HACIA EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

WILMER DÍAZ MARTÍNEZ
20092167060



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2018

HACIA EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

WILMER DÍAZ MARTÍNEZ
20092167060

PROYECTO DE GRADO

DIRECTOR: CARLOS JULIO ARRIETA

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2018

Introducción

El enfoque del presente trabajo es el estudio de los modelos hiperbólicos bidimensionales, es decir, la geometría no euclidiana conocida como **geometría hiperbólica**. Inicialmente nos enfocaremos en conocer la estructura matemática que sustenta la teoría de dichos modelos, para esto, presentaremos las variedades diferenciables como objetos inmersos en nuestro estudio.

En la segunda parte, se observará como a partir de las aplicaciones (funciones) definidas sobre las variedades, obtendremos una forma de *medir* los elementos implicados en dichos objetos, es decir, hablaremos de las métricas definidas sobre variedades diferenciables, para obtener métricas riemannianas ya sea sobre espacios euclídeos o sobre los modelos en cuestión, de donde surgirá la noción de variedad riemanniana.

En la tercera parte de este trabajo buscamos que el lector pueda encontrar una breve descripción de la historia de la geometría hiperbólica y distinga los diferentes modelos hiperbólicos,sus elementos, relaciones y métricas asociadas a cada uno de ellos.

Finalmente, nos enfocaremos en las transformaciones de Möbius que son una herramienta importante para establecer las isometrías en los modelos hiperbólicos más relevantes en nuestro estudio que son el semiplano superior y el disco unitario, para construir a partir de allí las transformaciones que son objetivo principal en el presente trabajo.

Objetivo General

- ♣ Establecer la existencia de transformaciones definidas en los modelos bidimensionales: Semiplano superior de Poincaré y el modelo del disco unitario de klein, de tal manera que se mantengan invariantes.

Objetivos específicos

- ♠ Reconocer las variedades riemannianas como los objetos geométricos fundamentales para el estudio de la geometría hiperbólica.

- ♠ Definir las métricas riemannianas sobre cada uno de los modelos hiperbólicos bidimensionales y exponer sus elementos.

- ♠ Exponer el principio simétrico como un hecho previo fundamental para definir las transformaciones de Möbius en los modelos hiperbólicos bidimensionales.

Planteamiento del problema

¿Cuáles son las transformaciones de Möbius que envían a los modelos H^2 y D^2 en sí mismos?

Delimitación del problema

Nuestro enfoque está dado para modelos hiperbólicos bidimensionales, que tienen un comportamiento similar en forma general a las variedades riemannianas, de forma más precisa, a modelos similares a las superficies riemannianas.

Índice general

1. Preliminares **1**
- 1.1. Introducción . . . 1
- 1.2. Variedades diferenciables . . . 1
- 1.3. Ejemplos de variedades diferenciables . . . 3
- 1.4. Funciones diferenciables entre variedades . . . 3
- 1.5. Espacio tangente y cotangente . . . 6

2. Métricas riemannianas **9**
- 2.1. Introducción . . . 9
- 2.2. Definición y ejemplos . . . 10
- 2.3. Otras métricas para R^n . . . 11
- 2.4. Isometrías . . . 13

3. Geometría hiperbólica **15**
- 3.1. Introducción histórica . . . 15
- 3.2. Modelos del plano hiperbólico . . . 17
- 3.3. Modelo del semiplano superior . . . 17
- 3.4. Modelo del disco unitario . . . 18
- 3.5. Modelo de Lorentz . . . 19

4. Transformaciones de Möbius **21**
- 4.1. Introducción . . . 21
- 4.2. Transformaciones afínes . . . 21
- 4.3. La proyección estereográfica . . . 23
- 4.4. Función Inversión . . . 26
- 4.5. Transformaciones de Möbius . . . 28
- 4.6. La razón doble o razón cruzada . . . 29
- 4.7. El principio simétrico . . . 31
- 4.8. Funciones de D y $\mathbb{H}$ . . . 32

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

Este capítulo expondrá las nociones que conducen a la obtención de ideas para la generalización del cálculo, es decir, el lector tendrá a su disposición los conceptos básicos del cálculo en superfices más generales como los son las variedades diferenciables.

1.2. Variedades diferenciables

Definición 1.2.1. *Sea $U \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de valor real. Se dice que f es diferenciable de clase C^k sobre U,si existen sus derivadas parciales de orden $1, 2, ..., k$ y son funciones continuas en U.*

En particular, f es de clase C^0 si f es continua, f es de clase C^1 si existen y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial r_i}$ (siendo $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima proyección canónica (i=1,2,...,n))

Una aplicación $F : U \to \mathbb{R}^n$, se dice que es diferenciable de clase C^k si cada una de sus funciones componentes, $F_i = r_i \circ F, i = 1, 2, ..., n$ es de clase C^k. Se dice que F es de clase C^∞ si es de clase C^k, para todo $k \geq 0$.

Definición 1.2.2. *Una variedad topológica n-dimensional M es un espacio topológico Hausdorff, 2-contable y localmente euclídeo.*

Definición 1.2.3. *Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo (lo cual brinda que U sea localmente euclídeo) siendo U un abierto conexo, φ recibe el nombre de homeomorfismo coordenado; U abierto coordenado; al par (U, φ) se le denomina sistema cooordenado o carta; cada aplicación continua $x_i = r_i \circ \varphi$ se denomina función coordenada; y la n-upla $(x_1, ..., x_n)$ se dice que es el sistema de funciones coordenadas asociada a la carta (U, φ).*

Un conjunto de cartas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\alpha \in A\}$ se denomina un atlas si verifica que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$$

Definición 1.2.4. *Una estructura diferenciable de clase $C^k(1 \leq K \leq \infty)$ sobre una variedad topológica M de dimensión n es una colección*

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\alpha \in A\}$$

de sistemas de coordenadas que verifican:

i) $\mathcal{U}$ es atlas de M

ii) $\forall_{\alpha,\beta} \in A \times A$, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap (U_\beta)$$

es diferenciable de clase C^k.

iii) $\mathcal{U}$ es maximal con respecto a i) y ii), es decir, si (U, φ) es un sistema de coordenadas tal que $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son de clase C^k para todo $\alpha \in A$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$.

Diremos de ahora en adelante que una **variedad diferenciable** de clase C^k y de dimensión n es una pareja $(M,\mathcal{U})$.

Además, dos atlas diferenciables sobre M son equivalentes si su unión es también un atlas diferenciable sobre M.

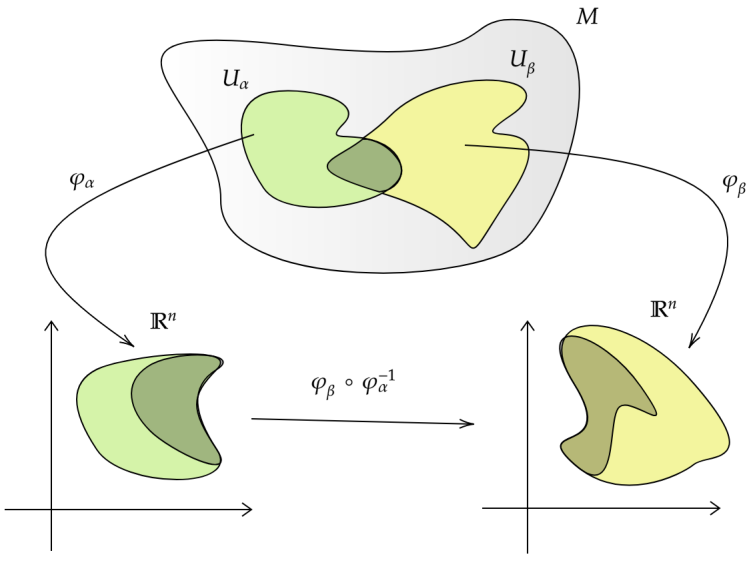


Figura 1.1: Variedad diferenciable

1.3. Ejemplos de variedades diferenciables

Ejemplo 1.3.1. *$\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n, tomando como atlas $\mathcal{U}$ a una única carta $U = \mathbb{R}^n$ y el homomorfismo coordenado dado por la identidad en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 1.3.2. *Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y solo si V es una variedad de dimensión n contenida en $\mathbb{R}^n$*

Ejemplo 1.3.3. *La esfera $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1\right\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 2, con:*

$$U_{kj} = \left\{x \in S^2 | (-1)^j x_k > 0\right\} \, (j = 0, 1; k = 1, 2, 3)$$

como abiertos coordenados y sus homeomorfismos correspondientes dados por:

$$\varphi_{kj} : U_{kj} \to B_0^n(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

donde $\varphi_{kj}(x) = (x_1, ..., x_{k-1}, ..., x_{k+1}, ..., x_{n+1})$.

Ejemplo 1.3.4. *Si M es una variedad de dimensión n y $V \subset M$ abierto con $V \neq \emptyset$, entonces V es una variedad de dimensión n. En efecto,*

Sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlas para M y $\mathcal{A} = \{\alpha \in A | V_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sean $V_\alpha = \bar{V}_\alpha \cap V$, $\bar{U}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\bar{V}_\alpha)$ y $\phi_\alpha = \varphi|_{\bar{U}_\alpha} : \bar{U}_\alpha \to \bar{V}_\alpha$.

Entonces $(\phi_\alpha, \bar{U}_\alpha)$ es un atlas para V.

