundamentan la relación con el plano original. Estas dos cosas mencionadas se relacionan, ya que si se recuerda la definición de un paralelogramo, se tendrá que es una figura que está conformada por cuatro lados y sus lados opuestos son paralelos e iguales entre sí, llegando así a identificar porque la necesidad de que se tenga perpendicularidad en los ángulos.

¿Doblez redondo?

Al terminar el proceso con los ángulos, se quiere identificar la posibilidad de generar una estructura en la cual haya dobleces con aspecto redondo. Con respecto a esto, desde el inicio se reconoce que el proceso no es posible de tener en su totalidad generando el doblez en un solo paso, ya sea valle o montaña, a causa de la curvatura del mismo, ya que debe ser generado por partes, esto se puede relacionar con el problema de las tangencias, pues como se sabe una circunferencia esta creada por un número infinito de puntos y una tangente es una recta que pasa por un único punto a una curva, por lo cual es posible la creación de una circunferencia haciendo uso únicamente de rectas, que en este caso son tomadas como dobleces.

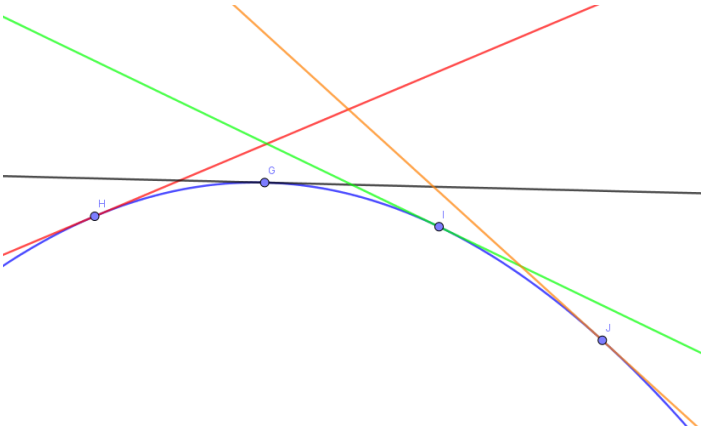
Para la experimentación se comenzó trabajando con una circunferencia completa y haciendo dobleces montaña por el borde de la misma, durante el proceso se identifica que el uso de la mano es mucho más importante que cuando se realiza un kirigami con pliegues rectos, pues el uso de los dedos tiene un movimiento mucho más coordinado y objetivo dado que se busca una forma mucho más compleja y también se observa que la hoja no puede ser doblada con un ángulo de 90º o cercano, pues al tratar de hacerlo la forma se pierde y el papel no está totalmente perpendicular al pliegue realizado.

Luego se pasó a trabajar con media circunferencia con lo cual se observo una situación similar, pues existe la posibilidad de generar el doblez de 90º pero haciendo uso de otros

pliegues que determinen la posición del material "sobrante" que no permite el doblez por completo, estas características se reconocieron de igual manera con un cuarto de la circunferencia. Al momento de trabajar con un octavo y un dieciseisavo de la misma, se observa que el proceso ya presenta muchas más posibilidades para generar un doblez cercano a una curva con un ángulo de 90º, pero esto no se presenta de manera exacta ya que si bien de manera visual, a causa del trazo realizado se percibe una curva, al realizar el doblez esto no queda así a causa de las problemáticas presentadas con anterioridad, por lo cual se concluye que no se conseguirá.

Durante el desarrollo de los intentos de dobleces redondos con ángulos de 90º, se identifica que hay un proceso relacionado con la coordinación visomanual mucho más detallado a lo trabajado anteriormente, pues la precisión presenta "grados de trabajo", dado que cuando el radio de la curva es grande la precisión de trabajo es mucho menor y exige un proceso mucho menos elaborado, situación contraria cuando la curva es mucho más cerrada "radio pequeño", pues la exigencia que se debe tener con el manejo de los dedos y la coordinación con el aspecto visual debe ser mucho más precisa con el fin de conseguir el doblez deseado, situación que se relaciona con el problema de las tangencias puesto que un doblez curvo en ningún momento puede realizarse en un solo paso y necesita de un proceso de doblez consecutivo para conseguir la curva deseada.

