UNA APROXIMACIÓN A LA CARACTERIZACIÓN DE LA ANALITICIDAD A PARTIR DE TAREAS SOBRE TRANSFORMACIÓN DE LENGUAJE NATURAL A LENGUAJE ALGEBRAICO EN UN CONTEXTO VARIACIONAL

Autores:
MÓNICA ANDREA DÍAZ GUARÍN
JIMENA GARCÍA LEGUIZAMÓN

DIRECTOR:
DR. RODOLFO VERGEL CAUSADO



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN- ÉNFASIS MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C
2021

Agradecimientos

A Dios, por permitir la decisión de iniciar esta maestría y darme la fortaleza para terminarla.

A mis padres por su esfuerzo, por disculpar mis ausencias y mis momentos de crisis. Por ser las personas que me inspiran y a quienes les debo todo.

A Juan Carlos, por animarme a iniciar nuevamente mi camino académico, por confiar en mis capacidades y apoyarme.

A mis amigos, que toleraron mi ingratitud en este tiempo de estudio.

Jimena García Leguizamón

A Dios por permitirme culminar este proyecto profesional en compañía de mis seres queridos.

Al Dr. Rodolfo Vergel Causado, por compartir su sabiduría, orientación y su espontaneidad lo cual posibilitó el desarrollo y culminación del actual proyecto.

A mi esposo por su amor, comprensión, apoyo y compañía. Gracias por siempre caminar junto a mí.

A mi hija por ser mi fuente de motivación e inspiración.

A mis amigos, por encontrar en sus palabras fuerza y dedicación para culminar las metas propuestas, por su cariño y comprensión.

Sin duda alguna, a mis Padres y hermanos por su incondicionalidad, su amor inconmensurable por enseñarme que con esfuerzo trabajo y constancia todo se puede lograr.

Mónica Andrea Diaz Guarín

Tabla de contenido

Tabla de contenido 2

Listado de tablas 5

Listado de imágenes 6

Introducción 10

Capítulo 1 12

La investigación 12

1. Planteamiento del problema de investigación 12

1.2. Objetivos 16

1.2.1. Objetivo General 16

1.2.2. Objetivos específicos 16

Capítulo 2 17

Marco teórico 17

2. Sobre la teoría de la objetivación 17

2.1. Pensamiento algebraico 19

2.2. Generalización algebraica de patrones 20

2.3. Medios semióticos de objetivación 23

2.4 Del lenguaje natural a la narrativa simbólica 24

Capítulo 3 26

Metodología 26

3. Diseño de la investigación 26

3.1 Fase 1: diseño de tareas 30

3.1.1.1 Algunas consideraciones 35

3.2 FASE 2: implementación de las tareas 35

3.3 FASE 3: recolección de datos 36

3.3.1. Etapa 1: grabación de video 37

3.3.2. Etapa 2: obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante 37

3.3.3. Etapa 3: transcripción de los videoclips 38

3.3.4. Etapa 4: análisis de videoclips y hojas de trabajo 39

Capítulo 4 40

Análisis multimodal 40
4. Introducción 40
4.1 Tarea 1: secuencia figural con apoyo tabular. 41
4.2. Tarea No. 2: secuencia numérica con apoyo tabular. 66
Capítulo 5 89
Conclusiones 89
Referencias 96
Anexos 99
Anexo 1: tarea No. 1 99
Anexo 2: tarea No. 2 100
Anexo 3: entrevista semiestructurada. tarea No. 1 101
Anexo 4. padlet tarea No. 1 102
102
Anexo 5. padlet tarea No. 2 103

Listado de tablas

Tabla 1. *Convenciones utilizadas para describir las participaciones de los estudiantes en los videoclips individuales.* 35
Tabla 2. *Intención de cada pregunta tarea No. 1*. 41
Tabla 3. *Componente analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas emergentes en la tarea No. 1*. 63
Tabla 4. *Intención de cada pregunta tarea No. 2.* 65
Tabla 5. *Componente analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas emergentes en la tarea No. 2.* 86

Listado de imágenes

Imagen 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013). *20*

Imagen 2. El proceso de abducción en relación a los tipos de generalización. *21*

Imagen 3. Fases de ejecución del diseño metodológico. *27*

Imagen 4. Pilotaje tarea No. 1. Secuencia figural con apoyo tabular. *28*

Imagen 5. Pilotaje. Respuesta de los niños a la primera pregunta de la tarea No. 1. *29*

Imagen 6. Pilotaje. Uso de gestos con los dedos, con el lápiz y trayectorias con la mano. *29*

Imagen 7. Pilotaje. Movilización del gesto de un niño encerrando dos círculos de la figura 2 y 3 de la secuencia. *30*

Imagen 8. Pilotaje. Uso de recursos semióticos de objetivación tales como frases "clave", para describir el término general. *30*

Imagen 9. Tarea No. 2. Secuencia numérica. *31*

Imagen 10.Pilotaje, tarea No. 2. Respuesta de un estudiante a la pregunta dos. *31*

Imagen 11. Pilotaje. Descripción del término general. *32*

Imagen 12. Etapas de recolección de datos. *34*

Imagen 13. Secuencia figural con apoyo tabular presentado en la tarea No. 1. *41*

Imagen 14. Expresiones reducidas usadas por los estudiantes. *42*

Imagen 15. Señalamientos. *43*

Imagen 16.Estructura espacial. *43*

Imagen 17. Característica común. *44*

Imagen 18. Producción de Ana Sofía a la pregunta 1 de la tarea No. 1. *45*

Imagen 19. Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Ana frente a la solicitud 1 de la tarea No. 1. En la figura de la izquierda moviliza un gesto indexical señalando el número de la figura (1). La imagen del centro muestra los dos círculos verticales de la figura 1. Finalmente, en la imagen de la derecha Ana hace referencia a la cantidad de círculos de la figura 4 haciendo un deslizamiento para describir la ubicación espacial de los mismos. Reconstrucción del vídeo. *46*

Imagen 20. Producción de Ana a la solicitud 2 y 3 de la tarea No. 1, acompañada por la secuencia de gestos como deslizamientos hechos por Ana en la solicitud 3 para indicar los círculos horizontales. *47*
Imagen 21. Secuencia de gestos como deslizamientos hechos por Ana para indicar la ubicación de los círculos en cada fila. *48*
Imagen 22. Producción de Ana a la solicitud 4 de la tarea No. 1. *48*
Imagen 23. Producción de Ana a la solicitud 5 de la tarea No. 1. *49*
Imagen 24.Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Juan Felipe frente a la cantidad de círculos de las figuras 4, 5 y 6. En la figura de la izquierda moviliza un gesto señalando con el marcador el número de la figura (4). La imagen de la derecha muestra los señalamientos de lo que el estudiante llamó "dos columnas". *50*
Imagen 25. Producción escrita de Juan Felipe acompañada por las declaraciones JFN2 y JFN3. *51*
Imagen 26. Expresión corporal de Juan Felipe que acompaña su declaración JFN4. *52*
Imagen 27.Producción escrita de Juan Felipe la de la izquierda acompaña su declaración JFN5 y la de la izquierda la JFN6. *52*
Imagen 28. Producción de Juan Felipe a la solicitud 5, a la izquierda encuentra el total de círculos de la figura 200 y a la derecha verifica el proceso hecho anteriormente haciendo uso de la estructura numérica y espacial. *54*
Imagen 29. Señalamientos hechos por Juan Felipe acompañando JFN7. *54*
Imagen 30.Hoja de trabajo de Camilo en digital, correspondiente a la tarea No. 1. *56*
Imagen 31. Producción de Camilo a la solicitud 1 de la tarea No. 1. Resalta en la estructura espacial de la secuencia dos columnas de la figura 6. *56*
Imagen 32.Producción de Camilo a la pregunta 3 de la tarea No. 1. *57*
Imagen 33. Producción de Camilo a la pregunta 4 de la tarea No. 1. *57*
Imagen 34. Producción de Camilo a la pregunta 5 de la tarea No. 1. Mensaje. *58*
Imagen 35. Producción Juan Felipe (izquierda), Mariana Mondragón (derecha) correspondientes a la participación en el padlet. *61*
Imagen 36. Secuencia numérica con apoyo tabular presentado en la tarea No. 2. *66*

Imagen 37. Secuencia de movimientos corpóreos realizados por Ana Sofía que acompañan su locución ASA2. Reconstrucción del videoclip. 66
Imagen 38. Reconocimiento del patrón por parte de Juan Felipe, explicitando el "más tres" entre los términos de la secuencia. 67
Imagen 39. En la imagen de la izquierda la tabla donde Camilo relaciona el término con el número que le corresponde, en la imagen de centro usa los puntos para acompañar su conteo de tres para escribir el término que sigue y en la imagen de la derecha explícita el reconocimiento del patrón por parte de Camilo en la secuencia. Reconstrucción de videoclip. 67
Imagen 40. Producción de Ana Sofia, Juan Felipe y Camilo, respectivamente de izquierda a derecha, a la pregunta uno. 68
Imagen 41. Juan Felipe hace uso del signo de interrogación para referirse al "numerito" del término quince. 69
Imagen 42. Producción de Juan Felipe, pregunta dos. 69
Imagen 43. Expresión corpórea de Juan Felipe que acompaña su locución JFN4. 70
Imagen 44. Fórmula establecida por Juan Felipe para abordar la pregunta 3 (Izquierda), aplicación de su fórmula al término 100 (derecha). 71
Imagen 45. Secuencia de movimientos corpóreos y gestuales de Ana Sofía que acompañan su locución ASA5. 72
Imagen 46. Producción escrita de Ana Sofia, establece una expresión directa para cualquier término. 73
Imagen 47. Producción Ana Sofia pregunta 4. 73
Imagen 48. Producción Juan Felipe pregunta 4. 73
Imagen 49. Producción en el padlet de Ana Sofia a solicitud 6, el mensaje, tarea No. 2. 74
Imagen 50. Tatiana Ríos. Determinación de términos 4, 5 y 6. 75
Imagen 51. Tatiana Ríos. Descripción de la característica común. 76
Imagen 52. Ausencia de generalización contextual. 77
Imagen 53. Comunalidad usando el término general de progresiones aritméticas. 78
Imagen 54. Explicación digital de la fórmula de Mariana Valencia para la pregunta 2. 80
Imagen 55. Aplicación de la fórmula para encontrar el término 100 de la secuencia. 80
Imagen 56. Modificación de la fórmula de Mariana Mondragón para hallar el término. 81

Imagen 57. Fórmula propuesta por Mariana Valencia para hallar el término. *82*
Imagen 58. Hallazgo del término en el punto cinco. *83*

Introducción

La problemática que se pretende abordar gira en torno al pensamiento algebraico puntualmente en uno de los tres componentes que lo caracterizan: la analiticidad con la que se reconoce el carácter operatorio de objetos indeterminados y la forma de trabajar con los mismos (Radford, 2010a).

Al parecer el pensamiento algebraico es nuevo y exclusivo para estudiantes que se encuentran en determinado grado escolar, privilegiando los tratamientos sobre expresiones simbólicas y no desde los primeros grados de escolaridad como se propone en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Además, en esta concepción tradicional del pensamiento algebraico, se desconocen otras manifestaciones de dicho pensamiento como la interacción de diferentes medios semióticos (gestos, símbolos, signos, ritmos, palabras, entre otros) de sujetos inmersos en el aula de clase.

Esta investigación hará mención al pensamiento variacional en las tareas propuestas ya que, desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998), es un eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela y se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones.

Ahora bien, para poder describir, caracterizar y analizar el componente analiticidad, se identificarán los medios semióticos de objetivación a los cuales acuden los estudiantes cuando se enfrentan a tareas sobre variación, que involucran la transformación de lenguaje natural al lenguaje algebraico. Para esto, algunos referentes teóricos que se desarrollarán en la propuesta son: la teoría de la objetivación, los medios semióticos de objetivación y la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Respecto a la investigación, se desarrollará desde un enfoque de tipo cualitativo, teniendo como marco metodológico el análisis multimodal de la producción de los estudiantes.

Con relación a los aportes de la presente investigación al campo, se destaca la contribución al conocimiento didáctico respecto a la solución de tareas sobre transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico en un contexto variacional. Dado lo anterior, se avanza en la caracterización de la analiticidad haciendo referencia a la manera cómo ésta aparece en el proceso de

generalización y en el tránsito entre una generalización de carácter aritmético a una generalización de carácter algebraico. De tal manera que, además de diferenciar las producciones que resultan ser algebraicas, se pueda también reconocer aquellas que, aunque no lo son, constituyen un momento importante en el proceso de generalización llevado a cabo por el estudiante y posibilitan el surgimiento de su pensamiento algebraico.

Este documento se encuentra organizado en cinco capítulos. En el primero se presenta el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos que motivaron nuestra investigación.

En el segundo capítulo se establece el marco teórico, en el que se contempla la educación matemática desde la teoría de la objetivación, la postura que tiene respecto al pensamiento algebraico, la generalización de patrones, los medios semióticos de objetivación y el paso del lenguaje natural a la narrativa simbólica.

La metodología de la investigación se describe en el tercer capítulo. Para ello se inicia con la presentación del enfoque de investigación utilizado en este estudio, así mismo el diseño metodológico que lo direcciona. Luego, se expone la fase de pilotaje resaltando algunos de los resultados encontrados y algunas consideraciones. Seguido, se describen algunas características de la población, así como la naturaleza de la implementación de las tareas y el proceso de recolección, incluyendo los instrumentos utilizados en el análisis multimodal. Además, se establece el paradigma, la unidad de análisis, lo referido a la recolección y análisis de información y la estructura del diseño y el desarrollo de la investigación.

En el cuarto capítulo se hace una descripción de la manera cómo se constituye el dato de investigación, resaltando los elementos que lo conforman y la manera cómo se realiza el análisis desde una concepción multimodal del pensamiento. Posterior a esto, se presentan los resultados y la sistematización de la información. Adicionalmente, se hace referencia a la descripción e interpretación de las producciones escritas, verbales y gestuales elaboradas por los estudiantes participantes en la investigación.

Para finalizar, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones. Aquí se hace referencia a los aportes y contribuciones de este trabajo a la pregunta problematizadora y los objetivos; se

presentan las implicaciones teóricas y prácticas en el campo de la educación, las limitaciones y recomendaciones para futuros estudios.

Capítulo 1

La investigación

1. Planteamiento del problema de investigación

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, se han desarrollado diferentes investigaciones (Azarquiel, 1993; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999; Radford, 2008; Vergel, 2010), en las que la comprensión y construcción de algunos conceptos y procedimientos del álgebra (interpretación de la letra, procesos de generalización, planteamiento de sistemas de ecuaciones y desarrollo de competencias algebraicas) han sido objeto de estudio. En dichas investigaciones se ha evidenciado que el poco tratamiento escolar sobre los conceptos y procedimientos mencionados genera dificultades que pueden estar relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La enseñanza del álgebra ha estado enmarcada con la implementación de métodos muy algorítmicos de resolución sistemática de ejercicios y se prioriza la consecución de una respuesta, restando importancia al desarrollo de pensamiento algebraico, es decir, convirtiéndose en un acto repetitivo y de imitación de la forma de solucionar ejercicios. Es evidente que el método utilizado por el docente influye para que esto suceda y genera sujetos alienados en el aula.

A través de nuestra experiencia docente, hemos observado cómo los estudiantes obtienen la solución de una ecuación mediante la imitación de pasos y procedimientos repetitivos, limitándose a resolver problemas que involucran ecuaciones reconociendo su similitud con otros. Así, los estudiantes difícilmente logran realizar un razonamiento sobre los problemas propuestos y hacer uso de procedimientos para resolver problemas usando la letra como incógnita demostrando destrezas para simplificar y solucionar. Por lo anterior, se identifica una problemática en la manera

como los estudiantes manipulan signos alfanuméricos, sin que esto necesariamente refiera pensamiento algebraico.

Desde los lineamientos curriculares para matemáticas (MEN, 1998) se considera que, para la construcción del pensamiento algebraico, el álgebra escolar debe estar enfocada en los procesos de generalización, comunicación, modelación, y argumentación de situaciones orientadas al cambio. Rojas y Vergel (2013) afirman que dichos procesos deben apoyarse en "la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos" (p.765).

Ahora bien, teniendo como propósito plantear el problema de investigación, es necesario hacer énfasis en el pensamiento algebraico e identificar teóricamente cómo emerge dicho pensamiento a través de la labor conjunta realizada por los estudiantes. Al respecto, Rojas y Vergel proponen que:

> en el documento de Estándares se reafirma la noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela y se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones.
>
> [...] el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Por su parte, el pensamiento algebraico se refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional (p.766).

De acuerdo con lo anterior, consideramos que el pensamiento algebraico se puede caracterizar a través del modo simbólico con el que designa a sus objetos, es aquí donde cobra vital importancia el lenguaje. En la transformación del lenguaje natural al matemático existen dos problemas principales: el primero, es el modo de designación de los objetos en el discurso; y el segundo, tiene que ver con las operaciones que se llevan a cabo sobre los símbolos que designan dichos objetos. Respecto al primero, sabemos que el vocabulario que se usa en el lenguaje natural es más amplio

que aquel que podamos usar en el lenguaje matemático, por tanto, esto se constituye como una dificultad cuando se pide a los estudiantes transformar expresiones de un lenguaje a otro.

Para apoyar lo anterior, Radford (2002) afirma que: "el lenguaje algebraico no incluye adjetivos, adverbios y demás términos lingüísticos que resultan ser cruciales en la comunicación basada en lenguaje natural" (p.1). Dado esto, la aparición de símbolos dificulta aún más la transformación de símbolos naturales en matemáticos, dado que los estudiantes no pueden operar estos símbolos debido a la dificultad que tienen para designar objetos algebraicamente. Así mismo, Vergel y Rojas (2018) afirman que:

> Según Radford lo que distingue el pensamiento numérico del algebraico es que este último trata con cantidades *indeterminadas* o no especificadas como si fueran conocidas. Pero no solo eso. Estas cantidades desconocidas se tratan de manera *analítica*, lo cual significa que se hacen *deducciones* por cuanto se parte de ciertas premisas para conseguir un resultado (p.49).

De acuerdo con lo anterior, es importante indagar la forma en la que los estudiantes operan analíticamente las cantidades indeterminadas para realizar deducciones precisas sobre las mismas, lo que nos confirmará si pueden designar objetos algebraicamente.

Además, para Radford (2010a) se puede hacer una caracterización del pensamiento algebraico y esta se constituye de tres componentes estrechamente relacionados:

- *El sentido de indeterminancia* (objetos básicos como incógnitas, variables y parámetros; es opuesto a la determinancia numérica).
- La *analiticidad* (como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; comporta procesos de deducción).
- La *designación simbólica o expresión semiótica* de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos).

Teniendo en cuenta esta caracterización, la comprensión de las ecuaciones vista como contenido del currículo, no debe limitarse únicamente a la estructura formal del concepto ni a la manipulación de signos alfanuméricos. Cabe mencionar que la pertinencia de su desarrollo, se debe asentar en la manera analítica en la que los estudiantes piensan, cuando piensan algebraicamente; sin tener necesariamente como condición para ello el uso de las letras si no, también, un conjunto de procesos corporizados de acción y reflexión constituidos histórica y culturalmente, medios semióticos de objetivación (gestos, movimientos, actividad perceptual, formas lingüísticas, etc.).

Ante esta problemática, la propuesta de trabajo se hace desde una perspectiva semiótica cultural, ya que posibilita entender formas de aparición del pensamiento algebraico y plantear el problema de la cognición como una reflexión de la práctica social (Radford, 2006). Así mismo, está basada en la teoría de la objetivación ya que ofrece posibilidades para pensar de manera diferente el aprendizaje de las matemáticas, desde un sujeto concreto que siente, goza y sufre; un sujeto en formación a partir de actividades sociales de su cultura.

1.1. Pregunta de investigación

Desde la caracterización sobre el pensamiento algebraico que se propone desde la teoría de la objetivación, el componente de analiticidad descrito en esta investigación vincula el sentido de lo indeterminado y su expresión semiótica. En otras palabras, la analiticidad aparece en el desarrollo del pensamiento algebraico como el carácter operatorio de lo indeterminado bajo una expresión semiótica, no necesariamente en el sistema alfanumérico del álgebra.

En consecuencia, dentro de la línea de investigación de semiótica y didáctica de las matemáticas, la propuesta gira en torno al pensamiento algebraico, puntualmente en uno de los componentes mencionados: la *analiticidad*, enfocada bajo la siguiente pregunta:

¿Cuál es la naturaleza del componente analiticidad en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico?

1.2. Objetivos

A continuación, se exponen los objetivos encaminados a dar respuesta a la pregunta de investigación planteada.

1.2.1. Objetivo General

Describir y caracterizar el componente analiticidad en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

1.2.2. Objetivos específicos

- Identificar los recursos semióticos a los cuales acuden los estudiantes en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

- Caracterizar los recursos semióticos que usan los estudiantes en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

Capítulo 2

Marco teórico

2. Sobre la teoría de la objetivación

La teoría de la objetivación (en adelante TO) es una teoría educativa inspirada en la escuela de pensamiento histórica cultural de Vygotsky y en una filosofía dialéctica neo Hegeliana desarrollada por Ilyenkov y Fischbach, entre otros. Contrario a lo que proponen teorías educativas basadas en el constructivismo o la Teoría de las Situaciones Didácticas, la TO se basa en un proyecto educativo en el que, según Radford (2018a):

> la educación matemática se concibe como un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas constituidas históricamente y culturalmente y que contemplan e imaginan nuevas posibilidades de acción y pensamiento (p. 73).

Por lo anterior, la educación en general para la TO se trata además de saberes, de seres. Esto es, en el proceso de enseñanza - aprendizaje no solo se deben observar y analizar los conocimientos que como actualización del saber se dan y se involucran, también se debe analizar la formación del estudiante como sujeto humano. La TO contempla ideas fundamentales sobre el sujeto, el saber, el conocimiento, el aprendizaje y la labor conjunta.

Para esta teoría el sujeto es concreto, es alguien que sufre, siente, goza y siempre está en formación al participar en las actividades sociales de su cultura. De acuerdo con Bajtín y su idea de *extraposición* citada por Vergel (2019), construimos nuestra identidad por y para el otro. Es decir, en el reconocimiento del otro como sujeto que piensa, siente e interpreta su entorno, yo puedo enriquecer y comprender el propio. Así, es coherente pensar que el ámbito histórico y cultural que se comparte influye en dicha construcción. Lo que define al sujeto es la relación que establece con el otro en el acto creador, el otro es alguien que no soy yo. Así mismo, “un sujeto expresa y piensa algo, pero siempre lo piensa y lo expresa de acuerdo con los límites y las posibilidades que le ofrece el contexto cultural en donde se encuentre” Vergel (2019, p.14).

Por otro lado, para la TO "el saber se define como un sistema histórico y culturalmente constituido por procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión (...) Independientemente de la cultura en la que surja, el saber siempre está inmerso en estructuras culturales súper simbólicas" (Radford, 2018b, p.3). El saber es una potencialidad o posibilidad, es labor cristalizada. Cuando se dice que es cristalizada no significa que sea inmodificable, al contrario, es relativa y siempre está abierta a transformaciones. Para Radford el saber se entiende como un conjunto de formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente (D´Amore y Radford, 2017).

En cuanto al conocimiento, la TO propone que es la materialización y actualización del saber. Esto se da a través de la actividad en la que se manifiestan diversos medios semióticos como gestos, palabras y símbolos, entre otros. Cuando se sugiere que: "el conocimiento es una actualización o materialización del saber, hay que distinguir:

1. El saber como una entidad *general*.
2. El *proceso* gracias al cual el saber se actualiza o materializa.
3. El conocimiento como *actualización* o *materialización* del saber" (D'Amore y Radford, 2017, p.108).

Para la TO, el término aprendizaje se conceptualiza comprendiendo dos procesos: de objetivación y de subjetivación. El primer proceso es activo, simbólico y material. A través de este, los estudiantes "se familiarizan críticamente con sistemas de pensamiento, reflexión y acción constituidos histórica y culturalmente" (Radford, 2018a, p. 75). En este proceso los estudiantes se encuentran con el otro (alteridad) y con lo otro (otredad) y se genera una oposición. El segundo, es un proceso "de creación continua de un sujeto histórico y cultural singular (único)" (Radford, 2018a, p.75). En este, se considera que los seres humanos son un proyecto de vida en perpetua creación. Así mismo, es el proceso en el que los estudiantes y el profesor llegan a ser presencia en el mundo, en donde se encuentra el contexto cultural e histórico.

Por último, la labor conjunta permite comprender la enseñanza y aprendizaje en el aula no como dos actividades separadas de profesor y estudiantes (Radford, 2018b, p. 13). La labor conjunta se concibe como una única y misma actividad. Esto quiere decir que el profesor no es quien posee el saber y lo transmite a sus estudiantes y estos últimos, no son sujetos pasivos que son receptores de lo que el profesor quiere entregarles. La TO propone actividades de clase en las que se promueva

el trabajo entre profesores y estudiantes con el propósito de realizar una obra en común. Por lo anterior, se entiende que "el aprendizaje no es más ni menos que la refracción en la conciencia del estudiante de esa obra común que él o ella ha contribuido a hacer aparecer en el aula" (Radford, 2018b, p. 14).