1.4. Funciones diferenciables entre variedades

Al determinar y ejemplificar el concepto y propiedades de las variedades diferenciables, mostraremos a continuación las relaciones establecidas a partir de funciones definidas sobre una variedad o funciones definidas entre variedades diferenciables y así obtener hechos destacados que usaremos implícitamente en estudios posteriores.

Definición 1.4.1. *Sea M una variedad diferenciable. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable (de clase C^∞) si para toda carta (U, φ), $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable de clase C^∞*

Nota 1.4.1. *La diferenciabilidad de f depende de la estructura diferenciable de M y no de la elección de las cartas; pues si (U, φ) y (V, ϕ) son dos cartas de M con $U \cap V = \emptyset$, $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable sii $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable. Esto es consecuencia del hecho de ser*

$$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \varphi^{-1})$$

y de que $\phi \circ \varphi^{-1}$ es siempre diferenciable por la propia definción de variedad diferenciable.

Notaremos por $\mathcal{F}(M)$ al conjunto de todas las aplicaciones diferenciables sobre M, en particular si se cumplen las condiciones de la definición anterior para un entorno del punto $x \in M$ diremos que $\mathcal{F}(x)$ es el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables en el entorno de x.

Definición 1.4.2. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Una aplicación $F : M_1 \to M_2$ se dice que es diferenciable en un punto x de M si dado un sistema coordenado $\varphi_1 : V \subset \mathbb{R}^{n_2} \to M_2$ en $F(p)$, existe un sistema coordenado $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^{n_1} \to M_1$ en p tal que $F(\varphi_2(U) \subset \varphi_1(V)$ y la aplicación:*

$$\varphi_1^{-1} \circ F \circ \varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$$

es diferenciable en $\varphi_2(p)$. La aplicación es diferenciable en un abierto de M si es diferenciable en todos los puntos de este abierto.

Definición 1.4.3. *Dos variedades diferenciables M_1 y M_2 se dice que son difeomorfas si existe una aplicación diferenciable $F : M_1 \to M_2$ que admite una función inversa $F^{-1} : M_2 \to M_1$ diferenciable. A F se le llamará difeomorfismo.*

Ejemplo 1.4.1. *Consideremos $M_1 = (\mathbb{R}, \mathrm{U}_1)$ donde U_1 consta de la carta identidad y $M_2 = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_\in)$, cuyo atlas está formado por $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x^3$.*
Tomando $F : M_1 \to M_2$ dada por $F(x) = x^{1/3}$, es un difeomorfismo.Sin embargo, $G : M_1 \to M_2$ dada por $G(x) = x$, es diferenciable pero su inversa no lo es.

Ejemplo 1.4.2. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$f(x, y, z) = (x \cos z - y \sin z, x \sin z + y \cos z, z)$$

Probaremos que:

- *a . $f|_{S^2}$ toma valores en S^2*
- *b . La aplicación inducida de S^2 en sí misma es un difeomorfismo.*

a. Sea f_1, f_2 y f_3 las funciones coordenadas de la aplicación f. Entonces $f(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ sii $\|f(x, y, z)^2\| = f_1(x, y, z)^2 + f_2(x, y, z)^2 + f_3(x, y, z)^2 = 1$, en efecto consideremos un punto (x, y, z) en S^2:

$$\begin{aligned} \|f(x, y, z)\|^2 &= (x \cos z - y \sin z)^2 + (x \sin z + y \cos z)^2 + z^2 \\ &= x^2 \cos^2 z + x^2 \sin^2 z + y^2 \sin^2 z + y^2 \cos^2 z + z^2 \\ &= x^2(\cos^2 z + \sin^2 z) + y^2(\cos^2 z + \sin^2 z) + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

b. Primero veremos que f es biyectiva. Supongamos que $f(x,y,z) = f(x,y,z)$. Entonces $z = z'$ y

$$x\cos z - y\sin z = x'\cos z - y'\sin z$$
$$x\sin z - y\cos z = x'\sin z - y'\cos z$$

De donde:

$$(x - x')\cos z - (y - y')\sin z = 0 \tag{1.1}$$

de la primera igualdad y con cálculos análogos se obtiene:

$$(x - x')\sin z + (y - y')\cos z = 0 \tag{1.2}$$

Sacando el determinante a los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene que es igual a 1, por tanto, la única solución es la solución trivial y, así $x = x'$ e $y = y'$.
Para comprobar que f es sobreyectiva, sea $(a,b,c) \in S^2$; debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x\cos z - y\sin z &= a \\ x\sin z - y\cos z &= b \\ z &= c \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x\cos c - y\sin c &= a \\ x\sin c - y\cos c &= b \end{aligned}$$

Usando la regla de Cramer tenemos que $x = a\cos c + b\sin c$ e $y = b\cos c - a\sin x$.
Finalmente, veamos que f es diferenciable.

Sea $p_0 \in S^2$, entonces f es diferenciable en p_0 si $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p_0)$, donde φ y ϕ son cartas en S^2 alrededor de p_0 y $f(p_0)$ respectivamente. Supongamos que $p_0 = (x,y,z)$ con $z > 0$. Podemos considerar la carta de los hemisferios (U_{30}, φ_{30}) tanto para el punto p_0 como para el punto $f(p_0)$. Entonces la representante local de f respecto de φ_{30} está dada por $\varphi_{30} \circ f \circ \varphi^{-1}(x,y)$ y cuyas componenetes son:

$$\left(x\cos\sqrt{1-x^2-y^2} - y\sin\sqrt{1-x^2-y^2}), x\sin\sqrt{1-x^2-y^2} + y\cos\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

que es diferenciable en su dominio. La demostración para f^{-1} es similar. Por tanto f es un difeomorfismo.

1.5. Espacio tangente y cotangente

Uno de los elementos más usados en la geometría son los vectores,puesto que me brinda información de lo que sucede alrededor de los puntos sobre un objeto geométrico ya sea superificie variedad, por tanto es importante caracterizarlos y mostrarlos dentro de su ambiente. Para ello definiremos a continuación los espacios vectoriales a usar dentro del análisis de las variedades diferenciables y en particular dentro de nuestro enfoque que es la geometría hiperbólica.

Definición 1.5.1. *Un vector tangente a una variedad diferenciable M de dimensión n en un punto $x \in M$, es una aplicación $v : \mathcal{F}(x) \to \mathbb{R}$ tal que fijada una carta coordenada (U, φ) en M con $x \in U$, existe una n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de números reales tales que, para toda $f \in \mathcal{F}$:*

$$vf = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \restriction_{\varphi(x)} .$$

La anterior definición se preserva sin importar la elección de la carta, es decir, podemos verificar que para (V, ϕ) con $x \in V$, existe una n-upla $(b_1, ..., b_n)$ de números reales tales que, para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$vf = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_i} \restriction_{\phi(x)} .$$

En efecto, supongamos que v tiene a $(a_1, ..., a_n)$ como n-upla asociada a la carta (U, φ), entonces:

$$\begin{aligned}
vf = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \restriction_{\varphi(x)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \restriction_{\varphi(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\phi(x)} \frac{\partial(r_i \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\phi(x)} J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1}) \restriction_{\varphi(x)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1}) \restriction_{\varphi(x)} \right) \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\phi(x)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_i \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

donde $J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1})$ es la matriz jacobiana de la aplicación $\phi \circ \varphi^{-1}$. Por tanto

$$vf = \sum_{j=1}^{n} b_i \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \restriction_{\phi(x)}$$

donde

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1}) \restriction_{\phi(x)}$$

Lo anterior nos garantiza que una aplicación $v : \mathcal{F}(x) \to \mathbb{R}$ es un vector tangente en $x \in M$ si se verifica la condición para una sola carta (U, φ), puesto que para las otras se dará de manera automática. De ahora en adelante, el espacio formado por todos los vectores tangentes en un punto $x \in M$, lo notaremos por T_xM.

Proposición 1.5.1. *Sea M una variedad de dimensión n. El espacio tangente T_xM en un punto x es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ de dimensión n. Si (U, φ) es una carta coordenada con $x \in U$ y $(x_1, ..., x_n)$ sus funciones coordenadas, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ donde $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})$ constituye una base de T_xM, denominada base canónica asociada a la carta (U, φ).*

Ejemplo 1.5.1. *Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$ con*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$$

definido por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ con función de coordenadas $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$ y $z(u, v) = u^2 + v^2$.

A partir de lo anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 2u) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Es claro que $p = (1, 1, 2) \in M$ y que $p = \varphi(q)$ con $q = (1, 1)$, y por tanto

$$\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)\right\} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$$

es una base de T_pM y el espacio tangente viene dado por: $T_pM = \{(x, y, z) | 2x + 2y - z = 0\}$.

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n, respectivamente y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $x \in M$, consideremos su punto imagen $F(x) \in N$, y los espacios tangentes T_xMy $T_{F(x)}N$. Para $v \in T_xM$, definimos:

$$F_*(v) : \mathcal{F}(F(x)) \to \mathbb{R}$$

como la aplicación dada por:

$$[F_*(v)] = v(h \circ F) \quad , \quad \forall h \in \mathcal{F}(F(x)).$$

La anterior aplicación está bien definida, puesto que $h \circ F \in \mathcal{F}(x)$, al ser h y F diferenciables.

Proposición 1.5.2. *Para cada $v \in T_xM, F_*(v) \in T_{F(x)}M$ y la aplicación*

$$F_* : T_x(M) \to T_{F(x)}N$$

es lineal.

A la aplicación anterior la llamaremos **aplicación lineal tangente** de F.

