

Estimación de un modelo micro-cuasigeoidal mediante el modelamiento del campo de gravedad local para la incorporación de la primera estación de Colombia en el IHRF

Harold Olarte Ramírez.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería
Ingeniería Catastral y Geodesia.
Bogotá, Colombia
2025

Estimación de un modelo micro-cuasigeoidal mediante el modelamiento del campo de gravedad local para la incorporación de la primera estación de Colombia en el IHRF

Estudiante:

Harold Olarte Ramírez.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Ingeniero Catastral y Geodesta.

Director:

Carlos Eduardo Melo Martínez Ph.D.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería.
Ingeniería Catastral y Geodesia.
Bogotá, Colombia.
2025

"No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute."

- **Carl Friedrich Gauss.**

Agradecimiento

A mi familia, en especial a mi abuela y mi madre, a las dos mujeres de mi vida, por su apoyo constante, su paciencia y por acompañarme en cada etapa de este proceso. Gracias por estar presentes y ayudarme a sostener el ritmo cuando no veía una salida clara a las dificultades.

Al profesor Luis Fernando Gómez Rodríguez, quien me hizo tomar cariño y una admiración muy grande por la ciencia, la matemática y la geodesia. Su extrema vocación influyó directamente en mi interés por este trabajo tan exigente.

A mi compañero de trabajo y quién considero un amigo, el Dr. Carlos Rico: *infinitas, infinitas gracias*. Por esa actitud permanente de perfeccionamiento sin importar el trasnocho o las dificultades. Sin él, nada de esto hubiese sido posible.

A mi director Carlos Melo por mostrarme el rigor matemático y estadístico de esta área del conocimiento y a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por brindarme la oportunidad de estudiar esta hermosa carrera.

Al Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC), por la oportunidad y la confianza depositadas para emprender el modelado del cuasi-geoide, por el acceso a los insumos gravimétricos y la capacidad de cómputo que hicieron viable esta investigación. En particular, al Ing. Enrique Torres Moya, por su acompañamiento permanente y por velar porque cada etapa avanzara con rigor y buen rumbo.

Al Dr. Ole Baltazar Andersen (Technical University of Denmark), por proporcionar los datos del modelo DTU21GRA, esenciales para fortalecer el cuasigeoide marino. A la Dra.-Ing. Qing Liu (Technical University of Munich), por su disposición para atender nuestras preguntas. Y un muy especial agradecimiento a la Dra.-Ing. Laura Sánchez (Technical University of Munich), por su guía atenta, su aliento constante y por ser un referente para quienes deseamos crecer académicamente en este campo.

Finalmente, un reconocimiento a las y los desarrolladores de Generic Mapping Tools (GMT), PyGMT y del ecosistema Python. Sus herramientas libres hicieron posible la construcción, el análisis y la comunicación gráfica de los resultados presentados aquí.

Resumen

En el presente documento se desarrolla el refinamiento del campo de gravedad regional, haciendo uso de funciones de base radial esféricas y un modelo extendido combinado de Gauss-Márkov, con el fin de determinar un modelo cuasigeoidal regional de alta precisión y riqueza espectral, para éste propósito, se genera la mezcla de mediciones de gravedad de diferentes técnicas para la captura y modelización de diferentes frecuencias de la señal proveniente del campo de gravedad. Asimismo, se realiza una regularización del sistema de ecuaciones mediante la estimación de las componentes de varianza (VCE por sus síglas en inglés) y, posteriormente, la estimación del parámetro de regularización de Tikhonov λ haciendo uso del método de la L-curva. En particular, para la representación de las longitudes de onda larga se hace uso del modelo de geopotencial global XGM2019, mientras que las longitudes de onda corta-muy corta se representan mediante una combinación armónica esférica de los modelos Earth2014 y ERTM2160. Paralelamente, la consistencia del modelo se valida mediante datos de GNSS/Nivelación, considerando este conjunto de datos como independiente.

La materialización del Sistema Internacional de Alturas (IHRS por sus siglas en inglés) requiere una superficie geopotencial de referencia que responda al modelado cuasi-geoidal de alta resolución; por consiguiente, el modelo QgeoidMEDE2025 calculado en el presente proyecto proporciona una superficie que cumple la especificación antes mencionada y ofrece una solución para el cálculo del número geopotencial (C^{IHRF}) asociado al Marco de referencia internacional de alturas (IHRF por sus siglas en inglés) en la estación de monitoreo permanente MEDE, la cual forma parte del marco de referencia geodésico SIRGAS-CON además de hacer parte de las estaciones del IHRF. En este orden de ideas, la solución proporcionada por la superficie calculada en el presente proyecto se compara con las soluciones del modelo continental SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) y el modelo nacional QgeoidCOL2023. De este modo, el trabajo resulta fundamental para atender la petición del grupo de trabajo 3 de SIRGAS (GT-III), al contar con tres diferentes soluciones para las estaciones IHRF, y, además, para evidenciar en una aproximación que las diferentes configuraciones de modelización de cuasi-geoide tienen implicaciones directas en el cálculo de los números geopotenciales para IHRF (C^{IHRF}).

Palabras Clave: IHRF/IHRS, funciones de base radial esféricas, modelo extendido combinado de Gauss-Márkov, Regularización de parámetros, refinamiento regional del campo de gravedad, modelado cuasigeoidal regional.

Contenido

Agradecimiento v

1 Introducción **2**
1.1 Objetivos . . . 3
1.1.1 Objetivo General . . . 3
1.1.2 Objetivos Específicos . . . 3
1.2 Justificación . . . 3
1.3 Planteamiento del Problema . . . 4
1.4 Antecedentes . . . 5

2 Teoría Fundamental **6**
2.1 Principios de Geodesia Física . . . 6
2.1.1 Atracción Gravitacional de una Masa Puntual . . . 6
2.1.2 Potencial de un Cuerpo Sólido . . . 7
2.1.3 Funciones Armónicas, teorema de Stokes y principio de Dirichlet . . . 8
2.1.4 Armónicos Esféricos . . . 9
2.1.5 Potencial real(W), potencial normal(U) y potencial de perturbación(T) . . . 10
2.2 Funciones Gravitacionales . . . 15
2.2.1 Ondulación Geoidal(N) . . . 16
2.2.2 Anomalía de Altura(ζ) . . . 17
2.2.3 Perturbación de Gravedad(δg) . . . 18
2.2.4 Anomalía de gravedad(Δg) . . . 18
2.3 Sistema de Alturas . . . 19
2.3.1 Alturas Ortométricas(H^O) . . . 20
2.3.2 Alturas Normales(H^N) . . . 21
2.3.3 Alturas Elipsoidales(h) . . . 21
2.3.4 IHRS-IHRF . . . 22
2.4 Modelado del campo de gravedad . . . 23
2.4.1 Teoría de Stokes . . . 24
2.4.2 Teoría de Molodensky . . . 26
2.4.3 Enfoque Moderno . . . 27
2.5 Funciones de Base Radial Esféricas . . . 30

3 Metodología **34**
3.1 Adaptación de las Funciones de Base Radial Esféricas . . . 34
3.1.1 FBRE como Filtros . . . 34
3.2 Modelo Extendido de Gauss-Márkov . . . 36
3.3 Regularización de Parámetros . . . 39
3.3.1 Método VCE (Estimación de los Componentes de Varianza) . . . 40
3.3.2 Método L-curva . . . 41
3.4 Configuración del Modelo . . . 43
3.4.1 Ubicación de las FBRE . . . 43
3.4.2 Número máximo de Frecuencias . . . 45
3.4.3 Eliminación del efecto de Borde . . . 46
3.5 Técnica Remover, Calcular y Restaurar . . . 47
3.6 Estimación de Anomalías de Altura . . . 49
3.7 Estimación del Número Geopotencial (C_p^{IHRF}) . . . 51
3.7.1 Cálculo del W_p Provisorio . . . 51
3.7.2 Tratamiento de Mareas . . . 52
3.7.3 Cálculo C_p^{ZT} (Zero-Tide) . . . 55
3.7.4 Cálculo C_{IHRF} . . . 55
3.8 Tratamiento de datos . . . 55
3.8.1 Datos Terrestres . . . 56
3.8.2 Datos Aéreos . . . 60

4 Estimación del Modelo Cuasigeoidal **65**
4.1 Área de Estudio . . . 65
4.2 Insumos Gravimétricos . . . 66
4.2.1 Descripción Datos Terrestres . . . 66
4.2.2 Descripción Datos Aéreos . . . 68
4.2.3 Descripción Datos Altimetría Satelital . . . 71
4.3 Configuración del modelo para IHRF MEDE . . . 73
4.4 Modelos Implementados . . . 74
4.4.1 XGM2019 . . . 74
4.4.2 GOCO'06S . . . 75
4.4.3 dv_ell_Earth2014 . . . 76
4.4.4 ERTM2160 . . . 78
4.4.5 SRTMv2Gravity . . . 79
4.5 Datos de Validación . . . 80
4.5.1 Validación Absoluta . . . 80
4.5.2 Validación Relativa . . . 81

5 Análisis e Interpretación de Resultados **82**
5.1 Validación GNSS/Nivelación 82
5.1.1 Validación Absoluta 82
5.1.2 Validación Relativa 85
5.2 Resultados Finales 86
5.2.1 Significancia de parámetros estimados $\hat{d}$ 86
5.2.2 Estimación Potencial Perturbador Residual $\hat{T}^{res}$ 88
5.2.3 Estimación Anomalía de Altura $\hat{\zeta}$ y su desviación estándar $\hat{\sigma_\zeta}$ 89
5.2.4 Residuales del Ajuste por Min^2 91
5.3 Número Geopotencial C^{IHRF} en Estación MEDE 92
5.3.1 Cálculo de diferencia de potencial vértice Auxiliar 93

6 Conclusiones y Recomendaciones **96**
6.1 Conclusiones 96
6.2 Recomendaciones 97

1 Introducción

Es importante aclarar algunos aspectos importantes dentro del área de la geodesia física y el modelado cuasigeoidal, además de aclarar su directa relación e importancia en la definición de un sistema de alturas único basado en la teoría del potencial de gravedad con el fin de establecer una base para la mejor comprensión de esta investigación. En Colombia el modelado cuasigeoidal se ha desarrollado bajo diferentes técnicas que responden al intento de recuperación por completo de la señal proveniente del campo de gravedad de la tierra, haciendo uso de diferentes técnicas de medición (Satelital, aérea y terrestre), para representar con mayor precisión y resolución espectral el comportamiento del campo de gravedad de manera regional.

El modelado del campo de gravedad tiene como uno de sus múltiples propósitos la determinación de una superficie equipotencial del campo de gravedad de la tierra a la altura del nivel medio del mar (W_0). La determinación de dicha superficie funciona como superficie de referencia para las alturas. En Colombia la determinación de las alturas oficiales (Red de nivelación Nacional), parte de la altura inicial dada por el mareógrafo de Buenaventura, y se propaga sobre el territorio nacional mediante la nivelación geodésica, geométrica o también llamada nivelación de precisión. Dichas alturas resultan ser dependientes de la trayectoria, lo que induce problemas de exactitud en la determinación de alturas físicas. En la medida que la Red de nivelación Nacional no contemple el comportamiento de las masas al interior de la tierra, la determinación de las alturas no corresponderán al comportamiento del campo de gravedad de la tierra. Para ello el uso del modelo cuasigeoidal en combinación con el posicionamiento GNSS determina alturas físicas de manera más sencilla y rápida en comparación con la nivelación geodésica combinada con gravimetría.

La materialización de un sistema de alturas único basado en la teoría del potencial de gravedad, no solo incorporará las precisiones relativas del método de la nivelación geodésica, sino que además proporcionará independencia de la trayectoria para rutas largas, disminuyendo también el error de propagación. Para la materialización de un sistema de alturas único en Colombia, la determinación precisa de la superficie de referencia mediante el modelado del campo de gravedad de la tierra, responde a una necesidad fundamental.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

Determinar el número geopotencial IHRF en la estación de monitoreo permanente MEDE, realizando el modelado mediante funciones de base radial esféricas del campo de gravedad regional y comparar con las soluciones calculadas por los modelos QgeoidCOL2023 Liu et al. (2024) y SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).

1.1.2. Objetivos Específicos

- Diseñar los algoritmos y rutinas necesarias para reproducir la solución al problema de valor en la frontera escalar fijo, mediante el uso de las Funciones de Base Radial Esféricas (FBRE) Freeden et al. (1998) y un modelo extendido combinado de Gauss-Márkov Liu (2023).
- Desarrollar un modelo cuasigeoidal con zona de cálculo centrada en la estación de monitoreo permanente MEDE validando su consistencia con datos de GNSS/Nivelación.
- Analizar el cambio de las anomalías de altura con respecto al cuasigeoide colombiano 2023 Liu et al. (2024) y el SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).
- Evaluar las diferencias del número geopotencial (C_p^{IHRF}) en la estación MEDE, entre el cuasigeoide calculado en el presente proyecto, el cuasigeoide 2023 Liu et al. (2024) y el SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).

1.2. Justificación

La materialización de un sistema de alturas único en Colombia, coherente con la teoría del potencial de gravedad y con la realización del IHRS, exige una determinación precisa de la superficie de referencia de geoide o cuasigeoide, para proporcionar el número geopotencial de estaciones en terreno. En ese orden de ideas, MEDE definida como primera estación para la incorporación de Colombia al IHRF, requiere un modelado regional del campo de gravedad que integre observaciones recientes y control independiente mediante datos de GNSS/Nivelación, de modo que se reduzca la dependencia de trayectoria de la nivelación clásica y se mitiguen errores de propagación en rutas largas. Este enfoque no solo fortalece la consistencia interna del sistema de alturas, sino que además habilita su interoperabilidad institucional y transfronteriza, mejorando la obtención de alturas físicas mediante su combinación con GNSS.

Aunque QgeoidCOL2023 y SAM constituyen referencias nacionales y continentales, no incorporan completamente los levantamientos de gravedad terrestre ejecutados por el IGAC en 2024 alrededor de MEDE ni la gravedad aérea adicional relevante para la zona de estudio, el modelo

QgeoidMEDE2025 calculado en el presente proyecto provee otra solución bajo condiciones diferentes para estimar C_{MEDE}^{IHRF}. Por ello, se justifica desarrollar un cuasigeoide regional centrado en MEDE mediante el uso de Funciones de Base Radial Esféricas (FBRE) y un modelo extendido de Gauss–Márkov, validando con datos GNSS/Nivelación y paralelamente comparando anomalías de altura y el número geopotencial frente a QgeoidCOL2023 y SAM. El resultado será una estimación actualizada, trazable y operativa, que soporte la adopción del sistema de alturas único en el país y optimice los costos y tiempos frente a la nivelación geodésica y el modelado nacional y continental.

1.3. Planteamiento del Problema

A lo largo de la historia de la geodesia se han desarrollado soluciones a los problemas fundamentales de posicionamiento. La solución al problema horizontal se consolida bajo la adopción de un elipsoide de nivel gravimétrico, dejando atrás los elipsoides de nivel astrogeodésicos y los datums asociados, que resultaban poco prácticos y generaban conflictos de deslindes en las fronteras. De la misma manera para la solución del problema de posicionamiento vertical "La Asociación Internacional de Geodesia publicó en julio de 2015 una resolución para la definición y realización de un Sistema Internacional de Referencia de Altura (IHRS), de acuerdo con esta resolución, las coordenadas del IHRS son diferencias de potenciales de gravedad (Números Geopotenciales) referidas a la superficie equipotencial del campo de gravedad de la Tierra obtenida por el valor convencional $W_0 = 62636853{,}4 \frac{m^2}{s^2}$"Sánchez and Sideris (2015), el W_0 se estima en el documento del valor convencional para el potencial de referencia Sánchez et al. (2016). Desde entonces, se busca la integración de los sistemas verticales locales de referencia a un sistema único de alturas basado en el potencial de gravedad. Evitando de tal manera los conflictos entre datums verticales.

El instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC), quién es la agencia nacional de cartografía para Colombia, durante del año 2024 realizó levantamientos de gravedad terrestre cubriendo un área de aproximadamente 2° de longitud de arco con centro en lo que será la primera estación del marco de referencia vertical para Colombia (MEDE). El problema entonces se fundamenta en determinar el cambio en C_{MEDE}^{IHRF} teniendo en cuenta los siguientes cambios en la estructura general del modelado, en primer lugar la inclusión de los nuevos levantamientos de gravedad terrestre, en segundo lugar la incorporación de datos de gravedad aérea no contemplada en el modelado de QgeoidCOL2023 Liu et al. (2024) y Qgeoide SAM de Matos et al. (2021), y finalmente la reducción de la zona de cálculo. La diferencia en el modelado tendría implicaciones directas sobre la coordenada de diferencia de potencial y/o número geopotencial (C_p) de la estación MEDE entregada para IHRF.

1.4. Antecedentes

En Colombia el modelado del campo de gravedad terrestre para determinación de alturas físicas tiene sus inicios con el cuasigeoide 2004 Sánchez (2003), donde se calcula la primera superficie potencial de referencia. En el año 2017 se realiza el modelado de un micro cuasigeoide en la zona norte de Colombia Leal and Pérez (2017). Sin embargo, la comparación frente al cálculo de números Geopotenciales para la materialización del IHRS y su variación con respecto a las diferentes superficies modeladas no resulta ser el propósito de los trabajos. En el año 2020 se realiza el experimento de Colorado, en el cual se desarrollan diferentes tipos de soluciones al problema de valor en la frontera geodésico, en un área aproximada de (730km x 560km), "aprovechando los datos de GPS/Nivelación como un conjunto de datos de prueba preciso e independiente" Wang et al. (2021), en el cual se presentan 14 soluciones de modelado geoidal y cuasigeoidal con resolución de 1' x 1' , presentando tanto ondulaciones (N), anomalías de altura (ζ) y valores Geopotenciales (W_p) en 223 puntos a lo largo de la nivelación con posicionamiento GPS (GSVS 17).

En el experimento de Colorado, de las soluciones presentadas, once de los grupos calcularon modelos cuasigeoidales, bajo la solución al problema de valor en la frontera escalar tanto libre como fijo de Molodensky, tres de los grupos proporcionaron el cálculo del geoide mediante el problema de valor en la frontera escalar libre de Stokes. Wang et al. (2021), entre las soluciones que más tendían a la media de todas las 14 soluciones presentadas, se encuentras los mínimos cuadrados por colocación y las funciones de base radial esféricas (FBRE). En dicho estudio tras el ajuste de valores de potencial a lo largo de la línea de Nivelación y datos GPS (GSVS 17) se llega a un estudio referente a la materialización del IHRS. El experimento de colorado resulta ser uno de los eventos más importantes en el modelado del campo de gravedad para la determinación de modelos de geoide y cuasigeoide para IHRF. Todo a raíz de la resolución de la IAG (Asociación Internacional de Geodesia) del año 2015 para la Realización del IHRS IAG (2015).

Finalmente, en el año 2023 se calcula el cuasigeoide para Colombia mediante la solución al problema de valor de frontera fijo de Molodensky, usando FBRE Liu et al. (2024). Quienes adoptan la metodología desarrollada en el experimento de Colorado Liu et al. (2020a), definiendo la nueva superficie de referencia esferopotencial Heiskanen and Moritz (1967), y haciendo posible la materialización del IHRS en Colombia. Posteriormente el Instituto Geográfico Agustín Codazzi dentro de sus objetivos misionales realiza el levantamiento de valores de gravedad a lo largo del año 2024 para el modelado del campo de gravedad en la estación MEDE, definida como la primera estación que se incorpore a la red IHRF en Colombia.

2 Teoría Fundamental

En este apartado se presenta de manera sintética la teoría del modelamiento del campo de gravedad para la determinación del geoide y cuasigeoide. Partiendo de la Teoría del Potencial, Funciones armónicas, Teorema de Stokes, Principio de Dirichlet, Solución al problema de valor en la frontera geodésico en armónicos esféricos, Problema de Molodensky, Funciones Gravitacionales, Sistema de Alturas Físicas, Modelado del campo de gravedad y Funciones de Base Radial Esféricas.

2.1. Principios de Geodesia Física

2.1.1. Atracción Gravitacional de una Masa Puntual

De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton del año 1687, En la que se presenta dos puntos cuyas masas puntuales son m_1 y m_2, separados a una distancia l se atraen con una fuerza, representada por la siguiente ecuación Heiskanen and Moritz (1967):

$$F = K\frac{m_1 m_2}{l^2}, \tag{2-1}$$

donde K representa la constante de gravitación universal de Newton con el valor convencional de $K = 6{,}67428x10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$. En el momento en que se considere una masa atraída y la otra masa atrayente, entonces m_2 será considerada la unidad y se denota la masa $m_1 = m$.

Al incorporar un sistema de coordenadas rectangulares (X,Y,Z), y al introducir una función potencial (función escalar V), en donde el cambio de esta función V con respecto a (X,Y,Z) represente las componentes de fuerza de atracción gravitacional en (X,Y,Z). Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006). Dicha función escalar, como función potencial de gravitación tiene la siguiente forma, Heiskanen and Moritz (1967) Guo (2023):

$$V = \frac{Km}{l}. \tag{2-2}$$

Las componentes de la fuerza gravitacional, se expresan de la siguiente manera Späth et al. (2020):

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, Y = \frac{\partial V}{\partial y}, Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{2-3}$$

en términos vectoriales, el vector de fuerza de gravitación a partir de la función de potencial de gravitación es puede escribir bajo la ecuación que se expresa a continuación Guo (2023):

$$\mathbf{F} = (X, Y, Z) = grad(V). \tag{2-4}$$

Se puede observar entonces que el vector de fuerza es el vector gradiente de la función de potencial V Heiskanen and Moritz (1967), para este caso el potencial gravitatorio de un punto masa.