2.1. Pensamiento algebraico

De acuerdo con Radford, el pensamiento algebraico trata con cantidades no conocidas como si lo fueran. El tratamiento que se da a dichas cantidades se presenta de forma analítica de tal manera que, posibilita realizar deducciones desde información conocida para llegar a ciertos resultados (Vergel y Rojas, 2018).

El pensamiento algebraico es un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que ha sido refinado progresivamente a lo largo del tiempo. Además, es un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente. (Vergel y Rojas, 2018).

Además de la caracterización del pensamiento algebraico constituida por tres componentes propuesta por Radford (2010a): a) el sentido de indeterminancia; b) la analiticidad y c) la designación simbólica, este autor reconoce tres formas de pensamiento algebraico. Dichas formas se encuentran estrechamente relacionadas con los tres componentes mencionados y responden a una estratificación de los medios semióticos de objetivación que emergen durante la actividad y que son movilizados por los sujetos a través de gestos o movimientos:

1. *Pensamiento algebraico factual.* En esta escala los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. Aquí, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, dado que se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. En este estrato la indeterminancia queda implícita (Vergel y Rojas, 2018).

2. *Pensamiento algebraico contextual.* En este estrato, los gestos y las palabras son reemplazados por otros medios semióticos de objetivación entre las que se encuentran las

frases «clave». Aquí, la indeterminancia es explícita y se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica hecha por un estudiante es una descripción del término general, es decir, el estudiante trabaja con formas reducidas de expresión, por tanto, hay una evolución de nodos semióticos y es coherente pensar en la idea de contracción semiótica (Vergel y Rojas, 2018).

3. *Pensamiento algebraico simbólico.* Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ o $2n - 1$

De acuerdo con Radford, las tres formas de pensamiento algebraico mencionadas permiten comprender actuaciones, en cuanto a las estrategias y los procedimientos de los estudiantes, a través de los medios semióticos de objetivación que movilizan (gestos, palabras, ritmo) cuando resuelven tareas en el contexto de la generalización de patrones (Vergel y Rojas, 2018, p.53).

2.2. Generalización algebraica de patrones

Dentro de la TO la generalización algebraica de patrones puede ser entendida como observar algo que va más allá de lo que realmente se ve (Radford, 2008). En otras palabras, es establecer lo que es común o particular dentro una construcción y estar en la capacidad de verlo aun cuando perceptivamente no es evidente. Ahora bien, Radford (2013, p. 2) expone que "la generalización de patrones es considerada una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela" pues, entre otros aspectos, posibilita que los estudiantes se acerquen a situaciones de variación que son sustanciales para el desarrollo del pensamiento algebraico. De acuerdo con Radford (2013) la generalización algebraica de patrones se soporta bajo tres ideas:

1. Identificar u obtener una característica común o una comunalidad[1], la cual es notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo fenomenológico de observación sobres ciertos términos particulares (ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$).

[1] Comunalidad hace referencia a toda la información que puede ser importante para percibir o divisar un patrón.

2. La aplicación o generalización de esta comunalidad a todos los términos subsecuentes de toda la secuencia (ejemplo, $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots$).

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[2] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

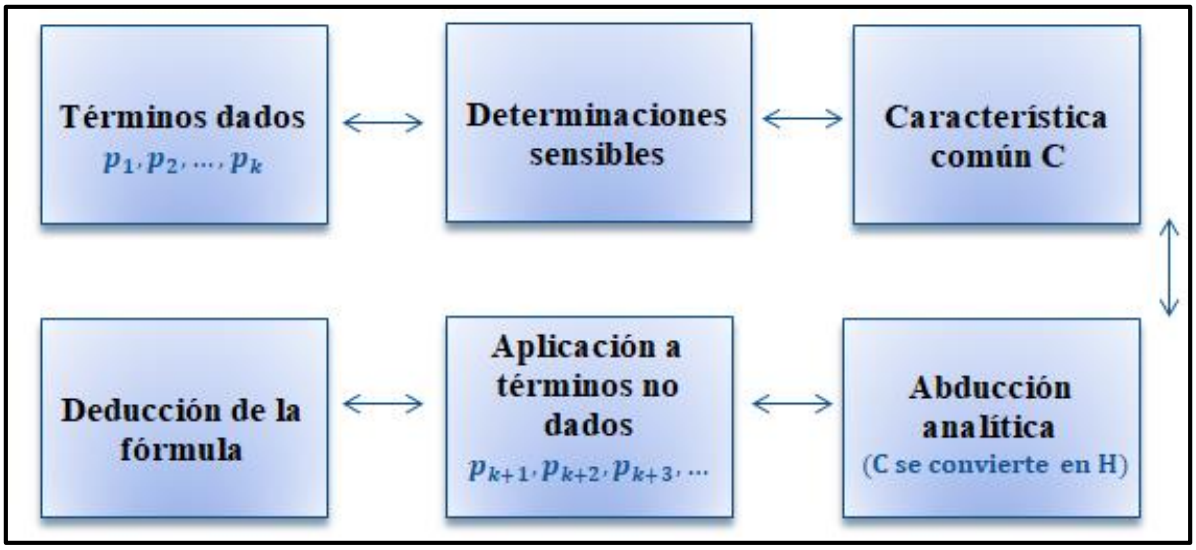


Imagen 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013, p.7).

Dentro de la generalización es posible encontrar diversos elementos que permiten expresar una generalización algebraica o una generalización aritmética. Un primer aspecto a considerar es la característica común que es identificada a partir de un número finito de figuras. Dicha característica común es generalizada a otras figuras de la secuencia que no están en el campo perceptual del estudiante. Ahora bien, la generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción.

La siguiente imagen, permite sintetizar las principales características de los dos tipos de generalización mencionados, en relación al proceso de abducción elaborado en cada caso.

[2] Énfasis en el original.

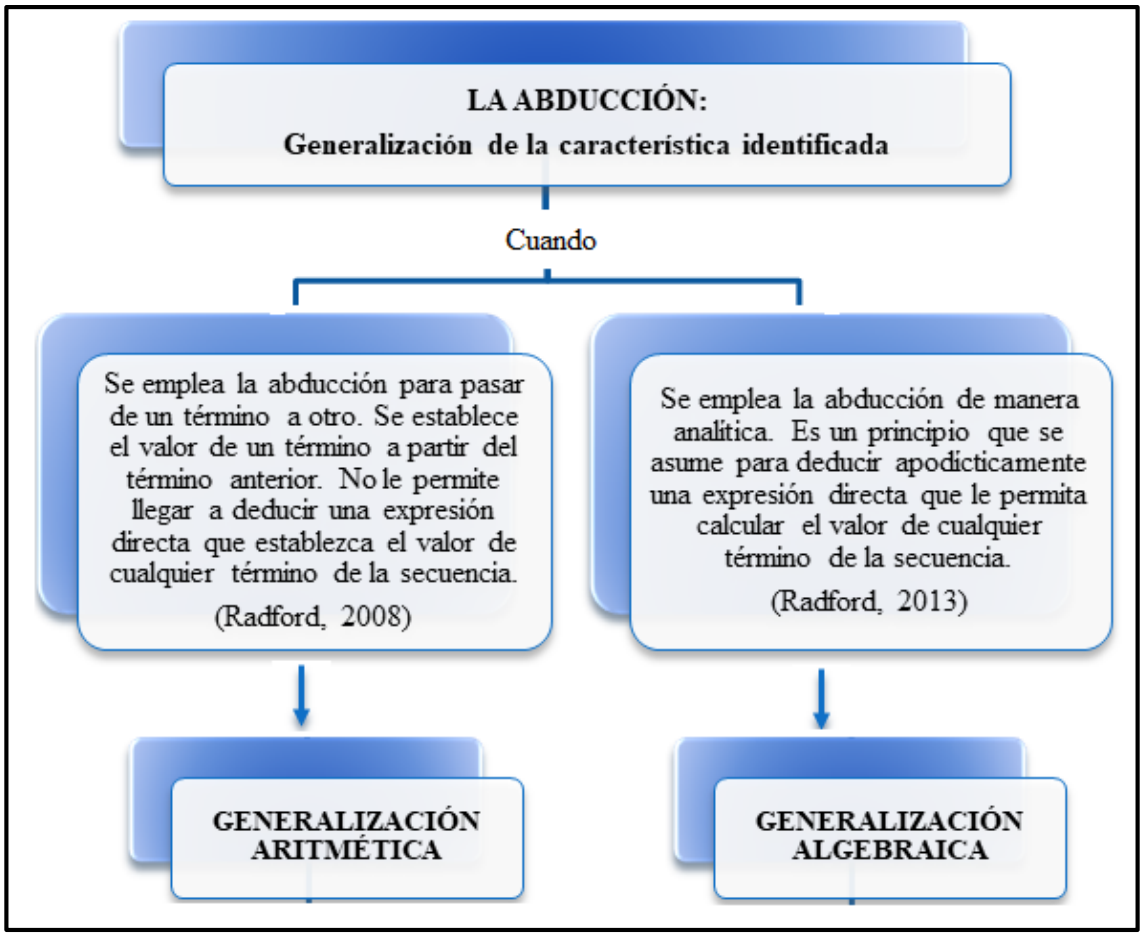


Imagen 2. El proceso de abducción en relación a los tipos de generalización.

Teniendo en cuenta lo anterior, Radford (2003) reconoce tres formas de generalización algebraica de patrones caracterizadas por los diferentes medios semióticos de objetivación que lo componen, a saber:

- *Generalización factual.* Es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, que está ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptiva como medios semióticos de objetivación. Además, en esta generalización lo general o lo indeterminado queda sin nombrar.

- *Generalización Contextual.* Esta generalización es más avanzada que la generalización factual, pues no solo generaliza las acciones numéricas sino también los objetos de las

acciones. Es importante mencionar, que la generalización contextual no alcanza el nivel de las generalizaciones simbólicas.

- *Generalización Simbólica.* En esta generalización se evidencian expresiones reducidas, empleando los símbolos alfanuméricos del álgebra. Con respecto a la indeterminancia queda explícita y enunciada de manera clara.

Es importante aclarar que es posible encontrar producciones matemáticas que no se encuentran definidas dentro las características mencionadas anteriormente.

2.3. Medios semióticos de objetivación

Desde la TO los artefactos y signos son vistos más allá de su concepción instrumental debido a que sobre ellos se deposita la historia cognitiva de generaciones predecesoras, radicando una responsabilidad histórica y cultural que los hace consustanciales con la actividad sobre la que se incluyen medios físicos y sensuales de objetivación diferentes a la escritura, dando así una forma corpórea y tangible al conocimiento (Radford, 2003).

La objetivación de los objetos matemáticos aparece vinculada a los esfuerzos mediados y reflexivos de los individuos que apuntan al logro de su actividad. Para ello, generalmente los individuos recurren a medios como manipular objetos, hacer dibujos, emplear gestos, hacer marcas, hablar, etc. Así, para alcanzar su objetivo los individuos combinan señales y dispositivos lingüísticos, con estos organizan sus acciones, brindan vías de desarrollo conceptual y alteran el funcionamiento de las mismas.

Resulta fundamental analizar los medios semióticos de manera integrada. Esto se debe a que la objetivación del saber resulta de una mediación multisemiótica, es decir, "se desarrolla en una interacción dialéctica de diversos sistemas semióticos" (Radford, 2005, p. 2). La conceptualización de los objetos matemáticos no se puede reducir a un solo medio semiótico de objetivación, al menos no en el aprendizaje, pues el significado matemático se da desde la interacción de diversos sistemas semióticos. Esta activación e interacción de varios medios semióticos para la producción de significados se conoce como *nodo semiótico,* este se considera "una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (el gesto, la palabra, la fórmula)

trabajan juntos para lograr la objetivación del saber" (Radford, 2005, p. 2). Se puede hablar de algunos niveles de los medios semióticos, dado que no desaparecen totalmente, se convierten en nodos semióticos que en la *contracción semiótica* evolucionan, en tanto que la sobriedad en el pensamiento está ligada a la manera como los recursos semióticos van evolucionando de fórmulas corpóreas hacia fórmulas más sofisticadas.

La importancia de los medios semióticos de objetivación radica en reconocer el papel que desempeñan en el desarrollo y manifestación del pensamiento matemático puesto que, con y a través de estos, se piensa convirtiéndose en elementos constitutivos de la actividad reflexiva con formas culturales de pensamiento.

Por lo expuesto se hace indispensable identificar y analizar cómo emergen, se caracterizan y evolucionan los medios semióticos en la actividad matemática realizada por los estudiantes, en este caso para caracterizar el papel de la analiticidad a partir de tareas sobre transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico en un contexto variacional.

2.4 Del lenguaje natural a la narrativa simbólica

Los estudiantes encuentran dificultades para reducir a lenguaje matemático las expresiones que entienden en lenguaje natural. "El primero no incluye adjetivos, adverbios y demás términos lingüísticos que resultan ser cruciales en la comunicación basada en lenguaje natural" (Radford, 2002, p.1). Entre las dificultades se encuentran los signos, estos obstaculizan la transformación de símbolos naturales en matemáticos porque los estudiantes no pueden operar estos símbolos debido al problema que tienen para designar objetos algebraicamente.

Los problemas de tipo verbal, entendidos como situaciones propuestas con un lenguaje natural y cotidiano. Por tal motivo se pretende que los estudiantes logren generar ese cambio de representación del lenguaje natural al lenguaje simbólico dado que los problemas de tipo verbal se mueven en un sistema de representación lingüística bajo una semiótica particular.

Dicho cambio es denominado transformación de problemas verbales a una narrativa simbólica. Según Radford (2002) se apela al término narrativa simbólica ya que lo que es "traducido" todavía

nos cuenta una historia, pero en símbolos matemáticos. Aunque hay similitudes entre el problema verbal y la narrativa simbólica, los personajes cambian.

En dicha transformación los signos son herramientas que se mueven en un sistema semiótico particular. La aparición de dichos signos no es causal de la solución de los problemas de tipo verbal, por tanto, los estudiantes pueden recaer en una inconsciencia respecto a los significados que las letras adquieren en ese contexto y lo que representan respecto al enunciado original. La construcción de esta narrativa requiere un enfoque nuevo y puede ser entendido desde varias perspectivas y no guarda un orden particular. En palabras de Radford (2002) el orden del discurso es diferente y el enfoque temático en la narrativa simbólica versa sobre otras cosas.

Capítulo 3

Metodología

3. Diseño de la investigación

Esta investigación se enmarca en un enfoque de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo. Según Vasilachis (2006), definir la investigación cualitativa depende de cuál sea el enfoque ya que, según sus concepciones acerca de la realidad social y respecto de aquello que construye una evidencia cuando se trata de conocerla, está ligada exclusivamente a una determinada forma de hacer investigación.

Sin embargo, distingue características de la investigación cualitativa según su interés:

> a) *Las características que se refieren a quién y qué se estudia:* la investigación cualitativa se interesa, en especial, por la forma en la que el mundo es comprendido, experimentado, producido; por el contexto y por los procesos; por la perspectiva de los participantes, por sus sentidos, por sus significados, por su experiencia, por su conocimiento, por sus relatos.
>
> b) *Las características que aluden a las particularidades del método:* la investigación cualitativa es interpretativa, inductiva, multimetódica y reflexiva. Emplea métodos de análisis y de explicación que son flexibles y sensibles al contexto social en el que los datos son producidos. Se centra en la práctica real, situada y se basa en un proceso interactivo en el que intervienen el investigador y los participantes.
>
> c) *Las características que se vinculan con la meta, con la finalidad de la investigación:* la investigación cualitativa busca descubrir lo nuevo y desarrollar teorías fundamentadas empíricamente y es su relación con la teoría, con su creación, con su ampliación, con su modificación y con su superación lo que la hace relevante. Intenta comprender, hacer al caso individual significativo en el contexto de la teoría, provee nuevas perspectivas sobre lo que se conoce, describe, explica, elucida, construye y descubre (Vasilachis, 2006, p. 4).

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio y la pregunta de investigación se encuentran enmarcados dentro de la perspectiva de la TO, el análisis de los datos se proyectó dentro de una concepción multimodal del pensamiento humano. Este tipo de análisis incorpora el cuerpo en el acto de conocer, lo cual es clave para esta investigación, pues aquí se toman los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes emplean cuando desarrollan ideas matemáticas (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). En este sentido, Arzarello (2006) plantea que el análisis multimodal debe tener en cuenta los diferentes recursos semióticos movilizados durante el desarrollo de las tareas (gestos, lenguaje hablado, lenguaje escrito, palabras, acciones, etc.). Así mismo, "debemos considerar que los actos de conocimiento por parte de los estudiantes incluyen diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., que llegan a ser partes integrales de los procesos cognitivos" (Vergel, 2014, p. 10). Dichas modalidades constituyen, según Arzarello (2006), la naturaleza multimodal de la cognición humana.

Desde este enfoque se construye una rica descripción del problema didáctico bajo estudio, es decir, de las formas de acción, expresión y reflexión asociadas a las formas de pensamiento algebraico de estudiantes al enfrentarse a una tarea sobre variación que involucran la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

De este modo y para direccionar el proceso de investigación se toma como referencia el ciclo (ver Imagen 3) inspirado en (Radford 2010a). Esta propuesta difiere del original en las fases tres y cuatro. En el enfoque propuesto por Radford la tercera fase consiste en la interpretación de los datos y la cuarta fase hace referencia a la generación de teoría.

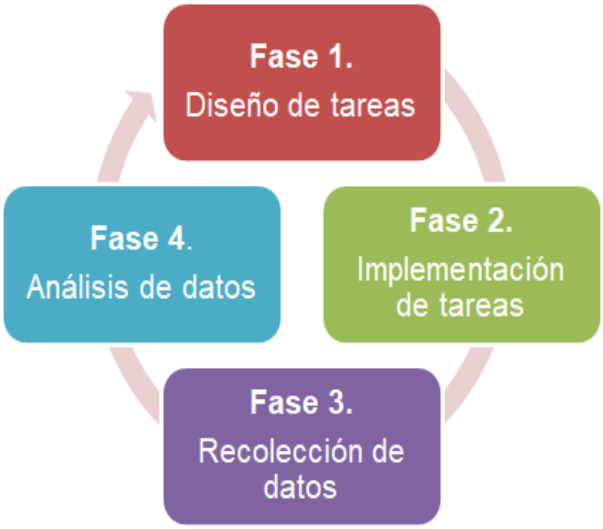


Imagen 3. Fases de ejecución del diseño metodológico.

Las dos tareas propuestas se desarrollaron en el primer semestre del año 2021, momento en el que, por causa de la pandemia COVID-19 Colombia y específicamente, Bogotá y sus alrededores continuaba cumpliendo con diversas medidas para controlar el contagio: cuarentenas estrictas, pico y cédula, restricciones a la movilidad, etc. Lo anterior influyó en la modalidad que adoptaron los colegios para desarrollar los espacios pedagógicos. En particular, el colegio al que pertenecen los estudiantes con quienes se desarrolló la investigación, decidió continuar la formación de manera virtual, abriendo la posibilidad de adoptar un modelo híbrido (presencialidad y virtualidad), el cual no era seguro que se diera por las condiciones descritas. Dado esto, para garantizar la obtención de datos relevantes, decidimos proponer la solución de las dos tareas de forma virtual a través de la elaboración de videoclips por parte de cada estudiante y la participación en foros grupales virtuales. Lo anterior haciendo uso de diferentes recursos de G-Suite (Drive, Meet, Chat, etc.).

Para dar mayor claridad al proceso de nuestra investigación describiremos en forma general el proceso realizado para la obtención de los resultados de las dos tareas.

En octubre del año 2020 diseñamos las tareas y las sometimos a revisión por parte de nuestro asesor. Posterior a ello en noviembre del mismo año, realizamos el pilotaje con cuatro estudiantes que oscilaban entre los 10 y los 12 años. El pilotaje mencionado nos ayudó a realizar los ajustes descritos más adelante en este capítulo. Para ese momento la fuente de información serían

estudiantes de grado séptimo de un colegio público de Bogotá, sin embargo, por temas de traslado de una de las investigadoras, tuvimos que empezar el proceso de autorización de observación en otro colegio. Para el mes de enero de 2021 comenzamos la gestión para lograr dicha autorización, pero dadas las circunstancias mencionadas este proceso tardó casi un mes.

En el mes de marzo de 2021 se confirmó la participación de ocho estudiantes de un colegio privado. Se llegó a esta cantidad de estudiantes dado que fueron quienes cumplieron con los criterios solicitados en cuanto a tener su carpeta de Drive completa con el videoclip y las hojas de trabajo correspondientes a cada tarea. Dicho colegio cuenta aproximadamente con 1000 estudiantes, un rector, un director curricular, cuatro directores docentes y ocho jefes de departamento. Además, tiene jornada única, está ubicado en Cota, Cundinamarca y la mayoría de sus estudiantes pertenecen a los estratos 3, 4 y 5.

Para lograr la participación de los estudiantes primero se tuvo una reunión con el jefe de departamento para contarle el propósito de la investigación. Luego de ello, se envió una carta de solicitud a Dirección Curricular para que diera el aval de acuerdo con el cumplimiento de protocolos establecidos por el colegio.

Después de lograr la autorización, se inició con la aplicación y desarrollo de las dos tareas. Para ello, se realizó por cada tarea una sesión con los estudiantes en la que se socializaban las preguntas y se verificaba su comprensión, otra sesión para la grabación de los videoclips y una última sesión para el desarrollo del foro grupal virtual.

Respecto a la información recolectada y en concordancia con lo que establece el análisis multimodal (ver imagen 12), se tiene:

1. Dos carpetas en Drive, cada una con 8 videoclips en los que los estudiantes desarrollan y explican las tareas No. 1 y No. 2.

2. Dos carpetas en Drive, cada una con las hojas de trabajo de los estudiantes (algunas escaneadas, otras son digitales)

3. Dos grabaciones de las sesiones del foro grupal virtual desarrolladas al terminar cada una de las tareas.

4. Dos PDF de la pizarra colaborativa (Padlet) correspondientes a las participaciones de los estudiantes sobre el último punto de cada tarea.

5. Transcripciones de fragmentos de las participaciones de los estudiantes en los videoclips y en los foros virtuales que serán citados conforme a la Etapa 3: transcripción de los videoclips.

3.1 Fase 1: diseño de tareas

Las tareas que planteamos están encaminadas hacia la generalización algebraica de patrones. La tarea No. 1 es una secuencia figural con apoyo tabular y la tarea No. 2, una secuencia numérica con apoyo tabular. La primera tarea plantea la sucesión $a_n = (2n),\ n \in N$ y la segunda tarea plantea la sucesión $a_n = (3n-1), n \in N$

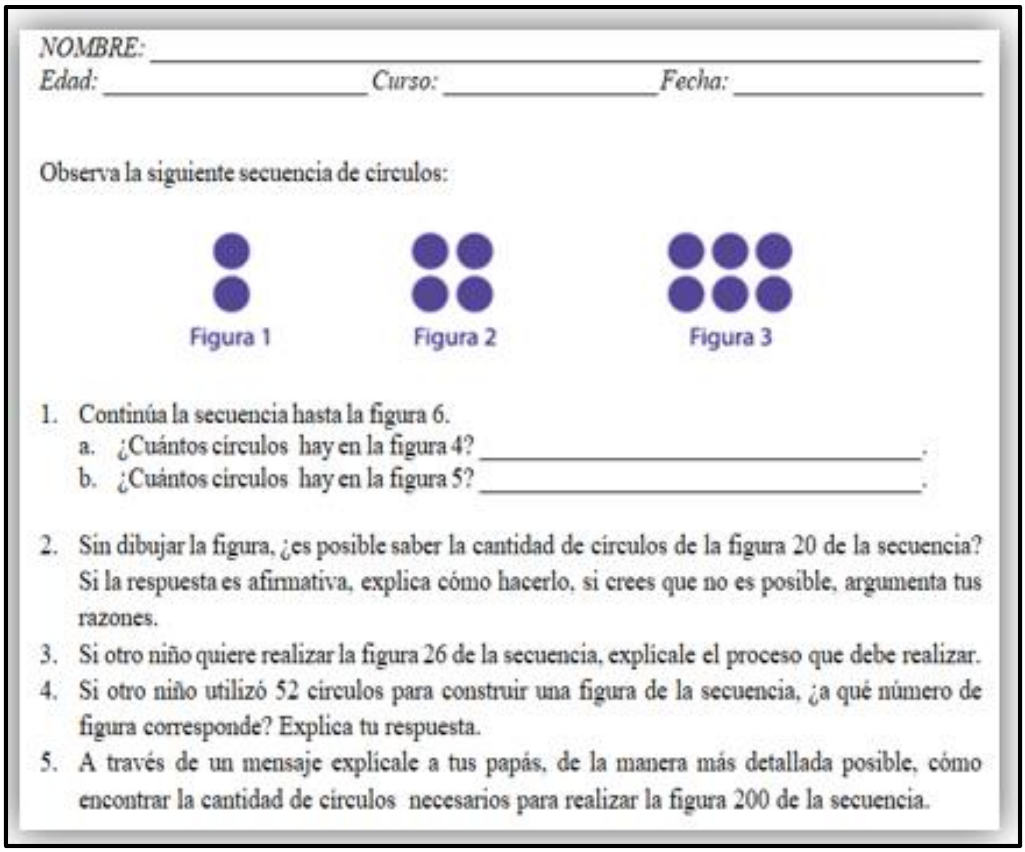
El diseño de dichas tareas está orientado a generar espacios de participación para que los estudiantes expresen sus puntos de vista, posibilitar la indagación sobre los recursos semióticos que los estudiantes usan para la solución de las preguntas y, por último, abrir espacios de participación (foros dirigidos por la profesora) en los que los estudiantes participen, se escuchen y tomen postura frente a las respuestas.