Definición 1.5.2. *Denominaremos **espacio cotangente** en el punto x de la variedad diferenciable M al espacio vectorial real $T_x^*(M)$ dual del espacio tangente $T_x(M)$ en x.*

Un elemento $\omega \in T_x^*(M)$ es, por definición, una aplicación lineal $\omega : T_x^*(M) \to \mathbb{R}$, al cual podemos llamarlo vector cotangente o 1-forma en el punto x.

Si (U, φ) es una carta local con $x \in U$, la base canónica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ de T_xM nos permite definir por dualidad una base natural en el espacio cotangente $T_x^*(M)$ cuyos elementos los representaremos por $\{dx_1, ..., dx_n\}$ y que están definidos por $dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \delta_j^i$.

A partir de estas definiciones, podemos ver como la **aplicación lineal tangente** de una función real se puede considerar como un elemento del espacio cotangente así:

Sea $f \in \mathcal{F}(M)$ y $x \in M$, entonces f induce, de forma natural, la aplicación lineal

$$f_* : T_x(M) \to T_{f(x)}(\mathbb{R})$$

y, se considera el isomorfismo

$$\phi_{f(x)} : T_{f(x)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

dada por $\lambda \frac{d}{dr} \to \lambda$ siendo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función coordenada en $\mathbb{R}$. Obtenemos la aplicación

$$df = \phi_{f(x)} \circ f_* : T_x(M) \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$df(v) = v(f) \quad \forall v \in T_xM$$

que denominaremos **diferencial** de la función f en $x \in M$.

Nota 1.5.1. *Si $M = \mathbb{R}^n$, df es la diferencial ordinaria.*

Capítulo 2

Métricas riemannianas

2.1. Introducción

Ya establecido el grupo de objetos en estudio (en este caso, variedades diferenciables), las funciones definidas en ellas y algunas herramientas matemáticas extra, debemos ingresar al campo de la medida. Y es que todo empieza a tomar sentido pues la geometría se enfoca en mantener información de cualquier punto dentro del objeto, su comportamiento y las relaciones respecto a los otros puntos.

Por tanto en este capítulo, nos centraremos en la forma de *medir* distancias, ángulos , etc , dentro de una variedad diferenciable. Para terminar de hacernos la idea del enfoque de este capítulo, podríamos decir que las métricas riemannianas me brindan resultados *generalizados* similares a los resultados que otorga el producto interno en espacios vectoriales.

Para definir lo que es la métrica riemanniana recordemos lo siguiente:

Una función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\to a = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

en donde V es un espacio vectorial y $\mathbb{K}$ es el cuerpo definido sobre dicho espacio vectorial, se dice que es un producto interno si cumple las siguientes condiciones:

- *Sesquilinealidad* $\langle ax + by, z \rangle = a(x, z) + b(y, z)$ y $\langle ax + by, z \rangle = \overline{a}(x, y) + \overline{b}(x, z)$
- *Hermiticidad* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- *Definida positiva* $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$.

Es válido aclarar que si el cuerpo tiene parte imaginaria nula, como el caso de los $\mathbb{R}^n$, la propiedad de ser sesquilineal se coonvierte en linealidad y el ser hermítica se convierte en simétrica.

2.2. Definición y ejemplos

Definición 2.2.1. *Una **métrica riemanniana** sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia la cual asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle , \rangle_p$ (esto es una forma simétrica,bilineal definida positiva) sobre el espacio tangente T_pM, la cual varía diferenciablemente en el siguiente sentido: si $\varphi \in \mathbb{R}^n \to M$ es un sistema coordenado alrededor de p con $\varphi(x_1, ...x_n) = q \in \varphi(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\varphi_q(0, ..., 1, ..., 0)$, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ es una función diferenciable sobre U.*

*De esta manera diremos que una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable con una métrica riemanniana sobre ella.*

Por otra parte, si hacemos un análisis similar a como se escribe un producto interno en los espacios vectoriales, podemos expresar la métrica riemanniana de manera local como:

Tomemos T_pM el espacio vectorial y $\mathcal{B}$ la base asociada de vectores coordenados

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \restriction_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \restriction_p \right\}$$

se tiene que:

$$\langle v, w \rangle = \begin{bmatrix} v_1, & \dots & , v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} > & \dots, & < \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_n} > \\ \vdots & \ddots & , \vdots \\ < \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} > & \dots & < \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

donde $(v_1, \dots, v_n)$ y $(w_1, \dots, w_n)$ son las coordenadas de v y w en la base de vectores coordenados.

Si hacemos

$$g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle (p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Obtenemos que:

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \sum_j g_{ij} v_i w_j$$

y como en la base coordenada $\mathrm{dx_i}(v) = v_i, \mathrm{dx_j}(w) = w_i$, se puede escribir:

$$\langle \ , \ \rangle = \sum_i \sum_j g_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

Obteniendo así la métrica riemanniana que suele notarse como g y en donde g_{ij} se les conoce como coeficientes de la métrica.

Ejemplo 2.2.1 (**Métrica hiperbólica**). *La métrica para el semiplano superior en donde:*

$$M = \{(x, y)|y > 0\} \quad y \quad g = \frac{1}{y^2}\mathrm{dx}^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{dy}^2$$

Ejemplo 2.2.2 (**Métrica producto**). *Sean M y N variedades riemannianas y consideramos el prodcuto cartesiano entre ellas $M \times N$ con la estructura producto y sean $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones naturales. La métrica riemanniana sujeta a estas condiciones está dada por:*

$$\langle u, v\rangle_{(p)} = \langle \mathrm{d}\pi_1 \cdot u, \mathrm{d}\pi_1 \cdot v\rangle_p + \langle \mathrm{d}\pi_2 \cdot u, \mathrm{d}\pi_2 \cdot v\rangle_q, \quad \forall (p, q) \in M \times N \quad u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$$

Ahora, se dice que un difeomorfismo $F : M \to N$ puede ser usado para traer métricas desde N hasta M, por tanto:

Definición 2.2.2. *Si h es una métrica en N, F^*h es la métrica en M definida como:*

$$(F^*h)_p(v.w) = h_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v), \mathrm{d}F_p(w)), \quad v, w \in T_pM$$

A F^*h posteriormente lo llamaremos **pullback métrico**.

2.3. Otras métricas para $\mathbf{R}^n$

Una métrica riemanniana $g = g_{ij}$ definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama euclidiana si en Ω existe un sistema de coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, tal que $g_{ij}(x) = I$ donde I es la matriz identidad.

Con bastante frecuencia, en lugar de escribir $g = g_{ij}$ de la métrica riemanniana, escribiremos el diferencial de la longitud de una curva suave (dl) o su cuadrado (dl^2) así:

$$\mathrm{dl}^2 = g_{ij}\mathrm{dx_i}\mathrm{dx_j}$$

Ejemplo 2.3.1. ***Coordenadas cartesianas*** *Sea $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. La matriz g con función de coordenadas x tiene la forma $g(x) = I_n$. Consideremos la transformación identidad en $\mathbb{R}^n$. La matriz de Jacobi de dicha transformación es I_n, de donde se tiene que la longitud de una curva $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ está dada por:*

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{dt}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

así

$$\mathrm{dl} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{dt}}\right)^2}$$

por tanto,

$$\mathrm{dl}^2 = \left(\frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{dt}}\right)^2$$

Ejemplo 2.3.2. ***Coordenadas polares*** *Sea $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. La matriz $g(x)$ en coordenadas cartesianas (x_1, x_2) tiene la forma $g(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I$, es decir, $g_{ij} = \delta_{ij}$*

El cambio de coordenadas está dado por:

$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi$$

donde $r > 0$ y $0 < \varphi < 2\pi$.

La matriz de Jacobi de esta transformación es:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} g(r,\varphi) = A^T * I * A &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi - r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \cdot r + \sin\varphi\cos\varphi \cdot r \\ -r \cdot \mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + r \cdot \cos\varphi\sin\varphi & r^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la longitud l de $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$ en el sistema polar.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle &= \left(\tfrac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \quad \tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right) G(r,\gamma) \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \\ \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \quad \tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \\ \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \quad r^2\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right) \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \\ \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} + r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \end{aligned}$$

Obteniendo así

$$l = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle}\mathrm{dt} = \int_a^b \sqrt{\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} + r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}}\mathrm{dt}$$

que es lo mismo que:

$$\mathrm{dl}^2 = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} + r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}$$

Ejemplo 2.3.3. ***Coordenadas esféricas*** *Sea $(r, , \varphi) \in \mathbb{R}^3$. Sean (x_1, x_2, x_3) las funciones coordenadas en $\mathbb{R}^3$. El cambio de coorenadas viene dado por:*

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\cos\varphi\sin\theta \\ x_3 &= r\sin\varphi\sin\theta \end{aligned}$$

La matriz de Jacobi es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$g(r,\theta,\varphi) = A^T * I * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

y la longitud de una curva $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$ está dada por:

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

Obteniendo:

$$\mathrm{dl}^2 = \left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2$$

2.4. Isometrías

En esta sección, veremos que las **isometrías** en la geometría euclidiana o no euclidiana, son aquellas características ligadas a los objetos geométricos que resultan de aplicar transformaciones, movimientos o intercambios a un conjunto de puntos de tal manera que los mantiene invariantes. Por ejemplo, en la geometría euclidiana tenemos la rotación, reflexión y la traslación como ejemplos de isometrías en el plano.