Figura 43. *Problema de las tangencias*



Nota. Fuente propia

Como se puede observar en la **Figura 43** una curva está compuesta de una gran cantidad de rectas tangentes, las cuales se asemejan al proceso que realizan los dedos al momento de intentar realizar el doblez curvo.

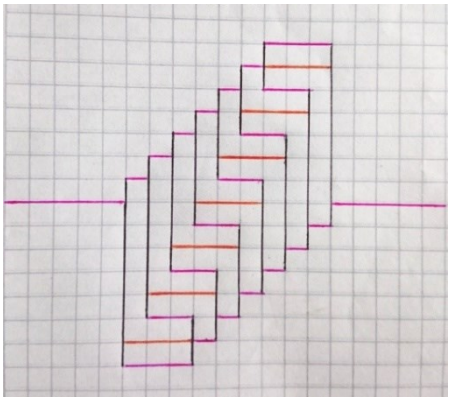
Si bien se determina que no es posible generar un doblez redondo con las condiciones necesarias, es importante tener en cuenta que es posible generar kirigami en donde se tienen cortes curvos y los dobleces no son paralelos entre sí, como lo es por ejemplo la **Figura18,** en la cual se puede observar que es posible generar una estructura diferente a los kirigami cotidianos y más realizados, ya que son tiras curvas secuenciadas las cuales tienen profundidad pero ya no cumplen la característica de generar un paralelogramo en su profundidad. De esta, se logra determinar algunos aspectos de la forma de construcción. Uno de ellos, es que las curvas que conforman una sola ola, representan 1/4 de una circunferencia, cada corte con un radio mayor al anterior (esto viéndolo de adentro hacia afuera) y de igual manera ocurre con la segunda ola, teniendo relación entre las dos partes de la estructura, ya que se tiene una correspondencia uno a uno de los cortes curvos, representando así 2/4 de una misma circunferencia. Otro elemento que se reconoce, es que ningún doblez es perpendicular al eje central, y el ángulo en que varían la inclinación de los dobleces nunca es recto o llano. Y otra situación que se observa es que las tiras de papel siempre mantienen la misma profundidad en toda su longitud y cada una de ellas va incrementando en esta dimensión. De esta estructura que no se realizo mayor profundidad

Identificación visual.

Teniendo en cuenta que el proceso que se ha trabajado desde el inicio, con la técnica del kirigami seleccionada, ha ayudado a la identificación de diferentes elementos para la construcción de la misma, se puede reconocer que esto está ligado al pensamiento espacial y su desarrollo, por lo cual se detalla el trabajo de conversión de lo 3D a lo 2D y viceversa, con el fin de detallar elementos y procesos a partir de la percepción y las medidas.

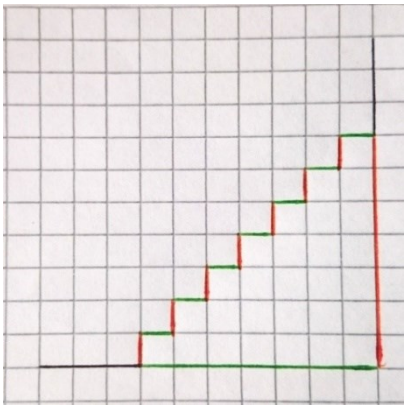
Se comienza buscando nuevamente estructuras de kirigami ya realizadas, pero no experimentadas con anterioridad, con la intención de hacer uso de imágenes como modelos para así pasarlos a un plano 2D haciendo uso únicamente de la percepción visual. Para esto se escoge un modelo con poca dificultad y para dar comienzo, se realizan dos croquis en hojas cuadriculadas con el fin de tener un proceso de referencia de las posibles longitudes a usar, uno de la vista frontal de la estructura y otro de la vista de perfil, en donde con el perfil se reconoce que no se tiene mayor aporte ya que no se logra percibir la profundidad de las partes de la estructura, por lo cual, este proceso solo se usa para determinar las longitudes de las tiras de papel necesarias para dar estabilidad al modelo. Con respecto a la vista frontal, con este proceso se reconoce los puntos y tipos de pliegue que se necesitan realizar (el color rosado indica doblez valle y naranja doblez montaña), como también las medidas que se deben usar teniendo en cuenta la escala en la que se realiza el modelo. Ya teniendo el croquis se establece el tamaño de la hoja que se usara para el modelo, con el fin de establecer las medidas que se usaran, determinando una escala y la ubicación del "doblez base" para la creación del plano teniendo en cuenta el croquis realizado. Durante el proceso, se realiza una especie de cuadricula para la ubicación de las partes de la estructura a lo cual se recomienda que al momento de ir a cortar se borre aquello que ya no pertenece a la estructura como tal, con el fin de evitar errores y dañar la misma.