2.1.2. Potencial de un Cuerpo Sólido

En este caso las dos masas puntuales se encuentran distribuidas en forma continua en volumen (v), cuya densidad es $\rho = \frac{dm}{dv}$. En donde dv representa un elemento de volumen y dm un elemento masa. En el caso particular de la tierra puede aproximarse el potencial mediante una esfera homogénea de densidad constante. El potencial se representa bajo la siguiente integral Cid Palacios et al. (1999):

$$V = \iiint_v \frac{dm}{l} = K \iiint_v \frac{\rho}{l} dv, \tag{2-5}$$

donde l representa la distancia entre el elemento de masa $dm(\xi, \eta, \epsilon)$ y el punto atraído $p(X, Y, Z)$, al cambiar en la ecuación (2-5) por los elementos coordenados Guo (2023), se obtiene lo siguiente:

$$V(x, y, z) = k \iiint_v \frac{\rho(\xi, \eta, \epsilon)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\epsilon)^2}} d\xi d\eta d\epsilon. \tag{2-6}$$

El potencial V es continuo en todo el espacio y se anula cuando l tiende al infinito. En consecuencia, se afirma que a distancias muy grandes el cuerpo se comporta como una masa puntual como en (2-2) Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006). Por otra parte, las primeras derivadas de V (Componentes de la fuerza) son continuas en el espacio, pero no se puede decir lo mismo de las segundas derivadas de la función escalar V, en el caso en el que se presenten cambios de densidad irregularmente se llega a decir que algunas de las segundas derivadas presentan discontinuidades, como en el cambio de densidad de la tierra rígida y la atmósfera. De esta manera, la función potencial V satisface la ecuación de Poisson Heiskanen and Moritz (1967), Guo (2023).

$$\bigtriangledown^2 V = -4\pi K \rho, \tag{2-7}$$

donde $\bigtriangledown^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador Laplaciano. En donde la densidad es cero, es decir en el espacio vacío (fuera de los cuerpos atrayentes), la función del potencial gravitacional debe de satisfacer la condición de Laplace para funciones armónicas, dada de la siguiente forma Späth et al. (2020) Cid Palacios et al. (1999):

$$\bigtriangledown^2 V = 0. \tag{2-8}$$

- **Potencial de un cuerpo sólido en rotación:** Dado que la tierra se considera un cuerpo sólido sometido a rotación, donde el cuerpo gira alrededor del eje polar, se presenta como consecuencia del movimiento circular un vector de fuerza centrífuga. Por tal razón la gravedad terrestre será la suma de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga. Así, el potencial de un sólido en rotación será el potencial de gravitación más el potencial centrífugo, expresado por la siguiente ecuación:

$$V = K \iiint_v \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} w^2 r^2. \tag{2-9}$$

  La descripción detallada de estos potenciales se realiza en el apartado de **2.1.5.**

2.1.3. Funciones Armónicas, teorema de Stokes y principio de Dirichlet

Se dice que una función es armónica en una región D del espacio, si se satisface la condición de Laplace en todos los puntos de D, esto es $\bigtriangledown^2 f(x) = 0, \forall \ x \in D$. Si la región constituye el exterior de una determinada superficie cerrada S, tendrá que anularse en $l \to \infty$. Más aún, se puede mostrar que toda función armónica es, continua y analítica.

La función armónica mas sencilla es la que representa el inverso de la distancia. Es decir que satisface la ecuación (2-8). En el punto (ξ, η, ϵ), donde $l = 0$ y $1/l \to \infty$ es el único lugar donde no es armónica. La expresión del potencial en la ecuación (2-2) también es armónico en cualquier punto excepto en (ξ, η, ϵ) Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), Guo (2023).

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\epsilon)^2}}, \tag{2-10}$$

En el exterior de las masas atrayentes, resultan ser armónicos no sólo el potencial de una masa puntual, sino que además cualquier otro potencial gravitacional Cid Palacios et al. (1999), Guo (2023).

$$\bigtriangledown^2 V = K \left[\iiint_v \frac{\rho}{l} dv \right] = K \iiint_v \rho \bigtriangledown^2 \left(\frac{1}{l} \right) dv = 0. \tag{2-11}$$

El anterior ejemplo, corresponde a una particularidad del teorema de Stokes, **el cual dice que una función V que sea armónica fuera de una superficie S, está determinada por sus valores en S** Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), Guo (2023). Además, establece que hay una sola función V que asume determinados valores límite sobre la superficie S, siempre y cuando dicha función V exista. Por otra parte, **El principio de Dirichlet se define como: dados unos valores en la superficie frontera** (S) **existe siempre una función** V **que asume en** S **los valores límite dados.** Heiskanen and Moritz (1967), Cid Palacios et al. (1999).

2.1.4. Armónicos Esféricos

Al resolver la ecuación de Laplace (2-8) en un sistema de coordenadas esféricas Heiskanen and Moritz (1967), Guo (2023),

$$\bigtriangledown^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}. \tag{2-12}$$

Esta ecuación puede resolverse mediante una separación de variables (r, θ, λ), esto es, asumiendo que V es de la forma Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)Y(\theta, \lambda). \tag{2-13}$$

De esta manera, las soluciones para la ecuación (2-12), matemáticamente se expresan Guo (2023), Cid Palacios et al. (1999):

$$V = r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{y} \quad V = r^{-(n+1)} Y_n(\theta, \lambda). \tag{2-14}$$

Estas funciones son conocidas como armónicas sólidas, y las funciones en términos de θ y λ son conocidas como armónicos superficiales o armónicos de superficie de Laplace. Puesto que n no es una constante, sino que n varía desde 0 hasta ∞, las funciones escritas en (2-14), quedarán como se presenta a continuación Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{y} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} Y_n(\theta, \lambda). \tag{2-15}$$

En cuanto la solución de las armónicas de superficie de Laplace, se aplica una separación de variables. Una función g en términos de θ y otra función h en términos de λ Späth et al. (2020):

$$Y_n(\theta, \lambda) = g(\theta)h(\lambda), \tag{2-16}$$

las soluciones para $g(\theta)$, se presentan bajo la siguiente ecuación Heiskanen and Moritz (1967):

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos(\theta)), \tag{2-17}$$

y las soluciones para $h(\lambda)$, serán de la siguiente manera Cid Palacios et al. (1999):

$$h(\lambda) = cos(m\lambda) \quad \text{y} \quad h(\lambda) = sen(m\lambda). \tag{2-18}$$

Dado que en geodesia, la función potencial V debe ser armónica fuera de las masas atrayentes, la solución que se presenta a continuación es la solución externa.

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{n} a_{nm} P_{nm}(cos\theta) cos(m\lambda) + b_{nm} P_{nm}(cos\theta) sen(m\lambda), \tag{2-19}$$

donde $P_{nm}(x)$, serán las funciones asociadas de Legendre y su forma en términos de los polinomios de Legendre será Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$P_{nm}(\tau) = (1-\tau^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\tau)}{dt^m}, \quad \text{con: } \tau = cos(\theta). \tag{2-20}$$

A continuación, en la figura **2-1** se muestran los polinomios hasta grado 9.

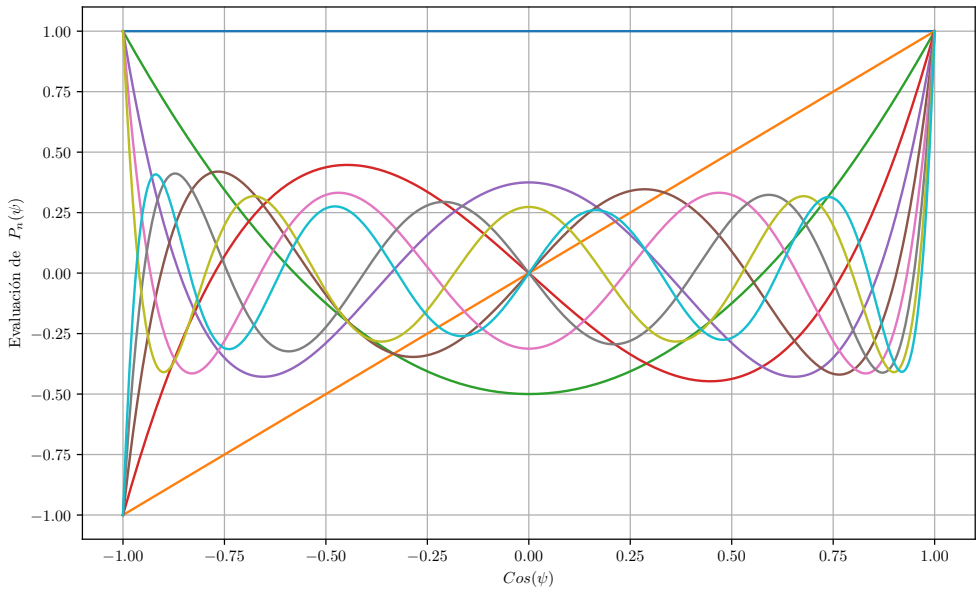


Figura 2-1: Polinomios de Legendre hasta grado 9.

2.1.5. Potencial real(W), potencial normal(U) y potencial de perturbación(T)

Potencial real (W)

"La fuerza que actúa sobre un cuerpo en reposo sobre la superficie de la tierra, es la suma vectorial de la fuerza gravitacional y la fuerza centrifuga causada por la rotación terrestre"Heiskanen and Moritz (1967),Cid Palacios et al. (1999), Dichos vectores de fuerza se obtienen de el gradiente de cada una de las funciones potenciales. Para el caso de la gravitación, el potencial estará descrito por la ecuación (2-19) y la fuerza por la ecuación (2-4).

Para el caso de la centrifuga, el potencial se representa por la siguiente ecuación Späth et al. (2020):

$$\Phi = \frac{1}{2}w^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}w^2r^2, \tag{2-21}$$

donde $w = \frac{2\pi}{t}$ es la velocidad angular de la rotación de la tierra, t el periodo y r es la distancia al eje de rotación, la fuerza centrifuga se obtiene entonces bajo el gradiente del potencial centrifugo

de la siguiente manera Heiskanen and Moritz (1967):

$$\mathbf{\Phi} = grad(\Phi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right). \tag{2-22}$$

El potencial de gravedad W será entonces la suma de los potenciales de gravitación y centrifugo. Y se conoce como el potencial real de la tierra y estará dado matemáticamente de la forma en la que se presenta a continuación Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi = k \iiint_v \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2). \tag{2-23}$$

El vector de gravedad real definido como el $grad(W)$, tiene como dirección la línea de la plomada (Apunta hacia la mayor concentración de masas al interior de a tierra), además de ser perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por el mismo punto. Como se puede observar en la figura **2-2**.

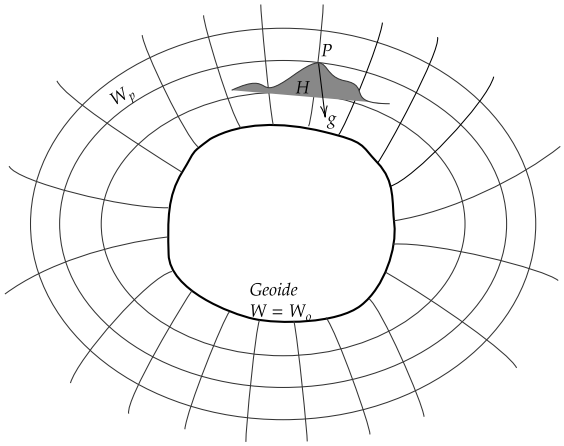


Figura 2-2: Superficies Equipotenciales y lineas de plomada. Reproducido de Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006).

Potencial normal (U)

La forma de la tierra se define inicialmente en primera aproximación como una esfera, y en segunda aproximación como un elipsoide. El potencial generado por esta segunda aproximación a la forma de la tierra se denomina potencial normal, y tiene una gran aplicación en la geodesia física dada su simplicidad de cálculo. Las diferencias entre el campo real de gravedad y el campo normal (ejercido por un elipsoide de nivel) son tan pequeñas que pueden considerarse lineales Heiskanen and Moritz (1967), el potencial normal (U) tiene la siguiente forma matemática Guo (2023):

$$U = U(x, y, z) = V + \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2). \tag{2-24}$$

A continuación se presentan los parámetros asociados al elipsoide GRS80 que representan la aproximación geométrica de la tierra:

Parámetro	Descripción	Valor
	parámetros Generales	
a	Semieje Mayor	6378137 m
KM	Constante Gravitacional	3986005×10^8 m^3 s^{-2}
J_2	Factor de Forma Dinámica	108263×10^{-8}
ω	Velocidad Angular	7292115×10^{-11} rad s^{-1}
	Constantes Geométricas	
b	Semieje Menor	6356752,3141 m
E	Distancia Focal	521854,0097 m
c	Radio de Curvatura Polar	6399593,6259 m
e^2	Primera Excentricidad (e)	0,00669438002290
e'^2	Segunda Excentricidad (e')	0,00673949677548
f	Achatamiento	0,00335281068118
$1/f$	Achatamiento inverso	298,257222101
Q	Cuadrante Meridiano	10001965,7293 m
R_1	Radio Medio	6371008,7714 m, $(2a+b)/3$
R_2	Radio de esfera de la misma Superficie	6371007,1810 m
R_3	Radio de esfera del mismo volumen	6371000,7900 m
	Constantes Físicas	
U_0	Potencial Normal sobre el elipsoide	$6263686{,}0850 \times 10$ m^2 s^{-2}
J_4	Coeficiente armónico esférico	0,00000237091222
J_6	Coeficiente armónico esférico	0,00000000608347
J_8	Coeficiente armónico esférico	0,00000000001427
m	$m = c^2a^2b/KM$	0,00344978600308
γ_a	Gravedad normal en el Ecuador	9,7803267715 m s^{-2}
γ_b	Gravedad normal en el polo	9,8321863685 m s^{-2}
f^*	$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$	0,005302440112
k	$k = \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a}$	0,001931851353
$\frac{1}{4}f_4$	$f_4 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fm$	0,0000058

Tabla 2-1: constantes y parámetros del GRS-80 Moritz (1988).

Puesto que el elipsoide es perfectamente conocido la determinación de $U(x, y, z)$ es posible dados los parámetros de **2-1**. Al contrario de la determinación de $W(x, y, z)$ ya que habría que conocer perfectamente la configuración de masas al interior de la tierra. La determinación entonces del potencial normal responde a lo siguiente Heiskanen and Moritz (1967), Guo (2023):

- Parámetros del elipsoide de nivel
- Velocidad angular ω
- Masa total M
- Factor de forma dinámica J_2

El cálculo del potencial normal (U), a partir de los parámetros fijos del elipsoide de nivel puede ser calculado mediante un sistema de coordenadas elipsoidales presentado a continuación Heiskanen and Moritz (1967), Cid Palacios et al. (1999), y cuya representación gráfica se puede observar en la figura **2-3** con elipsoides confocales que pasan por el punto de interés:

$$U(\mu,\beta) = \frac{KM}{E} tan^{-1}\left(\frac{E}{\mu}\right) + \frac{1}{2}w^2a^2\frac{q}{q_0}\left(sen^2(\beta) - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}w^2\left(\mu^2 + E^2\right)cos^2(\beta), \quad (2\text{-}25)$$

teniendo como:

- E = $\sqrt{a^2 - b^2}$ (Distancia focal o excentricidad lineal),
- β=$tan^{-1}\left((1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, tan(\beta)\right)$ Rapp (1984),
- $q = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{\mu^2}{E^2}\right) tan^{-1}\frac{E}{\mu} - 3\frac{\mu}{E}\right]$,
- $q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{E^2}\right) tan^{-1}\frac{E}{b} - 3\frac{b}{E}\right]$.

Para el cálculo de la gravedad referida al elipsoide de nivel (gravedad normal), usando los parámetros dispuestos en la tabla **2-1** las diferentes formulas se representan de la siguiente manera Moritz (1988)

- Somigliana:
$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a cos^2\varphi + b\gamma_b sen^2\varphi}{\sqrt{a^2cos^2\varphi + b^2sen^2\varphi}}, \quad (2\text{-}26)$$
- Expansión en Series:
$$\gamma_0 = \gamma_a\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} sen^{2n}\varphi\right), \quad (2\text{-}27)$$
con:
  - $Y_2 = \frac{1}{2}e^2 + K$,
  - $Y_4 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{2}e^2K$,

- $Y_6 = \frac{5}{16}e^6 + \frac{3}{8}e^4 K,$

- Abreviación de la expansión en series:

$$\gamma_0 = \gamma_a \left(1 + f^* sen^2(\varphi) - \frac{1}{4} f_4 sen^2(2\varphi)\right). \tag{2-28}$$

Las anteriores fórmulas proporcionan la gravedad normal sobre la superficie del elipsoide GRS-80. La continuación analítica mediante series de Taylor para llevar la gravedad teórica a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide a una altura h cualquiera, será de la siguiente manera Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), Cid Palacios et al. (1999):

$$\gamma_p = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2 + \ldots, \tag{2-29}$$

haciendo uso de una aproximación esférica tanto del gradiente vertical normal de gravedad $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ y de la segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}$, la gravedad normal a la altura de un punto p, se expresa bajo la siguiente ecuación matemática:

$$\gamma_p = \gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a}\left(1 + f + m - 2f sen^2(\varphi)\right) h + \frac{3}{a^2} h^2\right]. \tag{2-30}$$

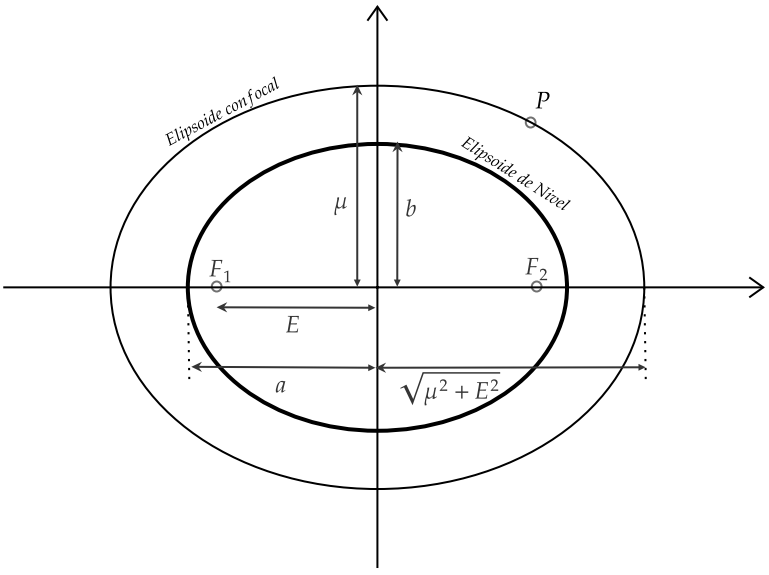


Figura 2-3: Superficies equipotenciales normales. Reproducido de Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006).

Potencial de perturbación (T)

Dado que el potencial normal (U) como aproximación mediante un modelo matemático perfecto no refleja la realidad tal cual es, la diferencia con el potencial real (W) se define como el potencial de perturbación (T), dicho potencial resulta ser tan pequeño que puede considerarse lineal. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera Guo (2023), Heiskanen and Moritz (1967):

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z). \tag{2-31}$$

La relación directa en la teoría clásica de la ondulación geoidal con el potencial perturbador, es conocido como el teorema de Bruns y ecuación es la siguiente Liu (2023), Cid Palacios et al. (1999):

$$N = \frac{T}{\gamma_0}, \tag{2-32}$$

el vector de perturbación de gravedad, al ser el gradiente de la función de potencial de perturbación, tiene la siguiente forma Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$\delta g = grad\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial T}{\partial h}. \tag{2-33}$$

La relación entre el potencial de perturbación, las ondulaciones geoidales, anomalías de altura, perturbaciones de gravedad, anomalías de gravedad, el problema de valor contorno, la ecuación fundamental de la geodesia física y el modelado del campo de gravedad se desarrollarán a continuación.

2.2. Funciones Gravitacionales

En este apartado se presenta la relación de cantidades importantes dentro del área de la geodesia con la teoría del potencial de gravedad desarrollado anteriormente, describiendo de manera individual cada una de las funciones derivadas del potencial perturbador (T). Teniendo en cuenta tanto la teoría clásica de Stokes y la teoría moderna de Molodensky, para este fin se presenta de manera gráfica las dos teorías para el desarrollo descriptivo posterior de la ondulación, la anomalía de altura, la perturbación de gravedad y finalmente la anomalía de gravedad.

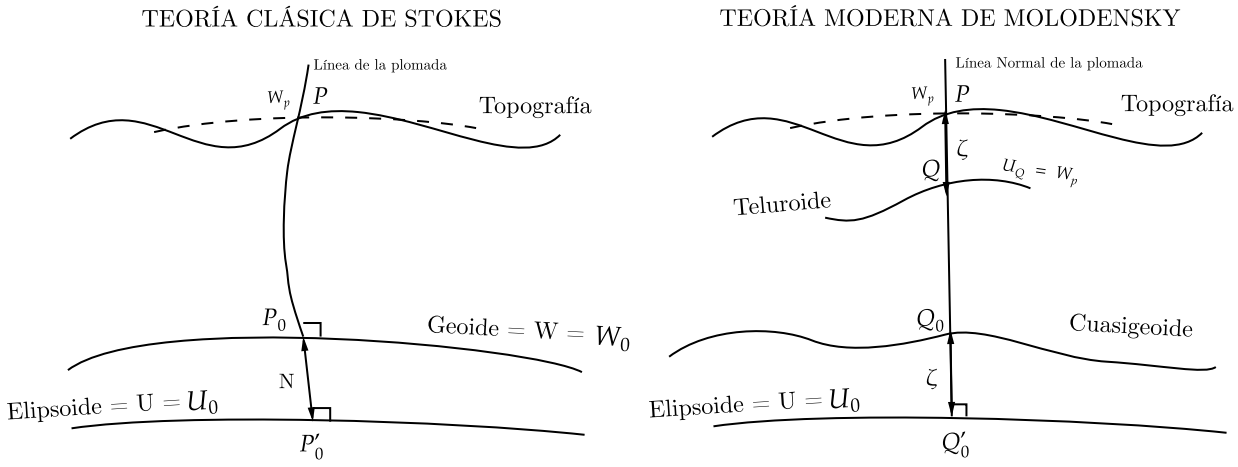


Figura 2-4: Superficies equipotenciales y esferopotenciales

2.2.1. Ondulación Geoidal(N)

El geoide es una superficie equipotencial del campo de gravedad de la tierra a la altura del nivel medio del mar, el término fue propuesto por Carl Friedrich Gauss como la figura matemática de la tierra. Heiskanen and Moritz (1967), dicha superficie dibuja la equipotencial por debajo de los continentes si el mar estuviese en completa quietud. Se denota principalmente como $W = W_0$. La separación en metros entre el geoide y el elipsoide es conocida como ondulación geoidal (N) y su importancia en la geodesia es basta dada su significación física.

La determinación directa del geoide se mantiene dada la teoría clásica de Stokes, mediante **la integral de Stokes** (2-56)(2-57) y las reducciones de la gravedad, además del uso de la ecuación (2-32) del teorema de Bruns.

$$N = \frac{T_0}{\gamma_0},$$

donde:

- T_0 = Potencial perturbador en el geoide,
- γ_0 = Gravedad normal en el elipsoide.

Cabe aclarar que bajo la teoría clásica de Stokes y la determinación del geoide se debe de mantener la condición: "Existe un punto sobre la superficie del geoide (Q_0) que proyectado normalmente hacia el elipsoide (Q'_0) tiene el mismo valor de potencial normal". En términos matemáticos

prácticos, se debe de satisfacer los siguiente Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), Guo (2023):

$$U_0 = W_0. \tag{2-34}$$

2.2.2. Anomalía de Altura(ζ)

El cuasigeoide refleja exactamente el comportamiento del teluroide a la altura del elipsoide. Para definir el teluroide se parte de que existe un punto tal que el potencial real a la altura del punto Q_p (en la topografía) es igual al potencial normal en la superficie del teluroide en un punto Q'_p proyectado a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide. La separación entre el terreno y el teluroide en metros se le conoce como la anomalía de altura(ζ). Dicha anomalía de altura dibuja el cuasigeoide si se parte del elipsoide de nivel. Ver figura **2-4**. En términos matemáticos se satisface la siguiente condición Lieb (2017)

$$U_Q = W_p. \tag{2-35}$$

Los conceptos de anomalía de altura, cuasigeoide y teluroide fueron inducidos por Mijaíl Molodensky en 1945 al desarrollo de su teoría moderna (conocida como el problema de Molodensky), éste desarrollo teórico surge como escape de la determinación del geoide mediante mediciones reducidas al geoide mismo (coordenadas, azimuts astronómicos, ángulos horizontales, observaciones gravimétricas y el problema de valor contorno) Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006). Dado que la asunción de densidades (ρ) dada la ecuación de Poisson (2-7) es una desventaja en la teoría clásica de Stokes, en la teoría moderna de Molodensky resulta ser evitada al trabajar plenamente con el elipsoide de referencia, y lograr la determinación de la superficie física sin hipótesis de la distribución de masas entre el geoide y el terreno. "Tanto el método gravimétrico como el astrogeodésico pueden modificarse para éste propósito"Heiskanen and Moritz (1967).