3.1.1 Pilotaje de las tareas

El pilotaje se aplicó a cuatro estudiantes de edades comprendidas entre los 10 y 12 años, de los grados quinto, sexto y séptimo en el mes de noviembre de 2020. El objetivo de este era detectar la emergencia de algunos recursos semióticos de objetivación, refinar las preguntas que se plantearon y prever ciertas dificultades asociadas con la configuración de las secuencias propuestas. Se debe aclarar que los cuatro estudiantes desarrollaron de manera individual las dos tareas y se pidió grabación en video mientras las hacían. Lo anterior, obedeciendo a la situación de cuarentena que se estaba viviendo por el COVID19 y la imposibilidad de hacer el ejercicio en forma presencial. Los cuatro estudiantes son niños cercanos a nuestras familias y se les dieron unas indicaciones sencillas (por videollamada) para la grabación de dicho video: debían hacerlo de tal manera que se viera la mayor parte de su cuerpo, imprimir la hoja de trabajo y solucionarla con bolígrafo y hacer una explicación detallada de todo lo que para ellos podría ser la solución de cada

una de las preguntas propuestas. Para cumplir con lo anterior, los estudiantes hicieron uso de una sola sesión y grabaron en tiempos extracurriculares.

A continuación, se presentan algunos resultados del pilotaje de las tareas propuestas. En la imagen 4 se observan las preguntas propuestas en la tarea No. 1 del pilotaje. Con esta se buscaba indagar si la redacción utilizada era comprensible para los estudiantes y si la información proporcionada era suficiente para solucionar cada una de las preguntas:



NOMBRE: _____

Edad: _____ *Curso:* _____ *Fecha:* _____

Observa la siguiente secuencia de circulos:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la secuencia hasta la figura 6.
   a. ¿Cuántos círculos hay en la figura 4? _____.
   b. ¿Cuántos círculos hay en la figura 5? _____.
2. Sin dibujar la figura, ¿es posible saber la cantidad de círculos de la figura 20 de la secuencia? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.
3. Si otro niño quiere realizar la figura 26 de la secuencia, explícale el proceso que debe realizar.
4. Si otro niño utilizó 52 círculos para construir una figura de la secuencia, ¿a qué número de figura corresponde? Explica tu respuesta.
5. A través de un mensaje explícale a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar la figura 200 de la secuencia.

Imagen 4. Pilotaje tarea No. 1. Secuencia figural con apoyo tabular.

En la imagen 5 se puede observar el desarrollo de la primera pregunta. En dicho desarrollo los estudiantes identifican la comunalidad o característica común de la secuencia (Radford, 2013), esto les permite realizar los dibujos correspondientes a las figuras 4, 5 y 6 e indicar la cantidad de círculos en cada caso.

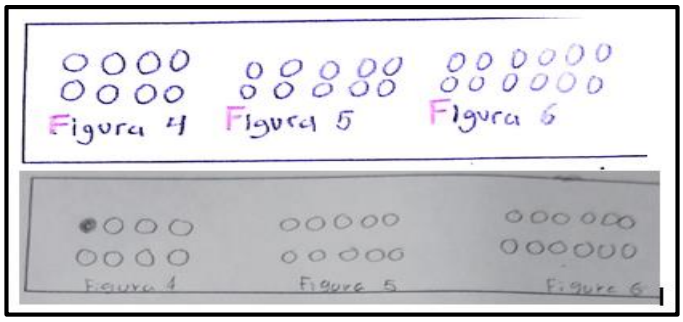


Imagen 5. Pilotaje. Respuesta de los niños a la primera pregunta de la tarea No. 1.

Además de lo anterior, en el intento de encontrar las figuras 4, 5 y 6 de la secuencia se observó el acompañamiento de gestos con las formas de expresión oral. Así, en la imagen 6 se observan los señalamientos con los dedos, con el lápiz, las figuras y trayectorias con las manos que realizaron los estudiantes para resolver la primera pregunta. Lo anterior siempre se presentó acompañado de expresiones orales o escritas. Aquí, es importante resaltar la utilidad que tuvo la configuración geométrica para la emergencia de estos recursos semióticos y dar sentido a las maneras de organizar la información.

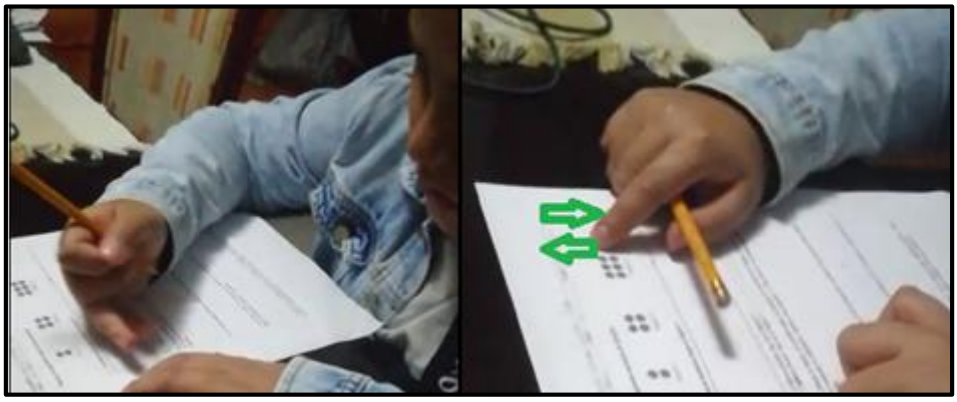
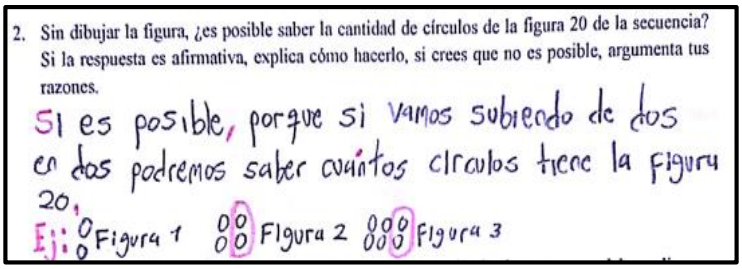


Imagen 6. Pilotaje. Uso de gestos con los dedos, con el lápiz y trayectorias con la mano.

En la imagen 7 se muestra que, para la solución de la segunda pregunta, uno de los estudiantes movilizó una frase clave como recurso semiótico de objetivación. En esta solución la indeterminancia es implícita: *"vamos subiendo de dos en dos"* acompañada por el encerramiento de los dos círculos de manera vertical.

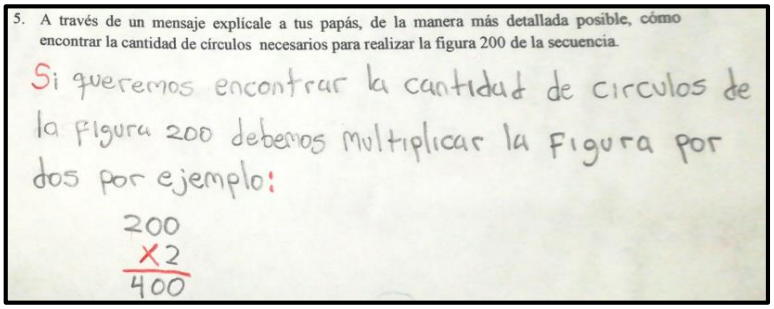

2. Sin dibujar la figura, ¿es posible saber la cantidad de círculos de la figura 20 de la secuencia? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.

Si es posible, porque si vamos subiendo de dos en dos podremos saber cuántos círculos tiene la figura 20,

Ej: Figura 1 Figura 2 Figura 3

Imagen 7. Pilotaje. Movilización del gesto de un niño encerrando dos círculos de la figura 2 y 3 de la secuencia.

Con respecto a la quinta pregunta (Imagen 8) uno de los estudiantes hace uso de la frase *"multiplicar la figura por dos"* realizando una descripción del término general de forma aritmética.


5. A través de un mensaje explícale a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar la figura 200 de la secuencia.

Si queremos encontrar la cantidad de circulos de la figura 200 debemos multiplicar la figura por dos por ejemplo:

200
×2
400

Imagen 8. Pilotaje. Uso de recursos semióticos de objetivación tales como frases "clave", para describir el término general.

Teniendo en cuenta esta respuesta, se puede hablar de una generalización aritmética. Esto, dado que emplea la abducción para pasar de un término al siguiente y no para deducir una fórmula que permita calcular la cantidad de círculos de cualquier figura (Radford, 2013). Es por esto que podemos decir que capturar la regularidad no es suficiente para garantizar una generalización algebraica y podemos enriquecer esta tarea indagando, por ejemplo, por la cantidad de círculos de la figura 1000 o 2000 con el fin de ver cómo se usa la comunalidad y, si la usan para deducir, qué es lo que deducen.

NOMBRE: _____

Edad: _____ *Curso:* _____ *Fecha:* _____

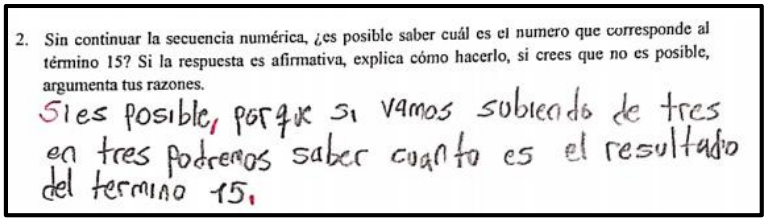
Teniendo en cuenta la siguiente secuencia de números:

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

1. Continúa la secuencia numérica hasta el término 6
2. Sin continuar la secuencia numérica, ¿es posible saber cuál es el número que corresponde al término 15? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.
3. Si otro niño quiere encontrar el término 100 de la secuencia numérica, explícale el proceso que debe realizar.
4. ¿A qué término corresponde el número 179 en la secuencia? Explica tu respuesta.
5. Si otro niño piensa en el número 503. ¿Éste número pertenece a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.
6. A través de un mensaje explícale a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar el número que corresponde al término 200 de la secuencia.

Imagen 9. Tarea No. 2. Secuencia numérica.

Para abordar la segunda pregunta de esta tarea, uno de los estudiantes logró concebir una generalización. En específico, percibió que los términos son diferentes numéricamente y que entre un término y el siguiente hay un aumento de tres unidades (Imagen 10). Esta propiedad común fue aplicada a los siguientes términos. Aunque tal procedimiento es operacional para los primeros términos, él mismo notó dificultades al momento de tratar de averiguar el número correspondiente para términos como el 100 y el 200. Este procedimiento de generalización fue aritmético (Radford, 2013).


2. Sin continuar la secuencia numérica, ¿es posible saber cuál es el numero que corresponde al término 15? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.

Si es posible, porque si vamos subiendo de tres en tres podremos saber cuanto es el resultado del termino 15.

Imagen 10. Pilotaje, tarea No. 2. Respuesta de un estudiante a la pregunta dos.

Así mismo, en la imagen 11 se destaca la capacidad de generalizar de dos estudiantes al realizar una aproximación al término general de una secuencia dada.

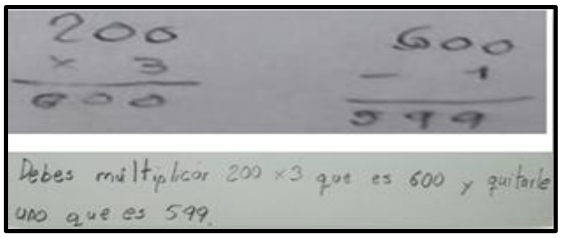


Imagen 11. Pilotaje. Descripción del término general.

3.1.1.1 Algunas consideraciones

- Al observar el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes se considera que las preguntas e instrucciones son claras.
- Se considera que la falta de interacción con otros estudiantes influye de manera importante en el desarrollo de las tareas, ya que no se da un escenario en el que los estudiantes puedan escuchar y ser escuchados por otros que están haciendo la misma tarea. Para darle solución a esto se hará un foro virtual al finalizar cada una de las tareas, de tal manera que los estudiantes puedan interactuar y tomar posición frente a las intervenciones de sus compañeros.
- De acuerdo con las tres formas de pensamiento algebraico reconocidas por Radford se considera que en el desarrollo de las dos tareas propuestas los estudiantes, al parecer, manifiestan características del pensamiento algebraico factual en el que se movilizan medios semióticos como gestos, movimientos y palabras que hacen pensar que existe la idea de indeterminancia por las acciones concretas que realizan.

3.2 FASE 2: implementación de las tareas

Teniendo en cuenta que esta investigación se ha desarrollado durante la pandemia (años 2020 y 2021), se debe aclarar que la mayoría de instituciones educativas de la ciudad de Bogotá, Colombia, se encontraban trabajando en modalidad virtual con apoyo de herramientas tecnológicas. Esto hizo que se contemplaran dos alternativas para desarrollar la fase dos, dada la dificultad que podría representar tener una fuente de información de forma presencial.

Plan A Alternancia: aplicar las tareas en aula a estudiantes de séptimo grado.

Plan B Virtualidad: aplicar las tareas a estudiantes de séptimo grado a través de la modalidad virtual, de manera individual y con foros grupales.

En ambos casos se realizarían entrevistas semi-estructuradas que aportaran elementos que permitieran dar respuesta a la pregunta de investigación.

Dados los planes anteriores, se optó por el plan B para la aplicación de las dos tareas. Dicho esto, se tuvo en cuenta el análisis multimodal en el que se contemplan videos del desarrollo de las mismas por parte de los estudiantes.

En el mes de abril se dio inicio a la implementación de las dos tareas en la institución educativa privada Colegio Bilingüe José Max León, con 9 estudiantes de séptimo grado cuyas edades están entre los 12 y 14 años.

Durante esta fase se presentaron algunas limitaciones[3], esto dio paso a la elaboración de videoclips por parte de los estudiantes acompañados por sus hojas de trabajo (desarrolladas de forma física y/o digital) y la participación en los foros virtuales y en una pizarra colaborativa (padlet). Para el desarrollo de dichos foros se tuvo como base algunas preguntas semi-estructuradas elaboradas a partir de hallazgos en los videoclips y las hojas de trabajo de los estudiantes (ver anexo 3).

3.3 FASE 3: recolección de datos

Para la recolección de los datos, se tuvo en cuenta el modelo implementado por Radford (2015) descrito en la imagen 12 que se compone de cuatro etapas: grabación en video, obtención de hojas de trabajo, transcripción de videos y análisis de videos y de hojas de trabajo. Lo anterior permitió recolectar evidencia de la producción oral y escrita de los estudiantes. Así mismo, se tuvieron en cuenta los gestos, las señales y las operaciones usadas para dar solución a las tareas.

[3] No se pudo ejecutar el *plan A:* aplicar las tareas en alternancia, teniendo en cuenta las restricciones de bioseguridad y cuarentenas obligatorias implementadas por el distrito en el mes de abril, como consecuencia de la emergencia sanitaria COVID-19, así que se decidió llevar a cabo el *plan B:* aplicar las tareas a través de la modalidad virtual, inicialmente de manera individual (con la elaboración de videoclips por parte de los estudiantes) y posteriormente con foros (según espacio asignado en la jornada escolar de los estudiantes).

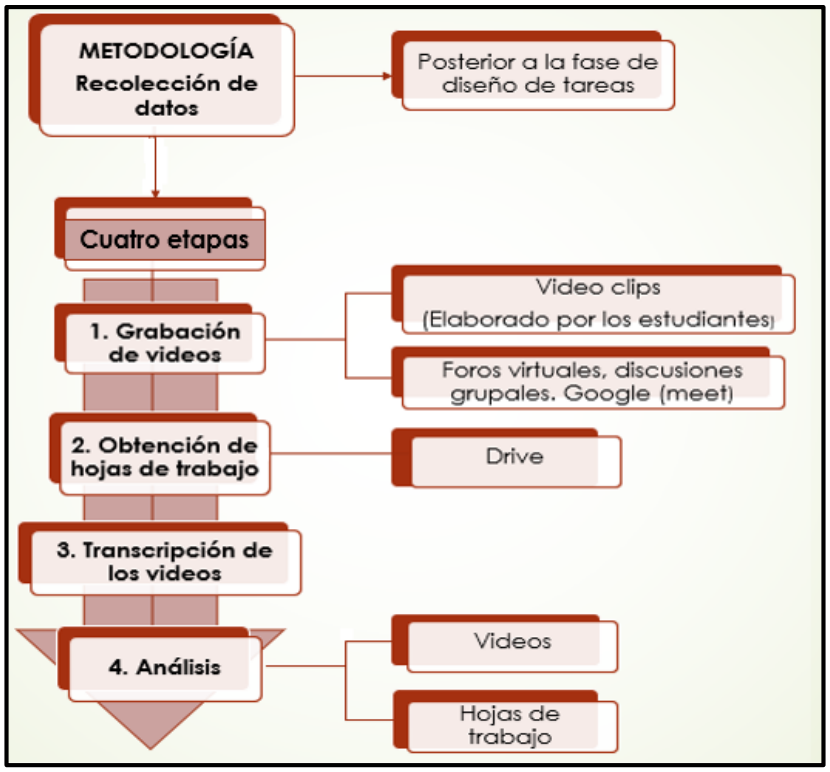


Imagen 12. Etapas de recolección de datos.

3.3.1. Etapa 1: grabación de video

Para el desarrollo de esta etapa, se tienen los videoclips elaborados por los estudiantes resolviendo las tareas No. 1 y No. 2 ubicados en una carpeta de Drive (por estudiante) diseñada para tal fin. Para la grabación de estos videos se dieron algunas indicaciones sencillas a través de una videollamada en la que se pedía a los estudiantes grabarse en un entorno claro, libre de ruido y tranquilo; no sólo debía aparecer su cara, en lo posible la mayor parte de su cuerpo; debían imprimir la hoja de trabajo y solucionar las preguntas con bolígrafo; no había un mínimo de tiempo de grabación, pero no debía superar, en lo posible, 30 minutos. Además, se sugirió no hacer edición de las producciones. Así mismo, se tuvieron en cuenta las grabaciones de los foros que se realizaron en modalidad virtual con el grupo de los estudiantes participantes. Estos foros se desarrollaron con la ayuda de la aplicación de videoconferencias de Google (Meet).

3.3.2. Etapa 2: obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante

Cada estudiante subió, junto con el videoclip correspondiente, las hojas de trabajo escaneadas de ambas tareas. Se debe aclarar que los estudiantes debieron solucionar dichas tareas con bolígrafo,

sin borrar o hacer tachones o enmendaduras (para quienes lo hicieron en hoja física). Estas hojas se subieron inmediatamente después de terminar cada una de las sesiones a la carpeta de Drive mencionada (distinta por cada tarea). Esta organización se realizó para facilitar el acceso tanto a los videos como a las imágenes de las hojas de trabajo de cada estudiante.

3.3.3. Etapa 3: transcripción de los videoclips

Se han transcrito fragmentos de los videoclips elaborados por los estudiantes de las dos tareas que representan un dato relevante respecto a la pregunta problematizadora y los objetivos planteados en esta investigación. Así mismo, se han transcrito fragmentos representativos de los foros que se realizaron sobre ambas tareas. Con el fin de darle claridad a dichas transcripciones se tuvo en cuenta la propuesta por Vergel (2015) hecha para tal fin, sin embargo, se hicieron algunas modificaciones dado la modalidad de videoclips desarrollada para obtener la información:

- Los discursos presentados por las participaciones de los estudiantes en los videoclips individuales serán caracterizados con las iniciales de su nombre y apellido más un número que hará alusión a la intervención (e.g., JFN#, ML#, MM#, …). Dado esto, se tiene en cuenta la siguiente tabla:

Tabla 1. Convenciones utilizadas para describir las participaciones de los estudiantes en los videoclips individuales.

PARTICIPANTE	**CONVENCIÓN**
MELANIE LAVERDE	ML
MARIANA MONDRAGÓN	MM
TATIANA RÍOS	TR
MARIANA VALENCIA	MV
JUAN FELIPE NIETO	JFN
ANA SOFÍA ANGULO	ASA
CAMILO CASTAÑEDA	CC

- Los discursos presentados por las participaciones de los estudiantes y la profesora en los foros serán caracterizados por líneas (e.g., L1, L2, …), cada una de las cuales indica la ocasión en la que un participante habló.
- Si en los foros un grupo de estudiantes responde al mismo tiempo, se escribirá "Estudiantes en coro".
- Si lo dicho por el estudiante fue acompañado de algún gesto o de algún símbolo escrito, esto se escribirá entre corchetes ([…]).
- Algunas palabras aclaratorias que servirán para dar coherencia a las locuciones de cada participante serán también escritas entre corchetes.
- Los puntos suspensivos (…) serán utilizados para indicar breves pausas hechas por parte de los estudiantes y de la profesora durante sus participaciones.
- La numeración de las participaciones en los videoclips individuales iniciará al cambiar de tarea.

3.3.4. Etapa 4: análisis de videoclips y hojas de trabajo

Se realizó un análisis multimodal de los datos obtenidos. Según Arzarello (2006) para dicho análisis multimodal se debe tener en cuenta la relación de diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad.

De acuerdo con los objetivos de esta investigación y siendo coherentes con la teoría bajo la cual se suscribe, se hace indispensable identificar y analizar cómo emergen, se caracterizan y evolucionan los recursos semióticos en la actividad matemática realizada por los estudiantes, en este caso, para caracterizar el papel de la analiticidad a partir de tareas sobre transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico en un contexto variacional.

Capítulo 4

Análisis multimodal

4. Introducción

En este capítulo realizamos el análisis de dos tareas, la primera, una secuencia figural con apoyo tabular y la segunda, una secuencia numérica con apoyo tabular. Esto, teniendo en cuenta la naturaleza de nuestra investigación y la pregunta problema formulada en el primer capítulo.

Nuestro análisis se fundamenta en la perspectiva de la teoría de la objetivación y, por tanto, se basa en una concepción multimodal del pensamiento humano (Radford, Edwards & Arzarello, 2009), en la que se resalta la inclusión del cuerpo en el acto de conocer, por tanto, en dicha concepción es clave la consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Teniendo en cuenta lo anterior, este análisis se realiza a partir de las producciones de un grupo de estudiantes de grado séptimo a la hora de abordar los procesos de generalización en tareas con un contexto variacional, tomando como categoría de análisis la analiticidad y como subcategorías de análisis los recursos semióticos de objetivación a los cuales acuden los estudiantes para dar solución a las tareas propuestas.

Con el fin de describir e interpretar las generalizaciones realizadas por los estudiantes se tuvo en cuenta los siguientes aspectos, para relacionarlos con los objetivos planteados en esta investigación:

- Los recursos semióticos que usaron para solucionar las tareas. Esto es, lo que dijeron, lo que escribieron, los gestos que realizaron y en general a todo lo que acudieron para solucionar las tareas.

- La forma en la que trabajaron con los objetos indeterminados, identificando el carácter operatorio de los mismos.

- Las clases de generalización que emergieron de acuerdo con lo descrito en el marco teórico de esta investigación.

Estos aspectos permitieron evaluar la naturaleza del componente analiticidad en las producciones de los estudiantes y determinar si las generalizaciones realizadas eran de carácter aritmético o algebraico. Por ello, se analizó el proceso de abducción de los estudiantes que en la mayoría de casos les permitió establecer los términos requeridos en cada tarea. Entonces, los recursos semióticos usados por los estudiantes y la manera cómo emergió el componente analiticidad, mostraron el tipo de generalización alcanzado por los mismos. Es importante aclarar que los datos de investigación se constituyeron gracias a la observación y análisis de las evidencias enumeradas más arriba, a saber: 1. Drive con videoclips; 2. Drive con hojas de trabajo; 3. Grabaciones de foros; 4 .PDF de padlet; y 5. Transcripciones de los fragmentos.

Para comenzar con el análisis, mostrar la producción de los estudiantes y la interpretación realizada, primero describimos la tarea No. 1, explicando la intención de cada una de las preguntas (ver tabla 2). Luego, se exponen algunas generalidades encontradas en la tarea mencionada y se termina con la descripción e interpretación de casos específicos (Ana Sofía, Juan Felipe y Camilo). Aclaramos que para mostrar los aspectos relevantes del desarrollo de la tarea No. 2 se siguió el mismo orden.

Cada una de las tareas fue abordada por los estudiantes de manera individual a través de la grabación de videoclips, acompañados por sus hojas de trabajo que en algunos casos fueron desarrolladas de forma digital. Luego de esto, se dio la participación de los estudiantes en un foro virtual cuya finalidad era la interacción y la comunicación de diferentes propuestas de solución. Así mismo, durante el foro se propuso la elaboración de un padlet para complementar las respuestas de la solicitud cinco.

4.1 Tarea 1: secuencia figural con apoyo tabular.

La primera tarea tenía dos propósitos generales. Por una parte, familiarizar a los estudiantes con las tareas de generalización de patrones y con los procesos que ella implica como observar, relacionar, identificar características comunes en las figuras dadas, identificar lo que cambia de una figura a otra, lo que no cambia y, en segundo lugar, caracterizar la naturaleza del componente analiticidad a medida que se avanza en la tarea.