Definición 2.4.1. *Sean (M, g) y (N, h) variedades riemannianas.*

- *Un difeomorfismo $F : (M, g) \to (N, h)$ se llama una **isometría** si $F^*h = g$.*
- *Un difeomorfismo local $F : (M, g) \to (N, h)$ se llama una **isometría local** si $F^*h = g$.*

La condición $F^*h = g$ se puede entender como:

Para todo $p \in M, \quad v, w \in T_pM$

$$g_p(v, w) = h_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v), \mathrm{d}F_p(v))$$

Definición 2.4.2. *Sea (M, g) una variedad riemanniana.*

- *Si $v \in T_pM$, la longitud*
$$\|v\|_p$$
de v es $\sqrt{g_p(v, v)}$.
- *Si $\alpha : [a, b] \to M$ es una curva suave, su longitud es*
$$L(\alpha) = \int_a^b \left\|\alpha'(t)\right\|$$
- *El ángulo entre dos vectores $v, w \in T_pM$ se define como:*
$$\cos(v, w) = \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p}$$

Ejemplo 2.4.1. *Las translaciones de $\mathbb{R}^n$ son isometrías que preservan la métrica euclidiana, dadas por:*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + x_0 \end{aligned}$$

para un x_0 fijo.

Ejemplo 2.4.2. *Las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^n$ también son isometrías de la métrica euclidiana dadas por:*

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Qx \end{aligned}$$

donde Q es una matriz de $n \times n$ ortogonal, es decir, $Q^T \cdot Q = I$.

Capítulo 3

Geometría hiperbólica

3.1. Introducción histórica

La geometría hiperbólica se da con el estudio a través del tiempo del quinto postulado de Euclides (330 a.C - 275 a.C) plasmado en la obra llamada ***Elementos***, escrita por el ya nombrado Euclides y desarrollada con el fin de presentar la teoría de sólidos de Platón (427 a.C - 347 a.C) y la de los números irracionales de Teeleto (417 a.C - 369 a.C) y considerada como el primer tratado científico de la humanidad.

Como Euclides nombro el quinto postulado como: "*Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos*", a lo que Jhon Playfair, después de un tiempo reescribió así: "*Por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una y sólo una paralela a la recta dada*", convirtiéndose en el enunciado alternativo más común y en el ambiente geométrico conocido como "**Postulado de las paralelas**".

Muchos matemáticos intentaron resolver el **problema de las paralelas** (mostrar que el quinto postulado era consecuencia de los anteriores) sin lograr resultados, pues todas las demostraciones eran falsas o erróneas. Es hasta el siglo XIX que Carl Gauus(1777-1855) quién por primera vez se enfrenta directamente a dicho problema después de haberlo estudiado durante 40 años, creando así lo que hoy conocemos como geometría no euclidiana. Es bueno dejar claro aquí, que dichos resultados nunca fueron expuestos a la luz pública por el temor que Gauss tenía de ser considerado como "loco".

Janús Bolyai (1802-1860), hijo del también matemático y amigo de Gauss, Farkus Bolyai, estudió por aproxuimadamente 10 años las consecuencias que se derivan de negar el quinto postulado, suponiendo que por un punto exterior a una recta no existe ninguna paralela, o por el contrario, existe más de una.

Por esta última suposición, Bolyai observó que la existencia de dos de estas rectas implicaba la

existencia de una infinidad de ellas. Junto a su padre, redactaron un apéndice de 26 hojas con los resultados hacia el año de 1832, pero después de transcurrido un tiempo se dieron cuenta que tres años antes de su publicación, el ruso Lovachevski había producido una obra en la cual se trataba la geometría no euclidiana.

Nicolai Lovachevski (1793-1856) quien partiendo de los cuatro primeros postulados de Euclides y de un nuevo quinto postulado que afirmaba que por un punto exterior a una recta se puede trazar al menos dos rectas paralelas a ella, formula una nueva geometría que da a conocer por primera vez al mundo matemático en la Universidad de Kazán hacia el año de 1826, para posteriormente publicar los resultados en 1829 en la obra llamada "**Sobre los elementos de la geometría**". A esta nueva geometría, Lovachevski la llamó geometría imaginaria y es lo que hoy en día conocemos como "**Geometría hiperbólica**".

Después de la muerte de Lovachevski, aparece el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) quién da solución a la no contradicción de la geometría de Lovachevski. Es así como este hombre destacado en el campo de la geometría diferencial y la física matemática, es el primero en demostrar la consistencia de la geometría hiperbólica a través de un modelo físico, la pseudoesfera.

Según Beltrami, las rectas para la geometría hiperbólica están representadas por las geodésicas en la pseudoesfera, es decir, existen dos tipos: curvas que parten del ecuador y suben hasta el infinito, y curvas que rodean el "cuello"de la pseudoesfera.

La prueba sobre la consistencia de la geometría hiperbólica se da en 1868 en el libro llamado "Teoría fundamental de espacios de curvatura constante"por lo cual Beltrami logra esto mediante la vinculación de tres tipos de modelos de geometría plana no euclídea. Posteriomente Felix Klein (1849-1925) generaliza los modelos de Beltrami a todo el espacio n-dimensional.

Además Klein construye un modelo sustentado en la geometría proyectiva y lo da a conocer en 1872 en su famoso método de caracterización de geometrías, el programa Erlangen [1] Para este modelo se toma el disco abierto unidad, donde las rectas se representan como cuerdas de circunferencia que intersecan el disco en su interior. A partir de este modelo aparece la relación entre el espacio hiperbólico y el interior de la esfera euclidiana, por lo que si hay inconsistencias en la geometría hiperbólica, también las habrá en la geometría euclidiana.

Por último, y en relación a la geometría hiperbólica plana, podemos citar al francés Henri Poincaré (1854-1912), un matemático,físico, científico teórico y filósofo que hizo aportes a la teoría de la relatividad y del caos.

En 1887, cuando trabajaba en el "*problema de los tres cuerpos*"[2], Poincaré describió dos modelos de geometría hiperbólica en dos dimensiones que son el disco unitario y el semiplano superior.

[1]El programa de Erlangen es un programa de investigación publicado por Felix Klein en 1872 que propuso un nuevo tipo de solución a los problemas de la geometría del tiempo.

[2]El problema de los tres cuerpos consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas

3.2. Modelos del plano hiperbólico

Tenemos claro que así como se representa el plano euclidiano a partir de puntos y rectas usuales en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para representar el plano hiperbólico existen diferentes modelos. Veamos las características generales de cada uno de ellos:

- ♠ Modelo de Klein : También se conoce como disco proyectivo y modelo proyectivo de Klein; representa el plano como el interior de un círculo y las rectas como las cuerdas del círculo.
- ♠ Disco de Pincaré: Tambíen conocido coo disco unitario. Representa al plano de la misma manera que lo representa el modelo de Klein, pero las rectas están representadas por arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde y los diámetros de dicha circunferencia.
- ♠ Semiplano de Poincaré : También se conoce como el sempliano superior ya que su plano es el semiplano abierto del plano complejo, las rectas son la intersección de una circunferencia o de una recta perpendicular al borde de dicho semiplano,con el semiplano de Poincaré.
- ♠ Modelo de Lorentz : Su plano es una hoja del hiperboloide de revolución. Los puntos son clases de equivalencias de vectores que satisfacen una determinada forma cuadrática y las rectas resultan de la intersección de la hoja superior del hiperboloide con los planos que pasan por el origen.

De estas cuatro representaciones, trabajaremos con el disco de Poincaré y el semiplano de Poincaré más a fondo,definiendo los planos, los puntos, las rectas,las nociones de distancia entre dos puntos y la medida de sus ángulos. Además se trabajarán movimientos rígidos del plano hiperbólico, que son aquellas transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que conservan las distancias entre puntos y preservan las medidas de ángulos.

3.3. Modelo del semiplano superior

Este modelo está dado por $H^2 = \{z = x + yi \in \mathbb{C}^n | Im(z) = y > 0\}$.
Veamos ahora los elementos geométricos en este modelo:

- H-Puntos Son todos los puntos del plano complejo cuyo valor real es siempre positivo. Llamaremos $\Psi_{\mathbb{H}}$ a el conjunto de todos los H-Puntos.
- H-líneas Una H-línea puede ser:
  - Un semicírculo dentro de $\Psi_{\mathbb{H}}$ y con centro en el eje X.
  - La intersección de $\Psi_{\mathbb{H}}$ y una recta perpendicular a el eje X.
- H-métrica

$$d_H = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \frac{|dz|}{\mathrm{Im}z}$$

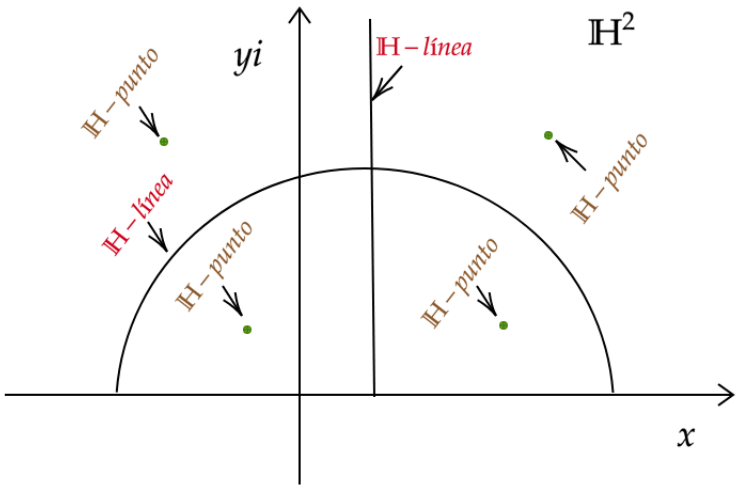


Figura 3.1: Semiplano superior

3.4. Modelo del disco unitario

Este modelo tiene una representación dada por:

$$D^2 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

y su borde estará dado por

$$\partial D^2 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$$

Veamos ahora los elementos geométricos en este modelo:

- D-puntos Son todos los puntos del plano complejo que están contenidos en la circunferencia unitaria. LLamaremos $\Psi_{\mathbb{D}}$ a el conjunto de todos los D-puntos.
- D-líneas Una D-línea puede ser:
  - La intersección de $\Psi_{\mathbb{D}}$ con la circunferencia ortogonal $C^{\perp}$.
  - La intersección de $\Psi_{\mathbb{D}}$ con el diámetro de C.
- D-métrica

$$d_{\mathbb{D}} = \frac{2\,|dw|}{1 - |w|^2}$$

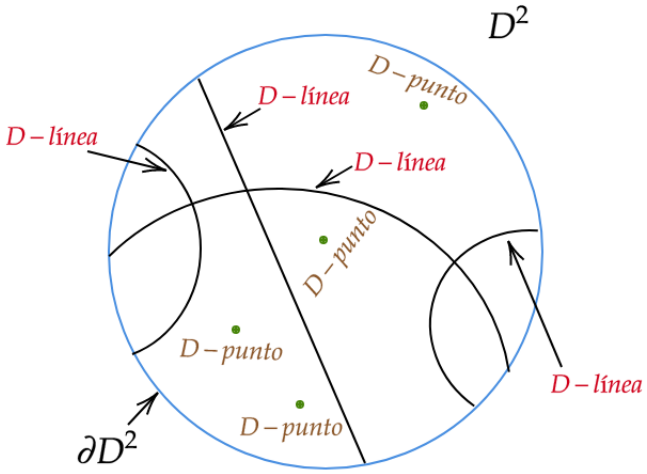


Figura 3.2: Disco Unitario

3.5. Modelo de Lorentz

Para definir este modelo debemos conocer la forma cuadrática de Lorentz que está dada por $L(x) = L(x, y, z) := x^2 + y^2 - t^2$. Dada dicha forma cuadrática podemos decir que el espacio o modelo de Lorentz tiene la siguiente representación:

$$\mathfrak{L}^2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad L(t, x, y) = -1, \quad t > 0\}$$

Veamos ahora los elementos geométricos en este modelo:

- $\mathfrak{L}$-puntos Son todos aquellos puntos situados en la hoja superior de un hiperboloide. Llamaremos $\Psi_{\mathfrak{L}}$ al conjunto de todos los $\mathfrak{L}$-puntos.
- $\mathfrak{L}$-rectas Una recta es la intersección no vacía entre $\Psi_{\mathfrak{L}}$ y un plano que pase por el origen. Es decir, si Π es un plano que pasa por el origen tal que Π tiene vectores que cumplen $L(x, y, z) < 0$, entonces
$$l = \mathfrak{L}^2 \cap \Pi$$
es una $\mathfrak{L}$-recta.
- $\mathfrak{L}$-métrica
$$d_{\mathfrak{L}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 - dt^2}$$

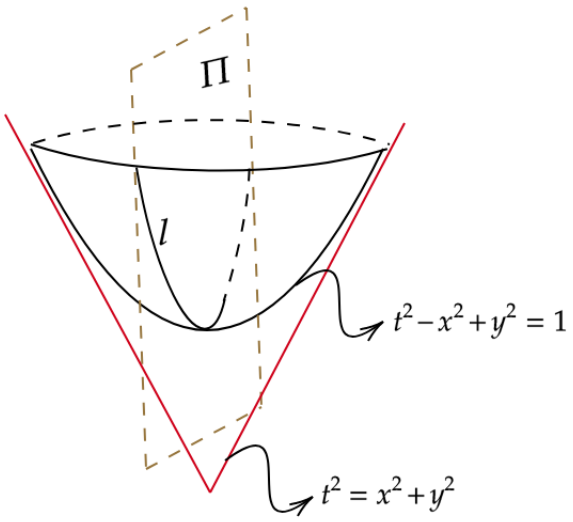


Figura 3.3: Modelo de Lorentz

Capítulo 4

Transformaciones de Möbius

4.1. Introducción

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar las transformaciones lineales que son aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y conformes (aquellas que preservan ángulos) del plano complejo extendido y así poder redefinir y extender conceptos en los modelos del semiplano superior y el disco unitario conocidos anteriormente. Este grupo de aplicaciones forman un grupo y lo denotaremos por $PSL_2(\mathbb{C})$.

4.2. Transformaciones afínes

En el transcurso del trabajo, encontraremos a menudo algunas de las siguientes funciones:

1	$f(z) = cz$	$c \in \mathbb{R}$	Función escalar
2	$f(z) = z + A$	$A \in \mathbb{C}$	Función traslación
3	$f(z) = Az$	$A = e^{i\theta}$	Función rotación
4	$f(z) = \bar{z}$		Función conjugación.
5	$f(z) = \frac{1}{z}$		Función inversión.

Definición 4.2.1. *Una **transformación afín** directa es una combinación de las funciones escalar, traslación y rotación, es decir, una función de la forma* $T(z) = Az + B$

Nota 4.2.1. *Haciendo* $|T(z) - T'(z)| = |(Az + B) - (Az' + B)| = |Az - Az'| = |A|\,|z - z'|$ *se obtiene que las transformaciones afines son isometrías si y solo si* $|A| = 1$

Lema 4.2.1. *Una transformación afín directa* $T(z) = Az + B$ *es una traslación si y solo si* $A = 1$. *Si* $|A| = 1, A \neq 1$ *entonces* $T(z)$ *es una rotación alrededor de* $\frac{B}{1-A}$ *con un ángulo de* $arg(A)$.

Demostración: La condición necesaria es inmediata, sabiendo que $T(z) = Az + B$ y T una traslación entonces $z + B = Az + B$ de donde se tiene que $A = 1$. la condición suficiente se tiene ya que si $A = 1$ entonces $T(z) = z + B$, cuya forma representa una traslación.
Por otra parte, si $|A| = 1$ y $A \neq 1$, tomemos un punto fijo C de $T(z)$, es decir, $T(C) = C$. De esta manera $T(C) = AC + B$, obteniendo que $C = \frac{B}{1-A}$. Ahora:

$$\begin{aligned} T(z) - C &= Az + B - \frac{B}{1-A} = Az + \frac{B(1-A) - B}{1-A} \\ &= \frac{Az(1-A) + B(1-A) - B}{1-A} = \frac{Az - Az^2 + B - AB - B}{1-A} \\ &= \frac{Az - Az^2 - AB}{1-A} = \frac{A(z(1-A) - B)}{1-A} \\ &= A\left(\frac{z(1-A) - B}{1-A}\right) = A\left(z - \frac{(1-A)C}{1-A}\right) \\ &= A(z - C) \end{aligned}$$

Obteniendo que si $|A| = 1$ y $A \neq 1$ entonces $T(z)$ es una rotación alrededor de C con un ángulo de $arg(A)$. ■

Proposición 4.2.1. *El conjunto de las transformaciones directas afínes forman un grupo sobre la composición, que es denotado por* $Aff(\mathbb{C})$.

Demostración: Tomando a $I(z) = z$ como unidad del grupo $Aff(\mathbb{C})$ y sabiendo que la composición de funciones es asociativa, solo queda por mostrar que $Aff(\mathbb{C})$ es cerrado y existe la inversa.
Sea $T(z) = Az + B$ y $S(z) = A'z + B'$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} S(z) \circ T(z) &= A'(Az + B) + B' \\ &= A'Az + A'B + B' \\ &= Cz + D \end{aligned}$$

es una transformación directa afín donde $C = A'A$ y $D = A'B + B'$.

Para encontrar la inversa de $T(z) = Az + B$ que supondremos que es $T^{-1}(z) = Ez + F$, haremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z &= T^{-1}(z) \circ T(z) \\ &= E(Az + B) + F \\ &= EAz + EB + F \end{aligned}$$

de donde $EA = 1$ y $EB + F = 0$, obteniendo que $E = A^{-1}$ y $F = -A^{-1}B$. ■

Corolario 4.2.1. *Una transformación directa afín preserva circunferencias y líneas.*

Demostración: Dada $T(z) = Az + B$ donde $|A| = 1$ es una rotación alrededor de $\frac{B}{1-A}$ por el lema anterior, se tiene que dicha transformación preserva tanto circunferencias como líneas.
Por otra parte si $T(z) = Az + B$ donde $|A| \neq 1$ puede reescribirse como $T(z) = r(A'z + B')$, donde $r \in \mathbb{R}$ y $|A| = 1$. Nuevamente por el lema anterior, se tiene que es una rotación alrededor de r-veces $\frac{B'}{1-A'}$, preservando también circunferencias y líneas. ■

Nota 4.2.2. *Una aplicación que preserva ángulos es llamada conforme; bajo este mismo argumento diremos que $T(z)$ será* ***conforme****.*

4.3. La proyección estereográfica

Para esta sección consideraremos la esfera unitaria S^2 en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

Para algún punto $P \in S^2$, existe una única línea del polo norte de la esfera,dado por $N = (0, 0, 1)$ a P, que denotaremos como NP, dicha línea corta al plano complejo en un único punto $z \in \mathbb{C}$.