El cuasigeoide es una superficie idéntica al geoide sobre los océanos y muy parecida al geoide en cualquier otro lugar Liu (2023), en el caso de la teoría de Molodensky, la ondulación geoidal (N) es reemplazada por la anomalía de altura (ζ) y en consecuencia mediante el teorema de Bruns la anomalía de altura se define matemáticamente de la siguiente manera Lieb (2017):

$$\zeta = \frac{T_p}{\gamma_Q}, \tag{2-36}$$

donde:

- T_p = Potencial de perturbación en el terreno,
- γ_Q = Gravedad normal en la superficie teluroide.

2.2.3. Perturbación de Gravedad(δg)

Como se menciona en la ecuación (2-33), el vector de perturbación de gravedad es el gradiente del potencial de perturbación (T). En la práctica a causa de poder medir la magnitud del vector de gravedad sobre el terreno, la magnitud del vector de perturbación de gravedad define de la siguiente manera Lieb (2017), observar la figura **2-4**:

$$\delta g = g_p - \gamma_p, \tag{2-37}$$

donde:

- $g_p =$ gravedad en el punto P (Sobre la superficie de la tierra),
- $\gamma_p =$ gravedad normal a la altura del punto P.

Para éste caso la gravedad teórica es subida a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide mediante las ecuaciones (2-26),(2-27),(2-28) y (2-30). Las perturbaciones al ser calculadas plenamente mediante el uso del elipsoide de nivel, no hacen asunciones del comportamiento de la densidad (ρ) a lo largo de la línea perpendicular del geoide hasta la altura del punto P, como se verá en el siguiente apartado de anomalías de gravedad. Las perturbaciones de gravedad al ser la derivada directa parcial del potencial perturbador T, tienen mas potencia en las altas frecuencias, lo que suaviza el contenido de la señal de alta frecuencia Lieb (2017) y pueden ser fácilmente calculadas hoy día mediante el conocimiento preciso de coordenadas elipsoidales a partir del posicionamiento GNSS.

Cabe aclarar que la aproximación esférica de la ecuación (2-33) es Lieb (2017):

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{2-38}$$

2.2.4. Anomalía de gravedad(Δg)

Las anomalías de gravedad se mencionan en primer instante en la teoría clásica de Stokes, al momento de proyectar el punto P_0 (en el geoide) a un punto P_0' (en el elipsoide) a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide. Observar la figura **2-4**. La diferencia entre el vector de gravedad sobre la superficie de geoide y el vector de gravedad sobre la superficie del elipsoide es el vector de anomalía de gravedad y matemáticamente tiene la siguiente forma Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$\boldsymbol{\Delta g} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{P_0}} - \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{P_0'}}, \tag{2-39}$$

dado que en la práctica se consigue la medición de la magnitud del vector de gravedad, la magnitud del vector de anomalía de gravedad es representada por la siguiente ecuación Heiskanen and Moritz (1967):

$$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{P'_0}. \tag{2-40}$$

Como se ha mencionado anteriormente, la anomalía de gravedad en el sentido de Stokes sucede a la altura del geoide y elipsoide, lo que implica una asunción de densidades (ρ) a lo largo de la línea perpendicular al geoide hasta el punto P sobre el terreno, en donde se realiza la observación de gravedad, observar figura **2-4**, esto genera **efectos indirectos** en la determinación del geoide en el sentido de Stokes (mediante el método gravimétrico puro), dadas las reducciones del valor observado. La determinación clásica entonces termina no en un geoide sino en un cogeoide Heiskanen and Moritz (1967), por lo cual hay que hacer un manejo adecuado de los antes nombrados efectos indirectos.

En el caso de las anomalías de gravedad en el sentido de Molodensky, como se ha venido comentando el problema de la asunción de densidades (ρ) es evadida al trabajar plenamente con el elipsoide. Para éste caso la ecuación que define las anomalías de gravedad (magnitud del vector de anomalía de gravedad) será Lieb et al. (2016):

$$\Delta g = g_p - \gamma_Q, \tag{2-41}$$

donde:

- g_p = Gravedad en el punto P (Sobre el terreno),
- γ_Q = Gravedad Teórica sobre la superficie teluroide,

observar la figura **2-4**, la gravedad sobre la superficie del elipsoide es llevada a la superficie del teluroide haciendo uso de las ecuaciones (2-26),(2-27),(2-28) y (2-30) mediante la altura normal (H^N), Dicha altura definida en el siguiente apartado.

2.3. Sistema de Alturas

En este apartado lo que se presenta es a manera de resumen la conexión e importancia entre las funciones gravitacionales presentadas anteriormente (Ondulación geoidal y anomalía de altura) con las alturas físicas en geodesia, para finalmente comentar tanto la importancia como el establecimiento de un sistema de alturas único basado en la teoría del potencial, por lo que a continuación se presenta un gráfico para apoyar visualmente las descripciones posteriores.

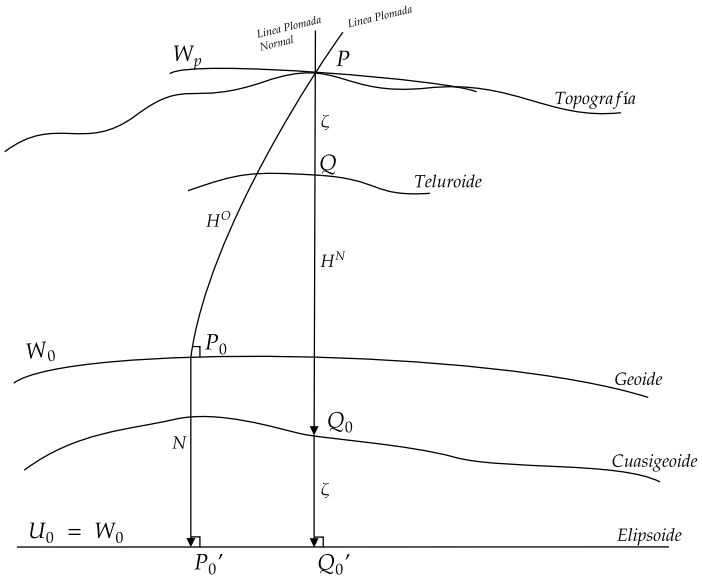


Figura 2-5: Tipos de Alturas

2.3.1. Alturas Ortométricas(H^O)

La altura ortométrica de un punto P sobre la superficie de la tierra será la distancia vertical entre el punto P y el punto P_0 a lo largo de la línea perpendicular a la superficie del geoide (línea de la plomada), como se muestra en la figura **2-5**. En términos matemáticos teniendo en cuenta las superficies equipotenciales a la altura del punto P y a la altura del punto P_0, la altura ortométrica se define de la siguiente manera en términos de potencial Liu (2023), Torge (2001):

$$H^O = \frac{W_0 - W_p}{\bar{g}} = \frac{C_p}{\bar{g}}, \tag{2-42}$$

donde:

- $W_0 =$ Valor del potencial real en P_0,
- $W_p =$ Valor del potencial real en P,
- $\bar{g} = \frac{1}{H^O}\int_0^{H^O} g dH^O =$ Valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada entre P y P_0,
- $C_p = \int_0^{H^O} g dH^O =$ Número geopotencial o diferencia de potencial entre la altura del punto P y a la altura del punto P_0.

Ya que la altura elipsoidal hoy día es fácilmente determinada mediante el posicionamiento GNSS, la definición de la altura ortométrica (H^O) en términos de la altura elipsoidal (h), será Torge (2001), Denker (2013):

$$H^O = h - N. \tag{2-43}$$

Esta relación matemática entre las alturas elipsoidales y las ondulaciones del geoide fundamentan una de los principales objetivos del modelamiento geoidal, como referencia para las alturas.

2.3.2. Alturas Normales(H^N)

"Al suponer que el campo de gravedad de la tierra sea normal, es decir que, $W = U$,$g = \gamma$ y $T = 0$, las alturas ortométricas son reemplazadas por las alturas normales"Heiskanen and Moritz (1967), dichas alturas serán las distancias verticales entre el punto P sobre la superficie terrestre y el punto Q_0 sobre la superficie del cuasigeoide a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide, observar la figura **2-5**. En términos matemáticos las alturas normales se definen de la siguiente manera en términos de potencial Liu (2023), Torge (2001):

$$H^N = \frac{W_0 - W_p}{\bar{\gamma}} = \frac{C_p}{\bar{\gamma}}, \tag{2-44}$$

donde:

- $\bar{\gamma} = \frac{1}{H^N}\int_0^{H^N} \gamma dH^N$ = Gravedad media normal a lo largo de la línea normal de la plomada, para éste caso γ se puede calcular mediante la ecuación (2-30).

Otra forma de expresar la gravedad media normal, será de la siguiente manera Heiskanen and Moritz (1967):

$$\bar{\gamma} = \gamma\left[1 - \left(1 + f + m - 2fsen^2\varphi\right)\frac{H^N}{a} + \frac{H^{N^2}}{a^2}\right], \tag{2-45}$$

teniendo en cuenta la expresión matemática para las alturas normales en términos de la altura elipsoidal según lo comentado en el apartado de alturas ortométricas, las alturas normales se definen de la siguiente forma, en la ecuación (2-46) Lieb (2017):

$$H^N = h - \zeta. \tag{2-46}$$

Esta relación matemática entre las alturas elipsoidales y las anomalías de altura fundamentan una de las principales objetivos del modelamiento cuasigeoidal.

2.3.3. Alturas Elipsoidales(h)

Las alturas elipsoidales al observar la figura **2-5** serán simplemente la distancia vertical entre el punto P sobre la superficie del terreno y el punto P_0' o Q_0' sobre la superficie del elipsoide, en términos matemáticos la altura elipsoidal se define de la siguiente manera en términos de potencial Torge (2001):

$$h = \frac{U_0 - U_P}{\bar{\gamma}} = \frac{\Delta U}{\bar{\gamma}}. \tag{2-47}$$

En términos de tanto las ondulaciones geoidales y las anomalías de altura, las alturas elipsoidales se definen según la siguiente expresión matemática:

$$h = N + H^O = \zeta + H^N. \tag{2-48}$$

2.3.4. IHRS-IHRF

Durante la reunión de 2015 de La Asociación Internacional de Geodesia (IAG) y La Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG por sus siglas en inglés) se publica una resolución para la definición y realización de un Sistema Internacional de Referencia de Alturas (IHRS por sus siglas en inglés) Sánchez and Sideris (2015), este Sistema tiene como principio la teoría del potencial de gravedad terrestre visto en los anteriores apartados, y por lo tanto el principal parámetro para el IHRS está en términos de valores de diferencia de potenciales ($W_0 - W_P$) o Números Geopotenciales (C_P) referidos a un valor convencional $W_0 = 62636853{,}4 m^2 s^{-2}$ para su coordenada vertical. Para sus coordenadas horizontales, importantes dado que $W_P = W_{(X_P, Y_P, Z_P)}$ (el valor de potencial estará ligado al vector de posición), el IHRS tendrá las coordenadas (X, Y, Z) en el Marco de Referencia Internacional (ITRF) Sánchez and Sideris (2015). Ésta resolución también establece que todas las observaciones, parámetros y datos deben de estar en el sistema de mareas medias y corteza media (the mean tidal system/mean crust), a parte de lo mencionado toda coordenada dispuesta para el IHRS debe de estar sujeta a una temporalidad para el estudio de sus variaciones $(\dot{X}_P, \dot{Y}_P, \dot{Z}_P, \dot{W}_P/\dot{C}_P)$.

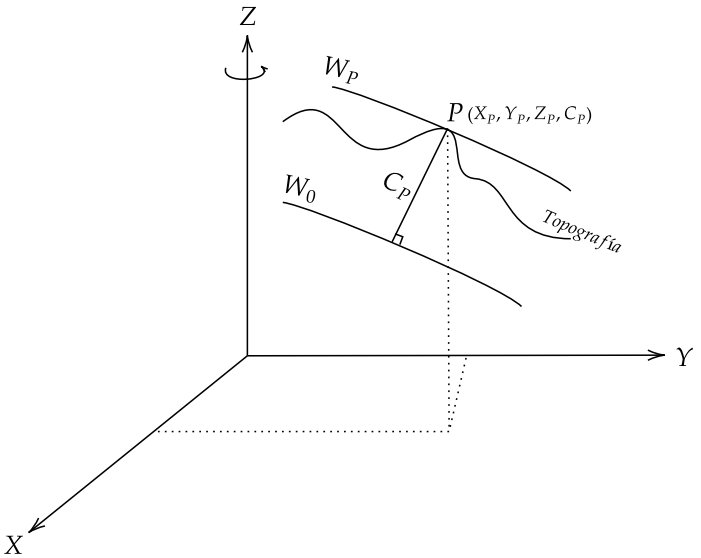


Figura 2-6: Sistema Internacional de Alturas.

El establecimiento del Marco de Referencia Internacional de Alturas (IHRF), parte en la materialización de lo definido anteriormente para el IHRS, en una serie de estaciones definidas en el mundo asignándole a cada una de ellas sus correspondientes coordenadas (X, Y, Z, C_P) Sánchez et al. (2021), Liu (2023), para el establecimiento de la coordenada W_P existen tres enfoques Liu (2023):

- Unificación de sistemas locales existentes,
- uso de modelos globales de alta resolución (GGM),
- uso de modelos de geoide o cuasigeoide.

De esta manera se llega a decir que la fiabilidad de la estimación del potencial (W_P) de cualquier punto sobre la superficie terrestre depende de las limitaciones de un modelado preciso de geoide o cuasigeoide para los lugares con una buena densidad de observaciones/mediciones de gravedad Liu (2023). Los objetivos actuales en función a los recursos gravimétricos y tecnológicos es la determinación geoidal o cuasigeoidal con $\pm 1cm$ en N, ζ; lo que equivale a $10^{-1}m^2s^{-2}$ en términos del potencial.

2.4. Modelado del campo de gravedad

El modelado del campo de gravedad de la tierra se fundamenta en dar solución a un problema de valor en la frontera (PVF), en matemáticas (ecuaciones diferenciales) un PVF es una ecuación diferencial junto a una serie de restricciones adicionales (condiciones de contorno) para dar cumplimiento a la ecuación principal Denker (2013), La utilidad del PVF se fundamenta en su buen planteamiento para que éste sólo tenga una solución Denker (2013).

En los apartados anteriores se mantuvo una leve descripción de la teoría del potencial de gravedad en geodesia, que en esencia, se describe como el estudio de la función potencial (escalar) relacionada con el campo gravitacional vectorial conservador. La solución a las ecuaciones (2-8) de Laplace, (2-7) de Poisson que involucra no divergencia y divergencia respectivamente Denker (2013) resultan ser de carácter fundamental. Para el caso de la ecuación Laplaciana (importante para geodesia física) (2-8), el PVFG consiste en la determinación de una función potencial V armónica por fuera de la superficie que encierra las masas atrayentes de la tierra que cumple las condiciones límite (condiciones de frontera) y es regular en el infinito Denker (2013).

Existen varios PVF en matemáticas los cuales según Denker (2013) son:

- Dirichlet, resuelve la función potencial V dados sus valores en la superficie límite,
- Neumman, resuelve la función potencial V dada sus derivadas normales (dirección de la normal) en la superficie límite,

- Robin, resuelve la función potencial V dada una combinación lineal de V y su derivación normal en la superficie límite.

El uso de las cantidades δg y Δg condiciona el problema de valor frontera en el número de incógnitas al solucionar. Para el problema de valor frontera escalar fijo (P.V.F.E.F) existe sólo una incógnita que sería el potencial W ya que las coordenadas (X, Y, Z) son dadas por técnicas como el GNSS Denker (2013), para el problema de valor frontera escalar libre (P.V.F.E.L) existen cuatro incógnitas, las coordenadas (X, Y, Z) y W Denker (2013). Tanto para el problema de valor frontera vectorial fijo (P.V.F.V.F) y problema de valor frontera vectorial libre (P.V.F.V.L) se darán valores límite de $\boldsymbol{\delta g}$ y $\boldsymbol{\Delta g}$ en lugar de valores δg y Δg respectivamente Denker (2013).
así que:

- $\delta g, \boldsymbol{\delta g} \rightarrow$ P.V.F.E.F y P.V.F.V.F,
- $\Delta g, \boldsymbol{\Delta g} \rightarrow$ P.V.F.E.L y P.V.F.V.L.

2.4.1. Teoría de Stokes

Las relaciones básicas entre las cantidades definidas en el apartado 2.2 (Funciones Gravitacionales) se define como Heiskanen and Moritz (1967):

$$U_p = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q N = U_Q - \gamma N, \tag{2-49}$$

entonces el potencial sobre cualquier punto fuera de la superficie límite, será:

$$W_p = U_p + T_p = U_Q - \gamma N + T, \tag{2-50}$$

para el caso del geoide en la teoría clásica de Stokes se satisface que Heiskanen and Moritz (1967):

$$W_p = U_Q = W_0. \tag{2-51}$$

Escribiendo la anomalía de gravedad (2-40) (Δg) teniendo en cuenta la formulación de Bruns se tiene que Heiskanen and Moritz (1967):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \tag{2-52}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T, \tag{2-53}$$

ahora dejando todo a un solo lado de la igualdad, se tiene lo siguiente Cid Palacios et al. (1999):

$$\Delta g + \frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T = 0. \tag{2-54}$$

La ecuación (2-54) es conocida como la ecuación fundamental de la geodesia física ya que esta relaciona la cantidad medida Δg y el potencial perturbador T. Para la teoría clásica de Stokes ya que sólo se conoce Δg sobre la superficie geoide, la ecuación (2-54) sólo se puede usar como condición límite. Al considerar en la teoría clásica que el geoide encierra la totalidad de las masas, el potencial afuera satisface la ecuación de Laplace (2-8), lo que define una densidad de cero ($\rho = 0$) y T será armónica. Ahora si se complementa (2-8) con (2-54) es posible determinar T en cualquier punto fuera del geoide Denker (2013), Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006).

Entonces según lo comentado al inicio del apartado, y considerando (2-54) como una combinación lineal de T y $\frac{\partial T}{\partial h}$, el P.V.F tratado será tipo Robin Heiskanen and Moritz (1967).

La escritura de la ecuación (2-54), en una aproximación esférica resulta estar definida bajo la siguiente ecuación Denker (2013):

$$\Delta g + \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R}T = 0. \tag{2-55}$$

La formulación de Stokes resulta de considerar la integral de prolongación ascendente de Poisson y hacer posible el cálculo de Δg fuera del geoide, lo que hace posible integrar (2-55) con respecto a r Heiskanen and Moritz (1967). Dado que la ondulación geoidal es de sobremanera importante dentro de la teoría clásica la determinación de N se dará bajo la integral de Stokes y el teorema de Bruns (2.2.1).

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \tag{2-56}$$

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \tag{2-57}$$

donde $S(\psi)$ será la función ponderadora de Stokes y tendrá la siguiente ecuación matemática Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(cos\psi). \tag{2-58}$$

Para poder llevar a cabo la determinación de geoide, debe de tenerse en cuenta diferentes aspectos importantes en el tratamiento del P.V.F.G. en la teoría clásica de Stokes:

- Las masas afuera del geoide deben de eliminarse,
- los valores observados de gravedad deben reducirse al nivel del geoide,
- las masas topográficas deben condensarse en el geoide,
- tratamiento del efecto indirecto adecuadamente, para pasar de cogeoide a geoide.

2.4.2. Teoría de Molodensky

Al aplicar la tercera identidad de Green al geopotencial W se obtiene Heiskanen and Moritz (1967):

$$-2\pi W + \iint_s \left[W \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial W}{\partial n} \right] ds + 2\pi w^2(x^2+y^2) + 2w^2 \iiint_{Tierra} \frac{dv}{l'} = 0, \quad \text{(2-59)}$$

donde:

- S = superficie física de la tierra,
- l = distancia entre P y el elemento variable de superficie,
- n = la normal a la superficie S,
- $\frac{\partial W}{\partial n}$ = componente normal vectorial de la gravedad a S,
- w = Velocidad angular,
- l' = distancia entre P y el elemento variable de volumen.

En éste caso al momento de la linealización, ya que W resulta ser una función bastante arbitraria, se decide aplicar sobre la función de potencial normal U, que al restar de la ecuación (2-59), y ya que la superficie desconocida S puede cambiarse por el teluroide dado que ds difiere de $dTeluroide = d\varepsilon$ en cantidades del mismo orden que la anomalía de altura, se obtiene la siguiente ecuación que relaciona las mediciones en superficie de la tierra y el potencial de perturbación T Heiskanen and Moritz (1967):

$$-2\pi T + \iint_\varepsilon \left[T \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial n} \right] d\varepsilon = 0, \quad \text{(2-60)}$$

ya que la normal n es sobre la superficie de la tierra o sobre la superficie del teluroide, dicha normal no es necesariamente vertical, así que $\frac{\partial T}{\partial n} \neq \frac{\partial T}{\partial h}$, y por lo tanto intervienen las componentes de la deflexión de la vertical (ξ, η) Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), Molodensky logra establecer una forma de suprimir (ξ, η), mas sin embargo, la ecuación integral se puede escribir de la siguiente manera teniendo en cuenta las componentes de la deflexión de la vertical, la cual también se puede aplicar al geoide mismo si éste se encuentra regularizado Heiskanen and Moritz (1967).

$$T - \frac{1}{2\pi}\iint_\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h}\frac{cos\beta}{l} \right] T d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iint_\varepsilon \frac{1}{l}\left[\Delta g - \gamma\left(\xi tan\beta_1 + \eta tan\beta_2\right)\right] cos\beta d\varepsilon, \quad \text{(2-61)}$$

donde:

- $\beta_1 =$ ángulo de inclinación norte-sur del terreno con respecto a la horizontal,
- $\beta_2 =$ ángulo de inclinación este-oeste del terreno con respecto a la horizontal,
- $\beta =$ ángulo máximo de inclinación del terreno.

Esta formulación de la ecuación (2-61) responde al uso de las ecuaciones (2-54) y (2-8) en la teoría clásica de Stokes.

La solución de la ecuación integral, se desarrolla mediante series o aproximaciones sucesivas, en donde la aproximación aceptable se obtiene en la segunda iteración, en donde el primer término de la solución de Molodensky es la solución en término único de Stokes, su expresión matemática será, Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma, \tag{2-62}$$

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma, \tag{2-63}$$

donde:

- $G_0 = \Delta g$: anomalía de gravedad en el sentido de Molodensky,
- $G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \Delta g d\sigma$: atracción gravitacional de masas residuales.