Esta tarea se conformó por cinco preguntas cada una de ellas con una intención, como se relaciona en la Tabla 2.

Tabla 2. Intención de cada pregunta tarea No. 1.

TAREA No. 1. ***Secuencia figural con apoyo tabular***			
NATURALEZA COMPONENTE ANALITICIDAD	**ITEM**	**SOLICITUD**	**INTENCIÓN**
	1	Continúa la secuencia hasta la figura 6. ¿Cuántos círculos hay en la figura 4? ¿Cuántos círculos hay en la figura 5?	Establecer si el estudiante reconoce la estructura geométrica espacial de las figuras de la secuencia.
	2 y 3	Sin dibujar la figura, ¿es posible saber la cantidad de círculos de la figura 20 de la secuencia? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones. Si otro niño quiere realizar la figura 26 de la secuencia, explícale el proceso que debe realizar.	Evidenciar los procesos de generalización que realiza el estudiante para determinar la cantidad de círculos de figuras cercanas.
	4	Si otro niño utilizó 52 círculos para construir una figura de la secuencia, ¿a qué número de figura corresponde? Explica tu respuesta.	Evidenciar cómo el estudiante invierte el proceso de generalización elaborado para figuras cercanas.
	5	A través de un mensaje explícales a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar la figura 200 de la secuencia.	Evidenciar los procesos de generalización que realiza el estudiante para determinar la cantidad de círculos de figuras lejanas. Movilizar otros medios semióticos de objetivación para que los estudiantes lograran nombrar explícitamente lo indeterminado y operar con él.

La secuencia propuesta para la tarea No. 1 se genera a partir del término general $2n$ con $n = 1,2,3,4, \ldots$



Imagen 13. Secuencia figural con apoyo tabular presentado en la tarea No. 1.

Pretendíamos lograr que los estudiantes produjeran una explicación que mostrara indicios de alguna generalidad en relación con la manera de construir figuras lejanas. Más específicamente,

queríamos invitarlos a producir una generalización de la característica común, a los términos subsecuentes de la secuencia, esto es, a plantear una abducción (Radford, 2013). Mostramos a continuación algunas generalidades encontradas en la tarea No. 1, posterior a esto, se darán a conocer las producciones de Ana Sofía, Juan Felipe y Camilo en tanto las consideramos representativas.

Generalidades encontradas en la tarea No. 1.

En el desarrollo de esta tarea la mayoría de los estudiantes hizo uso de gestos (mirar hacia arriba, tocarse la cabeza, poner las manos en su cara, etc.) y expresiones para llegar a la respuesta de cada una de las preguntas: "*figura 1: 1 por 2*", "*el número de la figura por dos*" o "*la figura 20 sería 20 por 2*". Estas expresiones dan cuenta de la designación de la indeterminancia como parte del discurso de los estudiantes. Lo anterior se evidencia en las hojas de trabajo de los estudiantes, a continuación, algunos ejemplos:

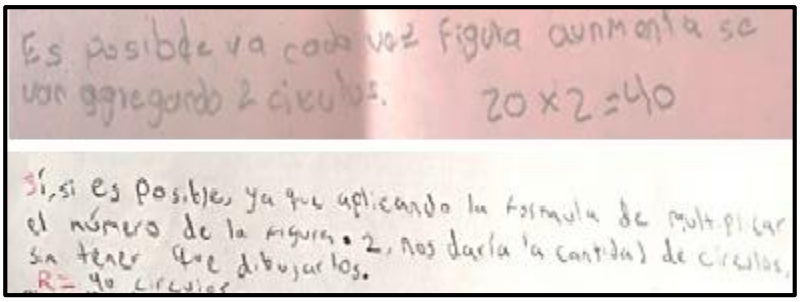


Imagen 14. Expresiones reducidas usadas por los estudiantes.

Tal como se ve en la imagen 14, con este tipo de expresiones "*cada vez la figura aumenta*", "*se va agregando círculos*", los estudiantes manifiestan además de la indeterminancia como objeto de discurso mencionado, una forma de pensamiento algebraico denominado contextual. En el pensamiento contextual: "Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso" (Vergel, 2014, p. 80). Además, en esta generalización contextual se da un nivel más avanzado respecto a la generalización factual, porque van más allá de las figuras particulares y se tratan objetos genéricos (el número de la figura).

Continuando con el análisis, encontramos que la mayoría de los estudiantes hizo uso de otro recurso semiótico llamado señalamiento, esto para dar a entender que comprenden la estructura de la secuencia y, por tanto, manifiestan tener capacidad de encontrar el número de la figura que se indague. Al respecto incluimos el registro fotográfico que muestra dicho recurso semiótico.

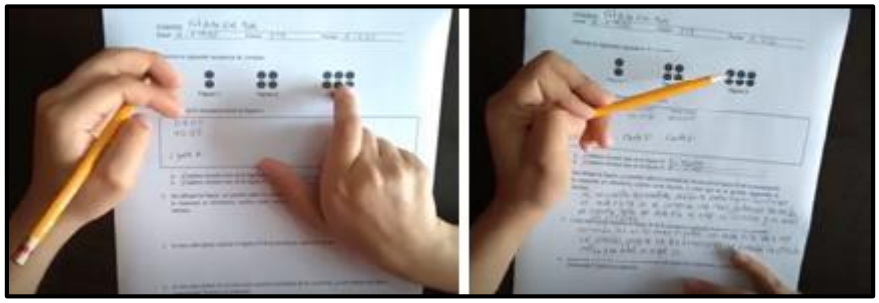


Imagen 15. Señalamientos.

De acuerdo con la imagen 15, observamos que el señalamiento, como recurso semiótico les permitió a los estudiantes tomar conciencia de la característica en común que tiene la secuencia. Este recurso semiótico es evidente en la imagen cuando la estudiante señala con sus dedos o con el lápiz la estructura espacial de la secuencia tal como se observa.

En el recorrido de este análisis encontramos, además, como caso particular algunas respuestas de Melanie, una estudiante que no tuvo en cuenta la estructura espacial de la secuencia, sin embargo, con el desarrollo en su hoja de trabajo de manera escrita y la explicación verbal da cuenta de la estructura de la secuencia. Veamos su construcción:

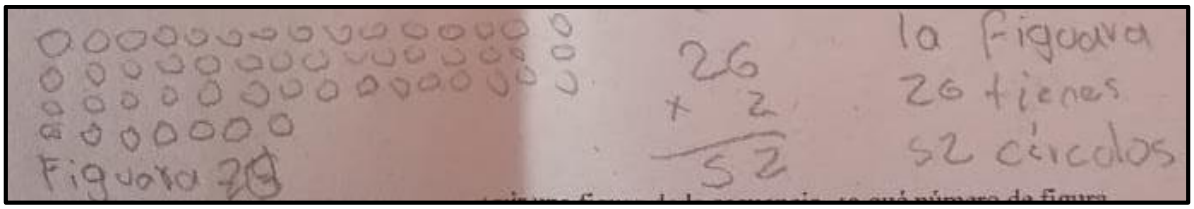


Imagen 16. Estructura espacial.

En la producción de Melanie, (imagen 16), observamos que en la parte izquierda no hay dos filas (tal como se observó en los trabajos de otros estudiantes), sino que hay un conjunto de círculos que cumplen con el resultado que ella encontró en la multiplicación. Eso implica que a pesar de que Melanie no tiene en cuenta la estructura espacial de la secuencia, logra hacer uso de la característica en común para hallar la cantidad de círculos que se solicitan.

La mayoría de los estudiantes hacen conciencia sobre la característica en común que tienen los términos de la secuencia y hacen uso de ella para encontrar los siguientes términos. Un ejemplo de esto, es el mensaje redactado por Mariana Mondragón:

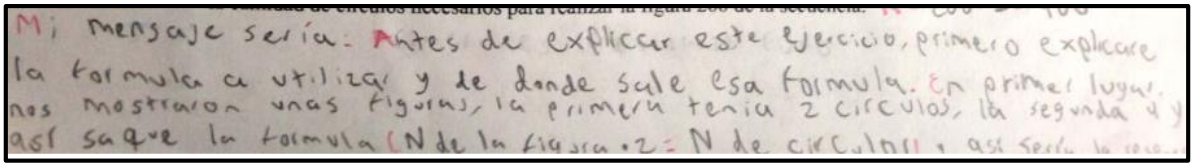


Imagen 17. Característica común.

Con este mensaje de la imagen 17, se evidencian procesos importantes para alcanzar la generalización algebraica de patrones. Por un lado, Mariana Mondragón identifica la característica en común de la secuencia dada, es decir, nota que se multiplica por dos para obtener el siguiente término. Dado lo anterior, propone una generalización que le sirve para hallar todos los términos subsecuentes de la secuencia (Nx2). Dicha generalización es una expresión directa que le permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Como conclusión frente al desarrollo de esta tarea, se puede afirmar que los estudiantes van más allá de la abducción aritmética con la que se usa una característica en común para pasar de un término a otro, sino que, hacen uso precisamente de dicha característica y establecen una relación que usan como principio para determinar cualquier término de la secuencia. A propósito:

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H (Radford, 2013, p. 7).

Dado esto, se puede decir que en el desarrollo de esta tarea los estudiantes manifiestan una generalización de tipo algebraica, ya que hacen uso de la característica en común de manera analítica, no hacen uso solamente de esta característica para encontrar la figura requerida, sino que

la asumen como un principio que funciona en todas las figuras. Así mismo, durante el foro, fue evidente el uso de esa comunalidad como hipótesis para responder las preguntas propuestas. A continuación, un breve aparte de la misma:

L1. Profesora Jimena: ¿cuál es la cantidad de círculos de la figura 136? Marianita, cuéntame.
L2. Mariana Mondragón: bueno, entonces yo, digamos que aplicando la fórmula je, que yo saqué je, lo multiplicaría por dos para hallar la cantidad de círculos pues porque digamos en el dibujito, entonces aparecía, no sé, la figura uno eran dos círculos, la figura dos eran cuatro círculos, y así se iba aumentando entonces por eso yo hice esa fórmula, entonces lo que daría es, sería 272 círculos en la figura 136.
L3. Profesora Jimena: ok, perfecto, listo Mariana, gracias. Bueno, y si yo les preguntara por la cantidad de círculos de la figura 260, ¿cómo lo harían?
L4. Juan Felipe Nieto: yo
L5. Profesora Jimena: a ver Juan Fe, cuéntame.
L6. Juan Felipe Nieto: ok, pues como el número de la figura es 260, la fórmula también que yo utilicé es multiplicar el número de la figura o sea 260 por dos [*ehhhh*] y pues eso en total me daría 520 círculos, que pues eso sería el total de círculos que hay en la figura 260.
Actividad que involucra a Ana en la tarea No. 1.

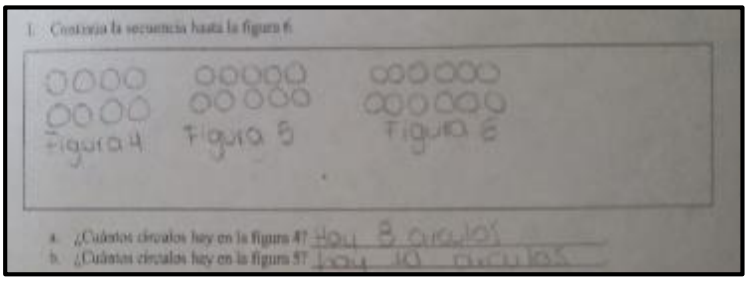


Imagen 18. Producción de Ana Sofía a la pregunta 1 de la tarea No. 1.

ASA1: a la conclusión que llegué fue que digamos en la figura uno se podría multiplicar uno *[señalando figura 1]* por dos *[señalando los dos círculos verticales]*, entonces pues me darían esos círculos *[señalando los dos círculos verticales]* que tengo dos acá uno por dos es dos entonces tengo dos círculos acá y acá en la figura dos *[señalando figura 2]* dos por dos *[señalando los dos círculos verticales]*, cuatro ¿cuántos círculos tengo acá? …pues cuatro.

ASA2: la figura cuatro que sería lo que ya explicaba, tiene ocho círculos y cuatro por dos es ocho y también pues obviamente por lo que son cuatro de horizontal *[señalando los círculos horizontales de la figura cuatro*] y dos de mmm de mmm de vertical *[señalando dos círculos verticales de la figura cuatro]* entonces es como contar cuántos círculos tiene.

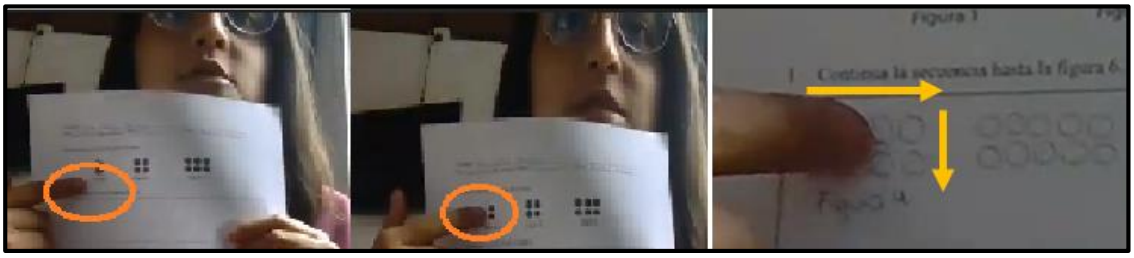


Imagen 19. Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Ana frente a la solicitud 1 de la tarea No. 1.

Dada la imagen 19, en la parte izquierda moviliza un gesto indexical señalando el número de la figura (1). En el centro muestra los dos círculos verticales de la figura 1. Finalmente, en la parte derecha Ana hace referencia a la cantidad de círculos de la figura 4 haciendo un deslizamiento para describir la ubicación espacial de los mismos. La descripción hecha fue a partir del video.

En este caso, Ana encuentra una manera de construir y calcular la cantidad de círculos de las figuras 5 y 6 apoyándose en la figura anterior (figura 4), donde enfatiza en su declaración ASA2 *¨círculos horizontales y círculos verticales¨* aquí su intención perceptiva (Radford, 2013) juega un papel importante. Observamos que, por ejemplo, para hallar la cantidad de círculos de la figura 4 multiplica la cantidad de círculos horizontales (cuatro) por los dos círculos verticales, los cuales aparecen también en las figuras anteriores, declaración en la ASA1. Ana no tiene dificultades con la construcción de las figuras ya que ha reconocido su estructura espacial al descomponerla en dos. Teniendo en cuenta esta respuesta, corresponde a una generalización aritmética, dado que emplea la abducción para pasar de un término al siguiente y no para deducir una fórmula que permita calcular la cantidad de círculos de cualquier figura (Radford, 2013).

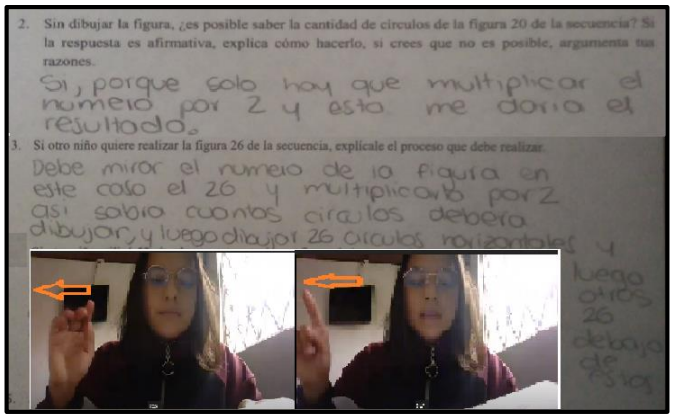


Imagen 20. Producción de Ana a la solicitud 2 y 3 de la tarea No. 1, acompañada por la secuencia de gestos como deslizamientos hechos por Ana en la solicitud 3 para indicar los círculos horizontales.

ASA3: yo creo que si es posible porque [*pausa*] pues como ya he dicho, *[ehh]* tendría que multiplicar solo el número de la figura, en este momento veinte, *[ehh]* con por el dos, entonces pues me daría veinte por dos cuarenta.

De acuerdo con la declaración hecha en ASA3 y lo expuesto de manera escrita en la pregunta 3 de la Imagen 20, *"el número de la figura, en este caso 26 y multiplicarlo por dos"* ella puede dar cuenta de una fórmula apoyada por frases claves, haciendo uso de las determinaciones sensibles en la dimensión espacial utilizadas en las respuestas a la pregunta 1. Se podría decir que, en las declaraciones de Ana, se quiere hacer referencia a todas las figuras de la secuencia y las expresa por medio de un nodo semiótico donde involucra gestos, medios lingüísticos, perceptivos y escritos.

Se observa cómo desde la señalización gestual y las expresiones deícticas, Ana logra dar una expresión verbal del procedimiento, lo que muestra ese paso de la generalización factual a la generalización contextual a través de la sustitución de las acciones gestuales y perceptuales por frases en las que la relación establecida en ASA2 *¨círculos horizontales y círculos verticales¨* es usada en esta oportunidad como, el número de la figura (anteriormente círculos horizontales), multiplicada por dos (anteriormente usada como círculos verticales), esta frase clave puesta en juego por Ana en la Imagen 19, evidencia como la abducción que ella hace de esa característica común, es utilizada de manera analítica, ya que ella la asume como un principio para deducir

figuras lejanas (no consecutivas) en la secuencia; lo anterior, muestra una evolución en el campo de lo algebraico, que evidencia la conformación de la regla.

A continuación, se muestra la declaración hecha inicialmente por Ana frente a la pregunta 4 de la tarea No. 1 y luego su producción escrita.

ASA4: ahora lo que me tocaría hacer sería como dividir cincuenta y dos entre dos para ver [*pausa*] para saber cuál es la mitad y así saber qué figura es. La cantidad de círculos igual en cada fila y como son dos entonces sería la mitad [*desliza su dedo índice de forma horizontal*].



Imagen 21. Secuencia de gestos como deslizamientos hechos por Ana para indicar la ubicación de los círculos en cada fila.

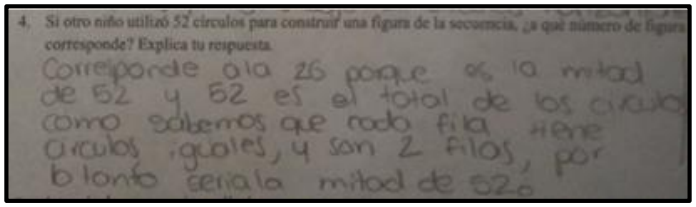


Imagen 22. Producción de Ana a la solicitud 4 de la tarea No. 1.

Teniendo en cuenta la respuesta dada ASA4 y la imagen 22, se puede evidenciar que aplica el proceso inverso de la característica común expuesta, para hallar el número de la figura en un caso puntual, esto acompañado por expresiones corporales (deslizamientos en el aire usando su mano y el dedo índice) para indicar la estructura geométrica de la figura encontrada. La frase empleada por Ana en ASA4 "*para saber cuál es la mitad y así saber qué figura es*" evidencia que la estudiante logra establecer la relación entre el número de la figura (ser la mitad) y la cantidad total de círculos de la figura, lo que sería un posible reconocimiento de variables. Ana establece

nuevamente una hipótesis a través de una frase clave, esta vez, para hallar el número de la figura de una cantidad de círculos puntuales (52 círculos).

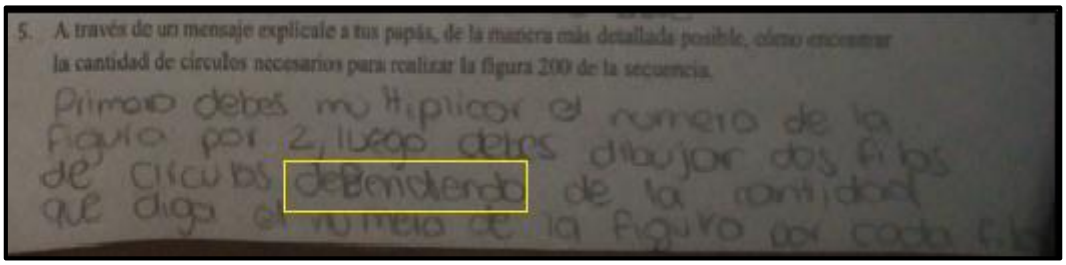


Imagen 23. Producción de Ana a la solicitud 5 de la tarea No. 1.

El sentido de obligatoriedad en la declaración de Ana en la imagen 23 "*primero debes […] luego debes*", pone en evidencia la movilización de actividad perceptual como un recurso semiótico al reconocer la manera como se ha configurado la secuencia, tanto de manera numérica como en relación con la ubicación de los círculos en dos filas.

La enunciación hecha por Ana en la imagen 23 "*Primero debes multiplicar el numero (número) de figura por 2, luego debes dibujar dos filas de círculos dependiendo de la cantidad que diga el numero (número) de la figura por cada fila*", sugiere que Ana se está implicando en un proceso de objetivación a través del cual se encuentra con una forma de pensamiento histórica y culturalmente constituida, como lo es la relación de dependencia entre dos cantidades variables de naturaleza diferente (la cantidad de círculos en concordancia con el número de la figura que ocupa cada configuración de la secuencia). En términos más específicos, la producción de Ana sugiere un nivel contextual de generalización algebraica, pues la indeterminancia queda explícita y la analiticidad en su escrito queda evidenciada en la forma de proceder y que funciona para cualquier figura que se indique "*el número (número) de la figura por 2*".

Actividad que involucra a Juan Felipe en la tarea No. 1.

Al momento de encontrar las figuras 4, 5 y 6 de la secuencia escribiendo la cantidad de círculos de las mismas (pregunta 1), podemos observar que Juan Felipe acompaña sus formas de expresión oral con gestos, como los señalamientos con el marcador siguiendo trayectorias con las manos,

hace uso del arreglo geométrico para dar sentido a las maneras de organizar la información, imagen 23.

JFN1: esto se puede hacer muy fácil, ya que es multiplicar el número de la figura *[señalando figura 4]*, en este caso sería 4 por eh dos, ya que son cada dos columnitas *[señalando las dos columnas]*, entonces 4 por 2 ocho y ese es el total de los eh, de los eh círculos. Entonces la figura cinco tiene (…) es igual a diez circulitos.

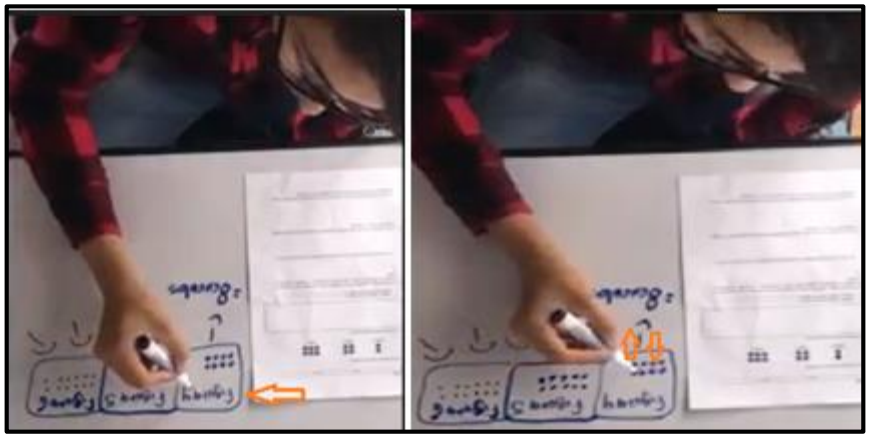


*Imagen 24.*Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Juan Felipe frente a la cantidad de círculos de las figuras 4, 5 y 6. En la parte izquierda moviliza un gesto señalando con el marcador el número de la figura (4). La parte derecha muestra los señalamientos de lo que el estudiante llamó "dos columnas".

Las relaciones establecidas por Ana son también puestas en funcionamiento por parte de Juan Felipe. La característica común identificada por Juan Felipe, "*cada figura tiene dos columnitas […] los circulitos van hacia el lado derecho*" en relación con la ubicación espacial de la cantidad de círculos, es generalizada y aplicada en la pregunta 2 y 3 para encontrar el número de círculos de la figura 20 y 26 incluso para indicar cómo sería el arreglo geométrico. El estudiante explicita la multiplicación que le permite obtener la cantidad de círculos en la figura 20 y 26 "*como son, recuerden bien, dos columnitas, una y dos [señalando las dos columnas], vamos a coger y multiplicamos 26 por dos*" aclarando que *"lo único que cambia es el número de la figura".*

Observemos que en estas acciones los estudiantes están operando sobre números, sobre casos particulares. Esta forma de proceder pone de presente funciones corporizadas o predicadas con una

variable tácita (Radford, 2010b), las cuales hacen parte de la instanciación del saber entendido como posibilidad, en este caso, pensamiento algebraico Factual, pues la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso. Más bien, está presente a través de la aparición de algunos de sus casos, figuras (4, 5, 6, 20, 26). No vemos explícitamente una analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado, más bien estaríamos ante la presencia de una analiticidad intuida hasta este momento. Sin embargo, es importante resaltar la aclaración evocada por Juan Felipe al finalizar *"lo único que cambia es el número de la figura"* con esta declaración se empieza a abonar el camino para el trabajo con lo indeterminado y se establece un reconocimiento del número de la figura como una variable, podemos observar que el pensamiento algebraico contextual es una posibilidad que Juan Felipe empieza a instanciar en la actividad. La actividad hace aparecer esta forma de pensamiento algebraico como una evolución del pensamiento algebraico factual.