Definición 4.3.1. *La función $SP : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$ que asigna a un punto P, el punto $z \in \mathbb{C}$, dado por la intersección $NP \cap \mathbb{C}$, es nombrada la* ***proyección estereográfica***

Proposición 4.3.1. *Para $p \in S^2 - \{N\}$ y $z \in \mathbb{C}$, $P = (u, v, w)$ y $z = x + yi$ las coordenadas de la proyección estereográfica $SP : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$ y su inversa $SP^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{N\}$ están dadas por:*

$$SP((u, v, w)) = \frac{u}{1-w} + \frac{v}{1-w}i$$

y

$$\begin{aligned} SP^{-1}(x + yi) &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{i(\bar{z}-z)}{z\bar{z}+1}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right). \end{aligned}$$

Demostración:
A partir de la figura 4.1 podemos darnos cuenta que $|NO| = 1, |LN| = w, |LN| = 1 - w, |zO| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $|PL| = \rho$ entonces $\rho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - w^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$.
Ya que los triángulos NLP y NOz son semejantes, se tiene que:

$$\frac{p}{r} = \frac{1-w}{1} = \frac{u}{x} = \frac{v}{y}$$

y por tanto obtendríamos

$$x = \frac{u}{1-w} \quad \text{y} \quad y = \frac{v}{1-w}$$

probando así que

$$SP((u,v,w)) = \frac{u}{1-w} + \frac{v}{1-w}i$$

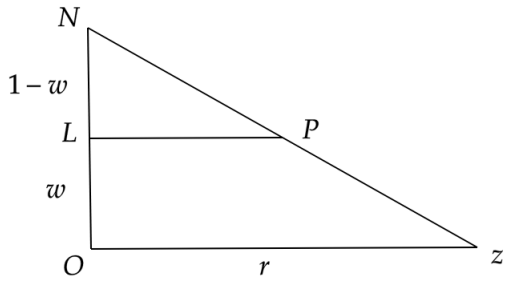


Figura 4.1: Representación de la proyección estereográfica

Para la segunda parte de la proposición, sea $z = x + yi$ entonces:

$$z = \frac{u}{1-w} + \frac{v}{1-w}i = \frac{u+vi}{1-w} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{u}{1-w} - \frac{v}{1-w}i = \frac{u-vi}{1-w}$$

implicando que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z\bar{z} &= \left(\frac{u+vi}{1-w}\right)\left(\frac{u-vi}{1-w}\right) \\ &= \frac{u^2+v^2}{(1-w)^2} = \frac{(1-w)^2}{(1-w)^2} \\ &= \frac{(1-w)(1+w)}{(1-w)^2} \\ &= \frac{1+w}{1-w} = -1 + \frac{1}{1-w} \end{aligned}$$

Esto nos brinda:

$$1 - w = \frac{2}{x^2+y^2+1} \Rightarrow w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}$$

como tenemos:

$$x + yi = \frac{u+vi}{1-w} \Rightarrow 1 - w = \frac{u+vi}{x+yi}$$

así

$$u + vi = (1 - w)(x + yi) = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}(x + yi) = \frac{2x + 2yi}{x^2 + y^2 + 1}$$

y comparando las partes reales e imaginarias tenemos:

$$u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}$$

$$v = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{(\bar{z} - z)i}{z\bar{z} + 1}.$$

Probando así que $SP^{-1}(x + yi) = \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{(\bar{z}-z)i}{z\bar{z}+1}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right)$. ■

Definición 4.3.2. *El plano complejo extendido está dado por* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Nota 4.3.1. *Si identificamos, vía proyección estereográfica, puntos del plano complejo con puntos en la esfera* $S^2 - \{N\}$ *y relacionamos a* $\{\infty\}$ *con el polo norte* N *entonces se tendrá una biyección entre el plano complejo extendido* $\mathbb{C}_\infty$ *y* S^2*. Desde este punto de vista a* S^2 *se le conoce como la* ***esfera de Riemann****.*

Proposición 4.3.2. *La función* $SP : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ *dada por la proyección estereográfica y su inversa* $SP^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ *son funciones conformes.*

Demostración: Debido a que la función identidad es una función conforme, es suficiente probar que SP o SP^{-1} es conforme, ya que la composición de dos funciones conformes es de nuevo conforme. Probaremos que $SP^{-1} : C_\infty \to S$ preservará ángulos para mostrar que el ángulo entre los dos vectores tangentes en el punto de intersección de las dos curvas formadas sobre S^2.

Supongamos que una línea coincide con el eje x y la otra interseca al punto p formando un ángulo θ. De esta manera tendremos dos líneas sobre S^2 dadas por: $r(t) = p + t$ y $s(t) = te^{\theta i} + p$

Ya que $SP^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{(\bar{z}-z)i}{z\bar{z}+1}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right)$ tendremos que:

$$\bar{r}(t) = \left(\frac{2(p + t)}{(p + t)^2 + 1}, 0, \frac{(p + t)^2 - 1}{(p + t)^2 + 1}\right)$$

$$\bar{s}(t) = \left(\frac{2(t\cos\theta + p)}{t^2 + 2tp\cos\theta + p^2 + 1}, \frac{2t\sin\theta}{t^2 + 2tp\cos\theta + p^2 + 1}, \frac{t^2 + 2tp\cos\theta + p^2 - 1}{t^2 + 2tp\cos\theta + p^2 + 1}\right)$$

Ya que estas dos curvas se intersecan en $t = 0$, por tanto el ángulo lo hallaremos derivando e igualando a cero, esto es:

$$\bar{r}'(0) = \left(\frac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2}, 0, \frac{4p}{(p^2+1)^2}\right),$$

$$\bar{s}'(0) = \left(\frac{2(p^2-1)\cos\theta}{(p^2+1)^2}, \frac{2(p^2+1)\sin\theta}{(p^2+1)^2}, \frac{4p\cos\theta}{(p^2+1)^2}\right)$$

Ahora sea ω el ángulo que se forma entre $\bar{r}'(0)$ y $\bar{s}'(0)$ entonces:

$$\begin{aligned} cos(\omega) &= \frac{4(p^2-1)^2\cos(\theta) + 16p^2\cos(\theta)}{\sqrt{(4(p^2-1)^2+16p^2)(4(p^2-1)^2\cos^2(\theta) + 4(p^2+1)^2\sin^2(\theta) + 16p^2\cos^2(\theta))}} \\ &= \frac{4(p^2+1)^2\cos(\theta)}{4(p^2+1)^2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Por tanto $\omega = \theta$, lo que quiere decir que el ángulo se preserva mediante SP^{-1}. ■

Proposición 4.3.3. *La proyección estereográfica envía circunferencias a circunferencias y líneas.*

Demostración: Primer caso es inmediato ya que si tomamos un punto P en la circunferencia que pasa por N, entonces la línea NP estará en el plano. Ya que la intersección de dicha línea y el plano $\mathbb{C}$ es una línea, entonces la proyección estereográfica envía circunferencias en líneas.

En el segundo caso, por 4.3.1 tenemos que $w = \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}, u = \frac{2}{z\bar{z}+1}x, v = \frac{2}{z\bar{z}+1}y$. Tomemos un plano en $\mathbb{R}^3$ dado por: $Au + Bv + Cw + D = 0$ entonces:

$$A\frac{2}{z\bar{z}+1}x + B\frac{2}{z\bar{z}+1}y + C\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1} + D = 0$$

$$2Ax + 2By + x^2 + y^2(C+D) + D - C = 0$$

que es una circunferencia en $\mathbb{C}$. ■

4.4. Función Inversión

En esta sección, estudiaremos la transformación afín T dada por $T(z) = \frac{1}{z}$ y nombrada como la transformación **inversión**. Si $z \neq 0$ entonces existe un único $w = \frac{1}{z}$ por tanto $T : \mathbb{C} - (0) \to \mathbb{C} - (0)$ es una biyección. El objetivo es extender T a ser un homeomorfismo, $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$. Es bueno tener en cuenta que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ que conlleva a ver a T como la composición de dos funciones S y R dadas por $S(z) = \bar{z}$ y $R(z) = \frac{z}{|z|^2}$. Además $arg(R(z)) = arg(z)$ y $|R(z)| = \frac{1}{|z|}$, obteniendo así que R es una inversión en la circunferencia unitaria.