2.4.3. Enfoque Moderno

El uso de un modelo global (GGM por sus siglas en inglés) en esencia sería mas fácil para determinar valores de W_p en cualquier punto sobre la superficie de la tierra pero la exactitud y la desviación estándar de su determinación no sería en finalidad lo mas recomendado para determinar dichos potenciales reales, así que se desarrolla un enfoque mas regional usando la combinación espectral (Pesos espectrales) de diferentes técnicas de medición definidos de mejor manera en Denker (2013), como lo serian el método estadístico de colocación por mínimos cuadrados (CMC), integral de Stokes, el método de Mascons, entre otros Liu (2023). El trabajo con residuales resulta mejorar las técnicas como en colocación mínimo cuadrática residual (CMCR) aplicando la técnica Remover, Calcular y Restaurar (RCR) Liu (2023). Para el caso de la integral de Stokes la combinación con el GGM, proporciona longitud de onda corta por parte de la fórmula de Stokes y longitud de onda larga mediante el GGM, para éstos casos se genera un cambio en la función ponderadora de Stokes para minimizar el error de truncamiento Liu (2023) Featherstone (2001), aunque el problema de uso de la integral recae en la imposibilidad de la combinación heterogénea de datos.

En el caso del experimento de Colorado se desarrollan diferentes tipos de soluciones al problema de valor en la frontera geodésico, en un área aproximada de (730km x 560km), "aprovechando los datos de GPS/Nivelación como un conjunto de datos de prueba preciso e independiente" Wang et al. (2021), en el cual se presentan 14 soluciones de modelado geoidal y cuasigeoidal con resolución de 1' × 1' , presentando tanto ondulaciones (N) , anomalías de altura (ζ) y valores geopotenciales (W_p) en 223 puntos a lo largo de la nivelación con posicionamiento GPS (GSVS 17).

En el experimento de Colorado, de las soluciones presentadas, once de los grupos calcularon modelos cuasigeoidales, bajo la solución al problema de valor en la frontera escalar tanto libre como fijo de Molodensky, tres de los grupos proporcionaron el cálculo del geoide mediante el problema de valor en la frontera escalar libre de Stokes. Wang et al. (2021), entre las soluciones que más tendían a la media de todas las 14 soluciones presentadas, se encuentran los mínimos cuadrados por colocación y las FBRE.

Autor	Tipo de P.V.F y datos de entrada	Método
AUTh	Escalar libre de Molodensky GGM: XGM2016, d/o 719 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	RCR, integral de Stokes modificado (1D FFT) Modificación del kernel de Wong-Gore (mejor ajuste con GPS/nivelación), sin tapa, grados de transición 450-719
CASM	Escalar libre de Molodensky con datos terrestres GGM: RefB, d/o 2190 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire y perturbaciones de gravedad residual aerotransportada 1°×1°	Método de combinación espectral Cálculo de anomalías de altura a partir de datos terrestres y aéreos de forma independiente Combinación espectral de las anomalías de altura del GGM (hasta el grado 114 desde donde entra en transición con los datos de gravedad superficial hasta el grado 217) y la gravedad terrestre y aérea (entre los grados 217 y 1.000 con transición suave en cada extremo) con el modelo SRTM (hasta el grado 10.800), Tamaño de la tapa 1°
CGS	Escalar libre Stokes-Helmert GGM: RefB, d/o 2190 Datos de superficie: 1°×1° anomalías de gravedad de Helmert terrestres y aerotransportadas en el geoide	Kernel de Stokes Modificado con L =210, Tamaño de capa 6° y FFT para integración Numérica
Curtin	Escalar libre de Molodensky GGM: RefB, d/o 2190 Datos de superficie: 1°×1° anomalías de Faye (libre de aire tipo Molodensky + corrección de terreno)	RCR, integral de Stokes modificado (1D FFT) Modificación del kernel Wong-Gore (mejor ajuste con GPS/nivelación), tamaño de la tapa 0,3°, grado de modificación 360
DGFI	**GBVP fijo** **GGM: XGM2016, d/o 719** **Datos de superficie: perturbaciones de gravedad puntuales**	**RCR, SRBF El kernel de Shannon utilizado para los datos terrestres; y el kernel de CuP utilizado para los datos aéreos Los coeficientes desconocidos asociados a los kernels determinados por el procedimiento de estimación de parámetros, en lugar de la integración numérica**
DTU	Escalar libre de Molodensky GGM: XGM2016, d/o 360 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	RCR, integral de Stokes modificada (FFT esférica) Modificación del kernel Wong-Gore (que se ajusta mejor con datos de GPS/nivelación), sin tapa, grados de transición 180-190, 100 % de relleno cero

Continúa en la siguiente página

Autor	Tipo de P.V.F y datos de entrada	Método
Minia	Escalar libre de Stokes GGM: RefB, d/o 2190 Datos de superficie: 1°×1° anomalías residuales (isostáticas) en el geoide	RCR, kernel modificado de Stokes integral Meissl (1971) modificado, tamaño de la tapa 0,5°
GSI	Escalar libre de Stokes GGM: XGM2016, d/o 719 Datos de superficie: 1°×1° anomalías de gravedad Helmert residuales en el geoide	RCR, núcleo modificado de Meissel-Molodensky integral de Stokes modificado (mejor ajuste con GPS/nivelación), tamaño de la tapa 0,2°, grado de modificación 719
ITU	Escalar libre de Molodensky GGM: XGM2016, d/o 719 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	LSMSA Modificación del kernel basada en una solución no sesgada de los parámetros de modificación de mínimos cuadrados, desviación estándar de las anomalías de la gravedad superficial 3 mGal, tamaño de la tapa 0.5°, grado de modificación del kernel igual al coeficiente GGM máximo (grado 719)
KTH	Escalar libre de Molodensky GGM: GOCO05S, d/o 240 Datos de superficie: 0.5°×0.5° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	LSMSA Modificación de mínimos cuadrados con GGM solo por satélite Varianzas del grado de señal según Tscherning y Rapp (1974) Variaciones del grado de error como una combinación de ruido blanco (σ 1 mGal) y ruido coloreado (σ 0,5 mGal con correlación de longitud 0,5 grados), tamaño de la tapa 2°
NGS	Escalar libre de Molodensky GGM: RefB, d/o 2190 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	RCR, modificación del kernel Wong-Gore integral de Stokes modificado (mejor ajuste con datos GPS/nivelación), tamaño de tapa 1°, grado de modificación 980
NTIS-GEOF	Escalar libre de Molodensky GGM: XGM2016, d/o 500 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	Modificación del kernel de LSMSA basada en una solución sesgada de parámetros de modificación de mínimos cuadrados, tamaño de tapa de 0,5°
Polimi	Escalar libre de Molodensky GGM: XGM2016, d/o 719 Datos de superficie: 1°×1° anomalías tipo libre de aire de Molodensky	RCR, LSC Varianzas de la señal según la función de covarianza esférica de Tscherning y Rapp (1974)

Tabla 2-2: Resumen de Soluciones presentadas en el experimento de Colorado, Tomado de Wang et al. (2021)

Se puede comentar significativamente que el enfoque moderno tras los diferentes métodos de cálculo mostrados en la tabla **2-2**, se fundamenta en la búsqueda de los geoides de $\pm 1cm$. En el experimento de Colorado se logra precisiones medias para las catorce soluciones de $\pm 2cm$, de manera general del experimento de Colorado se señala que Wang et al. (2021):

- examinar cambios en el modelamiento topográfico residual RTM y TC,
- mejor asignación de pesos espectrales (GGM, datos aéreos y terrestres),
- mantener modelo de referencia común, un radio adecuado de integración numérica y parámetros óptimos de modificación del kernel,
- comprender los sesgos entre los modelos,
- comparar varias soluciones,

- mejorar concordancia con Nivelación / GNSS.

2.5. Funciones de Base Radial Esféricas

Otra forma de escribir la solución al problema de valor de contorno de tipo Dirichlet de la ecuación (2-15). Si la superficie S es una esfera, es mediante armónicos esféricos. Si se asume una esfera unitaria. La función potencial puede ser escrita en sumas de armónicas de superficie de Laplace, de manera que la serie que converge cuando $r \geq 1$, será una función armónica por fuera de la superficie S, y tendrá la siguiente representación matemática para una esfera de radio arbitrario R Bentel et al. (2013):

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\lambda). \tag{2-64}$$

La solución un poco más directa se define mediante **la integral de Poisson**, los coeficientes $Y_n(\theta,\lambda)$, se pueden hallar de la siguiente manera Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$Y_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} V(R,\theta',\lambda') P_n(cos\psi) sen\theta' d\theta' d\lambda', \tag{2-65}$$

reemplazando la ecuación (2-65) en la ecuación (2-64), se llega a la siguiente expresión Heiskanen and Moritz (1967):

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} V(R,\theta',\lambda') P_n(cos\psi) sen\theta' d\theta' d\lambda', \tag{2-66}$$

por lo que ordenando lo términos constantes de la expresión, la función armónica por fuera de la superficie S, se puede reescribir (2-66) de la siguiente forma Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} V(R,\theta',\lambda') \left[\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{\frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(cos\psi)} \right] sen\theta' d\theta' d\lambda'. \tag{2-67}$$

La expresión resaltada en negrilla se conoce como el kernel de las funciones de base radial esféricas, para cuando $R = r = 1$. Por lo cual el término $B(x, x_k)$ a lo largo del presente documento tendrá la siguiente ecuación Eicker (2008):

$$B(x,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(cos\psi), \tag{2-68}$$

donde:

- B_n es el coeficiente n de Legendre, quién definirá la forma de las FBRE,
- P_n es el polinomio de grado n de Legendre,

- $cos(\psi)$ será el coseno de la distancia esférica entre el punto de posición x_k y el punto de observación x.

Es posible reescribir (2-68), estableciendo un punto sobre la superficie de una esfera arbitraria Ωr, en donde la posición de cualquier punto x, será $x = r\,[cos\varphi cos\lambda, cos\varphi sen\lambda, sen\varphi]' = r\boldsymbol{X_r}$, donde φ es la latitud, λ es la longitud y $\boldsymbol{X_r}$ será el vector unitario en dirección a x Bentel et al. (2013), ya que para efectos pragmáticos el kernel establecido en (2-68) no es computable, se realiza una aproximación a N_{max}, entonces la escritura del kernel de las FBRE, quedará de la siguiente manera Bentel and Schmidt (2015):

$$B(x, x_k) = \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\boldsymbol{X_r'} \boldsymbol{X_{r_k}}). \tag{2-69}$$

Es debido mencionar que la determinación de los coeficientes de Stokes (F_{nm}) bajo la ecuación (2-66), puede computarse mediante **la transformada esférica de Fourier**, en donde la evaluación numérica de la integración se puede escribir como Bentel and Schmidt (2015):

$$F_{nm} = \int_{\Omega R} V(x_p) Y_{nm}^R(x_p) d\omega \approx \sum_{i=1}^{N} V(x_i) Y_{nm}^R(x_i) w_i, \tag{2-70}$$

donde w_i son los pesos de integración. Otra forma de encontrar los coeficientes de Stokes además de la integración numérica representada en la ecuación (2-70), es mediante el uso de **una estimación de parámetros**, dadas una condiciones y un procedimiento que se enunciará en el capítulo de metodología.

La estimación de parámetros a cambio de la transformada esférica de Fourier se puede realizar dados los siguientes motivos:

- Teorema de adición de armónicos esféricos,
- relación de ortogonalidad,
- continuación analítica hacia arriba y hacia abajo del potencial de gravedad.

Anteriormente se nombró que los coeficientes de Legendre B_n, definirían la forma y filtrado en las FBRE, a continuación se presentan algunos tipos de funciones de base radial esféricas.

- **Función Paso-Bajo de Shannon**, es el kernel mas sencillo, en donde hasta un ancho de banda N todos los valores serán uno y para todo valor $n > N$ los valores serán cero. Bentel et al. (2013). Esta caída en el dominio de la frecuencia genera oscilaciones fuertes en el dominio espacial Bentel et al. (2013), matemáticamente tendrá la siguiente forma:

$$B_n = 1, \text{ si } n \in [0, N].$$

- **Función Paso-Banda de Shannon**, para este caso se definen el ancho de banda entre un mínimo de frecuencia n_1 y un máximo de frecuencia n_2. Las oscilaciones en lo espacial serán entonces mas grandes que para la función Paso-Bajo de Shannon Bentel et al. (2013), matemáticamente tendrá la siguiente forma Bentel et al. (2013):

$$B_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in [n_1, n_2], \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

- **Función Paso-Bajo de Blackman**, para este caso se busca un suavizado en el dominio de las frecuencias en comparación con la función de Paso-Bajo de Shannon Bentel et al. (2013), matemáticamente tendrá la siguiente forma Bentel et al. (2013):

$$B_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n < n_1, \\ A(n)^2, & \text{si } n \in [n_1, n_2], \\ 0, & \text{si } n > n_2. \end{cases}$$

con:

$$A(n) = \frac{21}{50} - \frac{1}{2}cos\left(\frac{2\pi(n-n_1)}{2(n_2-n_1)}\right) + \frac{2}{25}cos\left(\frac{4\pi(n-n_1)}{2(n_2-n_1)}\right).$$

- **Kernel Polinómico Cúbico**, es uno de los kernels con menor oscilación en el dominio espacial, al invertir su comportamiento en el dominio espectral asignando uno para el grado cero y cero para su grado máximo Bentel et al. (2013), matemáticamente tendrá la siguiente forma Liu et al. (2020a):

$$B_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{n}{N_{\text{máx}}}\right)^2 \left(1 + \frac{2n}{N_{\text{máx}}}\right), & \text{si } n \in [0, N_{\text{máx}}], \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

- **Kernel Abel-Poisson**, este es un kernel el cual permite evaluar la sumatoria hasta ∞, dada su expresión analítica, mas sin embargo en términos prácticos habría que escoger infinitos puntos en el enmallado para usarlo, esto es computacionalmente imposible, así que se usa una versión truncada Bentel et al. (2013), matemáticamente tiene la siguiente forma Bentel et al. (2013):

$$B_n = h^n, \; h = e^{-\rho}.$$

A continuación en la figura **2-7**, se presenta el comportamiento en el dominio espacial de algunos de los kernel presentados anteriormente.

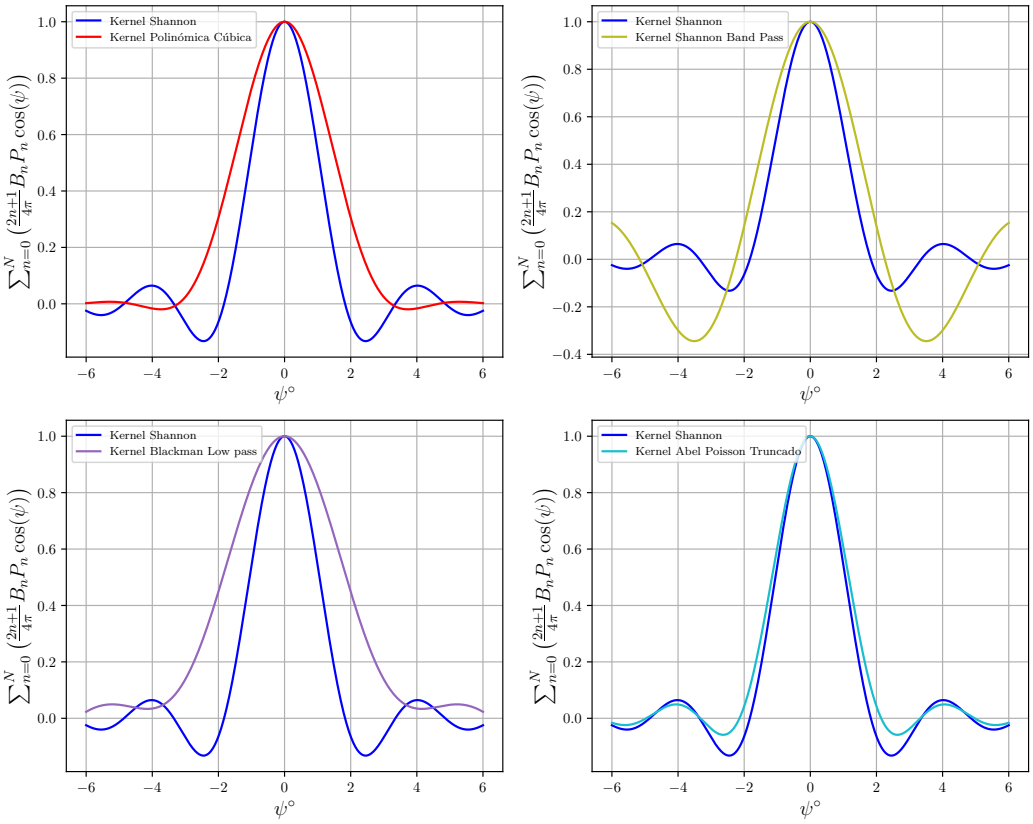


Figura 2-7: Comportamiento en el espacio según Bn

En la figura **2-8** se genera un enmallado de 6° x 6°, se grafica el comportamiento en 3 dimensiones de las funciones de base radial esféricas, en lo que comprende a los kernel de Shannon Low-Pass y Cup (polinómico cúbico).

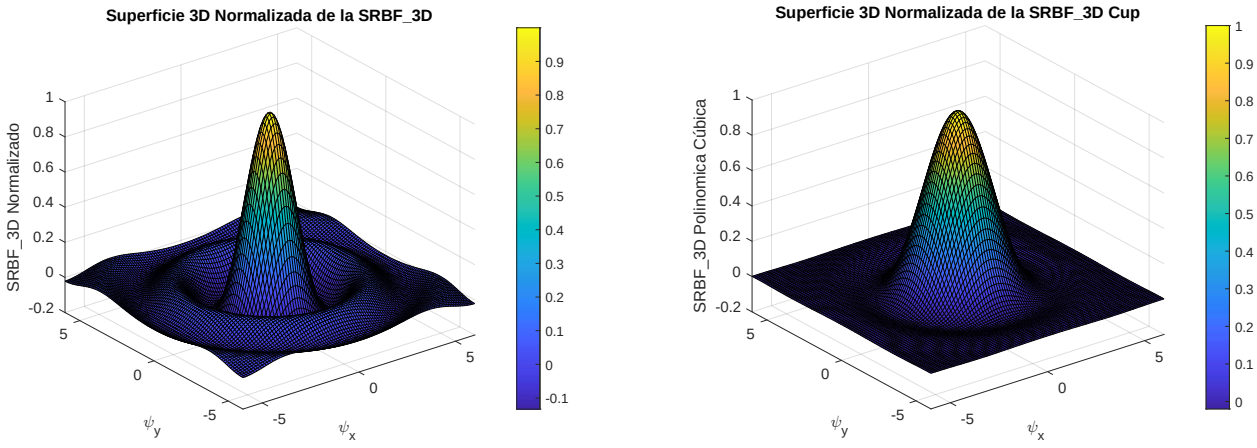


Figura 2-8: Comportamiento FBRE en 3 Dimensiones

3 Metodología

En este apartado lo que se pretende es determinar la metodología a seguir en el presente trabajo para la solución al problema de valor contorno escalar fijo mediante el uso de las FBRE y una estimación de parámetros estableciendo un modelo de regresión extendido de Gauss-Márkov. En primer lugar se debe de determinar las adaptaciones de las FBRE según la función gravitacional que se pretende representar, para luego detallar el modelo de Gauss-Márkov, el uso de la técnica Remover-Calcular-Restaurar (RCR) y como se determina finalmente el modelo de cuasigeoide.

3.1. Adaptación de las Funciones de Base Radial Esféricas

En el apartado de Funciones Gravitacionales se mencionan algunas cantidades de importancia en la geodesia física, dado que una función armónica $F(x)$ puede expresarse como una suma de FBRE, el potencial de perturbación T es entonces usado para determinar cantidades como N (ondulación geoidal) y ζ (anomalía de altura). Para poder determinar la función potencial T mediante la magnitud del vector de perturbación de gravedad δg determinado por su gradiente $\frac{\partial T}{\partial n}$, es necesario determinar las propiedades de filtrado de las FBRE y su escalado multiespectral.

3.1.1. FBRE como Filtros

Una FBRE puede usarse como filtros de paso bajo, paso banda y paso alto. Así que ya que una función armónica se expresa mediante una suma de FBRE, el filtrado de una función F(x) se puede determinar mediante el uso de una convolución de la siguiente manera Liu (2023):

$$G(x) = (B * F)(x) = \int_{\Omega_R} B(x, x_k) F(x_k) d\Omega_R, \tag{3-1}$$

si se establece que $Bn = 1, \forall\ n \in \Re$, la función filtrada será igual a la función original, por lo que los coeficientes d_k serán independientes de la forma de las FBRE, dado el teorema de FBRE de banda limitada, en el que se "muestra que los coeficientes estimados d_k pueden calcular diferentes convoluciones de una señal de banda limitada"Liu (2023) dado:

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^{K} d_k\ B(x, x_k),\ \text{y}$$

$$G_2(x) = \sum_{k=1}^{K} d_k \, C(x, x_k),$$

donde la única condición será que estén limitados en banda hasta N_{max}, esto no sólo permite usar diferentes funciones de base radial esféricas para diferentes datos (naturaleza de datos) sino que además permite dados unos coeficientes estimados, poder mediante los mismos coeficientes, estimar el comportamiento de diferentes funciones gravitacionales de interés Liu et al. (2020b), para ello las adaptaciones de las FBRE se expresan matemáticamente de la siguiente manera:

Funciones Gravitacionales	**Adaptación de las FBRE** $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$
Potencial de Perturbación (T)	$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}'\mathbf{r}_k)$
Diferencia de Potencial (ΔW)	$B(\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left\{ \left(\frac{R}{r^A}\right)^{n+1} P_n(\mathbf{r}^{A'}\mathbf{r}_k) - \left(\frac{R}{r^B}\right)^{n+1} P_n(\mathbf{r}^{B'}\mathbf{r}_k) \right\}$
Perturbación de Gravedad (δg)	$B_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+1)}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}'\mathbf{r}_k)$
Gradiente de Gravedad ($\frac{\partial g}{\partial n}$)	$B_{rr}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}'\mathbf{r}_k)$

Tabla 3-1: Adaptación de las FBRE según la función de salida, adaptado de Liu et al. (2020a).

Según la tabla (**3-1**), para estimar los parámetros d_k necesitaremos usar las $B(x, x_k)$ referentes a las perturbaciones de gravedad (δg), para luego usar dichos parámetros estimados para determinar el comportamiento del potencial de perturbación (T) en el espacio. Para observar más adaptaciones de las funciones de base radial esféricas dependiendo de la función gravitacional de salida, observar **"multiresolution representation"** en Lieb (2017), observar figura **3-1**. Dado que el poder usar diferentes FBRE como filtros, la combinación de técnicas de medición del campo de gravedad, captan diferentes longitudes de onda de la señal del campo de gravedad terrestre, así que cada técnica de medición tiene su resolución espectral y espacial. El control sobre el espectro de onda mediante el kernel de las funciones de base radial esféricas nos permite captar la señal según el intervalo de número de frecuencias que se desee modelar.

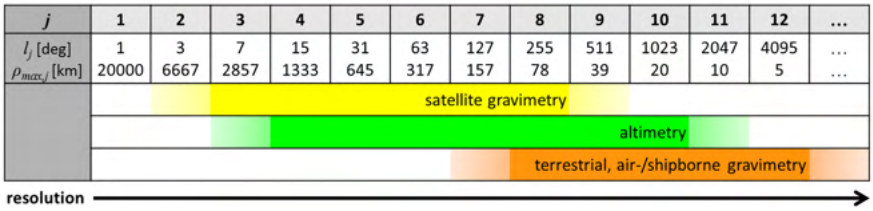


Figura 3-1: Resolución espectral y espacial de técnicas de medición, tomado de Lieb (2017).