Teniendo en cuenta la característica común identificada por Juan Felipe, en su intento de abordar la solicitud 4, reconoce que no es lo mismo encontrar el total de círculos que el número de la figura JFN2, sin embargo, resalta la relación que existe entre estos evocando lo hecho en la pregunta 3.

JFN2: ¡bueno! Aquí es muy importante resaltar que no es que el 52 sea el número de la figura, porque el número de la figura es lo que debemos hallar.
JFEN3: lo que sí sabemos es que 52 círculos son el total. Entonces el total 52 círculos, la figura [*pausa*] no lo sabemos.

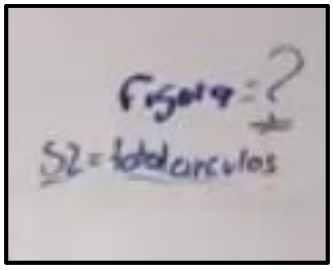


Imagen 25. Producción escrita de Juan Felipe acompañada por las declaraciones JFN2 y JFN3.

JFN4: de hecho, si se fijan, es el mismo punto anterior, pero al revés. En el anterior nos dieron la figurita que era la número 26 y teníamos que hallar cuántos eran los círculos, nos dio 52. Si se dan

cuenta ya sabríamos que los 52 círculos corresponden a la figura 26, sin embargo, lo vamos a explicar.

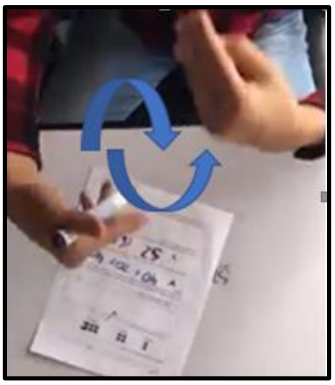


Imagen 26. Expresión corporal de Juan Felipe que acompaña su declaración JFN4.

JFN5: tenemos 52, 52 lo vamos a dividir entre 2 porque dos son las dos columnitas, debemos saber cuántos círculos hay en cada columnita y ese sería el número de la figura.

JFN 6: entonces, muy sencillo, tienen que haber 26 círculos en cada una de las columnitas [*realiza el dibujo*] y así en total formaremos en total 52 círculos [*encierra el dibujo de la figura 26*] por cada liniecita o columnita son 26 [*señalando con una flecha*], que 26 es el número de la figura [*señalando con una flecha*].

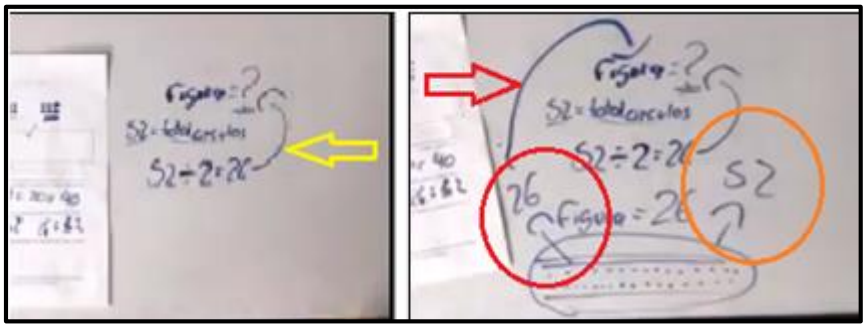


Imagen 27. Producción escrita de Juan Felipe la de la izquierda acompaña su declaración JFN5 y la de la izquierda la JFN6.

Teniendo en cuenta la característica común identificada por Juan Felipe, al abordar la pregunta 4, reconoce que no es lo mismo encontrar el total de círculos que el número de la figura JFN2, sin embargo, resalta la relación que existe entre estos evocando lo hecho en la pregunta 3.

Lo enunciado por Juan Felipe en JFN2 y JFN3 nos permite identificar que el estudiante está reconociendo dos variables y la relación que existe entre ellas, aparentemente está haciendo referencia a una variable dependiente y una independiente. Teniendo en cuenta la producción escrita, imagen 27, que acompañaba las declaraciones del estudiante, vemos cómo él usa el signo de interrogación para referirse a lo desconocido, a lo indeterminado, en este caso a la incógnita, y establece una relación de está con la cantidad de círculos (52) que es lo conocido.

A partir de la solución dada por Juan Felipe, JFN5, JFN6 e imagen 27, se puede evidenciar que aplica el proceso inverso de la característica común expuesta en las solicitudes anteriores, para hallar el número de la figura en un caso puntual. La expresión "*debemos saber cuántos círculos hay en cada columnita y ese sería el número de la figura*" evidencia que el estudiante reconoce una función de la cantidad de círculos que hay en una de las filas (que él llama "*columnita*") en relación con el número de la figura, esta afirmación viene acompañada por el recurso lingüístico escrito imagen 27 donde se evidencia como Juan Felipe establece la relación mencionada; en la imagen de la izquierda a través de una flecha entre el número de círculos que hay en "*una columnita*" y el número de la figura, en el caso de la imagen de la derecha dibuja la figura 26 (resaltando la cantidad total de círculos, 52) señalando con una flecha una de las "*columnitas*" que a su vez señala la cantidad de círculos de esta, 26, al tiempo que relaciona éste, con el número de la figura.

En este caso el estudiante está articulando la estructura numérica y la estructura espacial de la secuencia.

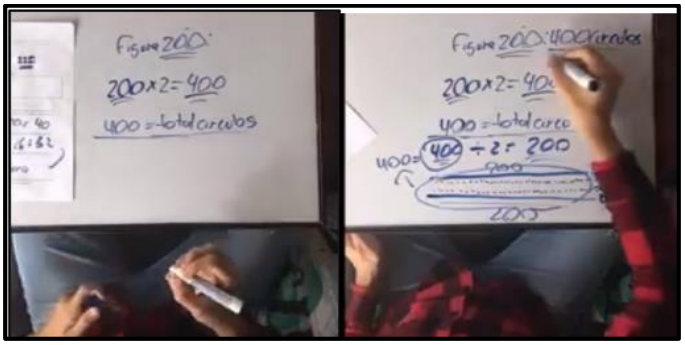


Imagen 28. Producción de Juan Felipe a la solicitud 5, a la izquierda encuentra el total de círculos de la figura 200 y a la derecha verifica el proceso hecho anteriormente haciendo uso de la estructura numérica y espacial.

JFN7: tenemos la figura 200 señores papás, tenemos que saber en la figura 200 cuántos circulitos tiene que haber. Vuelvo a repetir, aquí en las figuras todas tienen algo en común y es que tienen dos columnas y en cada columna está exactamente el número de la figura. Si acá vemos, figura uno y solo hay un puntito, la figura dos, dos puntitos y en la figura tres, tres puntitos [*señalando la fila inferior de cada figura*].

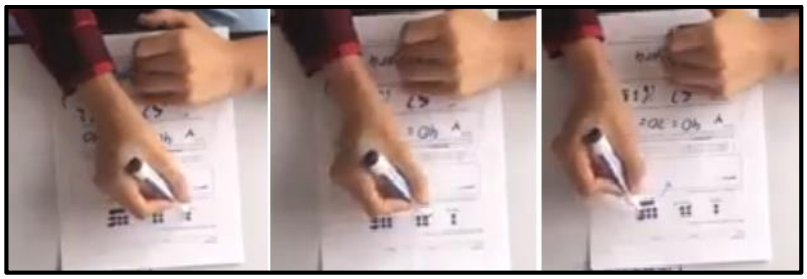


Imagen 29. Señalamientos hechos por Juan Felipe acompañando JFN7.

JFN8: siempre son dos columnitas [*indicando el dos con sus dedos*], por eso según el caso, multiplicamos o dividimos por dos, el dos siempre lo vamos a usar. Ya sea para encontrar la figura o la cantidad de círculos.

JFN9: entonces tenemos 200 que es el número de la figura y lo vamos a multiplicar por dos, ¿porque por dos? Porque como son dos columnitas debemos saber el total de circulitos que van a haber […] 400 es el total de círculos.

JFN10: para verificar si nos quedó bien cogemos 400 dividido 2 es igual, volvemos a los 200, ¡si está bien!

JFN11: en total 400 [*encierra el dibujo de la figura 200*], pero en cada columnita hay 200 circulitos [*señalando cada "columnita" con el marcador*]

Juan Felipe realiza la explicación detallada de manera oral, acompañada del recurso escrito para mostrar algunos señalamientos importantes a partir de su locución, imagen 29.

El estudiante en su locución JFN7 explicita la comunalidad encontrada "*las figuras todas tienen algo en común y es que tienen dos columnas*" y enuncia la relación que existe entre la estructura

espacial de la figura y el número de la figura "*en cada columna está exactamente el número de la figura*", esto abona el terreno a la hora de deducir una regla o fórmula para indicar la cantidad de círculos que cualquier figura o el número de la figura de cualquier cantidad de círculos.

En la sentencia JFN8 se resalta la expresión "*el dos siempre lo vamos a usar*" la palabra "*siempre*" enuncia obligatoriedad, es la manera en la que él se refiere a un principio asumido.

En la declaración JFN9 a pesar de que el estudiante indica el paso a seguir para hallar la cantidad de círculos de la figura 200, la sentencia "(…) *el número de la figura y lo vamos a multiplicar por dos, ¿porque por dos? Porque como son dos columnitas*" refiriéndose a lo indeterminado a través de la expresión "*el número de la figura*" además logra plantear una abducción que se traduce a una hipótesis, lo cual le permite deducir apodícticamente una fórmula o regla que le permite hallar el valor de cualquier figura, este hecho se ve más explícitamente en el foro virtual. Aquí hay evidencia de una analiticidad de un carácter operatorio de lo indeterminado.

Actividad que involucra a Camilo en la tarea No. 1.

Camilo, resuelve la tarea a través de su hoja de trabajo de forma digital a la vez que realiza el videoclip, imagen 30.

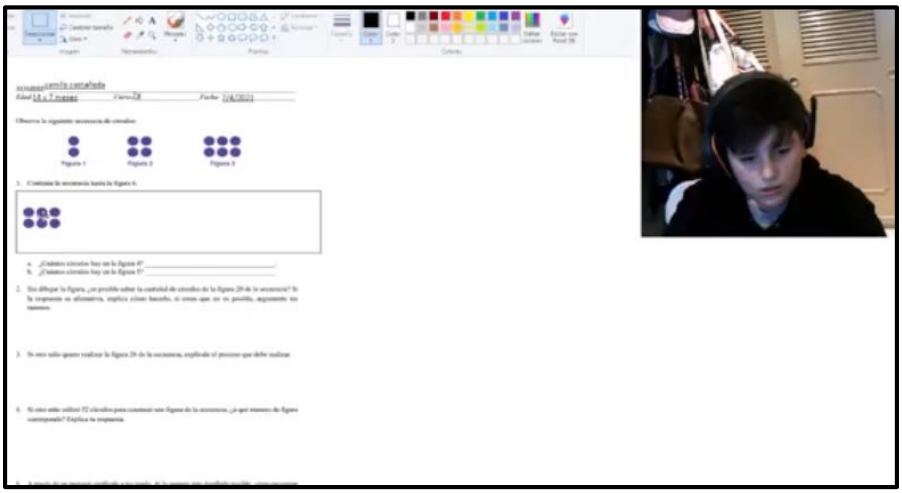


Imagen 30. Hoja de trabajo de Camilo en digital, correspondiente a la tarea No. 1.

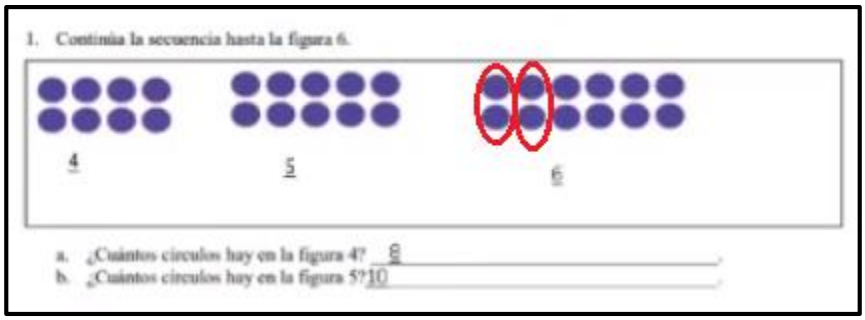
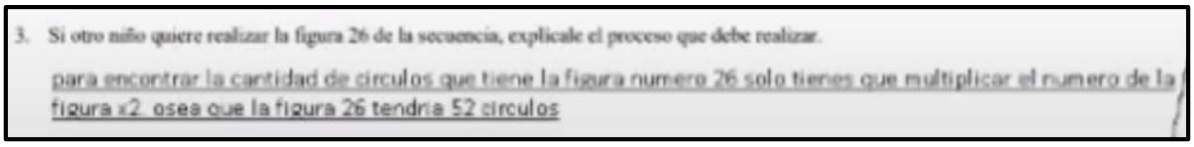


Imagen 31. Producción de Camilo a la solicitud 1 de la tarea No. 1. Resalta en la estructura espacial de la secuencia dos columnas de la figura 6.

CC1: las figuras 4. 5 y 6 se pueden hacer muy fácil, agregando columnas según el número de la figura [*resaltando dos columnas de la figura 6*].
CC2: hay ocho círculos en la figura 4, son cuatro columnas cada una con dos círculos, [*pausa*] entonces cuatro por dos es ocho y así sucesivamente.

El estudiante identifica una característica común CC1 con respecto a la estructura espacial de a secuencia, la afirmación "*agregando columnas según el número de la figura*" el estudiante establece una relación entre la estructura espacial y la estructura numérica de la secuencia, además de nombrar lo indeterminado "*según el número de la figura*" enunciando el número de la figura como una variable.

Es importante resaltar el indexical temporal que usa Camilo en su respuesta CC2 *"...así sucesivamente"* lo cual sugiere que ha identificado el patrón y se ha reconocido la comunalidad. El estudiante no predica únicamente sobre una figura particular (4) sino sobre todas las figuras, trascendiendo la solicitud hecha, podemos hablar de una generalización aritmética ya que no se ha evidenciado explícitamente la analiticidad. El uso de deícticos espaciales en las expresiones "*son cuatro columnas*" "*cada una con dos círculos*" son elementos muy importantes para mostrar cómo el lenguaje simbólico incorpora la dimensión lingüística. Esto se materializa más profundamente en las respuestas del estudiante en la pregunta 5 del mensaje.


3. Si otro niño quiere realizar la figura 26 de la secuencia, explícale el proceso que debe realizar.

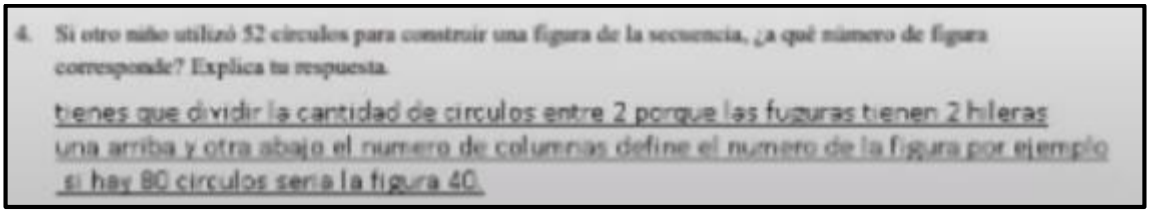
para encontrar la cantidad de circulos que tiene la figura numero 26 solo tienes que multiplicar el numero de la figura x2 osea que la figura 26 tendria 52 circulos

Imagen 32. Producción de Camilo a la pregunta 3 de la tarea No. 1.

De acuerdo a la imagen 32, se hace la transcripción del mensaje escrito por Camilo en la pregunta 3 de la tarea No. 1.

CC3: para encontrar la cantidad de círculos que tiene la figura número 26 solo tienes que multiplicar el número de la figura por 2. O sea que la figura 26 tendría 52 círculos.

La expresión hecha por Camilo "*el número de la figura*" nombra lo indeterminado, el carácter operatorio de esta indeterminancia está dada por la frase "*multiplicar el número de la figura por 2*".


4. Si otro niño utilizó 52 círculos para construir una figura de la secuencia, ¿a qué número de figura corresponde? Explica tu respuesta.

tienes que dividir la cantidad de circulos entre 2 porque las fuguras tienen 2 hileras una arriba y otra abajo el numero de columnas define el numero de la figura por ejemplo si hay 80 circulos seria la figura 40.

Imagen 33. Producción de Camilo a la pregunta 4 de la tarea No. 1.

Se puede evidenciar que Camilo aplica el proceso inverso de la característica común expuesta anteriormente CC2, para hallar el número de la figura de cierta cantidad de círculos La expresión hecha "*la cantidad de círculos*" nombre lo indeterminado, el carácter operatorio de esta indeterminancia está dada por la frase "*tienes que dividir la cantidad de círculos entre 2*", la analiticidad se ve de manera explícita. Camilo también explica el por qué se divide entre dos haciendo uso de la estructura espacial "*las fuguras (figuras) tienen 2 hileras, una arriba y otra abajo*".

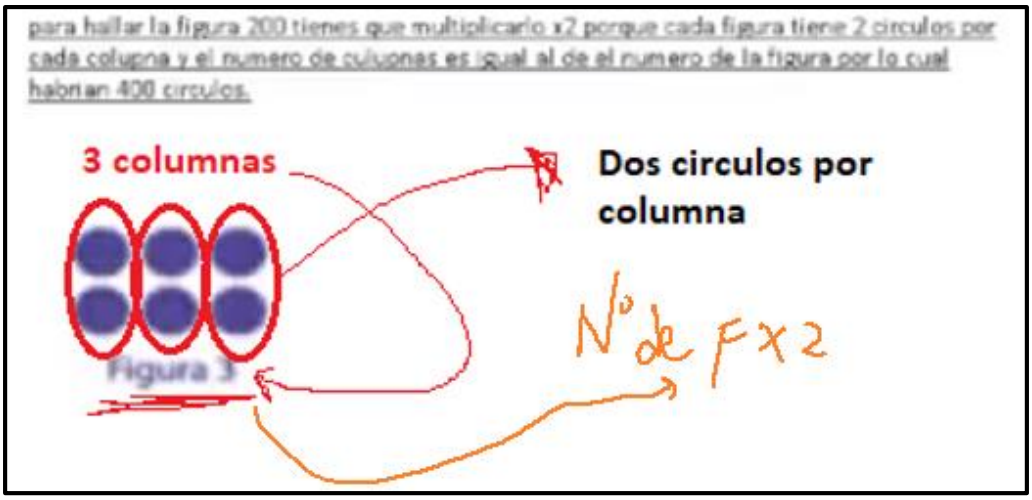


Imagen 34. Producción de Camilo a la pregunta 5 de la tarea No. 1. Mensaje.

A medida que Camilo escribe la respuesta a la pregunta 5, la lee en voz alta. La descripción detallada del mensaje la centra más en su expresión oral que en la escrita.

CC4: para hallar la figura 200 tienes que multiplicarlo por dos porque cada fila tiene dos círculos por cada columna y el número de columnas es igual al número de la figura por lo cual habrían cuatrocientos círculos.
CC5: si miramos la figura 3 [*corta y pega la figura 3. Imagen 31, usando las herramientas digitales*], está formada por tres columnas, [*resalta cada columna encerrándola*] y la cantidad de columnas es el mismo número de la figura, es decir tres, [*relaciona la cantidad de columnas con el número de la figura, usando una flecha*], y si vemos cada columna tiene siempre dos círculos [*relaciona las columnas a través de otra flecha con la frase "Dos círculos por columna"].*
CC6*:* por eso mami si quieres encontrar la cantidad de círculos de otras figuras, la que quieras, solo multiplicas el número de la figura por dos [*acompaña su discurso con la expresión N° de f ×2, relacionando a través de una flecha N° de f con el número de la figura imagen 31* y si la tienes que dibujar [*mmm*] solo haces columnas de dos círculos, según el número que te diga la figura.

Sin duda alguna el recurso gráfico que usa Camilo imagen 34, evidencia la relación funcional que establece, entre el número de columnas y el número de la figura, además de usar el hecho de que cada columna está compuesta por dos círculos para justificar el por qué se multiplica por dos, este

recurso semiótico fue esencial a la hora de deducir la fórmula por parte del estudiante. Acá se materializa el uso de deícticos espaciales en las expresiones "*son cuatro columnas*" "*cada una con dos círculos*" usados anteriormente en CC2.

Esas características comunes identificadas por Camilo CC5 a partir de la estructura espacial de la secuencia "*la cantidad de columnas es el mismo número de la figura*" y "*cada columna tiene siempre dos círculos*", le permitieron generalizar estas características comunes convirtiéndose en hipótesis para el estudiante la cual usa para determinar una fórmula que le permita explicar a su mamá cómo calcular la cantidad de círculos de cualquier figura de la secuencia. Observamos cómo el contenido del mensaje posibilita designar la indeterminancia y volverla objeto del discurso. Por ejemplo, en el caso de Camilo, cuando afirma en la imagen 31 "*N° de f×2*", es importante resaltar cómo el lenguaje simbólico incorpora la dimensión lingüística. Hay evidencia de un carácter operatorio de lo indeterminado, es decir, hay analiticidad.

A partir de la información obtenida en los videoclips se realiza un foro con la participación de los seis estudiantes y una de las investigadoras. A continuación, se exponen apartados relevantes para el proceso de investigación.

L7. Profesora Jimena: ¿qué haríamos para encontrar la cantidad de círculos de la figura un millón?
L8. Juan Felipe Nieto: pues como el número de la figura es un millón, la fórmula que yo utilicé es multiplicar **siempre**[4] el número de la figura, o sea un millón, por dos, [ehh], pues eso en total nos daría dos millones de círculos.
L9. Profesora Jimena: ¿están de acuerdo con Felipe o alguien lo haría diferente?
L10. Camilo Castañeda: yo lo haría igual ya que si miramos la secuencia nos damos cuenta que la cantidad de círculos es el doble del número de la figura o que el número de la figura es la mitad de la cantidad de círculos, eso depende de lo que me estén preguntando.
L11. Profesora Jimena: ¿depende de lo que te estén preguntando?

[4] Énfasis hecho por las investigadoras

L12. Camilo Castañeda: sí profe, [mmm], si me preguntan por la cantidad de círculos de una figura, pues hacemos lo que dice Felipe, multiplicar la figura por dos; pero si me preguntan por el número de la figura de cierta cantidad de círculos pues solo los divido por dos.

L13. Profesora Jimena: es decir que ¿podríamos encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura y el número de figura de cualquier cantidad de círculos?

L14. Si profe "Estudiantes responden en coro"

L15. **Profesora Jimena:** ok, teniendo en cuenta eso me gustaría que retomáramos la solicitud 5 hecha en la tarea No. 1, sobre el mensaje. Esta vez quisiera que a través de un mensaje le expliquen a su mejor amigo o amiga, de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar cualquier figura. Para esto le propongo realizar el mensaje en un padlet.

La expresión "*siempre*" cobra importancia en la respuesta dada por Juan Felipe en L8, ya que hace referencia a las figuras que le han solicitado y a aquellas que no. Él tiene la seguridad que esa característica común identificada previamente en la tarea No. 1, se cumple para todos los casos. El componente de analiticidad presente implica la manera de concebir lo indeterminado y, con ello, el proceso de abducción analítica que le permite tener total seguridad de la generalización de la característica identificada.

En las declaraciones de Camilo L10, se evidencia la relación que establece entre el número de la figura y la cantidad de círculos y viceversa, sin referirse a un caso particular, sin no vas bien, teniendo en cuenta la característica común encontrada en la secuencia, además de reconocer las dos variables de manera explícita y su relación de independencia y dependencia.

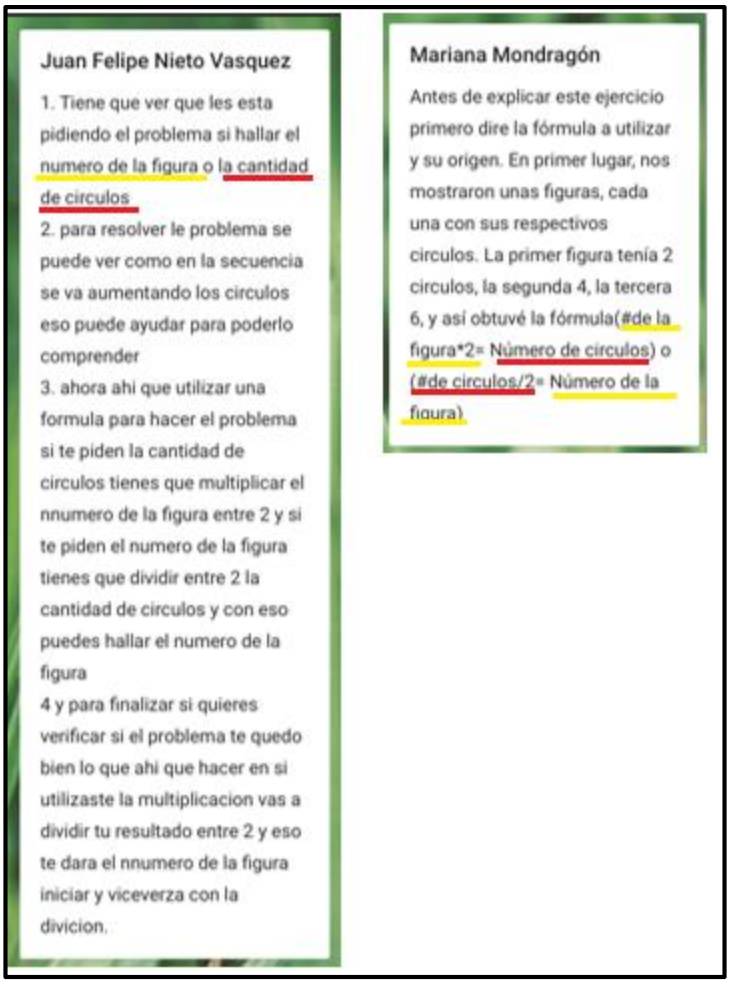


Imagen 35. Producción Juan Felipe (izquierda), Mariana Mondragón (derecha) correspondientes a la participación en el padlet.