Figura 44. *Croquis frontal*



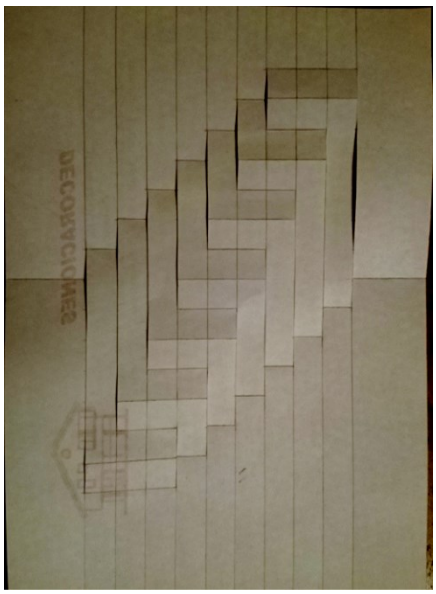
Nota: Fuente propia

Figura 45. *Croquis perfil*



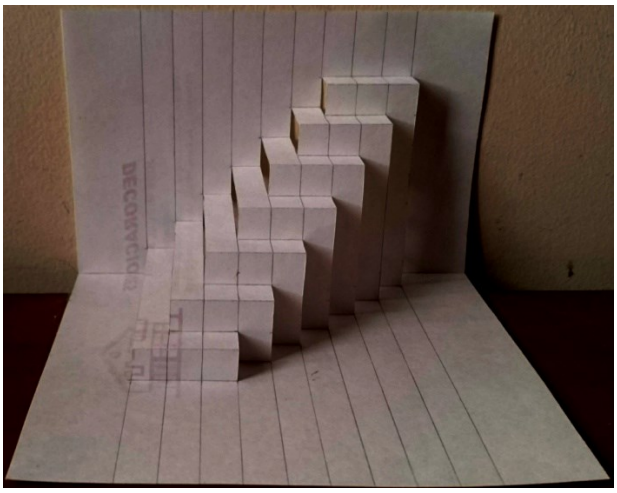
Nota: Fuente propia

Figura 46. *Plano*



Nota: Fuente propia

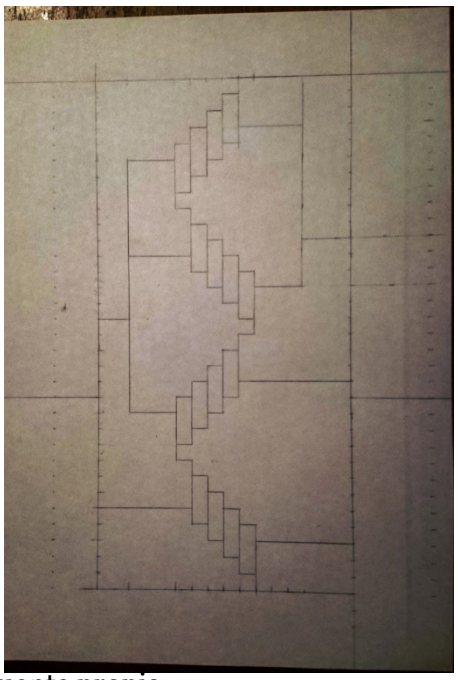
Figura 47. *Modelo*



Nota: Fuente propia

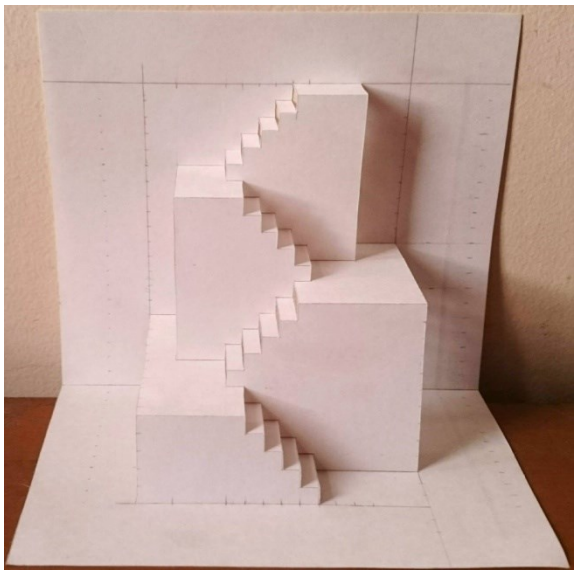
Al terminar la estructura se determina que el proceso no tuvo mayores inconvenientes, por lo tanto, se quiere hacer uso de una nueva estructura con mayor dificultad, con el fin de observar detalles más profundos y necesarios para la construcción de cualquier kirigami.