Proposición 4.4.1. *Sea T una inversión. Si $T(0) = \infty \quad y \quad T(\infty) = 0$, entonces $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es un homeomorfismo.*

Demostración:
Recordemos que $T : \mathbb{C} - 0 \to \mathbb{C} - 0$ es una biyección. Además se tiene que:

$$\lim_{|z|\to 0} T(z) = \lim_{|z|\to\infty} T(\tfrac{1}{z}) = \lim_{|z|\to\infty} z = \infty$$

$$\lim_{|z|\to\infty} T(z) = \lim_{|z|\to 0} T(\tfrac{1}{z}) = \lim_{|z|\to 0} z = 0.$$

Mostrando así que T es continua en 0 y ∞. De esto también se desprende que $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es una biyección y es continua. Dado que la inversa está definida así $T^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, entonces se concluye que T es un homeomorfismo. ■

Proposición 4.4.2. *Sea T una inversión. La función T envia circulos y líneas a círculos y líneas.*

Demostración: Sea $w = T(z) = \frac{1}{z}$. Si $w = a + bi$ y $z = x + yi$ entonces a partir de hacer $a + bi = \frac{1}{x+yi}$ se tienen las siguientes igualdades:

$$a = \tfrac{x}{x^2+y^2} \quad b = \tfrac{-y}{x^2+y^2} \quad x = \tfrac{a}{a^2+b^2} \quad y = \tfrac{-b}{a^2+b^2}$$

Sea $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ la ecuación de un círculo o si $A = 0$ la ecuación de una línea. Entonces:

$$\begin{aligned} A\left(\left(\tfrac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\tfrac{-b}{a^2+b^2}\right)^2\right) + B\left(\tfrac{a}{a^2+b^2}\right) + C\left(\tfrac{-b}{a^2+b^2}\right) + D &= 0 \\ \left(a^2+b^2\right)\left(A + Ba - Cb + D\left(a^2+b^2\right)\right) &= 0 \\ A + Ba - Cb + D\left(a^2+b^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que conlleva a una ecuación asociada a un círculo si $A \neq 0$ o a una línea si $A = 0$. ■

Ejemplo 4.4.1. ***Imagen de la línea vertical $x = c_1$ a partir de la función inversión.***
A partir de $A+Ba-Cb+D\left(a^2+b^2\right) = 0$, se tiene que la imagen es la circunferencia $-c_1\left(a^2+b^2\right)+ a = 0$, de tal manera que podemos reescribirlo como $\left(a - \frac{1}{2}c_1\right) + b^2 = \left(\frac{1}{2}c_1\right)^2$ que resultaría siendo una circunferencia centrada en $\left(\frac{1}{2}c_1, 0\right)$ y con radio de $\frac{1}{2}c_1$.

Nota 4.4.1. *Sea $z = x + yi$ y $\bar{z} = x - yi$. Si hacemos la proyección estereográfica inversa de dichos puntos, dadas por:*

$$SP^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right),$$

$$SP^{-1}(\bar{z}) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{-2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Vemos que $SP^{-1}(z)$ y $SP^{-1}(\bar{z})$ difieren por una reflexión en el plano $u-w$. Si Φ es dicha refelxión, se tiene que $SP \circ \Phi \circ SP^{-1}$ corresponde a la conjugación compleja, es decir $SP \circ \Phi \circ SP^{-1}(z) = \bar{z}$ Si realizamos un análisis similar para z y su inverso en la circunferencia unitaria dada por $\frac{z}{|z|^2}$. ¿Cómo difieren estos puntos en funciones definidas sobre S^2 o en C_∞?

Ya que la circunferencia unitaria es fijada sobre la transformación inversión, las correspondientes funciones deberán fijar su ecuador. Por tanto, el polo norte se intercambiará con el polo sur ya que la inversión envía 0 a ∞.

Haciendo cálculos similares a los expuestos anteriormente, se obtiene que $SP^{-1}(z)$ y $SP^{-1}\left(\frac{z}{|z|^2}\right)$ difieren por una reflexión en el plano ecuatorial. Sea $\Theta : S^2 \to S^2$ dicha reflexión, entonces $SP \circ \theta \circ SP^{-1}$ corresponde a la circunferencia unitaria, es decir,$SP \circ \theta \circ SP^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2}$. Lo que implica que, la inversión T como función definida en S^2 está dada por $\Phi \circ \Theta$ o si la vemos como función en $\mathbb{C}_\infty$ estará dada por $T = SP \circ \Phi \circ \Theta \circ SP^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$

Proposición 4.4.3. *La inversión $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es una función conforme.*

Demostración: Por resultados anteriores sabemos que la inversión es la composición de la conjugación compleja y la inversión en el círculo unitario. Además la inversión T es igual a la función dada en la nota anterior. Coomo SP, SP^{-1}, Θ y Φ son funciones conformes, entonces T es conforme. ■

4.5. Transformaciones de Möbius

Definición 4.5.1. *Una transformación de Möbius $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es una función*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad y \quad ad - bc \neq 0$$

Teorema 4.5.1. *Sea f una transformación de Möbius, entonces:*

1. *f puede ser expresado como una composición de transformaciones afines e inversiones.*
2. *f es 1-1 y es continua.*

3. f envía círculos y líneas en círculos y líneas.

4. f es una función conforme.

Demostración: Inicialmente definamos a f como

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(az+b) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Para el primer ítem tomemos las funciones $w_1(z) = cz + d$, $w_2(z) = \frac{1}{w_1}$ y $w_3(z) = \left(b - \frac{ad}{c}w_2 + \frac{a}{c}\right)$, entonces $f = w_3 \circ w_2 \circ w_1$ lo que implica que f es una composición de transformaciones afines e inversiones. Es bueno aclarar que cuando $c = 0$,f es compuesta solo por transformaciones afines.

Para el segundo ítem, si $z \neq \frac{-d}{c}$ y $w = \frac{az+b}{cz+d}$ entonces $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. De esta manera, en cada punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{-d}{c}$, f está bien definida, es uno a uno, sobreyectiva y es continua. Como $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, por construcción sabemos que $f(\infty) = \infty$, si $c = 0$. Si $c \neq 0$, entonces $f(\frac{-d}{c}) = \infty$. La inversa de f está dada por: $f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$. De nuevo, si $c = 0$, $f^{-1}(\infty) = \infty$. Si $c \neq 0$ entonces $f^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$. Con las condiciones anteriores podemos afirmar que $f^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es continua.

Como f es continua, con inversa continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Los dos últimos ítems son consecuencia directa del ítem 1 y de la proposición 4.4.3 expuesta anteriormente. ■

Definición 4.5.2. *Sea $\mathfrak{M}(\mathbb{C}_\infty)$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius*

$$\mathfrak{M}(\mathbb{C}_\infty) = \{f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty | f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0\}$$

Este conjunto tiene una estructura adicional; esto es, un grupo con composición de funciones y puede ser identificado por $GL_2(\mathbb{C})$.

Ejemplo 4.5.1. *La imagen de la circunferencia $|z-2| = 2$ a través de $f(z) = \frac{z}{2z-8}$. Inicialmente veamos que si $z = 4$, este punto está en el círculo, por lo tanto su imagen deberá ser una línea. También tenemos que, $f(0) = 0$ y $f(2+2i) = \frac{-i}{2}$ son imágenes en el eje imaginario. Como la función continua preserva , el interior de la circunferencia es enviado a la derecha o a la izquierda del semiplano. Ya que $f(2) = \frac{-1}{2}$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$ es enviado al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.*

4.6. La razón doble o razón cruzada

Como hemos visto anteriormente, sabemos que una transformación de Möbius envía círculos en círculos, entonces aquí nos dedicaremos a estudiar una transformación de Möbius que envía un

círculo específico en otro círculo específico. Es bueno aclarar que no se distinguirá en nada entre círculos y líneas, ya que una línea en $\mathbb{C}$ es un círculo en $\mathbb{C}_\infty$ cerrado en ∞.

Definición 4.6.1. *Sean z, z_1, z_2 y z_3 cuatro puntos en $\mathbb{C}_\infty$. Entonces la expresión*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

*es llamada la **razón doble** de los cuatro puntos z, z_1, z_2 y z_3*

Para la deducción de la definición anterior, recordemos de la geometría euclidiana que 3 puntos determinan un círculo. Sea C_1 y C_2 dos círculos cuyos puntos son z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 respectivamente. Si encontramos una transformación de Möbius h tal que $h(z_1) = w_1, \quad h(z_2) = w_2, \quad h(z_3) = w_3$ entonces h deberá ser una función definida entre C_1 y C_2.

Para ello, sea $f : C_1 \to \mathbb{R}$ en donde $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1$ y $f(z_3)$ una transformación de Möbius.

- Si $z_i \neq \infty$ donde $i = 1, 2, 3$ definimos la transformación de Möbius f por:

$$f(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

- Si $z_i = \infty$ para algún i (lo que significa que C_1 es una línea) tenemos:

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Para los dos ítems anteriores se cumple que $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1$ y $f(z_3) = \infty$

Sea g otra transformación de Möbius en donde $g(w_1) = 0, g(w_2) = 1$ y $g(w_3) = \infty$.

Entonces haciendo $h = g^{-1} \circ f$ se satisface:

$$\begin{aligned} h(z_1) &= g^{-1} \circ f(z_1) = g^{-1}(0) = w_1 \\ h(z_2) &= g^{-1} \circ f(z_2) = g^{-1}(1) = w_2 \\ h(z_3) &= g^{-1} \circ f(z_3) = g^{-1}(\infty) = w_3. \end{aligned}$$

Como $h(z_i) = w_i$ entonces podemos escribir $g^{-1}(f(z_i)) = w_i$ si y solo si $g(w_i) = f(z_i)$ lo que implica que:

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}$$

lo cual significa que h preserva la razón cruzada.

Ejemplo 4.6.1. *Encontremos una transformaciónde Möbius que envíe* 0 *a* i, 1 *a* 2 *y* -1 *a* 4.

En efecto, calculando la razón doble tenemos:

$$(z, 0, 1, -1) = \frac{2z}{z+1} \quad y \quad (w, i, 2, 4) = \frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)}$$

igualando las expresiones y despejando w *se tiene que:*

$$w = h(z) = \frac{(16-6i)z + 2i}{(6-2i)z + 2}.$$

4.7. El principio simétrico

Definición 4.7.1. *Dos puntos* z_1 *y* z_2 *son simétricos con respecto a una línea recta* L *si* L *es el bisector perpendicular de la línea que une a* z_1 *y* z_2.

Una circunferencia es ortogonal a una línea L si la tangente de la circunferencia es ortogonal a la línea en el punto de intersección.