En la producción del estudiante Camilo en L12 y en el caso de los estudiantes Juan Felipe y Mariana Mondragón en el padlet, imagen 35, se evidencia un proceso de generalización de tipo algebraico con las siguientes características:

- Realizan la generalización de la característica común identificada, la cual les permite realizar un proceso de abducción analítica, y con ello deducir una expresión directa para establecer la cantidad de círculos de cualquier posición.

- Se evidencia el componente de analiticidad, conciben y operan con lo indeterminado, no requieren el trabajo sobre números para expresar la generalización de la característica de

un caso particular. Emplean palabras como: "*el número de la figura*" o la expresión "*#de la figura*" (refiriéndose al número de la figura), "*la cantidad de círculos*", "*número de círculos*", "*cierta cantidad de círculos*" o la expresión *"# de círculos*" (refiriéndose a la cantidad de círculos), aunque emplean un lenguaje natural se refieren a todas las figuras, a las que ven y las que no ven.

- Se hacen explícitas las dos variables: número de la figura y cantidad de círculos de la misma.

- De manera implícita, reconocen la relación de independencia y dependencia entre las variables.

En la siguiente tabla, se sintetiza la descripción, de los medios semióticos de objetivación del componente de analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas que emergieron en la actividad matemática, correspondientes a la tarea No.1. Para elaborar esta tabla (tabla 3) se ubica en la primera columna los tipos de generalización que emergieron en la tarea, en la segunda columna se ubican los recursos semióticos que utilizaron los estudiantes para dar cuenta de un tipo de generalización específica, en la tercera se ubican las expresiones semióticas que usaron los estudiantes para referirse a lo indeterminado y por último en la cuarta se ubican expresiones semióticas para dar cuenta del carácter operatorio de lo indeterminado:

Tabla 3. *Caracterización componente analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas emergentes en la tarea No. 1.*

Tarea No. 1. Secuencia figural con apoyo tabular			
Tipo de generalización	**Medios semióticos de objetivación (lenguaje escrito, oral y corporal)**	**Expresión semiótica para referirse a lo indeterminado**	**Componente analiticidad: expresión semiótica para operar con lo indeterminado**
Generalización Aritmética	Se identifica la característica común, de un término a otro, "sumar dos", "*cada figura tiene dos columnitas […] los circulitos van hacia el lado derecho*", "*agregando columnas según el número de la figura*"	No se hace de manera explícita. *"agregando"* *"dos columnitas"* "*las figuras todas tienen algo en común y es que tienen dos columnas*" "*en cada columna está exactamente el número de la figura*" Esto abona el terreno a la hora de deducir una regla o fórmula para indicar la cantidad de círculos que cualquier figura o el número de la figura de cualquier cantidad de círculos. (JFN7)	Aún no se hace explícito el carácter indeterminado, pero da cuenta de la característica en común. *"Se van agregando dos círculos".* Se reconoce la estructura geométrica espacial de la secuencia figural *¨círculos horizontales y círculos verticales¨* aquí su intención perceptiva juega un papel importante. "*como son, recuerden bien, dos columnitas, una y, vamos a coger y multiplicamos 26 por dos*" La indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso "*agregando columnas según el número de la figura*" enunciando el número de la figura como una variable (CC1)

Generalización Algebraica	• Se hace implícita la relación de dependencia e independencia entre las variables, número de la figura y cantidad de círculos. (ASA4, JFN1, JFN3, L10,) • Se hacen explícitas las variables: números de la figura y cantidad de círculos. (JFN2) • "*el dos siempre lo vamos a usar*" la palabra "*siempre*" enuncia obligatoriedad, es la manera en la que él se refiriere a un principio asumido.	"figura" *"El número de la figura"* *"N° de f"* *"La cantidad de círculos"*	• Aparece una designación de la indeterminancia como parte del discurso para encontrar los términos solicitados *"Cada vez la figura aumenta".* *"Sería: figura 1: 1 x 2".* *"El número de la figura por dos"* *"La cantidad de círculo se divide entre dos"* • *"El número de la figura"* (anteriormente círculos horizontales), "*multiplicada por dos*" (anteriormente usada como círculos verticales). • *"N° de f ×2"* Se concibe y se trabaja con lo indeterminado. (CC3) se establece, en un lenguaje natural la expresión que permite calcular la cantidad de círculos de cualquier figura, sin emplear el ejemplo o el caso particular, se acude a nombrar las variables y relaciones numéricas entre ellas (CC5, CC6)

4.2. Tarea No. 2: secuencia numérica con apoyo tabular.

La intención con la tarea No. 2 era indagar por los recursos semióticos de objetivación que lograron movilizar los estudiantes en los procesos de generalización que emergen al enfrentarse a una secuencia numérica en la que, a diferencia de la tarea No. 1, no se cuenta con una estructura geométrica espacial que les permita a los estudiantes identificar y percibir la característica común y su generalización.

En la siguiente tabla se menciona la intención de acuerdo con cada pregunta y nuestro propósito de caracterizar la naturaleza del componente analiticidad a medida que se avanza en la tarea.

Tabla 4. *Intención de cada pregunta tarea No. 2.*

TAREA No. 2. ***Secuencia numérica con apoyo tabular***			
NATURALEZA COMPONENTE ANALITICIDAD	**PREGUNTA**	**SOLICITUD**	**INTENCIÓN**
	1 y 2	Continúa la secuencia numérica hasta el término 7. Sin continuar la secuencia numérica, ¿es posible saber cuál es el número que corresponde al término 15? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.	Indagar por los procesos de generalización que realizan los estudiantes para determinar términos cercanos.
	3 y 4	Si otro niño quiere encontrar el término 100 de la secuencia numérica, explícale el proceso que debe realizar. ¿A qué término corresponde el número 179 en la secuencia? Explica tu respuesta.	Indagar por los procesos de generalización que realizan los estudiantes para determinar términos lejanos.
	5	Si otro niño piensa en el número 503. ¿Este número pertenece a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.	Evidenciar cómo los estudiantes hacen uso de esos procesos de generalización para encontrar el número del término dado la cantidad de este, en pocas palabras, como hace uso de ese proceso a la hora de establecer la relación inversa.
	6	A través de un mensaje explícales a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar el número que corresponde al término 200 de la secuencia.	Movilizar otros medios semióticos de objetivación para que los estudiantes lograran nombrar explícitamente lo indeterminado y operar con él.

Generalidades encontradas en la tarea No. 2 de Ana, Juan Felipe y Camilo

La secuencia propuesta para la tarea No. 2 se genera a partir del término general $3n - 1$ con $n = 1,2,3,4, \ldots$

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

Imagen 36. Secuencia numérica con apoyo tabular presentado en la tarea No. 2.

A continuación, se exponen algunas de las locuciones hechas por los estudiantes en sus videoclips para responder la pregunta 1.

ASA1: básicamente lo que veo acá [*señalando con el lápiz la secuencia numérica con apoyo tabular*] es una constante, que cada vez se suma tres. Para encontrar los siguientes solo sumo tres, ¡es muy fácil!

ASA2: [mmm] [*se muestra pensativa ubicando su portaminas en su frente*] pero no va a ser así de fácil con los términos más grandes, es muy difícil ponerme a sumar tres más tres, más tres, más tres, más tres muchas veces (…) [*se toma la cabeza con la mano y luego pone el portaminas en su boca, se muestra inquieta y pensativa*].



Imagen 37. Secuencia de movimientos corpóreos realizados por Ana Sofía que acompañan su locución ASA2. Reconstrucción del videoclip.

ASA3: (…) bueno por ahora puedo encontrar los términos que siguen sumando tres, pero debe poderse encontrar cuando los términos son más grandes sin sumar tantas veces tres.

JFN 1: antes de todo, antes de continuar la secuencia, lo que tenemos que saber es que aquí hay un dos, un cinco y un ocho ¿Qué hay de similitud en esos tres? Es una secuencia con una diferencia

de tres o aumenta en tres, porque miren dos más tres cinco, cinco más tres nos da este ocho [*Explicitando el más tres entre los términos*].

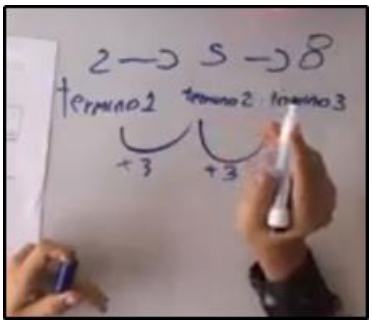


Imagen 38. Reconocimiento del patrón por parte de Juan Felipe, explicitando el "más tres" entre los términos de la secuencia.

CC1: [*realiza una tabla donde relaciona el término con el número que le corresponde, dejando sin relacionar los términos solicitados*] sumamos tres, por ejemplo, acá [*inicia en el término tres que es ocho*] tenemos ocho, uno dos tres [*acompaña el uno, dos con la digitación de dos puntos y en el tres digita 11*] aquí iría once, uno, dos, tres, aquí iría catorce (…), ¡es super fácil! sumamos tres [*explicita el tres de manera digital*].

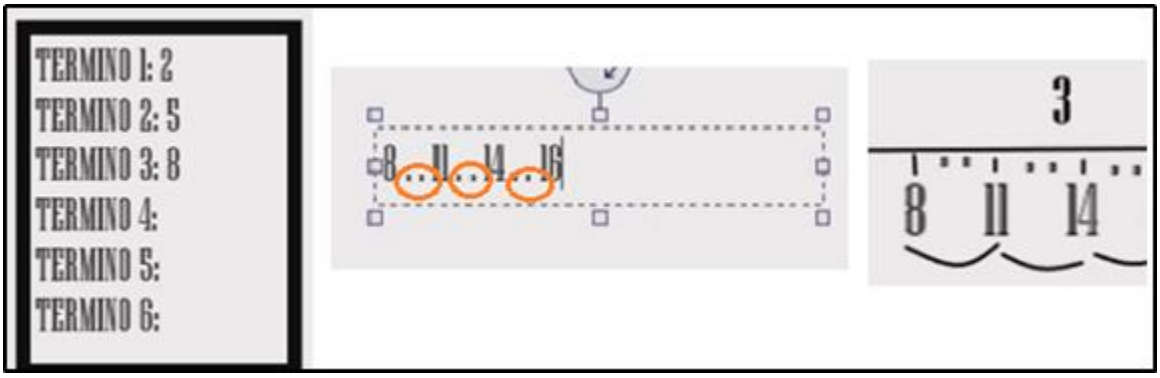


Imagen 39. En la imagen de la izquierda la tabla donde Camilo relaciona el término con el número que le corresponde, en la imagen de centro usa los puntos para acompañar su conteo de tres para escribir el término que sigue y en la imagen de la derecha explícita el reconocimiento del patrón por parte de Camilo en la secuencia. Reconstrucción de videoclip.

Los estudiantes notaron sin mayores dificultades que los términos aumentaban en 3 (como se aprecia en JFN1: *"…aumenta en tres"*) y utilizaron este incremento para calcular los números

correspondientes a los Términos 4, 5 y 6. Ana y Camilo reafirman la identificación de esta característica común (ASA1:*"…se suman tres";* CC1: *"…sumamos tres"*), y frente al requerimiento de la pregunta uno los estudiantes responden correctamente imagen 40, lo cual apunta a que la comunalidad identificada les funciona para algunos términos particulares. Otra de las respuestas representativas se muestra en la producción de Juan Felipe y Camilo en la imagen 37 e imagen 38 respectivamente, lo cual sugiere su reconocimiento del patrón. La comunalidad, es decir aquello en virtud de lo cual los elementos se mantienen juntos, en este caso la relación entre los términos de la secuencia, ha sido identificada por los estudiantes.

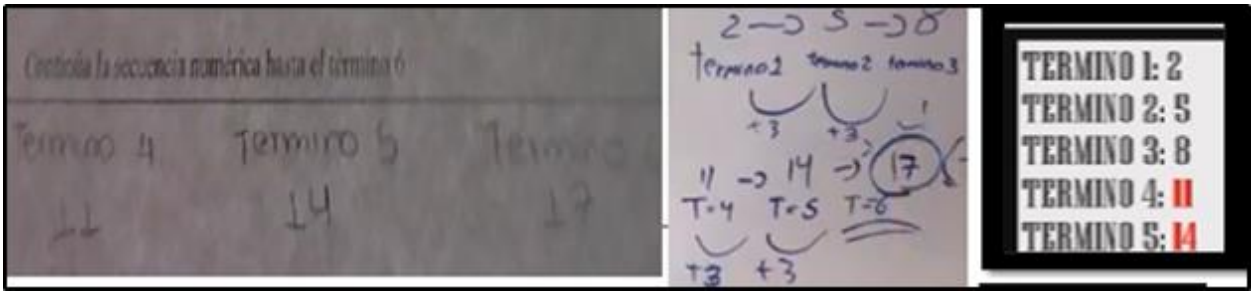


Imagen 40. Producción de Ana Sofia, Juan Felipe y Camilo, respectivamente de izquierda a derecha, a la pregunta uno.

La abducción aquí es utilizada para pasar de un término al otro. Por el momento, con respecto al componente de analiticidad, aunque se identifica una característica común, (*"…aumenta en tres"*, *"…se suman tres"*, *"…sumamos tres"),* de un término a otro, no hay deducción de una expresión directa que permita calcular el número en cualquier término de la secuencia o al menos el de un término particular. Esta abducción permite generar un procedimiento, pero no una expresión o regla directa, es decir, una fórmula, por lo que no hay generalización algebraica. En este caso tenemos una generalización aritmética.

Cuando se indaga por el Término 15 y Término 100, casos más lejanos a los ya trabajados, Juan Felipe, realiza la siguiente producción:

JFN2: tenemos aquí algo importante, ya no podemos hacer más tres, porque sería poco práctico, cuando tengamos por ejemplo el término 100 sería mucho trabajo. Tenemos algo importante el

término, tenemos que hallar el numerito del quince *[usa en su producción el signo de interrogación para referirse al "numerito" que no conoce, del término quince]*.

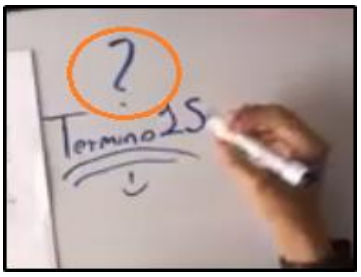


Imagen 41. Juan Felipe hace uso del signo de interrogación para referirse al "numerito" del término quince.

JFN3: tomamos el número del término, en este caso quince, y lo multiplicamos por tres, ¿Por qué por tres? (…) recuerdan que sumamos de a tres, pero la multiplicación me ahorra sumar tres, entonces quince por tres eso me da cuarenta y cinco ¡pero hay una cosa! debemos restarle uno nos da 44 ya sabemos que el término quince le corresponde el número 44 [*borra el signo de interrogación, hecho previamente, y escribe 44 y relaciona el número del término, 15, con el número obtenido, 44, a través de una flecha*].

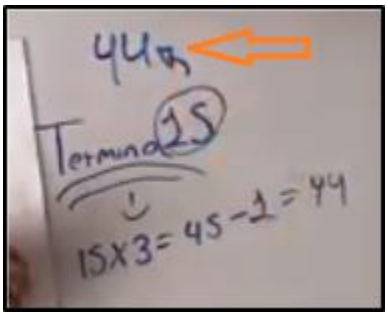


Imagen 42. Producción de Juan Felipe, pregunta dos.

JFN4: pero (…) ¿Por qué restamos uno?, el término por tres está claro, miremos en el término uno [*retoma la hoja de trabajo*], sería uno por tres me da tres, pero miremos la secuencia no empieza en tres, está empezando por dos, o sea un número menos, por eso restamos uno [*indicando con su dedo índice el uno*], en el término dos, dos por tres seis y seis menos uno me da el cinco, y así sucesivamente con cualquier término.

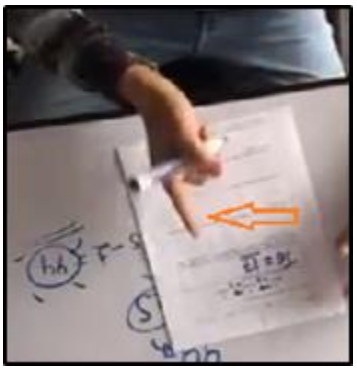


Imagen 43. Expresión corpórea de Juan Felipe que acompaña su locución JFN4.

Las operaciones aritméticas que realiza Juan Felipe (observadas en JFN3 e imagen 42) pretenden justificar sus respuestas en relación con el término 15. El trabajo llevado a cabo por el estudiante busca establecer ciertas relaciones entre los números de los términos y los números correspondientes, se evidencia un reconocimiento de las variables. Con la expresión *"tomamos el número del término"* el estudiante hace uso del lenguaje natural para referirse implícitamente a lo indeterminado.

En JFN3 observamos la producción de Juan Felipe con respecto a la pregunta 2: *"quince por tres eso me da cuarenta y cinco ¡pero hay una cosa! debemos restarle uno, nos da 44, ya sabemos que el término quince le corresponde el número 44"* esto sugiere que el estudiante logra una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional el cual permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos (Radford, 2003). Es interesante aquí notar que si bien este estudiante había comenzado con un procedimiento en el cual la abducción analítica o hipótesis no era clara, al parecer el esquema operacional adquiere mayor consolidación.

Observamos cómo a partir de JFN4 Juan Felipe parece empezar a consolidar una hipótesis. Aun cuando siente la necesidad de regresar a un término que está dentro de su campo perceptivo, el esquema operacional le permite abordar cualquier caso particular con éxito. Juan Felipe usa el indexical temporal *"…así sucesivamente"* para referirse a que se debe restar uno después de multiplicar el término por tres, vemos cómo el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar a través de su fórmula corpórea cuestiones relacionadas con el tiempo (así sucesivamente), o quizás, más adelante, indagar cómo el lenguaje simbólico (podría ser una fórmula algebraica) incorpora la dimensión lingüística.

Respecto a las generalizaciones de tipo algebraico, a continuación, se describen las producciones de los estudiantes Juan Felipe y Ana Sofía, al abordar posiciones lejanas.

JFN5: lo que debemos hacer es, el número del término *[usa la T para referirse al número del término]* cualquiera sea, no importa, por tres que es la similitud entre los términos y el resultado que de *[hace uso del paréntesis en su producción escrita]*le restamos uno.

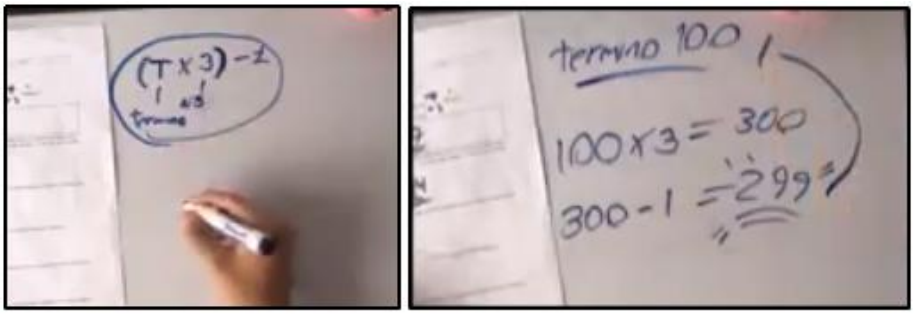


Imagen 44. Fórmula establecida por Juan Felipe para abordar la pregunta 3 (Izquierda), aplicación de su fórmula al término 100 (derecha).

Observamos en el discurso de Juan Felipe la expresión "*...cualquiera sea, no importa...*" refiriéndose al número del término, enunciando así lo indeterminado de manera explícita, por otro lado, vemos el uso de la expresión *"... **similitud**[5] ..."* la cual cobra importancia, ya que sugiere que el estudiante se está refiriendo al reconocimiento de una constante 3.

Se evidencia una expresión explícita, en este caso, $"(\square \times 3) - 1"$ que le permite a Juan Felipe de manera directa calcular cualquier término cambiando así la manera de designar los objetos del discurso a través de signos alfanuméricos del álgebra, dando cuenta de una generalización algebraica simbólica. Con respecto al componente analiticidad vemos cómo el estudiante a partir de la característica común identificada, *"el número del término... por tres ...y el resultado que dé le restamos uno"*, realiza una abducción analítica que permite establecer una expresión directa para determinar el número que le corresponde a cualquier término. Se concibe y se opera con lo indeterminado.

[5] Énfasis hecho por las investigadoras

En el caso de Ana Sofía antes de abordar la pregunta 2 y 3, ella ha identificado una característica común en ASA1 "*Básicamente lo que veo acá es una* ***constante***[6]*, que cada vez se suma tres*" la cual ella reconoce es poco productiva a la hora de aplicar los términos lejanos *"...es muy difícil ponerme a sumar tres más tres, más tres, más tres, más tres muchas veces"*

ASA4: *[ehh]* tengo que se suma cada vez tres, entonces 3n *[mientras escribe en su hoja de trabajo]* ese sería el término, en el término uno *[mmm] [lleva su portaminas a la boca y ve pensativa]*, sería tres por uno tres, pero para que me diera dos *[mmm]*, ¡le resto una!

ASA5: *[se lleva el portaminas nuevamente a la boca y guarda silencio por unos segundos mirando su hoja de trabajo]* tres por tres nueve menos una ocho *[mientras escribe en su hoja de trabajo]* ¡ahhh si, si, si me da! *[expresa en su rostro alegría]*



Imagen 45. Secuencia de movimientos corpóreos y gestuales de Ana Sofía que acompañan su locución ASA5.

Ana Sofía hace uso de la expresión *"constante"* al referirse a la característica común "...*cada vez se suma tres*...", esto cobra importancia a la hora de establecer una expresión directa para calcular cualquier término. Al incluir en su locución la frase *"... cada vez..."* La estudiante no predica sobre un término particular sino sobre todos los términos, trascendiendo el aquí y el ahora.

En ASA5 la estudiante aplica la comunalidad identificada en ASA4 y coincide con los números propuestos en la secuencia según su término, lo que sugiere que le funciona para algunos términos particulares.

[6] Énfasis hecho por las investigadoras

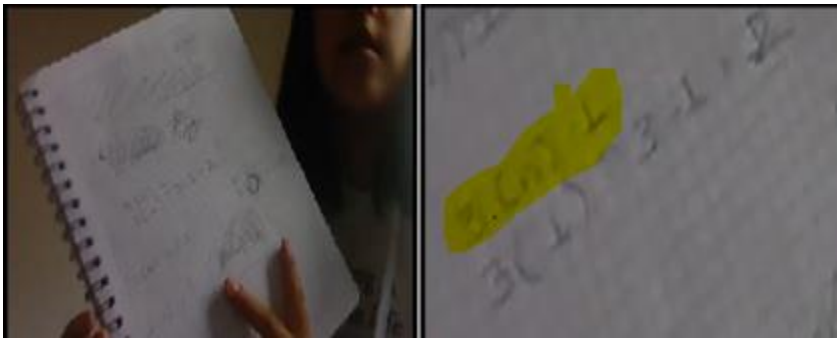


Imagen 46. Producción escrita de Ana Sofia, establece una expresión directa para cualquier término.

La generalización de la característica común identificada por Ana Sofía, atiende a relaciones numéricas entre el término y su valor correspondiente como se evidencia en ASA4, esto le permite realizar una abducción analítica, que conlleva a deducir una expresión directa para calcular el valor de cualquier término.

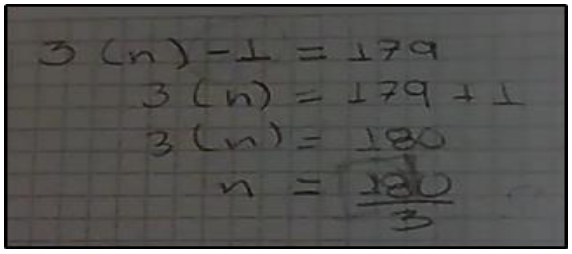


Imagen 47. Producción Ana Sofia pregunta 4.

ASA6: lo que podemos hacer es despejar n que es el número del término o la incógnita *[realiza el proceso en una hoja]*, me da ciento ochenta dividido tres, eso es *[Mmm]* sesenta, entonces el término a que pertenece es sesenta.

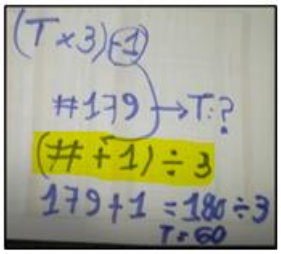


Imagen 48. Producción Juan Felipe pregunta 4.