3.2. Modelo Extendido de Gauss-Márkov

Dado que una función armónica, puede representarse como una suma de FBRE, para estimar los parámetros d_k de representación del potencial de perturbación (T), debe de representarse su $\frac{\partial T}{\partial r}$, como la magnitud del vector de perturbación de gravedad (δg) ya que es la cantidad observable sobre la superficie terrestre, una sóla observación puede representarse de la siguiente manera Liu et al. (2020b):

$$\delta g(x) + e(x) = \sum_{k=1}^{K} d_k \, B(x, x_k), \tag{3-2}$$

donde:

- $\delta g(x)$: perturbación de gravedad medida,
- $e(x)$: error de observación,
- d_k : coeficientes desconocidos,
- $B(x, x_k)$: evaluación de las FBRE desde la observación a los puntos de malla, K será entonces el número de puntos de malla en el área, dicha configuración de puntos de malla se **explicará y se determinará en el apartado de configuración del modelo**.

Dado que tendremos muchísimas más observaciones dentro de un área de interés, es de alguna manera más simple al igual que un modelo de regresión clásico, vectorizar el problema de la siguiente manera Wittwer (2015):

$$f + e = Ad, \;\; \text{con } D(f) = \sigma^2 P^{-1}, \tag{3-3}$$

donde, $f_{n\times 1}$ es el vector de observaciones (vector con las perturbaciones de gravedad δg), $e_{n\times 1}$ es el vector de errores de observación (contiene tanto errores de observación, errores de modelado y errores de truncamiento a N_{max} Bentel et al. (2013)), $A_{n\times K}$ es la matriz de evaluación de las FBRE y $d_{K\times 1}$ es el vector de coeficientes desconocidos. La matriz de varianza y covarianza del vector f es $D(f)_{n\times n}$, siendo P la matriz de pesos definida positiva y σ^2 el componente de varianza desconocido. Para éste caso se maneja un conjunto de datos perteneciente a una sola técnica de medición. Así que $B(x, x_k)$ tendrá una sola forma y por lo tanto la estimación de los coeficientes desconocidos es:

$$\hat{d} = (A'PA)^{-1}A'Pf. \tag{3-4}$$

Este problema resulta estar mal condicionado, por diferentes motivos expresados a continuación:

- número de incógnitas relacionadas con las FBRE, al usar un número mayor de funciones base que las mínimas necesarias Bentel and Schmidt (2015),
- discontinuidades o lagunas de datos Liu et al. (2020a),

- continuación descendente de los datos gravimétricos (aerogravimetría) Lieb et al. (2016),

por lo que $\boldsymbol{A'PA}$ resulta ser singular o no tener inversa. Para poder solucionar éste problema se hace uso del modelo extendido de Gauss-Márkov, añadiendo un vector de información previa, en algunos casos dicha solución se conoce como el parámetro de regularización de Tikhonov (λ). Las ecuaciones de observación quedan de la siguiente manera, añadiendo el vector de información previa además de muchos conjuntos de datos diferenciados por la técnica de observación, se determina un **modelo combinado** de la siguiente manera Liu (2023), Snow (2024):

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \\ \mu_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_L \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \\ I \end{bmatrix} \cdot d \quad \text{, con} \quad D\left(\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \\ \mu_d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 P_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 P_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_L^2 P_L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_d^2 P_d^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3-5}$$

donde:

- $f_1, f_2, ..., f_L$, es el vector conjunto de observaciones asociado a diferentes técnicas de observación y L es el número total de técnicas usadas en el modelado,
- $e_1, e_2, ..., e_L$, es el vector de errores para cada conjunto de datos, este vector estará compuesto de vectores de errores dependiendo del número de observaciones por técnica de medición,
- $A_1, A_2, ..., A_L$, es el vector formado por cada una de las matrices de diseño con las respectivas FBRE,
- d , es el vector de parámetros,
- $D\left(\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \\ \mu_d \end{bmatrix}\right)$, es la matriz de varianza-covarianza de las observaciones teniendo en cuenta el método de medición,
- $\mu_d + e_d = d$ con $D(\mu_d) = \sigma_d^2 P_d^{-1}$, Modelo lineal adicional con información previa, donde:
  - $\mu_{d_{K\times 1}}$: vector expectativa de los coeficientes d,
  - $e_{dk\times 1}$: vector de errores,
  - $D(\mu_d)_{K\times K}$: Matriz de varianza-covarianza, donde σ_d^2 es el coeficiente de varianza desconocido, P es la matriz de pesos definida positiva.

El sistema de ecuaciones normales del **modelo combinado extendido de Gauss-Márkov**, queda de la siguiente manera Liu et al. (2020a), Snow (2024):

$$\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{1}{\sigma_l^2}A_l'P_lA_l\right)+\frac{1}{\sigma_d^2}P_d\right)\hat{d}=\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{1}{\sigma_l^2}A_l'P_lf_l\right)+\frac{1}{\sigma_d^2}P_d\mu_d, \tag{3-6}$$

por lo que los parámetros estimados se determinan bajo la siguiente ecuación Liu et al. (2020a):

$$\hat{d}=\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{1}{\sigma_l^2}A_l'P_lA_l\right)+\frac{1}{\sigma_d^2}P_d\right)^{-1}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{1}{\sigma_l^2}A_l'P_lf_l\right)+\frac{1}{\sigma_d^2}P_d\mu_d, \tag{3-7}$$

donde, L será el número de técnicas de medición usadas para el modelado del campo de gravedad, en la mayoría de los escritos destacan las técnicas de mediciones dentro de los siguientes grupos: Datos satelitales, datos aerogravimétricos y datos terrestres, como se puede observar en la tabla (**3-1**). En otros textos como en Liu et al. (2024), describen cada L como la cantidad de proyectos de levantamiento de datos aerogravimétricos solamente, esta forma de planteamiento del problema tiene cambios en la estimación de los coeficientes del modelo extendido combinado.

Para visualizar el parámetro de regularización de Tikhonov, se debe de establecer la siguiente condición: $\lambda=\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\hat{\sigma_d}^2}$, y $\omega_l=\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\hat{\sigma_l}^2}$, si se multiplica la expresión (3-7) por $\hat{\sigma_1}^2$ quién será la varianza de la considerada técnica con menor sesgamiento o mayor confiabilidad, la solución al sistema de ecuaciones normales es Koch and Kusche (2002):

$$\hat{d}=\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\sigma_l^2}A_l'P_lA_l\right)+\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\sigma_d^2}P_d\right)^{-1}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\sigma_l^2}A_l'P_lf_l\right)+\frac{\hat{\sigma_1}^2}{\sigma_d^2}P_d\mu_d, \tag{3-8}$$

por lo que aplicando las condiciones antes mencionadas, la estimación de los parámetros del modelo extendido combinado de Gauss-Márkov quedará de la siguiente forma Liu et al. (2020a), Koch and Kusche (2002):

$$\hat{d}=\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\omega_lA_l'P_lA_l\right)+\lambda P_d\right)^{-1}\sum_{l=1}^{L}\left(\omega_lA_l'P_lf_l\right)+\lambda P_d\mu_d, \tag{3-9}$$

λ será el parámetro de Regularización de Tikhonov, y **ω_l serán los pesos relativos con referencia el mejor levantamiento o técnica** dentro de nuestras observaciones de aceleración de la gravedad.

Finalmente, la matriz de varianza y covarianza de los parámetros estimados se determina bajo la siguiente expresión Liu et al. (2020a), Koch and Kusche (2002):

$$D(\hat{d})=\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{1}{\sigma_l^2}A_l'P_lA_l\right)+\frac{1}{\sigma_d^2}P_d\right)^{-1}. \tag{3-10}$$

Si se representa la matriz de varianza covarianza, en términos de los pesos relativos ω_l y el parámetro de regularización λ, como en el trabajo de Liu et al. (2020b), se puede calcular la regularización de dichos parámetros haciendo uso de la estimación de los componentes de varianza además del uso del método de la L-Curva desarrollado el apartado (**3.3** del presente trabajo), en términos matemáticos la matriz de varianza covarianza queda de la siguiente manera:

$$D(\hat{d}) = \sigma^2 \left(\sum_{l=1}^{L} (\omega_l A_l' P_l A_l) + \lambda P_d \right)^{-1} . \tag{3-11}$$

En algunos textos, como en Wittwer (2015), además según las convenciones manejadas en textos de ajustes geodésicos mediante compensación mínimo cuadrática, se define la matriz normal asociada al sistema de ecuaciones normales $\boldsymbol{N}$, y el vector de lado derecho $\boldsymbol{b}$ como se presenta en la ecuación (3-12) y (3-13):

$$N = \sum_{l=1}^{L} (\omega_l A_l' P_l A_l) + \lambda P_d, \tag{3-12}$$

$$b = (\omega_l A_l' P_l f_l) + \lambda P_d \mu_d, \tag{3-13}$$

tener en cuenta esta matriz y vector, es fundamental cuando se hace combinaciones de modelos como lo serían los modelos geopotenciales globales satelitales solamente (GGMs) y los modelos geopotenciales topográficos (Gtopo), para más información se puede consultar Zingerle (2022).

3.3. Regularización de Parámetros

Como se mencionó en el apartado anterior sobre el modelo combinado extendido de Gauss-Márkov (GMM por sus siglas en inglés), el ajuste con $\boldsymbol{N}$ sencilla como se considera en la ecuación (3-4), resulta ser un problema mal condicionado, por tal motivo la matriz normal muchas veces no es invertible dados los tres argumentos mencionados anteriormente, existen varias formas para la solución del problema $\hat{d} = (N + \alpha R)^{-1} b$, escogiendo el parámetro α de la mejor manera, "se puede escoger manualmente observando el número de condición de la matriz N o la suavidad de la solución"Wittwer (2015), pero lo más sensato es estimar de una manera óptima el parámetro de regularización, entre algunos de los métodos se encuentra la factorización de Cholesky, los gradientes conjugados, etc. Para el caso relacionado con la ecuación (3-9) se hace uso de un modelo lineal adicional con información previa, por tal razón la escogencia del parámetro λ, conocido como el parámetro de regularización de Tikhonov es fundamental para la solución del sistema de ecuaciones normales y la estimación del modelo lineal, el cual nos representa el comportamiento del campo de gravedad donde se muestreen los datos.

Para el caso de la regularización del parámetro de Tikhonov, el problema recae en un problema de optimización de la siguiente manera Tikhonov and Arsenin (1977), Liu (2023):

$$d_\lambda = \arg\min\{(Ad - y)' P (Ad - y) + \lambda (d - \mu_d)' R (d - \mu_d)\}, \tag{3-14}$$

donde $||Ad-y||_p$ mide el ajuste mínimo cuadrático y $||d-\mu_d||_R$ mide la regularización, siendo μ_d el vector de información previa de los parámetros del modelo GMM, y R la matriz de regularización Liu (2023). Siguiendo el trabajo de Liu et al. (2024), se escoge una matriz identidad para R. En los trabajos mencionados por Liu tales como (Klees et al. (2018),Slobbe et al. (2019), Naeimi et al. (2015)), se explica porqué se puede aproximar la matriz de regularización R a una matriz identidad. La determinación de λ adecuadamente proporciona la máxima correlación entre los coeficientes estimados y el potencial de gravedad Liu (2023).

Además del parámetro de regularización de Tikhonov, para el modelamiento mediante el uso de dispares tipos de datos (diferentes fuentes) y directamente con distintas precisiones y calidades. La estimación óptima de los pesos relativos es de carácter fundamental e importante. En el trabajo de Liu et al. (2020a), Liu (2023) se hace un énfasis directo en el trabajo de Koch and Kusche (2002) para la estimación de los componentes de varianza mediante (VCE). Este proceso iterativo es capaz de inmediatamente estimar el parámetro de regularización. Más sin embargo, se comenta que no es una estimación confiable, así que al haber estimado los pesos relativos mediante la estimación de los componentes de varianza es óptimo usar el método de L-curva para establecer de mejor manera el parámetro de regularización de Tikhonov. Aún así, existen diferentes estudios sobre la estabilidad de las soluciones como se describe en Naeimi et al. (2015), Xu et al. (2016), Farquharson and Oldenburg (2004). En Koch and Kusche (2002) cuya orientación es usada en el presente trabajo, se logra demostrar que el uso de información previa transforma el concepto λ en una estimación estadística Bayesiana Liu (2023). No obstante al necesitar una componente estocástica para la estimación de las componentes de varianza, el parámetro de regularización no es confiable al usar modelos de fondo como información previa (los cuales serían considerados o tratados como observaciones adicionales), y es así como en Liu et al. (2020a), siguieren la estimación combinada mediante Lc. De la forma VCE-Lc.

3.3.1. Método VCE (Estimación de los Componentes de Varianza)

La estimación de los componentes de varianza es usado generalmente en el modelado del campo de gravedad regional - local como el método principal para resolver el problema de inestabilidad del sistema de ecuaciones $\boldsymbol{N}$. Su principal utilidad radica en la ecuación (3-5) al definir la matriz de pesos (matriz de varianza covarianza, donde se asume independencia entre las observaciones), al estar las varianzas en la diagonal de la matriz condicionadas por $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_L^2, \sigma_d^2$, cuya influencia además se ve en la matriz N (Ecuación 3-8), y posteriormente en la re escritura de (3-8) en (3-9), en términos de $\lambda = \frac{\hat{\sigma_1}^2}{\hat{\sigma_d}^2}$, y $\omega_l = \frac{\hat{\sigma_1}^2}{\hat{\sigma_l}^2}$. Para la estimación de las componentes de varianza para establecer los pesos relativos y el parámetro de regularización de Tikhonov, se sigue lo propuesto en Koch and Kusche (2002).

El método VCE es un proceso iterativo de estimación de $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_L^2, \sigma_d^2$, asumiendo unos

valores iniciales, y re calculando dichas varianzas de la siguiente manera Liu et al. (2020a):

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_l^2 = \dfrac{\hat{\mathbf{e}}_l' \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{e}}_l}{r_l}, \\ \hat{\sigma}_d^2 = \dfrac{\hat{\mathbf{e}}_d' \mathbf{P}_d \hat{\mathbf{e}}_d}{r_d}, \end{cases} \tag{3-15}$$

donde, $\hat{e_l}$ es el vector de errores para un l conjunto de datos, $\hat{e_d}$ es el vector de errores asociado a la estimación de parámetros, estos errores se obtienen de la siguiente manera, según lo descrito en Koch and Kusche (2002) y posteriormente en Liu (2023):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_l = \mathbf{A}_l \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{f}_l, \\ \hat{\mathbf{e}}_d = \hat{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\mu}_d, \end{cases} \tag{3-16}$$

los valores de r_l y r_d son los valores de las redundancias parciales que representan las contribuciones de las observaciones a la información previa (los modelos de fondo), en términos espectrales se entiende a las redundancias parciales como la información de la señal proveniente del campo de gravedad de la tierra que los datos locales (terrestres, aerogravimétricos y altimetría satelital) están capturando y aportando, señal de gravedad que los modelos de fondo no logran modelar. Las redundancias parciales se estiman de la siguiente forma Koch and Kusche (2002):

$$\begin{cases} r_l = n_l - \text{traza}\left(\dfrac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{A}_l' \mathbf{P}_l \mathbf{A}_l \mathbf{N}^{-1}\right), \\ r_\mu = K - \text{traza}\left(\dfrac{1}{\sigma_d^2} \mathbf{P}_d \mathbf{N}^{-1}\right), \end{cases} \tag{3-17}$$

donde n_l es el número de observaciones del conjunto l de datos, y K el número de parámetros, luego de estimados los números de las redundancias parciales para la estimación de los $\hat{\sigma_l^2}$, $\hat{\sigma_d^2}$, se puede reescribir la matriz que representa el sistema de ecuaciones normales (N) en la ecuación (3-12), además se puede reescribir el lado derecho de la ecuación (3-13) y consecuentemente se vuelve a realizar la estimación de los parámetros nuevamente haciendo uso de la ecuación (3-10), se debe de notar que el proceso de estimación de las componentes de varianza busca la convergencia tanto de σ_l^2 como de σ_d^2, estimando paralelamente λ.

3.3.2. Método L-curva

El método de regularización L-curva se centra principalmente en la variación del parámetro de regularización de Tikhonov λ, esto muestra gráficamente donde se minimiza el argumento que comprende tanto la estimación de los errores asociado a las observaciones y el error estimado asociado a la regularización. Éste método es principalmente un método gráfico de escogencia del parámetro λ, graficando en el dominio la 2-Norma del vector de los residuales $||\hat{e}_l||$ vs la 2-Norma del vector de la solución regularizada $||\hat{e_d}||$ Hansen and O'Leary (1993), el cálculo de

las dos normas se puede escribir de la siguiente manera Liu et al. (2024), Hansen (2000):

$$\begin{cases} ||\hat{\mathbf{e_l}}||_2 = ||A\hat{d_\lambda} - f||_2, \\ ||\hat{\mathbf{e_d}}||_2 = ||\hat{d_\lambda} - \mu_d||_2. \end{cases} \tag{3-18}$$

En terminos visuales, el parámetro de regularización de Tikhonov es aquel que maximiza la curvatura de la L-Curva y quién minimiza las normas de los errores, para el caso de la figura **3-2** que es un ejemplo, el λ deseado se encuentra en la "esquina" o "codo" de la curva. Este punto representa entonces la menor regularización introducida en el sistema de ecuaciones normales y además representa el mejor ajuste de los datos, lo que muestra entonces la regularización deseada.

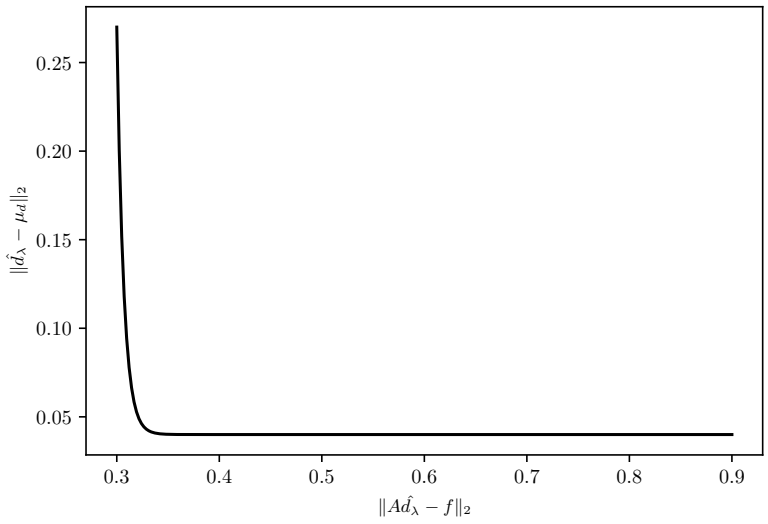


Figura 3-2: Ejemplo de L-curva recuperado de Liu (2023).

La escogencia del parámetro λ desde el punto de vista de la regularización de Tikhonov es de carácter importante para la estimación de los coeficientes, ya que si se sobreestima o se subestima, puede alterar de manera significativa el ajuste del modelo como se muestra en Hansen (2000):

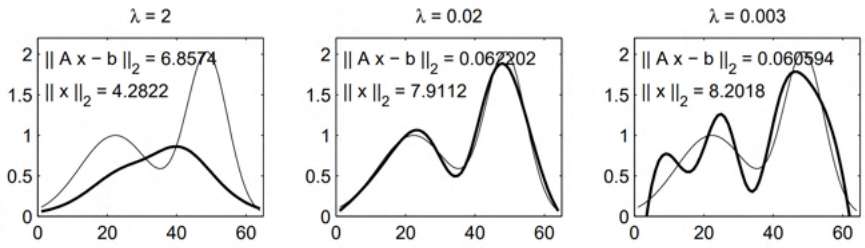


Figura 3-3: Cambio entre la solución exacta y las soluciones regularizadas según cambie λ, tomado de Hansen (2000).

Para la solución del modelo combinado extendido de Gauss-Márkov (GMM) es necesario la escogencia de los ω_l cuando se tienen diferentes conjuntos de datos con diferentes precisiones, resoluciones y calidades. Por tal motivo el método de la L-curva por sí sólo no proporciona los pesos relativos exactos Hansen (2000), Además en Hansen (2000) detallan el problema de la reconstrucción de soluciones exactas muy suavizadas, cuanto más suave sea la solución, peor será el λ computado por el critero de la L-curva ya que el decaimiento es más suave y sólo tomara algunos primeros coeficientes del SVD (valores de descomposicion singular).

3.4. Configuración del Modelo

Para el modelado mediante FBRE en conjunto con el GMM, se deben de tener algunos aspectos en cuenta con referencia a las funciones de base radial esféricas, espacialización de parámetros, filtrado y métodos de estimación de parámetros. En el apartado (2.5) se mencionó el cambio en el comportamiento en términos espaciales como espectrales de las FBRE según cambie el número de frecuencias máximas (N_{max}) como se muestra en la figura (**2-7**). La escogencia de (N_{max}) además de condicionar este comportamiento, espacializa los parámetros sobre la esfera.

3.4.1. Ubicación de las FBRE

Para configurar la posición de las funciones de base radial esféricas, lo que sería también la espacialización de los parámetros, se sigue lo dispuesto en Liu et al. (2020a), Eicker (2008). En estos estudios se determina que las mejores formas de espacialización de las FBRE son mediante el uso de la Reuter Grid Reuter (1982) y el uso de la cuadrícula de vértices triangulares Eicker (2008). Éstos métodos nos generan un grideado sobre la esfera, para luego en nuestra área de interés generar la selección de puntos para el uso en el modelado del campo de gravedad. Sobre la esfera la espacialización de los parámetros bajo los dos métodos mencionados anteriormente se logra observar de la siguiente manera:

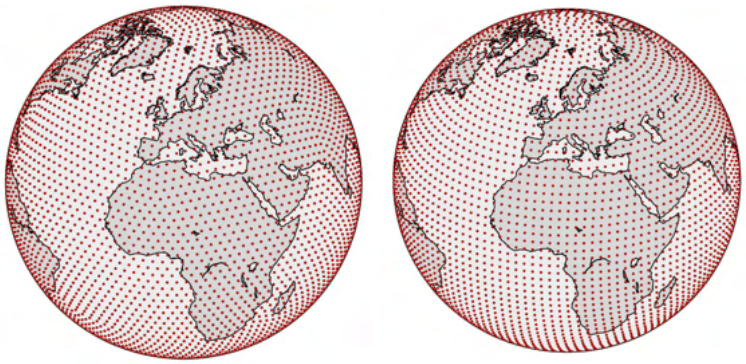


Figura 3-4: Vértices triagulares y Reuter grid sobre la esfera, tomado de Eicker (2008).