Figura 48. *Plano*



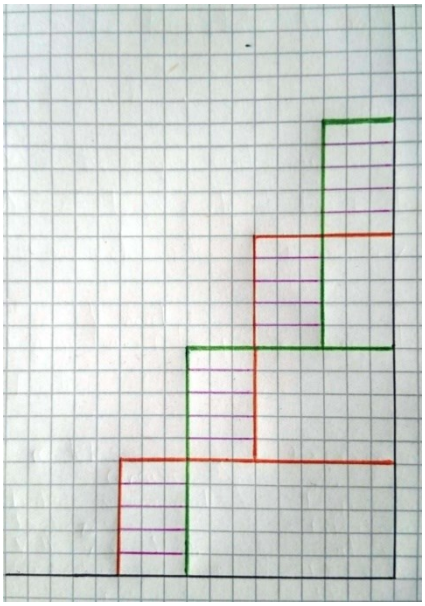
Nota: Fuente propia

Figura 49. *Modelo*



Nota: Fuente propia

Figura 50. *Vista de perfil*



Nota. Fuente propia

Para el segundo proceso se tiene un poco más de dificultad ya que la vista de perfil presenta inconvenientes para identificar la profundidad, por lo cual, para determinar el largo de las tiras de soporte, en este caso los descansos, se hace uso del ancho que se dispuso para las escaleras. La imagen de perfil, se usa únicamente para establecer los paralelogramos que se generan y el espacio necesario para la realización de los mismos, logrando identificar la posición del doblez central en la plantilla de las escaleras, como se puede ver en la **Figura 50.** La mayor dificultad se da, al momento de realizar los escalones en el plano, pues era confuso determinar aquello que se dobla con lo que se corta, pues los escalones presentan un hueco en su parte vertical y la visión superior del modelo presenta la misma situación que la de perfil.

Cabe destacar que para el proceso de 3D a 2D es importante determinar nuevamente una unidad de medida con el fin de que el paso de lo visual a lo escrito (3D a una planilla) no genere un mayor conflicto y la estructura pueda ser adaptada al espacio que se tenga. De igual manera, haciendo uso de lo trabajado de 2D a lo 3D, la construcción de la plantilla en ocasiones no presenta mayor inconveniente, dado que aquello que presenta un doblez montaña, el cual es el más difícil de percibir para la creación del plano, se toma como algo plano a lo cual debe adicionarse una línea punteada para señalar el doblez necesario. Otra dificultad que se puede presentar es el reconocer aquellos espacios que están unidos al plano original, dado que en ocasiones está acompañado de otras partes de la estructura complicando la percepción del espacio.

¿Qué podemos deducir?

Del proceso realizado, se determina que el kirigami es un arte que presenta una amplia gama de trabajo, pues además de los diferentes modelos que se usaron, las **Figuras 18 y 20**, demuestran una posibilidad de trabajo muy variada con respecto a las estructuras que se pueden llegar a obtener, por lo cual esta investigación aún queda abierta a una gran cantidad desarrollos. De manera mucho más específica, se puede determinar diferentes aspectos:

- La matematización de Freudenthal, fue un elemento clave para el desarrollo del trabajo, pues fue lo que guio la metodología de trabajo e investigación, demostrando así que, la identificación de elementos matemáticos por medio de la experimentación hasta la concreción de los objetos presentes, es un proceso que necesita sistematización para orientar el razonamiento inductivo y un proceso que permite la identificación de la existencia de las matemáticas en aspectos en los cuales se cree de la inexistencia de las mismas.
- El kirigami si bien presenta un trabajo espacial muy evidente, en él, existen elementos de la matemática que no son perceptibles a primera vista, permitiendo que este pertenezca al estudio de la etnomatemática, pues se demuestra la existencia de las matemáticas en el trabajo artístico, valorizando la práctica y no dejándolo como algo únicamente de la percepción, dado que se describen y entienden las ideas posiblemente usadas al momento de generar el kirigami, ampliando el conocimiento del mismo y presentándolo como una posibilidad de trabajo en la educación matemática, ya que puede ser una forma de reflexión de la realidad, sobre la existencia de la matemática en ámbitos de la vida diaria, en los cuales no se percibe.
- Este arte presenta una gran oportunidad de trabajo visual y manual, con respecto al desarrollo del pensamiento espacial, pues los procesos de conversión, ya sea de 2D a 3D o viceversa, brinda experiencias y retos enriquecedores para su comprensión.

- Con respecto a la geometría que el kirigami pop-up geometric trabaja, no fue posible de ser reconocida, de esta no es posible decir que no se tenga nada al respecto, ya que en otras se encuentran elementos que se pueden relacionar, pero como tal no está teorizada y fundamentada, evidenciando que, si bien la matemática es una de las ciencias que presenta un gran universo de conocimientos, aún falta por explorar en ella.
- Durante la investigación no se lograron detallar reglas inquebrantables para la realización de un kirigami, en la técnica escogida, pero si algunas limitaciones dependiendo de los resultados que se esperen, presentándose este arte como un espacio abierto a una gran cantidad de posibilidades de trabajo, claramente, aun no es posible establecer que esto siempre vaya a ser así.
- Con respecto a los niveles de dificultad que se lograron encontrar, estos pueden ser ampliados en algún momento, dado que se generaron con base en la identificación de la técnica del kirigami, pero no son los únicos que se podrían llegar a encontrar. De estos niveles, cabe resaltar que hace uso de destrezas tanto viso manuales como espaciales, ya que si bien se tiene una plantilla, generar el modelo acarrea una gran cantidad de situaciones y elementos que permiten que la forma deseada sea adquirida.
- Durante el desarrollo del trabajo, es posible observar que el objetivo general del mismo, es respondido, pues de la técnica del kirigami que se escogió, se determina la existencia de, procesos relacionados con el pensamiento espacial desde lo 2D a lo 3D y viceversa, transformaciones geométricas, proporcionalidad y operaciones, como también la imposibilidad de ciertas acciones, ya sea por la relación entre ángulos y la longitud de posibles tiras a cortar o por la inviabilidad de generar dobleces redondos que cumplan con los elementos básicos de la técnica. Por lo cual, así sean elementos

posibles de realizarse bajo la técnica o no, siguen siendo objetos matemáticos que están presentes en este kirigami.

Bibliografía

Albanese, V., y Perales, F. (2014). Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(3), 261-288.

Alsina, C., Fortuny, J., y Burgués, C. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis, SA.

Castillo, J. (2016). Kirigami y habilidades creativas en estudiantes de las facultades de educación [Tesis de magíster]. Universidad Nacional del centro del Perú escuela de posgrado, Huancayo. Recuperado de http://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/UNCP/4268/Castillo%20cordova.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fiol, M., y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Madrid: Síntesis, SA.

Godino, J., y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Granillo, Y., y Macias, M. (2013). Coordinación óculo manual en el desarrollo de destrezas. [Tesis de pregrado]. Universidad estatal de milagro, unidad académica de educación semipresencial y a distancia. Ecuador. Recuperado de http://repositorio.unemi.edu.ec/bitstream/123456789/1897/1/Coordinaci%C3%B3n%20%C3%B3culo%20manual%20en%20el%20desarrollo%20de%20destrezas.pdf

Ministerio de educación nacional. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá. Colombia.

Ministerio de educación nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá. Colombia.

Puig, L. (Ed). (1994). Hans Freudenthal. Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México: Ernesto Sánchez.

Redolfi, Ana María (2013). *La geometría espacial en el aula*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 395-402). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

SunderOri (31 de enero de 2014). *How to make a wave pop up card. Free template-(kirigami 3D) Ocean Wave Greeting card!* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=raHXz56UCi4&t=99s

Verástegui, T. (2009). *De la geometría plana a la geometría del espacio*. En Gaita, Cecilia (Ed.), IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 171-175). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.