JFN6: aquí nos invirtieron la pregunta, ahora según el número ¿cuál es el término? ya no debemos hallar el número según el término si no el término según el número.

JFN7: ¡nos invirtieron todo! antes la fórmula era así $(\square \times 3) - 1$, pero como la invirtieron ya no es el término si no el número, en este caso 179, lo último que hicimos fue restarle uno ahora lo primero que haremos será sumarle uno, lo contrario, y al resultado ya no lo multiplicamos, sino que lo dividimos por 3 *[Acompaña su locución con su producción escrita]*.

JFN8: la fórmula invertida sería, número más uno dividido tres, eso nos da el término al que pertenece el número, en este caso sesenta.

Frente al proceso inverso, los estudiantes logran resolver la pregunta 4. Se puede evidenciar que aplican el proceso inverso de la característica común expuesta, para hallar el término que corresponde a un número puntual. En JFN6 el estudiante logra diferenciar el término, del número que le corresponde, lo que sería un reconocimiento de variables.

La expresión usada por Juan Felipe en JFN8 *"...número más uno dividido tres..."* evidencia explícitamente lo indeterminado y el trabajo operacional con este, el cual se resalta como generalización algebraica simbólica en imagen 48, donde usa el "#" para referirse a el número, lo indeterminado. En la solicitud 6 se propone el término 200 para elaborar el mensaje, Ana Sofía explica el proceso elaborado para ese caso particular, empleando un lenguaje natural, aritmético y algebraico. La generalización de la característica identificada, le permitió deducir la expresión directa. En su producción se destacan tres elementos:

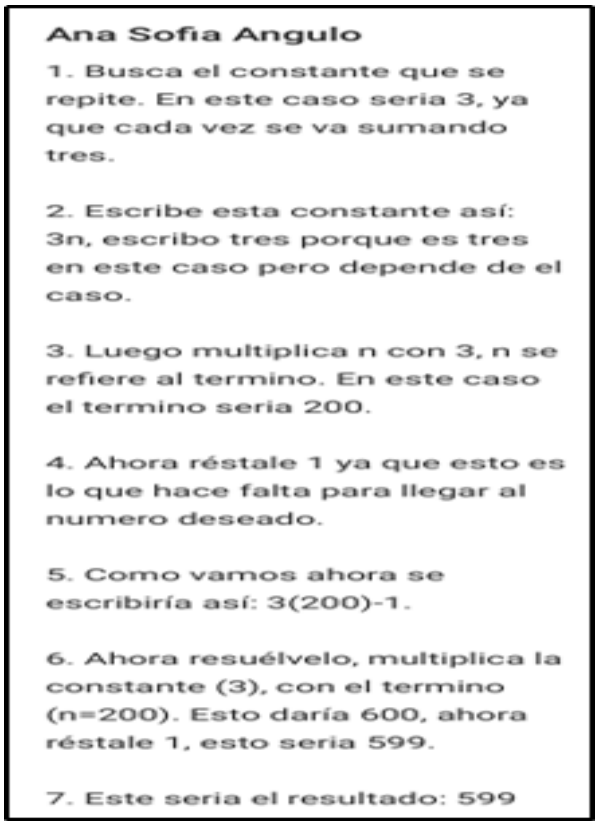


Imagen 49. Producción en el padlet de Ana Sofia a solicitud 6, el mensaje, tarea No. 2.

- *"Busca la constante que se repite"* haciendo referencia a la comunalidad entre los términos.
- *"...n se refiere al término"* trascendiendo del caso particular del término que está explicando. El componente de analiticidad que le permite establecer que será para todos los términos, y contemplar, de esta manera, lo indeterminado.
- *"...multiplica la constante (3), con el término (n=200) ...réstale 1"* Identifica la constante y lo indeterminado de manera explícita, realiza una abducción analítica que le permite establecer una expresión directa para determinar el número que le corresponde a cualquier término. Se opera con lo indeterminado.

Generalidades encontradas en la tarea No. 2 de Mariana, V., Mariana M. y Tatiana

A continuación, se encontrarán aspectos importantes en el desarrollo de la tarea No. 2 por parte de Mariana Mondragón, Mariana Valencia y Tatiana Ríos, esto teniendo en cuenta el videoclip individual y sus hojas de trabajo.

En el desarrollo de esta tarea las estudiantes además de tomar conciencia de la característica en común, la generalizan y proponen una abducción que les permite encontrar los términos 4, 5 y 6 de la secuencia (imagen 50):

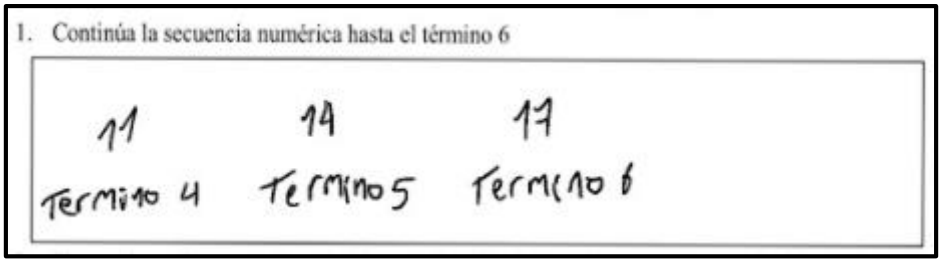


Imagen 50. Tatiana Ríos. Determinación de términos 4, 5 y 6.

A propósito, Radford (2013) menciona que la abducción aritmética que se hace sobre la característica en común se vuelve generalización algebraica cuando se da de manera analítica, esto es, se toma la abducción más allá de una posibilidad y se toma como un principio para deducir una fórmula que es válida para cualquier término. Por lo anterior, esta característica en común se usó, en un comienzo, como hipótesis para encontrar y comprobar los términos o números pedidos en las dos primeras preguntas. A partir de la pregunta tres, la hipótesis deja de serlo y se convierte en un principio para hallar cualquier término de la secuencia.

En los videoclips observados, los estudiantes movilizan gestos y emiten expresiones verbales que dan cuenta de dicha abducción aritmética y cuya finalidad es encontrar los términos requeridos en la primera pregunta. A continuación, algunos ejemplos de dichas expresiones:

MM1: lo que podemos ver es que entre cada término hay tres de diferencia.
MM2: esto nos da a entender que va de tres en tres.

Dicha abducción, en un principio aritmética, no fue suficiente para algunos estudiantes (Tatiana Ríos) a la hora de deducir términos más avanzados de la secuencia, por lo menos en la forma en la que estaba planeada, es decir, para que cada término fuera un número entero positivo. Lo anterior fue evidente en algunos razonamientos hechos por Tatiana, quien reconoció la característica común, respecto al cambio de tres en tres de para encontrar términos cercanos y lejanos:

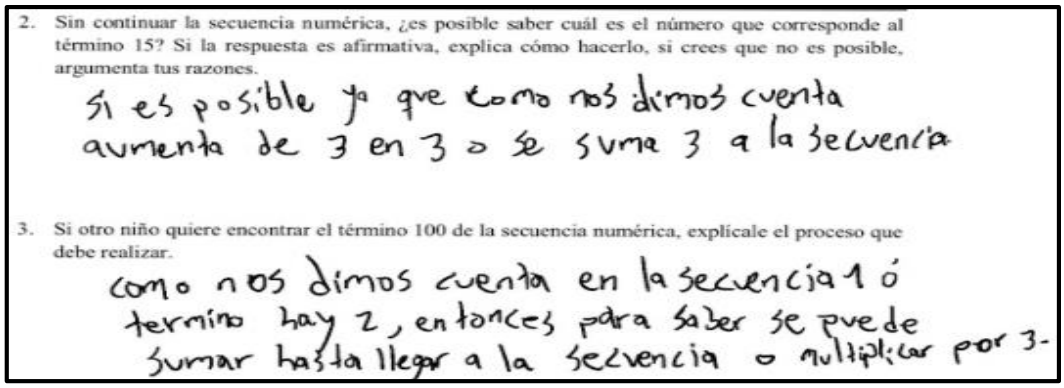


Imagen 51. Tatiana Ríos. Descripción de la característica común.

Teniendo en cuenta la imagen 51 para Tatiana era evidente el cambio de tres en tres para encontrar el número en términos específicos, sin embargo, al pedirle que comprobara si un número hacía parte de la secuencia, se evidenció que la abducción aritmética era hipótesis y en este caso, no se convirtió en un principio usado apodícticamente para encontrar términos o números. Lo anterior se evidencia en el desarrollo de las preguntas cinco y seis:

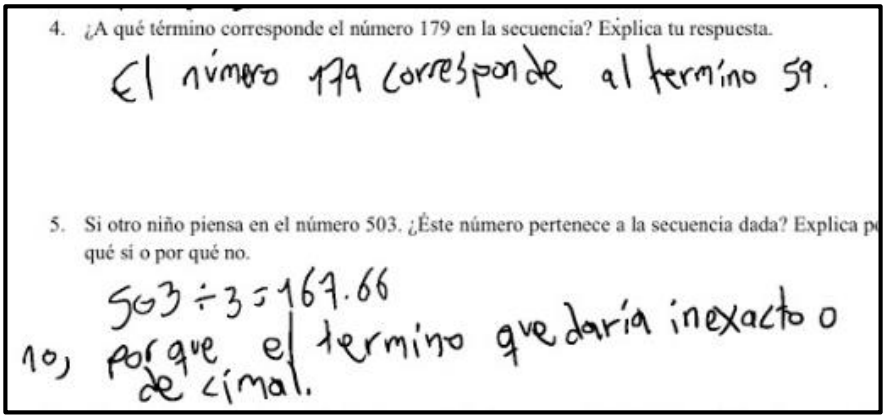


Imagen 52. Ausencia de generalización algebraica contextual.

En la imagen 52 se evidencia que no hay conciencia de la característica en común en términos de generalización algebraica contextual, esto es esto quiere decir que se hace presente una generalización algebraica factual, en la que se generalizan acciones a nivel operacional y las respuestas están ligadas a un nivel más concreto que involucra el uso de los símbolos numéricos. En la explicación que hace Tatiana del punto cuatro, se evidencia que no hay una consciencia del

papel de la característica común de la secuencia e ignora que la división que propone da como resultado un número decimal. A continuación, un aparte de la explicación dada en el videoclip:

TR1: entonces ya para el término 179 lo único que tenemos que hacer es dividir, no [*ehhh*] (…) el término 179 corresponde (…) digo, el número 179 corresponde al término [*ehhh*] (...) al término 59.

Para el desarrollo de la pregunta cinco, Tatiana afirma que el número 503 no pertenece a la secuencia aludiendo que la respuesta da un número decimal. A continuación, un apartado de su razonamiento:

TR2: voy a aplicar la misma fórmula o la misma operación que apliqué anteriormente [*ehh*] de dividir, entonces veamos, 503 dividido 3, nos tendría que dar, nos tendría que dar exactamente [*ehh*] (...) [*Tatiana hace uso de la calculadora y se da cuenta que da un número decimal*] nos tendría que dar exactamente 167 punto 66. Pues yo diría que exactamente, no porque es un número decimal, pero si pondré el término que es un número decimal y pues no es exacto, porque nos están dando números exactos, entonces yo diría que no, ¿por qué no? no, porque el término quedaría inexacto o decimal.

Como podemos ver, Tatiana no hizo comprobación o le restó importancia al resultado decimal y para ella fue suficiente este hecho para afirmar que el número 503 no pertenecía a la secuencia.

En los otros casos (Mariana Valencia y Mariana Mondragón), los estudiantes hicieron uso de progresiones aritméticas para encontrar el término pedido:

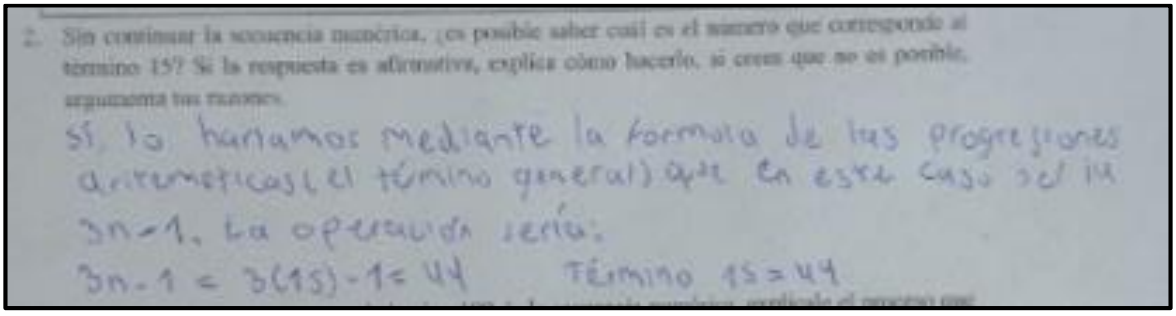
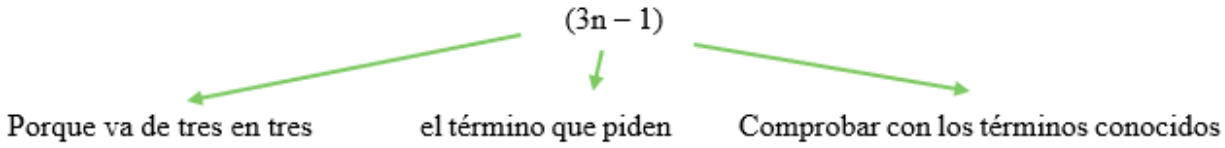


Imagen 53. Comunalidad usando el término general de progresiones aritméticas.

En la imagen 53 se describe el procedimiento que usó Mariana Mondragón haciendo uso de progresiones aritméticas. En el desarrollo del videoclip, Mariana hace referencia al término general (3n – 1) y explica cada uno de sus componentes:

MM3: bueno, como es una secuencia podemos utilizar la fórmula de (…) para progresiones aritméticas que es el término general. Entonces vamos a sacar el término general (…) El término general [*eh*] (…) lo sacaríamos mirando de cuánto en cuánto va, pues que es tres y eh también, les voy a mostrar (…) Listo, entonces el término general lo obtendríamos por el ponemos el tres, ¿por qué? Porque va de tres en tres (…) listo, n que sería el número del término, entonces si queremos hallar el término cinco, debemos poner el cinco, o sea cambiar la n por el cinco y luego aplicar la fórmula, pero eso depende del término que estemos buscando y luego el [*eh*] (…) por ejemplo vamos a aplicar la fórmula hasta el momento entonces, no sé, queremos hallar el término dos que ya nos lo dieron, entonces tres por dos, da seis, pero nos tiene que dar cinco, entonces ¿qué hacemos? ¡le restamos uno! Entonces vamos a aplicarla con el término tres, entonces [*ehhh*], el término tres dice que es ocho, vamos a ver cómo nos da la fórmula (…) tres por tres que es el número del término da nueve, menos uno da ocho, entonces la fórmula está correcta y así se obtiene la fórmula.



Con la explicación de Mariana podemos comprobar que al comienzo entra en juego una hipótesis sobre el cambio que se presenta entre los números de cada término para luego asumir la fórmula que encontró como un principio después de haber comprobado su veracidad con los números de los términos conocidos.

Así mismo, Mariana Valencia reconoce la característica en común para encontrar los términos que se solicitan en el primer punto:

MV1: como podemos ver el término cuatro es once, ya que a ocho le sumamos tres y nos da once; o a once le sumamos tres, nos da catorce; a catorce le sumamos 3 nos da diez y siete.

Para el segundo punto, Mariana Valencia al igual que Mariana Mondragón, afirma que sí es posible hallar términos sin continuar con la secuencia. A continuación, un apartado de la explicación para desarrollar este punto:

MV2: vamos a utilizar la siguiente fórmula de la anterior tarea eh la tarea uno, es la misma fórmula, pero con esta secuencia, entonces (…) la fórmula era la siguiente: $A_n = A_1 + R(n-1)$ entonces, sabemos que A_n pues lo que queremos hallar, A_1 el primer número de la sucesión más R que es la razón o sea lo que se suma o se resta en la sucesión y entre paréntesis n que es el número de la secuencia que queremos hallar y menos uno, entonces hagámosle, entonces iría así:

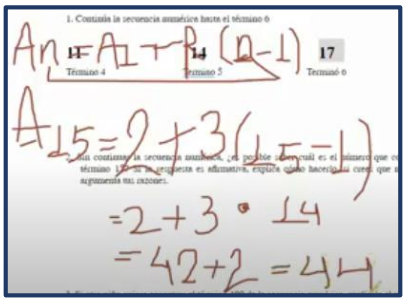


Imagen 54. Explicación digital de la fórmula de Mariana Valencia para la pregunta 2.

En la imagen 54 MV da cuenta de las partes que constituyen lo que para ella es la fórmula que le permite hallar el término quince de la secuencia. Es importante aclarar que, durante el foro referente a esta tarea, los estudiantes hacen referencia al tema de progresiones aritméticas visto el año anterior y consideran que es útil para resolver este tipo de tareas.

Para el desarrollo del punto tres de la tarea ambas estudiantes coincidieron en la facilidad de hacer uso de la fórmula para hallar el término cien de la secuencia. Cada una designó de maneras diferentes algunos elementos conocidos de dicha secuencia para encontrar el término que se solicitaba.

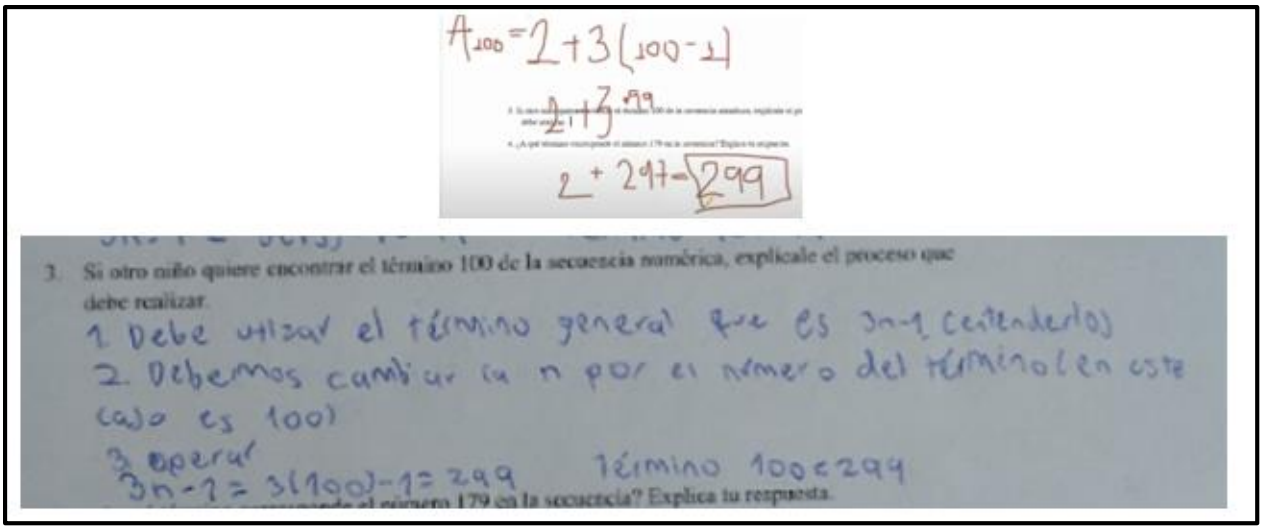


Imagen 55. Aplicación de la fórmula para encontrar el término 100 de la secuencia.

En la imagen 55 observamos la forma en que las dos estudiantes hacen uso de signos alfanuméricos para encontrar la respuesta a la pregunta. Aquí, es evidente que la abducción aritmética pasa a ser un principio en tanto se alcanza una generalización algebraica que permite encontrar los números que se pidan de cualquier término. De acuerdo con Vergel (2015), el uso de signos alfanuméricos aparece en el pensamiento algebraico simbólico ya que las palabras o frases clave son representadas por dichos signos y es evidente el cambio que se presenta en la manera de designar los objetos del discurso.

En el desarrollo del punto cuatro de la tarea, las estudiantes hicieron, cada una a su manera, una modificación de la fórmula que usaron para los puntos anteriores. Para ellas fue evidente la diferencia que había entre solicitar el término y solicitar el número del término. A continuación, se muestra la respuesta de Mariana Mondragón:

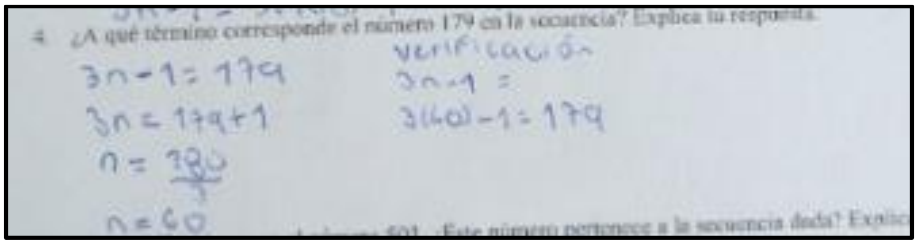


Imagen 56. Modificación de la fórmula de Mariana Mondragón para hallar el término.

En la imagen 56 observamos la capacidad que tiene Mariana para operar signos alfanuméricos que hacen referencia a términos desconocidos. Así mismo, la comprobación de las fórmulas que utiliza, le da seguridad para no tomarlas como posibilidad sino como principio para hallar un término dado el número de la secuencia. Para Mariana fue fundamental el uso de la fórmula 3n-1 para solucionar este punto. A continuación, algunos apartes importantes del desarrollo de este punto:

MM4: [*mmmmm*] (…) bueno como tenemos la fórmula y tenemos, no sabemos n, pero sí sabemos el resultado entonces debemos cambiar la fórmula. ¿Cómo hacemos eso? primero, vamos a escribir 3n menos 1 da 179, luego en este caso la incógnita es la n, es decir, el número del término de la secuencia. Entonces vamos a aplicar (...) algo de álgebra. Entonces vamos a pasar el menos uno que está al lado izquierdo de la operación, lo vamos a pasar al lado derecho, pero ahora no será menos uno sino más uno, pasa a sumar. Entonces nos quedaría 3n da 179 más 1 y luego [*ehhh*] multi perdón, dividimos los dos [*ehhh*] (...) dividimos, perdón, a 180, que es 179 más uno que era lo que estábamos haciendo, lo dividimos entre tres para hallar cuánto nos da n, entonces sería n da 180 dividido tres y ¿eso que nos da? nos da que n da 60. Entonces, terminamos, pero ¿está correcto? Bueno, vamos a verificarlo ya sabiendo el número del término para ver si nos da 179. Entonces bueno, primero escribimos la fórmula 3n -1 que, digamos que no sabemos, vamos a ver si nos da bien: tres por 60 menos 1, nos debe dar 179. Tres por 60 nos da 180 y menos 1, nos da 179. Es decir, que nuestra fórmula [*ehhh*] nuestra operación, la que hicimos está correcta.

El procedimiento descrito también fue usado para encontrar la respuesta de la pregunta número 5, en la que se indagaba si el número 503 pertenecía a la secuencia. Aquí MM demostró habilidades en el uso de signos alfanuméricos y en la capacidad de operarlos en lo que para ella es un tema algebraico. Además, el uso de palabras clave en su discurso como incógnita da cuenta del reconocimiento de cantidades indeterminadas con las que se puede operar.

Por su parte, en la imagen 57 vemos la solución que Mariana Valencia propone. Según ella, es otra fórmula que también usó en el desarrollo de la tarea No. 1.

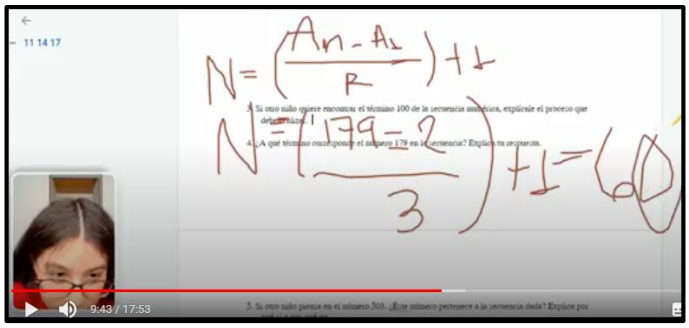


Imagen 57. Fórmula propuesta por Mariana Valencia para hallar el término.

MV3: y pues es la siguiente N que es lo que queremos hallar igual abrimos paréntesis menos uno, perdón, perdón no sé qué me pasó (…) menos A1 que es la primera, lo primerito de la lista, algo así y dividido R, eso, a todo esto, se suma un uno. Hagámoslo ya con el número ¿no? entonces con el término 179 (...) no, con el término no, con el número 179, N, hagámoslo rápido 179 menos 2 dividido la razón que es tres, cierro paréntesis más uno. Listo, hagámoslo así normal no? entonces 179 menos 2 como ya habíamos dicho antes, 9 menos 2 sería 7, entonces da 177, dividido 3 (...) hagámoslo con nuestra calculadora (...) 179 dividido 3 [*ahhhh*] [*Mariana se sorprende con el resultado que da número decimal*] no da no da, por eso se resta, 177 ¡sí, los corché! por no estar pilos [*Mariana se ríe*] dividido tres, ahora sí, esto nos daba número decimal [*refiriéndose al anterior resultado*] no es posible, no es posible porque nos tocaría usar una fracción, entonces, este video tiene muchos trucos. Esto nos daría igual a 59 más 1 igual 60, listo entonces sí nos da igual a 60 y eso sería igual a 60.