Para el presente trabajo se hace uso del muestreado generado por la **Reuter Grid**, ya que genera una cobertura homogénea de puntos de malla distribuidos de una forma equitativa sobre la esfera. Para generar la malla de Reuter, se debe en primer lugar estimar y controlar el número de puntos de malla sobre la esfera Z, en este orden de ideas, se determina una relación directa con el número de frecuencias máximas configurada en el anterior paso, las relaciones se basan en la siguiente formulación matemática Eicker (2008) Liu (2023):

$$\begin{cases} Z \leq 2 + \dfrac{4}{\pi}\gamma^2, \\ Z \geq (N_{max}+1)^2. \end{cases} \tag{3-19}$$

Es claro entonces que a medida que aumenten el número máximo de frecuencias entonces se debe de aumentar el número de puntos de malla para cubrir de mejor manera el contenido espectral proveniente de las observaciones de gravedad Liu (2023). En casos ideales se debería de alguna manera cumplir la segunda condición de (3-19) incluso volverla una igualdad, mas sin embargo, es difícil generar grillas que cumplan un sistema fundamental Liu (2023), esto genera una deficiencia de rango global $Z-(N_{max}+1)^2$, por lo que hay que aplicar la regularización del sistema de ecuaciones Liu (2023). En otras publicaciones simplemente dejan como condición del número de puntos de la Reuter Grid como $Z = N_{max}+1$ Lieb et al. (2016),Bucha et al. (2016).

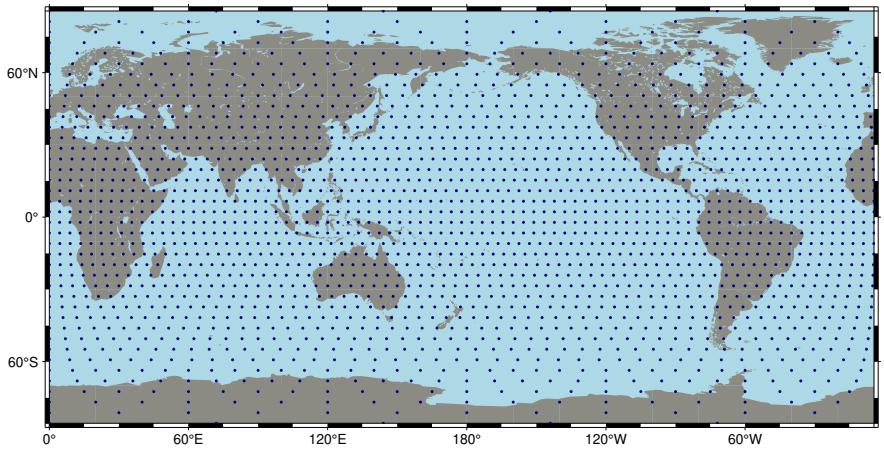


Figura 3-5: Reuter grid para $N_{max} = 40$.

Las coordenadas esféricas de la grilla que obedecen a lo descrito en Reuter. se determinan de la siguiente manera Liu (2023) Reuter (1982):

$$P(\varphi_l, \lambda_{l,m}) = \left(-\frac{\pi}{2} + l \cdot \Delta\varphi,\ m \cdot \frac{2\pi}{\gamma_l}\right), \tag{3-20}$$

con $l = 1, 2, 3 \cdots, \gamma - 1$, es decir que los puntos se ponen en separación constante desde el polo sur hasta el polo norte, con $m = 0, 1, 2, 3, \cdots, \gamma_l - 1$, donde γ_l es el número de puntos en

φ_l el cual se determina mediante la siguiente expresión matemática:

$$\gamma_l = \left[\frac{2\pi}{cos^{-1}\left(\frac{cos(\Delta\varphi) - sen^2(\varphi_l)}{cos^2(\varphi_l)} \right)} \right]. \tag{3-21}$$

Los polos se definen directamente, como: polo sur $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y polo norte $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

3.4.2. Número máximo de Frecuencias

Para configurar **el ancho de banda de las FBRE**, de debe tener en cuenta la densidad media de muestreo de los datos gravimétricos ρ, en algunos textos como Liu (2023) se le conoce como la resolución espacial de los datos, esta variable condiciona el N_{max} de la siguiente forma Lieb et al. (2016):

$$N_{max} \leq \frac{\pi R}{\rho}, \tag{3-22}$$

donde R es el radio medio de la tierra, el cual se adopta el valor del semieje mayor del elipsoide (a) ver tabla **2-1**, para poder calcular el ρ se puede hacer uso de solucionadores de grafos tal como se muestra en la figura **3-6**.

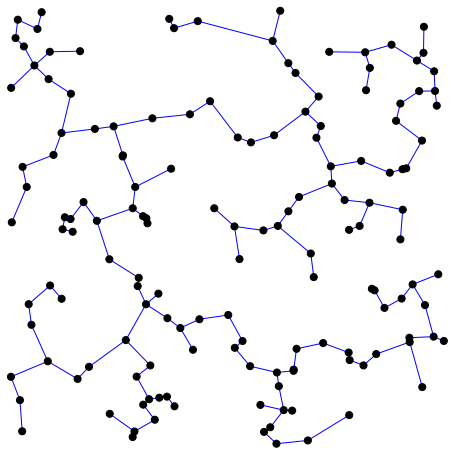


Figura 3-6: Solución del grafo para hallar ρ.

Así que dependiendo de la distancia media de muestreo de los valores de gravedad, se configura el número máximo de frecuencias para el modelado. En términos visuales la relación entre el ancho de banda y ρ se representa en la gráfica **3-7**:

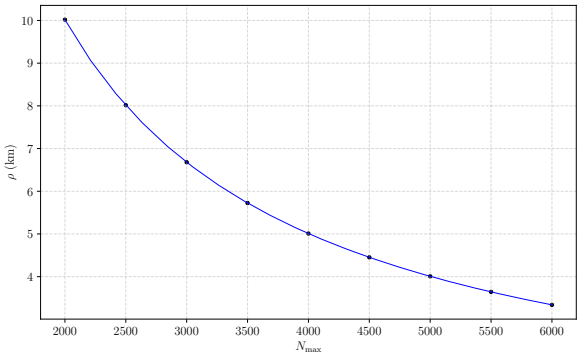


Figura 3-7: Comportamiento de ρ y de N_{max}.

3.4.3. Eliminación del efecto de Borde

Esta componente debe de tratarse de la mejor manera dadas las oscilaciones que se presentan en el dominio espacial de las funciones de base radial esféricas, éstas oscilaciones se pueden observar en la figura **2-7** y que están directamente relacionadas con al expansión del kernel, además de la selección B_n. Por esta razón se debe de acotar el área de computo Ω_c mayor que el área de observaciones Ω_o. Dado que los coeficientes d_k no pueden ser estimados con precisión en el borde del área de observación se debe de configurar el área de interés Ω_i menor que el área de observación Liu et al. (2020a), por lo tanto $\Omega_c \subset \Omega_o \subset \Omega_i$.

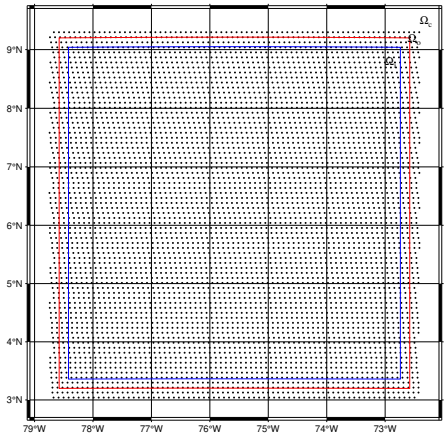


Figura 3-8: Configuración de áreas Ω_c,Ω_o,Ω_i.

La margen η entre Ω_c y Ω_o se define mediante la ecuación Lieb et al. (2016):

$$\eta_0 = \frac{360^\circ}{N_{max} cos(|\varphi_{max}|)}, \tag{3-23}$$

donde φ_{max} es la máxima latitud del área de interés, y N_{max} es la frecuencia máxima con la que se va a modelar.

3.5. Técnica Remover, Calcular y Restaurar

Ésta técnica nace del enfoque de resolver el problema del geoide-Qgeoide local mediante el uso de análisis espectrales, dado que la discretización de los datos u observaciones genera algunos problemas de representación completa de la señal del campo de gravedad, se necesita usar funciones auxiliares de potencial (modelos de fondo) para representar correctamente el comportamiento del campo de gravedad de manera local. Este problema de representación se sintetiza en dos casos:

- el muestreo de las observaciones gravimétricas omiten las altas frecuencias del campo de gravedad lo que produce problemas de "aliasing"Denker (2013) (Al haber un muestreo con frecuencia insuficiente), lo que inmediatamente conduce a una interpretación errónea de la señal, para ello se hace uso de modelos digitales de elevación para generar modelos de potencial topográfico del comportamiento gravitacional de masas residuales,
- la información u observaciones de gravedad truncadas en el espacio, al cubrir sólo el área de interés y las vecindades cercanas se genera un problema de representación de las longitudes de onda muy larga. Las cuales se deben de computar de otra maneara Denker (2013). Para resolver este problema se usa una función auxiliar de potencial conocida como modelos geopotenciales globales GGM.

De la misma manera en que aquellos modelos representan muy bien cierta longitudes de onda del campo de gravedad de la tierra, a manera local hay señal del campo de gravedad que no es modelada perfectamente por los modelos de fondo, es allí donde el modelado residual aporta información para la modelización de alta resolución mediante las observaciones gravimétricas in situ, y el aporte a las señales de longitudes y frecuencias medias.

En este orden de ideas, para lograr aplicar este tipo de técnica al modelado mediante FBRE, en primera instancia se deben de obtener las perturbaciones residuales ($\Delta\delta_g$), removiendo de las observaciones medidas las componentes de onda larga y onda corta de la siguiente manera Liu et al. (2024):

$$\Delta\delta_g = \delta_g - \delta_{GGM} - \delta_{Gtopo}. \tag{3-24}$$

Como estas componentes del modelo geopotencial global y el modelo de geopotencial topográfico son funciones auxiliares de potencial como se describe en Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), haciendo uso de los coeficientes armónicos esféricos se expande el valor de δ_{GGM} y δ_{Gtopo} en cada una de las observaciones discretizadas en el espacio local de interés.

Luego, una vez conseguidos los observables residuales se podrá ejecutar el modelado de estos efectos residuales para convertir $\Delta\delta_g$ en ζ_{res}, en Forsberg (1993) se nombran metodologías como los mínimos cuadrados por colocación, integración de Stokes o la FFT (transformada rápida de Fourier), para nuestro caso, como se ha venido desarrollando en el documento se hace uso de las funciones de base radial esféricas.

Como se describe en Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), la técnica de RCR debe de tener dos requisitos:

- "los potenciales auxiliares removidos deben ser armónicos, precomputables y utilizados de manera matemáticamente consistente: lo que se elimina en la entrada debe ser restaurado en la salida",
- "En el caso habitual de linealidad, se pueden utilizar simultáneamente dos o más diferentes potenciales auxiliares (eliminados-restaurados)".

Por lo que se sustenta el uso de uno, dos o tres diferentes modelos geopotenciales para la representación de la señal, para realizar el proceso de restauración al cumplir el primer requisito descrito en Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006), se realiza el siguiente computo Liu et al. (2020b) Denker (2013):

$$\hat{T} = \hat{T_{res}} + T_{GGM} + T_{Gtopo}, \tag{3-25}$$

obteniendo entonces el potencial de perturbación completo, cantidad importante en geodesia física. Así como se puede restaurar el potencial T, también es posible restaurar directamente la anomalía de altura, cantidad significativa para los sistemas de alturas basados en GNSS, de la siguiente forma Liu et al. (2020b), teniendo en cuenta el teorema de Bruns Guo (2023) Heiskanen and Moritz (1967):

$$\hat{\zeta} = \frac{\hat{T}}{\gamma_{QQ}} + \zeta_{GGM} + \zeta_{Gtopo}, \tag{3-26}$$

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta_{res}} + \zeta_{GGM} + \zeta_{Gtopo}. \tag{3-27}$$

Además de no sólo la descomposición de la señal mediante RCR. Dentro del modelamiento mediante FBRE y el GMM, los modelos de fondo se emplean como información apriori (previa), por lo que al quitar esta parte de la señal el vector μ se puede establecer como un vector de ceros.

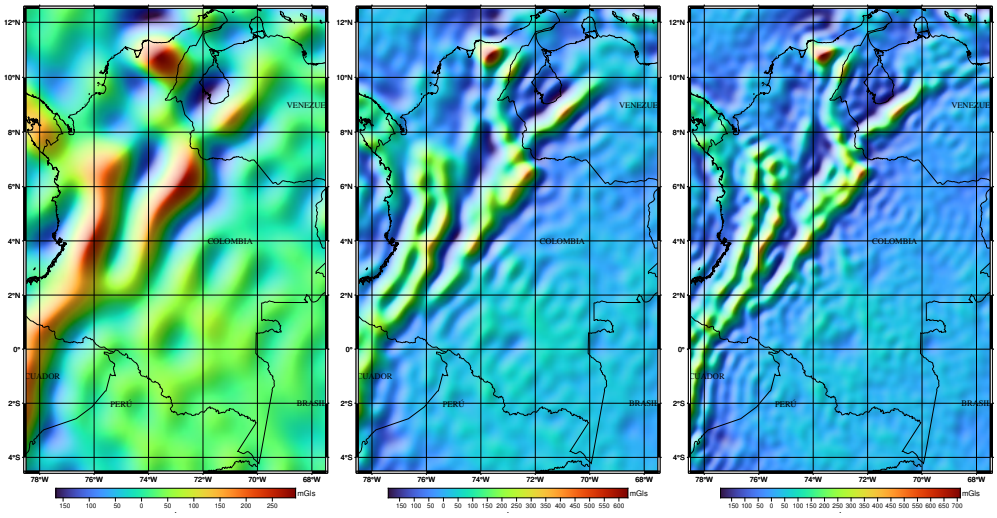


Figura 3-9: Comportamiento δ_g según d/o (225,500,760).

Otras de las ventajas de usar esta técnica es que la solución al sistema de ecuaciones puede ser numéricamente más estable al trabajar con cantidades más pequeñas Lieb (2017), para este caso al aplicar las ecuaciones (3-9)(3-10).

En términos de δ_g, el proceso de remover cambia la señal representada en el grafico **3-10**. El ejemplo corresponde a una línea de vuelo de un proyecto aerogravimétrico, se logra observar la alta correlación directa de los datos medidos δ_g con los valores del modelo topográfico dv_ell_Earth2014 d/o 720-5480, se observa también que las δ_{gGGM} resultan ser un poco mas suaves y largas que responden al modelo XGM2019 d/o 0-719.

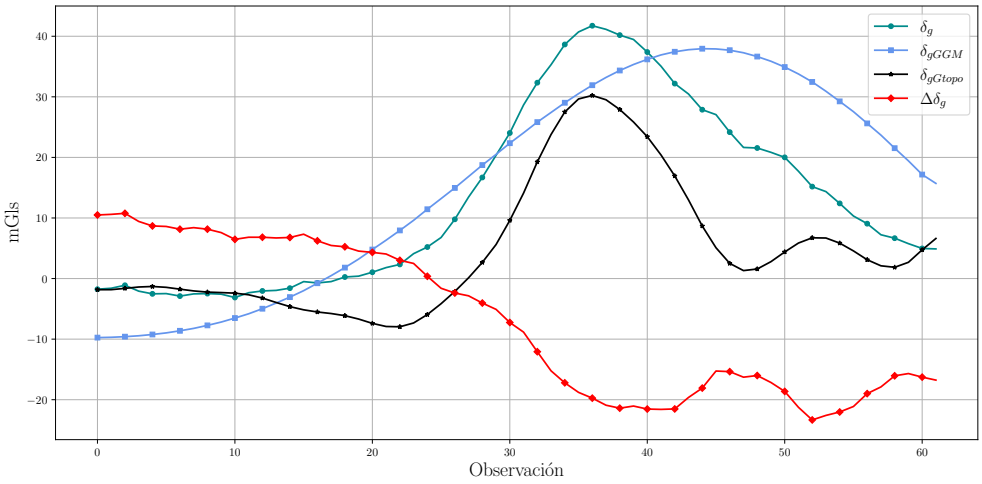


Figura 3-10: Comportamiento Remove para linea de vuelo aerogravimétrica.

3.6. Estimación de Anomalías de Altura

Una vez lograda la estimación de los parámetros $\hat{d}_k$ haciendo uso de las ecuaciones (3-9) y su matríz de varianza-covarianza mediante la ecuación (3-10) en representación a lo descrito en los apartados **Modelo Extendido de Gauss y Regularización de Parámetros**, podemos usar dichos coeficientes estimados para representar cualquier función gravitacional como se presenta en la tabla **3-1** en representación en lo descrito en el apartado **Adaptación de las Funciones de Base Radial Esféricas**. Para realizar el ajuste de los parámetros desconocidos, se hace uso del siguiente Kernel de las FBRE para respresentar $\Delta\delta_g$ Lieb (2017), las FBRE son calculadas desde las observaciones gravimétricas a la Reuter Grid, como se muestra en la figura **3-11**:

$$B_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+1)}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}'\mathbf{r}_k). \tag{3-28}$$

Mediante el teorema de Bruns se puede relacionar bajo una ecuación la cantidad del potencial perturbador T con el valor de la anomalía de altura ζ, quien es el cuasigeoide mismo. Haciendo

uso de las adaptaciones a las FBRE usamos los coeficientes $\hat{d}_k$ para describir el Potencial T. Para realizar esto se hace uso de la siguiente Kernel de FBRE Liu et al. (2020b):

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}'\mathbf{r}_k), \tag{3-29}$$

mediante este kernel, se puede realizar entonces el cálculo de la matriz de diseño B, la cual tiene los valores del cálculo de las FBRE desde los puntos de la Reuter Grid a los puntos finales del modelo Qgeoide como se muestra en la figura **3-12**.

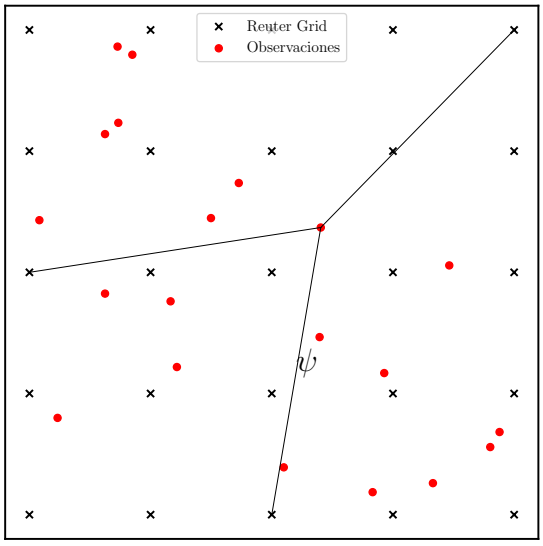


Figura 3-11: ψ para matriz de Diseño A,

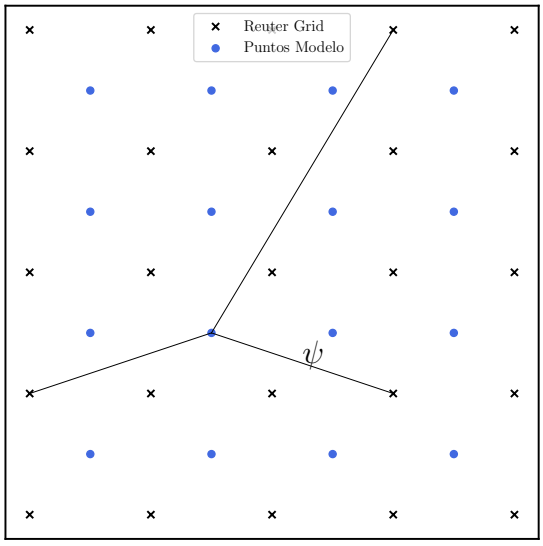


Figura 3-12: ψ para matriz de Diseño B.

Al momento de tener tanto la matriz de diseño B calculada, al igual que los parámetros $\hat{d}_k$ estimados, es posible representar el potencial T en cada uno de los puntos del modelo como se muestra en la figura **3-12**, mediante la siguiente ecuación Liu et al. (2020b):

$$\hat{T} = B\hat{d}, \tag{3-30}$$

donde $B_{n\times k}$ es la matriz de diseño y $\hat{d_{k\times 1}}$ son los parámetros estimados, por lo que $\hat{T}$ será de dimensiones: $n \times 1$, un vector que estima en cada uno de los puntos del modelo el valor de la perturbación de potencial. La propagación del error para la estimación del potencial T se realiza mediante la matriz de diseño B y la matriz de varianza covarianza de los parámetros estimados. La matriz de varianza covarianza de potencial T estimado se calcula de la siguiente manera Liu et al. (2020b):

$$D(\hat{T}) = BD(\hat{d})B', \tag{3-31}$$

en donde las desviaciones estándar del potencial T estimado serán la raíz cuadrada de la primera diagonal de la matriz $D(\hat{T})$, es decir: $\left(\hat{\sigma_T} = \sqrt{diag\left(D(\hat{T})\right)}\right)$.

Como se describe en el apartado de RCR, se hace uso del teorema de Bruns en la ecuación (3-26), para de esta manera determinar el valor de las anomalías de altura residuales. Es decir que a la ecuación (3-30) se divide por la gravedad normal a la altura del teluroide. Debido que, para poder calcular γ_{QQ} se debe de conocer H^N y este valor depende directamente de ζ, se debe de entrar en un proceso iterativo de convergencia del valor de la anomalía de altura en cuanto las diferencias entre $\zeta_i - \zeta_{i+1}$ satisfagan una tolerancia del error de $1e^{-6}$.

$$\zeta_{i+1} = \frac{\hat{T}}{\gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a}\left(1 + f + m - 2fsen^2(\varphi)\right)(h - \zeta_i) + \frac{3}{a^2}(h - \zeta_i)^2\right]}. \tag{3-32}$$

3.7. Estimación del Número Geopotencial (C_p^{IHRF})

3.7.1. Cálculo del W_p Provisorio

La estimación del potencial real en cualquier puntos sobre la superficie de la tierra se puede realizar de dos maneras:

- **Cálculo directo:** Haciendo uso de los parámetros estimados $\hat{d}_k$ y una matriz de diseño B ya sea para una superficie, o exclusivamente para puntos de interés como lo serían la materialización del IHRS, en el caso de MEDE, Medellín, COL. Después de restaurado el potencial T como se muestra en la ecuación (3-25), se debe de añadir el potencial perturbador de orden cero, a partir de la siguiente ecuación Liu et al. (2020b):

$$T_0 = \frac{KM_{GGM} - KM_{GRS80}}{r_p}, \tag{3-33}$$

  donde KM_{GGM}, es la constante de gravedad de la tierra usada por el modelo geopotencial de fondo, KM_{GRS80} es la constante de gravedad normal del elipsoide GRS80, r_p es la distancia radial geocéntrica en donde se esté calculando el potencial perturbador T. Posteriormente el potencial provisorio se define de la siguiente manera:

$$W_p(\text{provisorio}) = \hat{T} + T_0 + U_p. \tag{3-34}$$

  Para la ecuación (3-34), los siguientes pasos se unen con la segunda forma de cálculo.

- **Cálculo mediante ζ :** Al igual que la forma anterior, se debe conocer hasta qué expansión del término de orden cero es contemplado por el GGM usado para el modelado local cuasi-geoidal, para que se pueda realizar el cálculo correcto de ζ_0 mediante la siguiente ecuación Guimarães et al. (2024) ó Sánchez et al. (2021):

$$\zeta_0 = \frac{KM_{GGM} - KM_{GRS80}}{r_p \gamma_{QQ}} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_{QQ}}, \tag{3-35}$$

donde W_0 es el parámetro de referencia para la superficie del sistema de referencia internacional de altura con un valor de 62636853.4 $\frac{m^2}{s^2}$, U_0 será el valor de potencial normal del elipsoide GRS80 con un valor de 62636860.850 $\frac{m^2}{s^2}$.