Definición 4.7.2. *Dos puntos* z_1 *y* z_2 *son simétricos con respecto a un circunferencia* C*, si cada línea recta o circunferencia pasa por* z_1 *y* z_2 *interceptado con* C *ortogonal.*

Note que esto en particular significa que el centro a de C y ∞ son simétricos con respecto a C.Ya que un círculo está acotado no existe un círculo que atraviese a y ∞ y una línea atraviesa a (y ∞) es ortogonal a C.

Teorema 4.7.1. ***(El principio simétrico)*** *Sea* C *una línea o círculo en* $\mathbb{C}$ *y sea* f *una transformación de Möbius. Dos puntos* z_1 *y* z_2 *son simétricos con respecto a* C *si y solo sí sus imágenes,* $f(z_1)$ *y* $f(z_2)$ *son simétricos con respecto a la imagen de* C, $f(C)$.

Demostración: Ya que las transformaciones de Möbius son conformes, estas preservan también ortogonalidad. Dos puntos son simétricos con respecto a un círculo o una línea si cada círculo o línea contienen los puntos de intersección con el círculo ortogonal o línea ortogonal dado. Ya que esto se cumple para la clase de círculos o líneas y se preserva ortogonalidad, se preserva la condición de simetría. ■

Proposición 4.7.1. *Dado un punto* α *y un círculo* C *con centro* a *y radio* R*. Entonces:*

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\bar{\alpha} - \bar{a}} + a$$

es el punto simétrico a α *con respecto a* C.

Demostración: Por la ecuación establecida en la razón cruzada, $(w, 0, 1, \infty)$ y $(z, a-R, a+Ri, a+R)$ tenemos que los puntos $a-R, a+Ri$ y $a+R$ (y por tanto todos los de C) son enviados a el eje real por:

$$f(z) = i\frac{z-(a-R)}{z-(a+R)}.$$

Por el teorema anterior α es simétrico a α^* con respecto a C si y solo si $f(\alpha)$ es simétrico a $f(\alpha^*)$ con respecto al eje real, lo que resulta equivalente a que $f(\alpha)$ y $f(\alpha^*)$ son conjugados en $\mathbb{C}$, es decir, $f(\alpha) = f(\bar{\alpha^*})$ y por tanto obteniendo:

$$i\frac{\alpha^*-(a-R)}{\alpha^*-(a+R)} = i\frac{z-(\bar{a}-R)}{z-(a+R)} = -i\frac{\bar{\alpha}-(\bar{a}-R)}{\bar{\alpha}-(\bar{a}+R)}$$

que al resolverlo para α^* obtenemos:

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\bar{\alpha}-\bar{a}} + a$$

De lo anterior, también podemos deducir que α^* es único. ■

Nota 4.7.1. *De la ecuación de la proposición anterior tenemos que*

$$arg(\alpha^*-a) = arg\left(\frac{R^2}{\bar{\alpha}-\bar{a}}\right) = arg\left(\frac{R^2(\alpha-a)}{|\alpha-a|^2}\right) = arg(\alpha-a)$$

Esto significa que los puntos simétricos se encuentran sobre la misma línea del centro a. Además se tiene que:

$$|\alpha^*-a| = \frac{R}{\alpha-a} \quad \text{por tanto} \quad R^2 = |\alpha^*-a||\alpha-a|.$$

4.8. Funciones de D y $\mathbb{H}$

Teorema 4.8.1. *Sea f una transformación de Möbius definida de D^2 en sí misma, entonces:*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}, \quad \textit{donde} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad y \quad |\alpha| < 1.$$

Demostración: Sea f una transformación de Möbius. La función f envía la circunferencia unitaria C_z a la circunferencia unitaria C_w. Por lo tanto, ya que el interior de C_z es enviado a el interior de C_w, debe existir un punto α, $|\alpha| < 1$ que es enviado a el origen, es decir, existe α tal que $f(\alpha) = 0$. Usando la ecuación de la proposición 4.7.1 con $a = 0$ el punto

$$\alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}-\bar{0}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

es simétrico a α con respecto a C_z. Por el principio de simetría tenemos que $f(\frac{1}{\alpha})$ es simétrico a $f(\alpha) = 0$ con respecto a C_w. Ya que el origen es el centro de C_w, dicho punto simétrico es ∞. Esto

implica que $f(\frac{1}{\alpha}) = \infty$ lo cual deriva que f tiene un cero en α y un polo en $\frac{1}{\alpha}$, que conlleva a que f sea de la forma

$$f(z) = k\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\alpha}} = k\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$$

para alguna constante k.

También sabemos que $f(1)$ deberá ser enviado a algún punto sobre C_w, por lo tanto:

$$1 = |f(1)| = |k\bar{\alpha}|\frac{|1-\alpha|}{|\bar{\alpha}-1|} = |k\bar{\alpha}|$$

lo cual implica que $k\bar{\alpha} = e^{i\theta}$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Así f deberá verse como

$$f(z) = e^{\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1} \quad \text{donde} \quad |\alpha| < 1.$$

Por último, veamos que la función f envía el disco en sí mismo. En efecto, sea $\alpha = a+bi$, entonces:

$$\begin{aligned}
|f(i)| &= |e^{i\theta}\frac{i-\alpha}{\bar{\alpha}i-1}| = \frac{|i-\alpha|}{|\bar{\alpha}-1|} = \frac{|-a+(1-b)i|}{|b-1+ai|} = \frac{\sqrt{(-a)^2+(1-b)^2}}{\sqrt{(b-1)^2+a^2}} = 1,\\
|f(1)| &= |e^{i\theta}\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}| = 1,\\
|f(-1)| &= |e^{i\theta}\frac{-1-\alpha}{-\bar{\alpha}-1}| = 1.
\end{aligned}$$

Ya que $f(\alpha) = 0$ y $|\alpha| < 1$, el interior es enviado al interior, lo que prueba que f envía el disco en sí mismo. ■

Proposición 4.8.1. *Una transformación de Möbius f envía la recta real a la recta real si y solo si los coeficientes a,b,c y d son reales.*

Demostración: Inicialmente asumamos que los coeficientes de f son reales. Entonces la imagen de los tres puntos $0, 1$ y 2 son claramente tres puntos sobre el eje real. Ya que la imagen de una línea es determinadada por la imagen de tres puntos sobre dicha línea, esto prueba que el eje real es enviado al eje real.

Denotemos al eje real por $\mathbb{R}_\infty$, además asumamos que $f(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Esto implica que f envía tres puntos q_1, q_2, q_3 del eje real a tres puntos r_1, r_2, r_3 sobre el eje real. Esto nos brindará que f está determinada por la razón cruzada entre $(w, r_1, r_2, r_3) = (z, q_1, q_2, q_3)$ que es lo mismo que:

$$\frac{(z-q_1)(q_2-q_3)}{(z-q_3)(q_2-q_1)} = \frac{(w-r_1)(r_2-r_3)}{(w-r_3)(r_2-r_1)}$$

Cuando resolvemos para w obtenemos un transformación de Möbius $w = f(z)$ con coeficientes reales, ya que q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 y r_3 son reales. Además, como son arbitrarios, entonces se cumple lo que se quería demostar. ■

Teorema 4.8.2. *Sea f una transformación de Möbius definida de H^2 en sí mismo, entonces:*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad con \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad y \quad ad-bc > 0.$$

Demostración: Sea f una transformación de Möbius que envía H^2 a H^2. Ya que el eje real parte a C_∞ en dos semicircunferencias, y la transformación de Möbius envía dichas semicircunferencias a una semicircunferencia, f deberá enviar el eje real al eje real. Por la proposición inmeditamente anterior, podemos elegir a f como $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{az+b}{|cz+d|^2}(c\bar{z}+d) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{Im}(f(z)) = \mathbf{Im}\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right) = \mathbf{Im}\left(\tfrac{1}{|cz+d|^2}(ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz)\right) = \tfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathbf{Im}(z)$$

lo que implica que f envía H^2 en sí mismo si y solo sí $ad - bc > 0$ ■

Conclusiones

- ♣ Desde un punto de vista de invariabilidad, cabe destacar que la función inversión juega un papel importante puesto que contribuye para que los elementos en los modelos hiperbólicos definidos se preserven.
- ♣ En la misma dirección de este trabajo, se pueden efectuar estudios en donde se presenten las geodésicas en los planos hiperbólicos a partir de las transformaciones de Möbius.
- ♣ Si se definieran las geodésicas en este trabajo, se daría espacio para implementar funciones de un espacio hiperbólico en sí mismo de tal manera que si dicha función preserva las geodésicas, entonces esta sería una isometría.
- ♣ Conociendo los espacios hiperbólicos y su métrica, podrían definirsen las curvaturas correspondientes, para así mostrar que éstos poseen curvatura negativa.

Bibliografía

[1] Churchill, Ruel V. and Brown., *Complex variables and applications*, New York: McGraw-Hill Book Co, 1984.

[2] James Cannon, William Floyd, Richard Kenyon y Walter Parry, *Hiperbolic Geometry*, NewMS-RI Publications, Vol. 31, págs 115 , 1997.

[3] John Olsen,*The Geometry of Möbius Transformations*.University of Rochester,Spring,2010.

[4] Manfredo Do carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Basel: Springer , 1971.

[5] Manfredo Do carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, New York: Pearson, 1976.

[6] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, New York: Springer, 2006.

[7] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton, University Mathematics Department , lecture notes, 1979.