Ahora bien, en la imagen 58 respecto al desarrollo de la pregunta cinco, en la que se pedía comprobar si el 503 hacía parte de la secuencia, MV afirmó que no, porque el resultado daba decimal. Para este caso, consideramos que la interpretación que hizo MV de los signos alfanuméricos no le permitió confirmar que dicho número sí pertenecía a la secuencia.

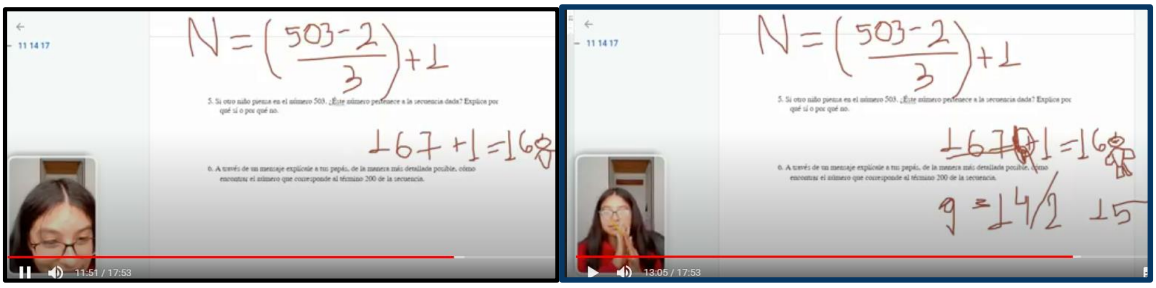


Imagen 58. Comprobación del número 503 como parte de la secuencia.

Para comprobarlo, MV utiliza la misma fórmula del punto cuatro. Aunque MV encontró que el 503 era el término 168 de la secuencia, decidió someter dicho término a los criterios de divisibilidad del 3 y, por tanto, llegó a la conclusión de que no pertenecía a la secuencia. A continuación, su razonamiento:

MV4: entonces vamos a ver si pertenece, entonces si queremos ver que un número es multiplicable de 3 *[Mariana quiso decir divisible]* sumamos todos sus dígitos y tiene que darnos un múltiplo de tres, listo eso nos da 7, 7 más 7, catorce, eso nos daría igual a, no, no es múltiplo de tres, porque este *[señalando el catorce]* es múltiplo de dos, el que más se acerca es quince. Bueno, entonces no pertenece a la secuencia dada, entonces no es posible.

Dado lo anterior, consideramos que MV tiene claro el papel de la fórmula y los reemplazos que hizo fueron adecuados, sin embargo, a la hora de comprobarlo confundió las ideas de número y de término de la secuencia.

Para dar respuesta a la solicitud de la pregunta cinco, las estudiantes coincidieron en ubicar pasos para encontrar el número que pertenece al término 200. Hacen alusión a la fórmula y a reemplazar el término adecuadamente. De acuerdo con el desarrollo de esta pregunta, podemos afirmar que, a pesar de que se presentaron algunas interpretaciones diferentes a lo largo de la tarea, las estudiantes tienen la capacidad de operar analíticamente los signos alfanuméricos de las fórmulas que propusieron, así mismo, encontraron maneras para darle sentido a las respuestas que hallaron, diferenciando las ideas de término y de número dentro de la secuencia.

Para ampliar un poco la perspectiva de los estudiantes sobre el desarrollo de las tareas No. 1 y No. 2, se decidió realizar un foro. Dicho foro contó con la asistencia de los estudiantes que las desarrollaron y una de las investigadoras. Para el desarrollo del espacio se tenían unas preguntas orientadoras que permitían observar y analizar las ideas de los estudiantes sobre sus respuestas.

Adicionalmente, se dio la posibilidad de participar en un padlet (anexos 4 y 5) en el que debían ubicar el mensaje solicitado en la última pregunta de cada tarea.

Las respuestas de los estudiantes, permitieron confirmar algunos aspectos que a lo largo del desarrollo de las tareas ya se venían observando. Por un lado, la capacidad que tienen para usar expresiones verbales y escritas que dan cuenta del reconocimiento de la característica en común, ejemplo de esto, las imágenes 51 y 53, así como la intervención MM3. Además, la habilidad que tienen, la mayoría de ellos, para usar signos alfanuméricos que son operados con naturalidad y que les permite encontrar respuesta a las preguntas (ver imagen 57 e intervención MV3). Dado lo anterior, se destaca también el sentido que le dan a las respuestas, aquí manifiestan un claro dominio en la diferencia que hay entre número, término o figura (por ejemplo, imágenes 55 y 56 e intervención MM4).

En los padlet (Ver anexo 4 y 5) se observa el desarrollo del último punto de cada tarea. En ambos casos, la mayoría de estudiantes hace una lista de pasos para encontrar el término solicitado. A diferencia de la tarea No. 1, los estudiantes en la tarea No. 2 fueron más específicos en las indicaciones para dar respuesta. Algunos usaron signos alfanuméricos que denotaban en algunos casos el término solicitado o el número. Esto nos confirma que los estudiantes tienen la capacidad de generalizar algebraicamente teniendo en cuenta información conocida. Además de utilizar signos alfanuméricos, le dan sentido a los mismos para dar respuesta a lo que se solicita.

En la siguiente tabla, se sintetiza la descripción, de los medios semióticos de objetivación del componente de analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas que emergieron en la actividad matemática, correspondientes a la tarea No.2. Para elaborar esta tabla (tabla 5) se ubica en la primera columna los tipos de generalización que emergieron en la tarea; en la segunda columna se ubican los recursos semióticos que utilizaron los estudiantes para dar cuenta de un tipo de generalización específica, en la tercera se ubican las expresiones semióticas que usaron los estudiantes para referirse a lo indeterminado y por último en la cuarta se ubican expresiones semióticas para dar cuenta del carácter operatorio de lo indeterminado:

Tabla 5. *Componente analiticidad en las generalizaciones aritméticas y algebraicas emergentes en la tarea No. 2.*

Tarea 2. ***Secuencia numérica con apoyo tabular***			
Tipo de generalización	**Medios semióticos de objetivación (lenguaje escrito, oral y corporal)**	**Expresión semiótica para referirse a lo indeterminado**	**Componente analiticidad: expresión semiótica para operar con lo indeterminado**
Generalización Aritmética	Se identifica la característica común, de un término a otro, "*sumar tres*" "*aumenta en tres*" y que se requiere del término anterior al solicitado. Se puede contemplar: ● Sumar tres para obtener el término solicitado, y hacer explícita dicha característica en su producción escrita y verbal (ASA1, JFN1, CC1). *"Busca la constante que se repite"* haciendo referencia a la comunalidad entre los términos.	*"diferencia"* *"tres en tres"*	Aunque identifica la característica común, "sumar tres", de una posición a otra, esta no le permite deducir una expresión que conlleve a determinar el número que le corresponde a cualquier figura. Entre cada término hay tres de diferencia". *"Esto nos da a entender que va de tres en tres".* *"Porque va de tres en tres".*
Generalización Algebraica	● Se logra diferenciar el término, del número que le corresponde, lo que sería un reconocimiento de variables. (JFN6) ● Se hace implícita la relación de dependencia e independencia entre las variables. ● Se identifica la constante y lo indeterminado de manera explícita (imagen 49, lenguaje escrito) ● Se identifica el proceso inverso de la característica común expuesta, para hallar el término que corresponde a un número de la secuencia.	"Formula" *"...n se refiere al término"* *"... (T) el número del término..."* "*...cualquiera sea, no importa...*" refiriéndose al número del término *"...número..."*	● Intervención (MM3). Explicación del término general para encontrar cualquier término de la secuencia. Uso de signos alfanuméricos para designar la característica en común desde los términos conocidos. *"aplicamos la fórmula, pero esto depende del término que estemos buscando (3n - 1)"* ● *"el número del término... por tres ...y el resultado que dé le restamos uno"* (JFN5) se realiza una abducción analítica que permite establecer una expresión directa para determinar el número que le corresponde a cualquier término. Se concibe y se opera con lo indeterminado."$(T \times 3) - 1$" (imagen 44) ● A partir de la característica común identificada, *"tres veces el número del término menos 1"*, se realiza una abducción analítica que permite establecer una expresión directa para

			determinar el número que le corresponde a cualquier término. ● A partir de la característica común identificada se realiza el proceso inverso para hallar el término que corresponde a un número de la secuencia. *"...número más uno dividido tres..."* (JFN8)

Capítulo 5

Conclusiones

A continuación, presentamos las conclusiones de nuestra investigación teniendo en cuenta la pregunta planteada, los objetivos, el marco teórico, el marco metodológico, los datos obtenidos y la posibilidad de investigaciones futuras sobre el tema abordado.

Para responder nuestra pregunta de investigación *¿Cuál es la naturaleza del componente analiticidad en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico?* nos basamos en los marcos teórico y metodológico descritos en los capítulos 2 y 3 de este trabajo. Estos marcos nos permitieron, en primera instancia, identificar los recursos semióticos usados por los estudiantes en el desarrollo de las tareas. En los videoclips y en sus producciones, los estudiantes, usaron señalamientos, expresiones orales, movimientos en el aire, encerraron información que consideraban relevante en sus hojas de trabajo (a veces digitalmente). Además, la modalidad virtual permitió que hicieran uso de pizarras colaborativas para explicar por pasos la solución de una de las preguntas de cada tarea, esto nos ayudó a identificar expresiones escritas con el uso de palabras clave que evolucionaron en el desarrollo de la tarea y generaron la caracterización de las mismas.

En segunda instancia y después de identificar los recursos semióticos utilizados por los estudiantes en el desarrollo de las tareas, realizamos la caracterización de los mismos. Lo anterior, observando la utilización de dichos recursos semióticos para designar elementos desconocidos o indeterminados, es decir, observando la evolución de estos recursos en el desarrollo de las preguntas de las tareas, analizando la abducción aritmética utilizada para encontrar términos cercanos y el desarrollo de algunos aspectos propios de la generalización aritmética. Adicionalmente, analizando las designaciones alfanuméricas y el uso que les daban para encontrar cualquier término de las secuencias propuestas y así caracterizar aspectos de la generalización algebraica. Este análisis realizado desde una perspectiva multimodal, permitió darle importancia no solo a la producción escrita, también fueron relevantes las producciones orales y gestuales de

los estudiantes ya que todo esto nos brindó una mirada integral del proceso de generalización que desarrolló cada uno de ellos.

Así mismo, avanzamos en el análisis de la naturaleza de las generalizaciones (aritmética y algebraica) que los estudiantes realizan, cómo se caracterizan y qué las diferencia, esto contribuyendo al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de primeros grados de bachillerato. Lo anterior fue evidente en la observación de varios aspectos. Por un lado, el uso de recursos semióticos como señalamientos, movimientos en el aire y el encerrar figuras en las hojas de trabajo físicas y digitales para destacar y clasificar datos de las secuencias (jerarquización de la información); por otro lado, las producciones escritas en las que usaron palabras clave y signos alfanuméricos que dieron cuenta de la evolución en el uso de la abducción aritmética y darle un componente analítico y de deducción que permite clasificarlas en generalización aritmética o algebraica.

Adicionalmente, destacamos la importancia del uso de los marcos teórico y metodológico. El marco teórico, por ejemplo, nos ayudó a planear y diseñar las tareas de acuerdo con algunos de los principios propios de la teoría de la objetivación, en relación con la postura teórica frente al pensamiento algebraico, los medios semióticos de objetivación y la transición del lenguaje natural a la narrativa simbólica. Lo anterior favoreció la heterogeneidad en el desarrollo de las tareas de los estudiantes: el surgimiento de designaciones distintas sobre lo indeterminado, niveles de generalización aritmética y generalización algebraica y la evolución de los mismos. Respecto al marco metodológico, fue importante concebir la producción de los estudiantes desde un enfoque multimodal ya que, todo lo que los estudiantes escriben, dicen y expresan, ha de ser observado de forma integral de modo que esto pueda dar cuenta del proceso de generalización que alcanzan.

Dado lo anterior, consideramos que los marcos teórico y metodológico nos ayudaron a dar respuesta a la pregunta planteada y alcanzar el objetivo general propuesto en lo que tiene que ver con la descripción y caracterización del componente analiticidad en la solución de tareas sobre variación que involucran la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico. Esto último es evidente en la descripción de las producciones de los estudiantes y en el análisis realizado en las tablas 3 y 5 del capítulo cuatro de este trabajo.

El análisis descrito en las tablas mencionadas permite identificar y caracterizar los medios semióticos de objetivación y las expresiones semióticas a las que acuden los estudiantes a la hora de referirse a lo indeterminado y su carácter operatorio según el tipo de generalización (aritmética o algebraica) a la que acuden al abordar las tareas propuestas.
A continuación, se muestran algunos hallazgos al respecto:

Características de los medios semióticos de objetivación en la generalización aritmética:

Entre los medios semióticos de objetivación en la generalización aritmética destacamos:

- Los señalamientos con los dedos o lápiz para realizar el conteo de los círculos en cada figura. (en el caso de la tarea No 1)
- Elaborar el dibujo solo de la figura solicitada para verificar el valor que se determinó, a partir de un lenguaje aritmético, *"agregar dos columnitas", "sumar dos"*, por ejemplo, y mostrando que la lista de las figuras anteriores y la cantidad de círculos corresponden a cada valor. (en el caso de la tarea No 1)
- Se realizan modificaciones del dibujo de la figura sin afectar la distribución espacial de la misma, con el fin de hacer más fácil su elaboración, por ejemplo, cambiar los círculos por puntos. (en el caso de la tarea No 1)
- Se establece el valor del término solicitado, a partir de un lenguaje aritmético sin recurrir al dibujo en el caso de la secuencia figural.
- Se puede evidenciar la presencia de nodos semióticos en este tipo de generalización y la expresión de la característica común identificada a través de su producción verbal, escrita y gestual. Los medios de objetivación, trabajan de manera conjunta con una misma intención.

En cuanto a las expresiones semióticas usadas para referirse a lo indeterminado, en la generalización aritmética esto no se da de manera explícita, por tal motivo se caracteriza el proceso de abducción que se dio en este tipo de generalización, destacando algunas expresiones escritas y orales que abonan el terreno a la hora de deducir una regla o fórmula.

- Se identifica la característica común, por ejemplo *"sumar dos", "agregar dos columnas", "dos columnitas hacia la derecha"*, y se hace explícita a través de la producción escrita, verbal y/o gestual.
- Se establece la correspondencia entre el término o figura y su valor respectivo o cantidad de círculos.
- Se aplica la característica identificada en los términos o figuras dadas de la secuencia como en aquellos términos o figuras que no se presentan, que en todo caso corresponden a casos cercanos consecutivos o no.
- Se reconocen las variables, por ejemplo, figura y cantidad de círculos, término y número correspondiente, no obstante, en algunos casos, no se identifica la relación de dependencia e independencia de las mismas.
- La generalización de la característica identificada no permite deducir la expresión directa para calcular el valor de cualquier término o figura. Se emplea para pasar de un término a otro o de una figura a otro (no necesariamente consecutivos).

Características de los medios semióticos de objetivación en la generalización algebraica:

Se evidenció que se puede iniciar en una generalización algebraica factual, en la que los gestos, los señalamientos, la actividad perceptual y las palabras, hacen parte de los medios semióticos de objetivación.

- En el caso se las secuencias figurales, descompone la figura por filas y/o columnas, realiza, correspondencia o relaciones numéricas entre el número de la figura y la cantidad de círculos, que la conforman, la expresa en su producción verbal con frases como: *"círculos horizontales y círculos verticales" "el número"* en algunos casos su producción verbal se acompaña del señalamiento del número de la figura y las columnas y/o filas que corresponda, apoyándose en el dibujo de una figura específica.
- En su producción verbal expresa de manera implícita la correspondencia identificada a través de casos específicos, por ejemplo *"figura 3: dos columnas de tres círculos",* o elaborando el dibujo, en ambos casos no requiere del término o dibujo de la figura anterior.

- Las variables: término y valor del mismo o figura y cantidad de círculos quedan implícitas, así como la relación de dependencia e independencia entre estas.
- Las variables: término y valor del mismo o figura y cantidad de círculos se hacen explícitas, con frases como *"la cantidad de columnas dependen del número de la figura*" hace explícita la relación de dependencia e independencia entre las variables.
- A partir de la generalización de la característica común identificada, el estudiante deduce una expresión directa que conlleva a establecer el valor de cualquier término o figura de la secuencia, que puede ser expresada acudiendo a un caso particular, empleando un lenguaje aritmético, haciendo dibujos, definiendo equivalencias numéricas con las formas que emplea para construir el mismo, proponiendo frases clave, empleando un lenguaje natural o se puede dar la mezcla de algunas de las anteriores.
- El proceso de contracción semiótica hace presencia, transita de palabras a frases clave, en términos de Radford (2010), las cuales expresa en un lenguaje natural, *"multiplicar el número de la figura por dos" "tres veces el término y le quito uno"*
- Nodo semiótico: sincronía entre la producción escrita, verbal y gestual.
- Se establecen diversas expresiones que permiten calcular el valor de cualquier término, las expresa a través de un lenguaje natural y/o aritmético.
- Se establecen equivalencias entre las expresiones que elabora y que permiten calcular el valor de cualquier término, las expresa a través de su producción escrita, verbal y/o gestual.
- Establece la expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término, empleando símbolos alfanuméricos, un lenguaje algebraico.
- Se identifica el proceso inverso de la característica común expuesta, para hallar el término que corresponde a un número de la secuencia.
- Se identifica la constante y lo indeterminado de manera explícita y de manera oral "*...La similitud entre los términos." "La constante en todos los términos"*

Con respecto a las expresiones semióticas usadas para referirse a lo indeterminado y a su carácter operatorio se pueden observar las tablas 3 y 5.

De manera general podemos caracterizar el componente analiticidad en las generalizaciones algebraicas:

- Emplea expresiones como*" siempre", "así sucesivamente", "en todos los términos"* y *"todas las figuras"*, que indican el trabajo no solo con los términos dados, o trabajados, sino también con aquellos que no ve, la manera de interpretar y trabajar con lo indeterminado.
- La generalización de la característica común identificada, que atiende a relaciones numéricas entre el término y su valor correspondiente a la figura y la cantidad de círculos, le permite realizar una abducción analítica, que conlleva a deducir una expresión directa para calcular el valor de cualquier término.
- La indeterminación se hace explícita, se interpreta y se trabaja con lo indeterminado.

Además, considerando los resultados de esta investigación se constituyen como retos para futuras investigaciones en esta línea:

- Profundizar los procesos de deducción (cómo los estudiantes usan lo que usan para deducir).
- Investigar a fondo sobre los procesos de inducción en los procesos de generalización.
- Investigar cómo se relacionan los procesos de inducción con los procesos de deducción.
- Profundizar la naturaleza de la generalización algebraica en ausencia de signos alfa numéricas del álgebra.
- Profundizar en la teorización y observación de la abducción en niveles aritméticos y analíticos. Esto, dado que es una idea relevante para caracterizar los procesos de generalización desarrollados en tareas figurales o numéricas y la evidencia del componente de la analiticidad en los mismos, lo que permite categorizar en generalización aritmética o en generalización algebraica la producción de los estudiantes.
- Profundizar en los tipos de generalizaciones mencionadas. Esto permite comprender las características de cada una, lo que se presenta en el tránsito de generalizaciones aritméticas a algebraicas, generando una clasificación adecuada de las producciones de los estudiantes.

- Indagar diferentes alternativas para la consecución de información necesaria y suficiente para una investigación. Para este caso, por la pandemia y las condiciones sociales que se desarrollaron durante la investigación, fue necesario pensar distintas formas de aplicación de las tareas haciendo uso de herramientas tecnológicas y modalidad virtual para posibilitar encuentros con los estudiantes.

- Proponer diferentes maneras de trabajar el pensamiento algebraico en los espacios académicos con los estudiantes que permitan el análisis de las cantidades, el reconocimiento de variables (dependiente e independiente), las relaciones de cambio, el planteamiento de hipótesis y el diseño y uso de expresiones alfanuméricas que permitan comprender y solucionar situaciones matemáticas problematizadoras, permitiendo el desarrollo el pensamiento algebraico.

Para finalizar, consideramos que esta investigación aportó al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes que participaron del estudio quienes cursan sus primeros años de bachillerato, desde tareas de generalización de patrones. Así mismo, creemos importante el aporte en cuanto a la forma de aplicar las tareas propuestas considerando la modalidad virtual asumida por los colegios durante el tiempo de la pandemia, que motivó la planeación de maneras distintas de recolección de datos. Para ello, fue importante la elaboración de videoclips individuales, la participación en foros grupales virtuales y el uso de herramientas tecnológicas como el uso de G-Suite y pizarras colaborativas. Estas herramientas permitieron identificar y caracterizar los recursos semióticos a los que acudieron los estudiantes en la solución de las tareas propuestas y dar respuesta a la pregunta de investigación y al logro de los objetivos propuestos.

Referencias

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, *9*(1), 267-300.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

D´Amore, L., Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el y Raíces del álgebra.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Radford, L. (2002). Sobre héroes y colapso de narrativas: una contribución al estudio del pensamiento simbólico. *Actas de la 16° Conferencia Internacional del Grupo de Psicología de la Educación de Matemáticas, PME 26,* Anne D. Cockburn y Elena Nardi (eds.), 2002, Vol. 4, pp. 81-88. [Traducción realizada por Pedro Javier Rojas G. y Jaime Humberto Romero C., abril de 2008].

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning. 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. En Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, 1(1), 143-145.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking,* 103-129

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. ZDM - *The International Journal on Mathematics Education.* DOI 10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 9-95.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L.; Cañadas, M.C.; Gutiérrez, J.; Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, v. 8*(18), 547-567.

Radford, L. (2018a). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA, 12,* 61-80.

Radford, L. (2018b). *Saber, aprendizaje y subjetivación en la teoría de la objetivación*. Anais do 5° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: 5° SIPEMAT. Belém, 1-22.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica, Edición especial,* 760-766

Vasilachis, I. (2006). La investigación cualitativa. En I. Vasilachis de Gialdino (Coord.), *Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 23- 60). Barcelona: Gedisa.

Vergel, R. (2010) La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 69- 81.

Vergel, R. (2015). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en educación primaria.* Bogotá, Colombia. UD editorial.

Vergel, R. (2019). Signo, lenguaje, sujeto y alteridad. *Documento de trabajo seminario de maestría en educación.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial UD.

Anexos

Anexo 1: tarea No. 1

Observa la siguiente secuencia de círculos:



1. Continúa la secuencia hasta la figura 6.

   a. ¿Cuántos círculos hay en la figura 4? _____.
   b. ¿Cuántos círculos hay en la figura 5? _____.

2. Sin dibujar la figura, ¿es posible saber la cantidad de círculos de la figura 20 de la secuencia? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.

3. Si otro niño quiere realizar la figura 26 de la secuencia, explícale el proceso que debe realizar.

4. Si otro niño utilizó 52 círculos para construir una figura de la secuencia, ¿a qué número de figura corresponde? Explica tu respuesta.

5. A través de un mensaje explícales a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar la figura 200 de la secuencia.

Anexo 2: tarea No. 2

Teniendo en cuenta la siguiente secuencia de números:

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

1. Continúa la secuencia numérica hasta el término 7

2. Sin continuar la secuencia numérica, ¿es posible saber cuál es el número que corresponde al término 15? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo hacerlo, si crees que no es posible, argumenta tus razones.

3. Si otro niño quiere encontrar el término 100 de la secuencia numérica, explícale el proceso que debe realizar.

4. ¿A qué término corresponde el número 179 en la secuencia? Explica tu respuesta.

5. Si otro niño piensa en el número 503. ¿Este número pertenece a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.

6. A través de un mensaje explícales a tus papás, de la manera más detallada posible, cómo encontrar el número que corresponde al término 200 de la secuencia.

Anexo 3: entrevista semiestructurada. tarea No. 1

PREGUNTA	INTENCIÓN
Si un compañero utiliza 84 círculos para construir una figura de la secuencia ¿A qué número de figura corresponde? ¿Cómo lo hiciste?	Estas preguntas buscan indagar si los estudiantes, a partir del arreglo geométrico de la secuencia y de figuras particulares, logran establecer aspectos comunes, de tal forma que puedan encontrar los términos siguientes, algunos cercanos y otros más lejanos.
Si yo te pregunto por la cantidad de círculos de la figura 136, ¿qué te toca hacer?	
Si yo te preguntara por la cantidad de círculos de la figura número 260, ¿cómo lo harías?	
¿Qué harías para encontrar la cantidad de círculos de la figura un millón?	
¿Podrías hallar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica con todos los detalles cómo obtienes la respuesta.	Se pretende ver cómo el estudiante hace uso de la comunalidad o la generalización de la característica común, que medios semióticos son recurrentes cuando lo hace y a que recursos. Se pretende ver a qué medios semióticos acude el estudiante, en caso de lograr establecer relaciones de covariación. Se tienen como intención ver como el estudiante llega a incluir la indeterminancia como parte de su discurso y de sus producciones escritas.
¿Cuál es la relación que encuentras entre la cantidad de círculos y el número de la figura?	
A través de un mensaje explícale a tu mejor amigo(a), de la manera más detallada posible, cómo encontrar la cantidad de círculos necesarios para realizar cualquier figura.	

Anexo 4. padlet tarea No. 1



Anexo 5. padlet tarea No. 2