Posteriormente se realiza el cálculo del $W_p(Provisorio)$, quedando en las condiciones del cálculo directo en la ecuación (3-34), haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$W_p(\text{Provisorio}) = W_0 - (h_p - (\zeta_p - \zeta_0)) \cdot \overline{\gamma}_{QQ}, \tag{3-36}$$

donde la gravedad promedio a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide será:

$$\overline{\gamma}_{QQ} = \gamma_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{a} \cdot \left(1 + f + m - 2f \cdot sen^2\varphi_p\right) \cdot (h_p - (\zeta_p - \zeta_0))\right). \tag{3-37}$$

3.7.2. Tratamiento de Mareas

Dado que el movimiento de la luna y el sol generan fuerza gravitatoria sobre la superficie de la tierra generalmente en las latitudes medias, el promedio de estos potenciales en función del tiempo no es cero Mäkinen (2021), la suma de ésta contribución al potencial de la tierra es de alrededor de 10^{-8}. Este aporte de cuerpos celestes generan una deformación tanto en el campo gravitacional como en la forma geométrica de la tierra Mäkinen (2021), en algunos textos se refieren a la segunda como deformaciones topográficas o de corteza. Se aplican entonces dos conceptos a la geometría terrestre y tres conceptos para el campo de gravedad:

- **Tide-Free/ Non-Tidal / Sin Marea** (geometría, Potencial), Se elimina la deformación permanente de la corteza de la tierra mediante las cantidades del campo de gravedad, removiendo entonces tanto el potencial generador de mareas como el potencial de deformación Mäkinen (2021), Esto se realiza bajo los números de Shida (ℓ), Love (h, k),

- **Mean-Tide / Marea Media** (geometría, Potencial), en este concepto el efecto permanente no se elimina de la forma geométrica de la tierra, En términos geométricos la forma corresponderá al promedio a lo largo del tiempo de las mareas deformadoras. Por otro lado, el campo de gravedad incluye el potencial de "la tierra promedio", además del promedio del potencial generador de mareas, donde no necesariamente éste último es generado por las masas de la tierra Mäkinen (2021),

- **Zero-Tide / Marea Cero** (Potencial), Es la conocida alternativa media, en donde se define que el campo potencial es el de "la tierra promedio", aquí la fuerza de gravedad es generada por la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga. En términos geométricos este concepto de sistema de mareas permanente se aplica de igual manera al concepto Mean-Tide Mäkinen (2021).

En términos de energía, los conceptos de marea permanente por lo general difieren en el coeficiente armónico zonal de grado 2 (C_{20}), esta diferencia esta en el orden de $k_{20}\frac{r_0}{KM}A''\left(\frac{r_0}{a}\right)^2$ para más información consultar Mäkinen (2021), el siguiente gráfico representa esta diferencia con los coeficientes del XGM2019 d/o 2159.

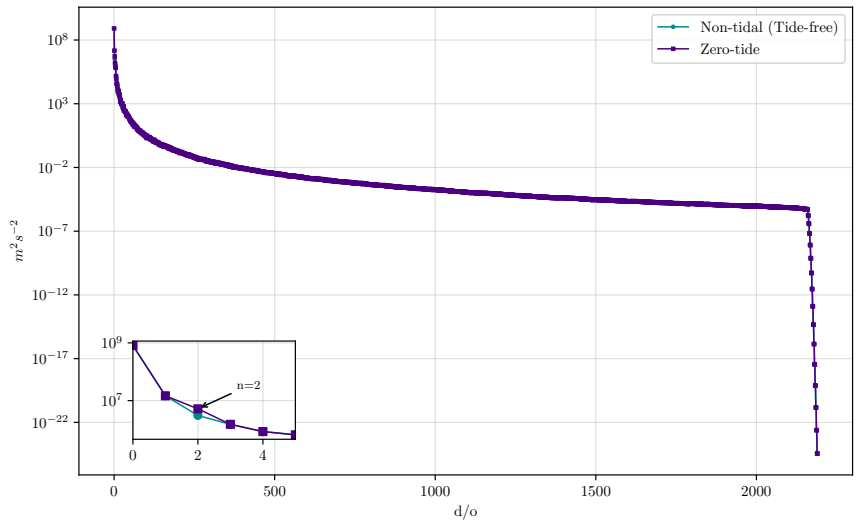


Figura 3-13: Espectro de Energía.

Para las cantidades de potencial asociadas a la materialización del sistema de referencia internacional de alturas se definen en el concepto de sistema de mareas permanente Zero-Tide para las cantidades físicas y para las cantidades geométricas Mean-Tide, por tal razón se deben de realizar las correcciones necesarias para proporcionar los Números geopotenciales al concepto de sistema de mareas permanente Zero-Tide. Para realizar las correcciones necesarias se describen los casos posibles según Sánchez et al. (2021) y cómo se muestra en la figura (**3-14**):

- ***1er Caso:*** Dado que las coordenadas están en **mean-tidal** (X^{MT}) y el modelo Geopotencial Global (GGM) se encuentra en **non-tidal** o **tide-free** (C_{20}^{NT}), es debido realizar sólo la corrección del potencial W_p provisorio por el modelo Geopotencial Global ($\Delta\bar{W}^{GGM}$), la corrección entonces se realiza de la siguiente manera Guimarães et al. (2024):

$$W_{ZT} = W_p \text{ provisorio} + \Delta\bar{W}^{GGM}, \tag{3-38}$$

  donde,

  - $\Delta\bar{W}^{GGM}(\varphi, h) = k_{20}\cdot\left(1-\frac{3h}{a}\right)\cdot(0{,}9722 - 2{,}8673\cdot sen^2\varphi - 0{,}0690\cdot sen^4\varphi)$, el número de love $k_{20} = 0{,}30190$.

- ***2do Caso:*** Dado que las coordenadas están en **non-tidal** (X^{NT}) y el modelo Geopotencial Global se encuentra en el concepto de mareas **Zero-tide** (C_{20}^{ZT}), es debido realizar la corrección al W_P provisorio por **ITRF** (ΔW^{ITRF}), la corrección entonces se realiza de la

siguiente manera Guimarães et al. (2024):

$$W_{ZT} = W_P \text{ Provisorio } + \Delta W^{ITRF}, \tag{3-39}$$

donde,

- $\Delta W^{ITRF}(\varphi) \approx (-\gamma_0(\varphi)) \cdot h_T(\varphi) = -0{,}5901 + 1{,}7475 \cdot sen^2\varphi + 0{,}0273 \cdot sen^4\varphi.$

- ***3er Caso:*** Dado que las coordenadas están en **non-tidal** (X^{NT}) y el modelo Geopotencial Global está en el concepto de mareas permanentes **non-tidal** (C_{20}^{NT}), es debido realizar tanto la corrección por ITRF (ΔW^{ITRF}) y por el GGM ($\Delta \bar{W}^{GGM}$), la corrección entonces se realiza bajo la siguiente ecuación Guimarães et al. (2024):

$$W_{ZT} = W_P \text{ Provisorio } + \Delta W^{ITRF} + \Delta \bar{W}^{GGM}, \tag{3-40}$$

donde,

- $\Delta W^{ITRF} + \Delta \bar{W}^{GGM} = -0{,}2966 + 0{,}8819 \cdot sen^2\varphi + 0{,}0065 \cdot sen^4\varphi.$

- ***4to Caso:*** Dado que las coordenadas se encuentran en **Mean-tide** (X^{MT}) y el modelo Geopotencial Global se encuentra en el concepto de mareas permanentes **Zero-Tide** (C_{20}^{ZT}), no es necesario realizar ningún tipo de corrección.

En el siguiente gráfico, se muestra a manera de diagrama de flujo el proceso de correcciones necesarias según sea el caso, cabe aclarar que el caso está en función del modelo Geopotencial Global usado y la solución de las coordenadas proporcionadas para el cálculo del potencial. Para el caso de las estaciones SIRGAS de monitoreo permanente es necesario aplicar la corrección al potencial por ITRF $\Delta \bar{W}^{ITRF}$.

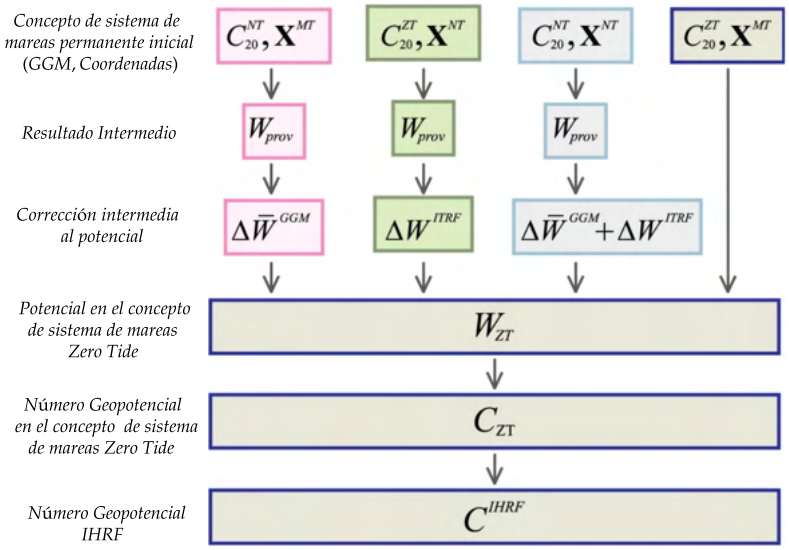


Figura 3-14: Concepto de Sistema de Mareas Geométrico y Potencial, Tomado de Sánchez et al. (2021).

3.7.3. Cálculo C_p^{ZT} (Zero-Tide)

Una vez se genera el valor del potencial en concepto de sistema de mareas permanentes Zero-Tide (W_p^{ZT}) de la superficie que pasa por el punto de interés, se calcula entonces el número geopotencial aplicando la siguiente ecuación Guimarães et al. (2024) Sánchez et al. (2021):

$$C_p^{ZT} = W_0 - W_{ZT}. \tag{3-41}$$

3.7.4. Cálculo C_{IHRF}

Una vez generado el valor del número geopotencial en el concepto de mareas zero-tide, "se realiza ahora la corrección por la componente temporal, generado por el potencial medio permanente de mareas a la altura $h = 0$ del elipsoide de nivel GRS-80"Guimarães et al. (2024), dicha corrección temporal promedio se realiza de la siguiente manera:

$$C_{IHRF} = C_{ZT} - W_{TO}, \tag{3-42}$$

donde,

- $W_{T_0} \approx \overline{W_T}(\varphi, 0) = 0{,}9722 - 2{,}8841 \cdot sen^2\varphi - 0{,}0195 \cdot sen^4\varphi.$

Para la ecuación (3-42) ya se logra proveer de una cantidad de diferencia de potencial para un punto de interés bajo las sugerencias de Sánchez et al. (2021) Sánchez et al. (2021), eliminando entonces la dependencia a soluciones verticales referidas a Datums verticales W_{0l} determinados arbitrariamente por el nivel medio del mar (números geopotenciales locales C_{l_p}), este número geopotencial es convertible fácilmente a alturas físicas (altura normal y ortométrica) haciendo uso de las ecuaciones (2-44) y (2-42) respectivamente, consecuentemente, estas alturas ya son referidas a una superficie internacional determinada experimentalmente como la mejor aproximación a la superficie representativa del nivel medio del mar de manera global para mas información revisar Sánchez et al. (2016).

3.8. Tratamiento de datos

Para el caso de los datos gravimétricos colombianos se presentan diferentes aspectos que son significativamente importantes resaltar al momento de realizar el modelado del campo de gravedad de manera local, ya que según la calidad de los datos usados para cuasigeoide dependerá el resultado y su desviación estándar, cantidades que son realmente importantes para materializar el IHRS. Se es importante aclarar los siguientes aspectos para el conjunto de datos gravimétricos:

- Sistema y marco de referencia horizontal, ya que los datos usados para el modelado deben de estar en las mismas condiciones de coordenadas horizontales. Se establece entonces que se debe usar MAGNA-SIRGAS (uso del elipsoide GRS80) Moritz (1988),

- sistema y marco de referencia gravimétrico, ya que los datos usados para el modelado deben de estar en las mismas condiciones gravimétricas. Se establece entonces que se debe usar IGSN71 Morelli et al. (1972),
- calidad de los datos, esto es importante dado que abarca varios aspectos para que el modelado cuasigeoidal mantenga una calidad aceptable, dentro de éstos aspectos se enmarcan los siguientes:
  - duplicidad de información,
  - correspondencia de información,
  - remoción de datos atípicos,
  - desviación estándar final de los datos.

3.8.1. Datos Terrestres

Para realizar el tratamiento de los datos y que responda a las condiciones antes presentadas, se sigue la metodología propuesta tanto en Liu et al. (2024) como en Varga et al. (2021), a continuación se presenta a manera de diagrama de flujo el tratamiento de los datos terrestres realizado en esta tesis:

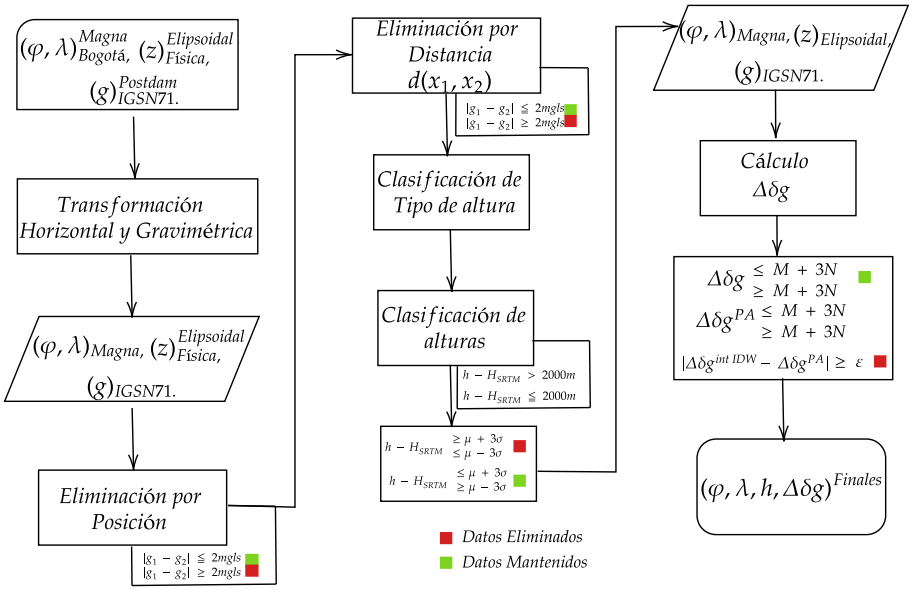


Figura 3-15: Flujograma tratamiento datos terrestres.

En el caso de los datos colombianos en términos generales la información gravimétrica es levantada por diferentes empresas encargadas de la prospección geofísica para la búsqueda de hidrocarburos. En este sentido, cada uno de los proyectos tiene un preprocesamiento diferente

y su presentación difiere tanto en coordenadas como en calidades. En consecuencia, se presenta a manera de items el procesamiento según el gráfico (**3-15**):

- **Transformación Datum Horizontal:** Dado que muchos de los proyectos vienen dados en Datum Bogotá (Elipsoide Internacional de 1924), se debe de realizar la transformación de las coordenadas (φ, λ), para ello se realiza la transformación según lo que se presenta en la siguiente tabla:

Zona	Cobertura		Parámetros de Transformación	
	φ	λ	$\delta_\varphi\,['']$	$\delta_\lambda\,['']$
I	10,0 . . . 13,0°N	73,0 . . . 71,0°W	-9.866	12.405
II	9,4 . . . 11,6°N	76,0 . . . 73,0°W	-9.879	12.190
III	8,0 . . . 9,4°N	77,6 . . . 74,4°W	-9.838	12.199
IV	5,0 . . . 9,4°N	74,4 . . . 72,0°W	-10.085	12.561
V	5,0 . . . 8,0°N	78,0 . . . 74,4°W	-9.946	12.159
VI	3,0 . . . 5,0°N	78,0 . . . 74,4°W	-10.023	11.969
VII	1,0 . . . 3,0°N	79,0 . . . 74,0°W	-10.038	11.731
VIII	4,5°S . . . 3,0°N	74,0 . . . 66,5°W	-10.249	12.272
IX	3,0 . . . 5,0°N	74,4 . . . 66,5°W		
X	5,0 . . . 7,3°N	72,0 . . . 66,5°W		

Tabla 3-2: Parámetros de transformación de Datum Bogotá a MAGNA-SIRGAS Instituto Geográfico Agustín Codazzi (2004).

- **Transformación Datum Gravimétrico:** Dado que algunos de los proyectos de gravimetría terrestres vienen con gravedad en el antiguo datum de Potsdam es necesario uniformizar los datos al mismo y nuevo datum IGSN71 - International Gravity standarization Net 197 Morelli et al. (1972), para ello se sigue lo descrito en Liu et al. (2024):

$$g_{IGSN71} = g_{Potsdam} - 14mGal. \tag{3-43}$$

- **Eliminación por Posición:** Dado que el Instituto Geográfico Agustín Codazzi tiene una base de datos cruda con la información de cada uno de los levantamientos, muchos de ellos al tratar de conformar una base unificada para el modelado mediante FBRE, en la tabla de atributos para cada una de las mediciones se encuentran puntos con doble medición ya sean por re-cálculos o simplemente porque se pisaron doblemente algunos mojones. En este sentido se debe de realizar la limpieza para evitar duplicidad en los datos gravimétricos terrestres que harán parte de la base final de datos listos para la modelización. Para ello se hace uso de la siguiente lógica descrita en **3-15**:

$$si \;\; \varphi_1 = \varphi_2 \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \wedge |g_1 - g_2| \geq 2mGal \longrightarrow \;\; Elimina. \tag{3-44}$$

- **Eliminación por distancia:** Ya que los levantamientos gravimétricos fueron realizados por diferentes empresas, el postprocesamiento de las coordenadas elipsoidales se realizan de diferente forma, lo que nos podría llevar a diferencias centimétricas para un mismo punto de medición, por tal razón se pretende eliminar nuevamente la duplicidad y por ello se aplica un filtro de distancia, manteniendo la siguiente lógica descrita en **3-15**:

$$si \;\; d(x_1, x_2) \leq 1m \wedge |g_1 - g_2| \geq 2mGal \longrightarrow \;\; Elimina. \tag{3-45}$$

- **Clasificación del tipo de altura:** Dado que algunos de los levantamientos gravimétricos no cuentan con la documentación adecuada para determinar el tipo de altura con la que los datos vienen representados, es debido tratar de hacer una clasificación de las alturas, para ello se parten de 2 condiciones:

  1. Se consideran alturas físicas e iguales tanto H^O y H^N,
  2. $h \approx SRTM30 + EGM08$.

  A partir de estas dos condiciones se plantea la siguiente lógica para poder discernir el tipo de altura:

$$|z_i - SRTM30_i - EGM08_i| \leq \chi, \;\; \text{con} \;\; i = 1, 2, \ldots, O, \tag{3-46}$$

  donde, $h_i = SRTM30_i - EGM08_i$, es la altura elipsoidal aproximada mediante modelos para cada una de las observaciones, con un total de O observaciones. El valor de χ es un valor de tolerancia menor que la ondulación media del geoide. Si la diferencia entre el valor aproximado de la altura elipsoidal con el valor z_i se encuentra dentro del intervalo de la ecuación (3-46), se considera a z_i entonces como una elipsoidal, en el caso contrario z_i se considera como una altura física.

- **Clasificación de alturas:** Como se mencionó anteriormente muchas de las coordenadas de los proyectos gravimétricos son extraídas de planchas cartográficas por lo que la exactitud con la que se determina (φ, λ) es con suerte de algunos metros. Para capturar estos errores horizontales se hace una comparación de la componente vertical de la representación de las observaciones con el modelo digital de elevación SRTM30 como se menciona en Liu et al. (2024).
  Estableciendo unas diferencias en las alturas se podrá entonces identificar errores en las componentes (φ, λ), para llevar esto acabo se mantiene lo sugerido por Liu et al. (2024), por lo que se dividen en dos grupos las observaciones como se muestra en el gráfico **3-15**, debido a que la topografía en Colombia es de alguna manera cambiante y abrupta. Un grupo con alturas mayores a $2000m$ y el segundo con alturas menores a $2000m$. En consecuencia se mantiene la siguiente lógica para la eliminación de los datos problemáticos:

$$Si \;\; \Delta H \geq \mu + 3\sigma \wedge \Delta H \leq \mu - 3\sigma \longrightarrow \;\; Elimina. \tag{3-47}$$

  donde μ será la media y σ la desviación estándar del conjunto de datos clasificados por altura.

- **Cálculo de $\Delta\delta g$:** Al momento de recuperar las alturas elipsoidales de cada uno de los datos gravimétricos es posible determinar en primera instancia las perturbaciones de gravedad observadas, para la reproducción de la solución al problema de valor en la frontera escalar fijo. En consecuencia, se hace uso de la ecuación (2-37) y posteriormente de la ecuación (3-24) para determinar las perturbaciones de gravedad residuales.

- **Validación cruzada con interpolador IDW:** Como se presenta en Liu et al. (2024), se realiza la clasificación de las perturbaciones de gravedad residuales que se consideran valores potencialmente atípicos y los que son considerados no atípicos, para ello se hace uso de la mediana normal estándar ya que este estadístico es sensible a datos extremos, para aplicar el criterio se desarrolla de la siguiente manera:

$$Si \;\; \Delta\delta g \leq M - 3N \wedge \Delta\delta g \geq M + 3N \longrightarrow Potencial \;\; Atípico, \tag{3-48}$$

donde M es la mediana y $N = 1{,}4626 \cdot M(|\Delta\delta g_i - M|)$, con $i = 1, 2, \ldots, O$. El valor $\Delta\delta g^{PA}$ (Perturbación de gravedad residual potencialmente atípico) cumple la ecuación (3-48) y será interpolado mediante los valores vecinos considerados no atípicos en una ventana de $10km \times 10km$, haciendo uso de la siguiente ecuación, donde se considera la variable regionalizada de los vecinos cercanos:

$$\Delta\delta g^{\hat{PA}}(S_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta\delta g^{NA}(S_i), \tag{3-49}$$

donde $\Delta\delta g^{\hat{PA}}(S_0)$ = Perturbación de gravedad potencialmente atípica en la posición S_0, n = número de vecinos no atípicos en la ventana de $10km \times 10km$, λ_i = Pesos asignados bajo el kernel (3-50), $\Delta\delta g^{NA}(S_i)$ = valor de perturbación de gravedad residual no atípica en la posición S_i. El esquema de pesos para éste caso será:

$$\lambda_i = \frac{d_{io}^{-p}}{\sum_{i=1}^{n} d_{io}^{-p}} \tag{3-50}$$

donde, d_{io} es la distancia entre S_0 (punto de predicción) a S_i (punto de observación), cumpliendo además algunas condiciones como: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y el peso es controlado por un factor p.

Una vez determinados los valores interpolados mediante IDW ($\Delta\delta g^{IDW}$) en las coordenadas planas de las observaciones con perturbaciones residuales potencialmente atípicas ($\Delta\delta g^{PA}$), se pueden determinar unas diferencias entre ambos valores y construir la siguiente lógica para la eliminación de los valores atípicos:

$$Si \;\; |\Delta\delta g^{PA} - \Delta\delta g^{IDW}| \geq \varepsilon \longrightarrow Elimina, \tag{3-51}$$

donde el valor de ε está dado por el valor del percentil 95 % de la función de distribución acumulativa de los valores de $\Delta\delta g$ como se menciona en Varga et al. (2021) Liu et al. (2024)

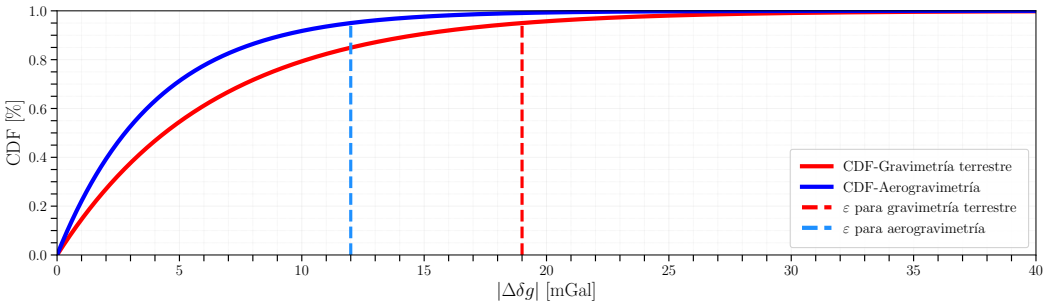


Figura 3-16: Determinación de ε mediante CDF, modificado de Varga et al. (2021).

Para el caso de lo descrito en Varga et al. (2021) el valor de ε tanto para la Aerogravimetría como para la gravimetría terrestres adoptado es de $12mGal$ y $19mGal$ respectivamente. Un valor a tener en cuenta para el modelado en el territorio colombiano.

Una vez realizado cada uno de los pasos anteriormente mencionados se llega a decir que los datos gravimétricos obtenidos son los adecuados para realizar el modelado del campo de gravedad local. En este instante el conjunto de datos cumple las condiciones inicialmente nombradas como la uniformidad de la representación de las coordenadas y la calidad interna.

3.8.2. Datos Aéreos

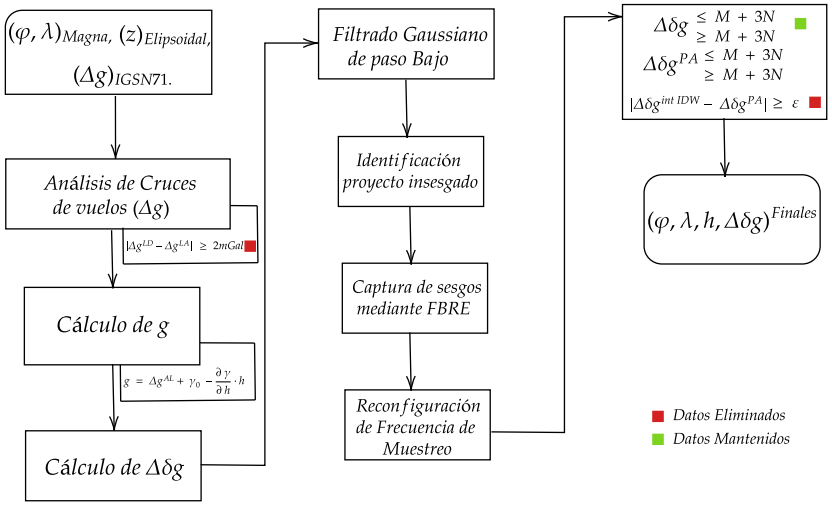


Figura 3-17: Flujograma tratamiento datos Aereos.

Para realizar el tratamiento de los datos aerogravimétricos y que responda a las condiciones antes presentadas al inicio del apartado (**3.8**), se sigue la metodología propuesta tanto en Liu et al. (2024) como en Varga et al. (2021). A continuación, se presenta a manera de diagrama de flujo el tratamiento de los datos aéreos realizado en esta tesis:

- **Análisis de cruces:** Para poder evaluar la calidad interna de cada uno de los proyectos Aerogravimétricos, así como se sugiere en Liu et al. (2024), se realiza la evaluación y diferencias entre los valores de anomalías aire libre Δg^{AL} en las intersecciones de las líneas de vuelo de proyectos aerogravimétricos como se muestra en la figura **3-18**. Ya que en la práctica es realmente difícil que los datos discretos de una línea de vuelo ascendente con los datos discretos de una línea de vuelo descendente coincidan exactamente con dos mediciones en el mismo sitio y que esta refleje una intersección de líneas de vuelo. Se debe desarrollar la intersección plenamente geométrica de las líneas que dibujan los datos discretos, para posteriormente hallar los 2 vecinos más cercanos de diferentes líneas de vuelo y realizar posteriormente la diferencia de las anomalías de aire libre como se muestra en **3-17**. Manteniendo entonces la siguiente lógica para la eliminación de datos:

$$Si \ \ |\Delta g^{AL}_{LA} - \Delta g^{AL}_{LD}| \geq 2mGal \longrightarrow Eliminar \ \ Línea \ \ Vuelo, \tag{3-52}$$

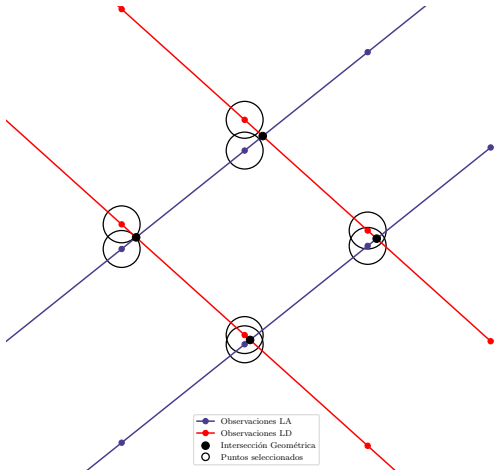


Figura 3-18: Evaluación de Cruces Aerogravimétricos.

- **Cálculo de g:** Dado que en todos lo proyectos aerogravimétricos poseídos por el IGAC (Instituto Geográfico Agustín Codazzi) traen el valor de la anomalía de Aire Libre y no el valor de gravedad directamente, es necesario calcular g ya que se necesita resolver el problema de valor en la frontera escalar fijo. Como se menciona en Liu et al. (2024), la forma de realizar esto es mediante la reducción Aire Libre, cantidad que viene en los datos entregados por las compañías de prospección geofísica. Para realizar esto se hace

uso de la siguiente ecuación:

$$g = \Delta g^{AL} + \gamma_0 - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot h, \tag{3-53}$$

donde $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ es el gradiente vertical normal de gravedad, h es la altura elipsoidal, γ_0 es la gravedad teórica sobre la superficie del elipsoide y $\frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot h$ es reducción de aire libre.

- **Cálculo de $\Delta\delta g$:** Al momento de recuperar los valores de gravedad de cada uno de los datos gravimétricos es posible determinar en primera instancia las perturbaciones de gravedad observadas, para la reproducción de la solución al problema de valor en la frontera escalar fijo. En consecuencia se hace uso de la ecuación (2-37) y posteriormente de la ecuación (3-24) para determinar las perturbaciones de gravedad residuales.

- **Filtro de Paso bajo Gaussiano:** A partir de lo que se menciona en Liu et al. (2024) Willberg et al. (2020) Childers et al. (1998) la naturaleza de los datos aerogravimétricos dada su forma de captura presentan ruido de alta frecuencia, por lo que en el procesamiento estándar de datos aéreos se realiza para mejorar la captura de la señal del campo de gravedad, para ello se aplica el filtrado a lo largo de cada una de las líneas de vuelo, como se puede ver en la figura **3-19**, manteniendo la siguiente ecuación:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp \frac{-x^2}{2\sigma^2}. \tag{3-54}$$

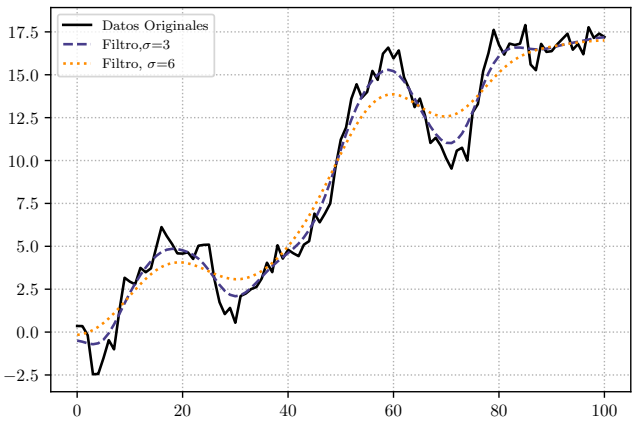


Figura 3-19: Ejemplo de Filtrado Gaussiano 1D. Créditos SciPy.

- **Identificación de Proyecto Insesgado:** Dado que cada uno de los proyectos aerogravimétricos tienen una naturaleza diferente al estar levantados por compañías de prospección

geofísica distintas y en tiempos diferentes, como se sugiere en Liu et al. (2024), se debe de realizar una corrección al sesgo generado por las condiciones en que se levantaron, además, del posterior procesamiento realizado por cada una de las compañías. Para ello se hace un proceso de remover a cada una de las observaciones aerogravimétricas y se evalúan las diferencias medias para cada uno de los proyectos. Para el trabajo de Liu et al. (2024), esta comparación se realiza mediante los armónicos esféricos del modelo SaTop Zingerle (2022) Zingerle et al. (2019) d/o 719, en donde el modelo representa las longitudes de onda muy larga del modelo GGMs GOCO'06s Fecher et al. (2017) y las longitudes de onda corta del modelo dv_ell_Earth2014 Rexer et al. (2016). Para el desarrollo de este paso en el presente trabajo se expanden haciendo uso de los armónicos esféricos en cada una de las observaciones el modelo GOCO'06s d/o 300 y la componente $\delta_g Gtopo$ del modelo SRTMv2Gravity Hirt et al. (2019) para que se cumpla la independencia entre las observaciones y el modelo para la captura del mayor proyecto insesgado en la zona de estudio. El Levantamiento cuyas diferencias medias estén más cercanas a cero, será el usado para la corrección de sesgos de los demás proyectos.

- **Cálculo de sesgos mediante FBRE:** Una vez identificado el levantamiento aerogravimétrico cuyas diferencias medias del paso anterior sean las más cercanas a cero, se realiza el calculo de los sesgos de cada uno de los proyectos de la siguiente manera según lo que se presenta en Liu et al. (2024) haciendo uso de las FBRE. Donde el modelo de Gauss-Márkov se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 + \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{d}, \\ \mathbf{y}_l + \mathbf{e}_l = \mathbf{A}_l\,\mathbf{d} + \mathbf{1}_l\,\Delta_{l|1}, \qquad l = 2,3,\ldots,L, \end{cases} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{D}_{y_1} = \sigma_1^2\mathbf{P}_1^{-1},\ \boldsymbol{D}_{y_l} = \sigma_l^2\mathbf{P}_l^{-1}, \tag{3-55}$$

donde $\Delta_{q|1}$ es el término de sesgo estimado con respecto al primer conjunto de datos y $\mathbf{1}_{\boldsymbol{O_q}} = [1,1,\cdots,1]'_{O_q\times 1}$ es un vector de unos con tamaño del conjunto de datos q. Cada uno de los términos de sesgo se estimarán en conjunto con los parámetros $\hat{d}_k$. El modelo extendido de Gauss-Márkov se escribe de forma matricial de la siguiente manera Liu et al. (2024):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_L \\ \boldsymbol{\mu}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_\mu \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_L \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta_{2|1} \\ \Delta_{3|1} \\ \vdots \\ \Delta_{L|1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}, \qquad \boldsymbol{Var} = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^2\mathbf{P}_1^{-1},\ \sigma_2^2\mathbf{P}_2^{-1},\ \ldots,\ \sigma_L^2\mathbf{P}_L^{-1},\ \sigma_\mu^2\mathbf{P}_\mu^{-1}\right), \tag{3-56}$$

Donde $A_1^* = [A_1, 0, \cdots, 0], \cdots, A_l^* = [A_l, 0, \cdots, 1_L]$, la nueva matriz de diseño $N_l \times (K + L - 1)$ para el l-ésimo levantamiento aerogravimétrico, y $\mathbf{A}_\mu = [\mathbf{I}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]$ como la matriz de diseño $K \times (K + Q - 1)$ para la información previa $\boldsymbol{\mu}_d$, que contiene una

identidad **I** de tamaño $K \times K$ y una matriz cero $K \times (L-1)$. Entonces, el vector incógnita $(K+L-1) \times 1$, $\mathbf{c} = [\,\mathbf{d}^{'}, \Delta_{2|1}, \Delta_{3|1}, \ldots, \Delta_{L|1}\,]^{'}$, se estima como Liu et al. (2024):

$$\hat{\mathbf{c}} = \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{A}_l^{\star'} \mathbf{P}_l \mathbf{A}_l^{\star} \; + \; \frac{1}{\sigma_\mu^2} \mathbf{A}_\mu^{'} \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{\sigma_q^2} \mathbf{A}_l^{\star'} \mathbf{P}_l \mathbf{y}_l \; + \; \frac{1}{\sigma_\mu^2} \mathbf{A}_\mu^{'} \mathbf{P}_\mu \boldsymbol{\mu}_d \right), \tag{3-57}$$

Donde la estimación de la matriz de varianza-covarianza tanto de los parámetros $\hat{d}_k$ como de los componentes de sesgo se determina bajo la siguiente ecuación:

$$D(\hat{c}) = \left(\sum_{q=l}^{L} \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{A}_l^{\star'} \mathbf{P}_l \mathbf{A}_l^{\star} \; + \; \frac{1}{\sigma_\mu^2} \mathbf{A}_\mu^{'} \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \right)^{-1}. \tag{3-58}$$

- **Re-configuración de frecuencia de muestreo:** En algunos levantamientos Aerogravimétricos dada su finalidad de prospección geofísica la tasa de muestreo de valores observados de gravedad es muy alta, al momento del modelamiento del campo de gravedad esto representa costos computacionales altos en el cálculo de las matrices de diseño, cálculo VCE y cálculo Lc; dada la configuración del modelo mediante FBRE. Por lo que al igual que en Liu et al. (2024) se realiza cambio en la frecuencia media de muestreo a lo largo de las líneas vuelo aerogravimétricas para que se cumpla una distancia media de muestreo de $1km$. Esto se puede realizar dada la alta correlación entre los valores observados a lo largo de una línea de vuelo. Así que de la manera que comenta Liu et al. (2024), este proceso de re-configuración mantiene un balance entre los costos de modelado y la información de gravedad. A continuación se presenta a manera de ejemplo el re muestreo realizado:

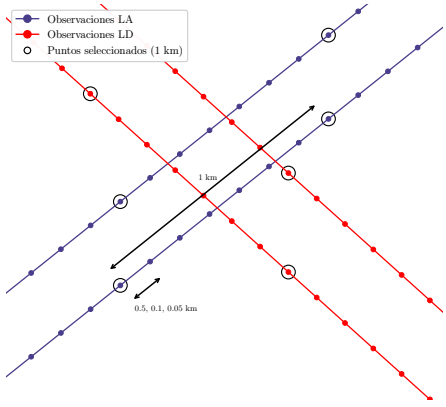


Figura 3-20: Ejemplo de cambio de la distancia media de muestreo a lo largo de las líneas de vuelo.

- **Validación cruzada con interpolador IDW:** Al igual que en el procesamiento de los datos terrestres, se realiza una validación cruzada con el interpolador determinístico IDW, para el tratamiento de los datos atípicos dentro del conjunto de datos aerogravimétricos. De la misma manera como se definió anteriormente.

4 Estimación del Modelo Cuasigeoidal

En este apartado se describe cada uno de los aspectos relevantes en el modelado particular del campo de gravedad local para la materialización del Sistema de Referencia Internacional de Alturas en la estación de monitoreo permanente MEDE, en Medellín, Antioquia, Col. Se aclaran varios aspectos con respecto al uso de las Funciones de Base Radial Esféricas y el modelo extendido de Gauss-Márkov descrito en la sección metodológica. Para definir el proyecto se realizan las descripciones del área de estudio, configuración de las FBRE, el conjunto de observaciones gravimétricas, modelos geopotenciales usados (Modelos de Fondo) y los datos de Nivelación/GNSS dispuestos como un conjunto de datos independiente para la validación cruzada de la anomalía de altura gravimétrica ζ^{grav} y la anomalía de altura geométrica ζ^{geom}.

4.1. Área de Estudio

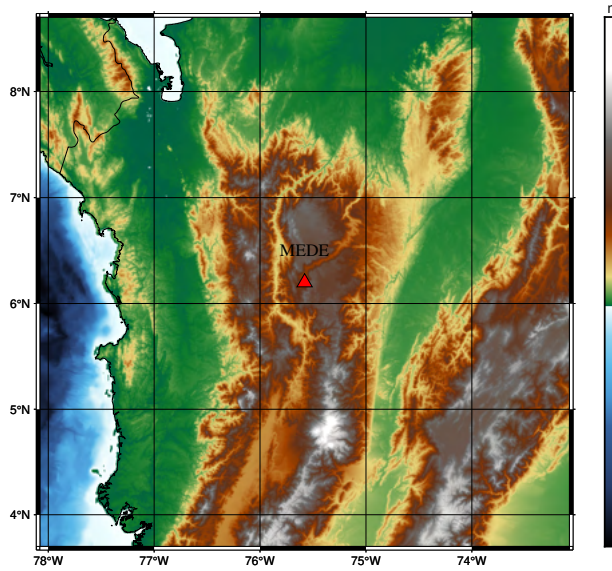


Figura 4-1: Comportamiento Topográfico,

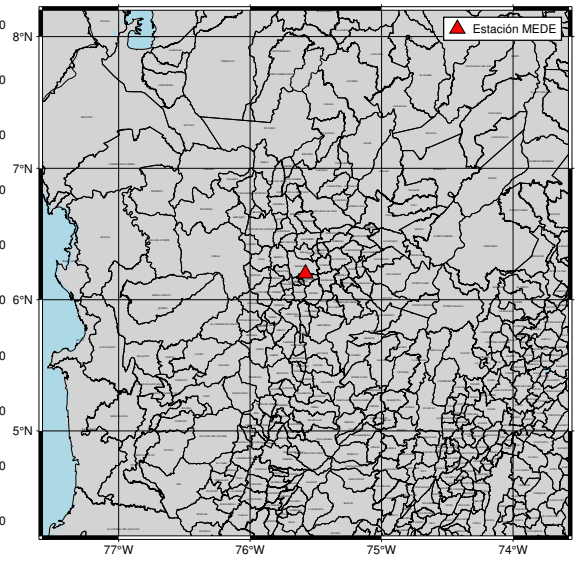


Figura 4-2: Ubicación estación MEDE.

El área de estudio se fragmenta en dos partes, el área objetivo para la cual se realiza el modelado final del Qgeoide gravimétrico y el área que representa la latitud mínima, la latitud máxima, la longitud mínima y la longitud máxima de las observaciones usadas para el cálculo, el promedio de estas dos áreas que se consideraría como el área de estudio tiene los límites:

$\bar{\varphi}_{min}^{max} = \begin{cases} 9°12'9'' \\ 3°11'47'' \end{cases}$, $\bar{\lambda}_{min}^{max} = \begin{cases} -72°34'33'' \\ -78°34'55'' \end{cases}$. Por lo que se abarca en términos de alturas desde -2000m bajo la superficie del mar, y alrededor de 5000m de elevación sobre la superficie terrestre, estas elevaciones representan el área a lo largo y entre los meridianos $-78°$, $-75°$ y $-74°$ con un promedio alrededor de los $2000m$ de elevación. En términos generales las áreas llanas representan un aproximado del $20\,\% - 25\,\%$ del total del área, y las zonas abruptas topográficamente hablando corresponde a un aproximado de $75\,\% - 80\,\%$ del total del área. Por lo que modelar el Qgeoide gravimétrico a una alta resolución, con precisión y exactitud es un trabajo complejo. La estación de monitoreo permanente Cors MEDE, se encuentra en las coordenadas elipsoidales ($6°11'57.86''$,$-75°34'44.1''$,$1553.46436m$), por lo tanto posiciona la estación sobre la cordillera central de los andes colombianos donde las contribuciones de alta frecuencia del campo de gravedad influye bastante en la modelización Qgeoidal.

4.2. Insumos Gravimétricos

Para el modelado del campo de gravedad se hacen uso de tres diferentes técnicas de medición, y se tratan como conjunto de datos diferentes. En primer lugar se tienen observaciones terrestres las cuales componen un $26.55\,\%$ del total de los datos usados para el modelamiento, en segundo lugar se tienen levantamientos aerogravimétricos los cuales representan un $59.61\,\%$ del conjunto de datos total, y se cuentan con datos provenientes de altimetría satelital para las zonas "offshore"(zonas marinas), los cuales representan un $13.84\,\%$ del total de los datos. A continuación se presentan cada una de las descripciones y declaraciones importantes en el tratamiento y procesamiento de cada uno de los conjuntos.

4.2.1. Descripción Datos Terrestres

Dentro del conjunto de datos terrestres la gran mayoría de los datos son provenientes de empresas petroleras encargadas de la prospección geofísica en el país como lo es Ecopetrol, por otro lado, el origen de una gran parte del conjunto de observaciones gravimétricas son provenientes de Servicio Geológico Colombiano (SGC) y finalmente se cuenta con observaciones pertenecientes a la Red Gravimétrica Nacional del Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Dentro del área de observaciones se tienen un total de 44273 observaciones sin ningún tipo de procesamiento, al final se termina trabajando con un total de 36441 observaciones las cuales se ilustran en la figura **4-3** después del tratamiento de datos escrito en el apartado **3.8.1**, cada uno de los procesos ejecutados y sus resultantes en términos de la cantidad de observaciones se puede observar en la tabla **4-1**.

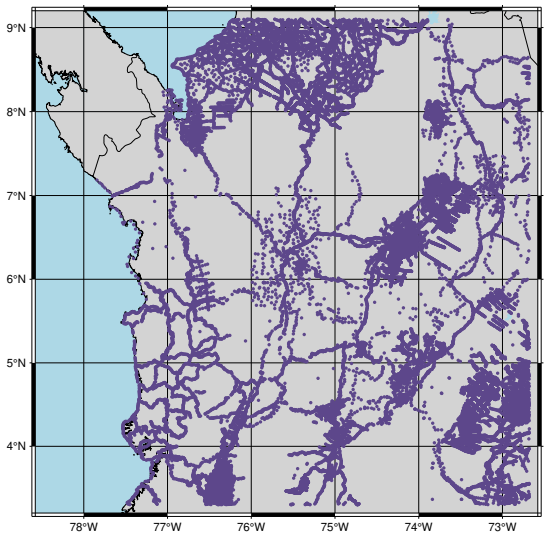


Figura 4-3: Observaciones terrestres.

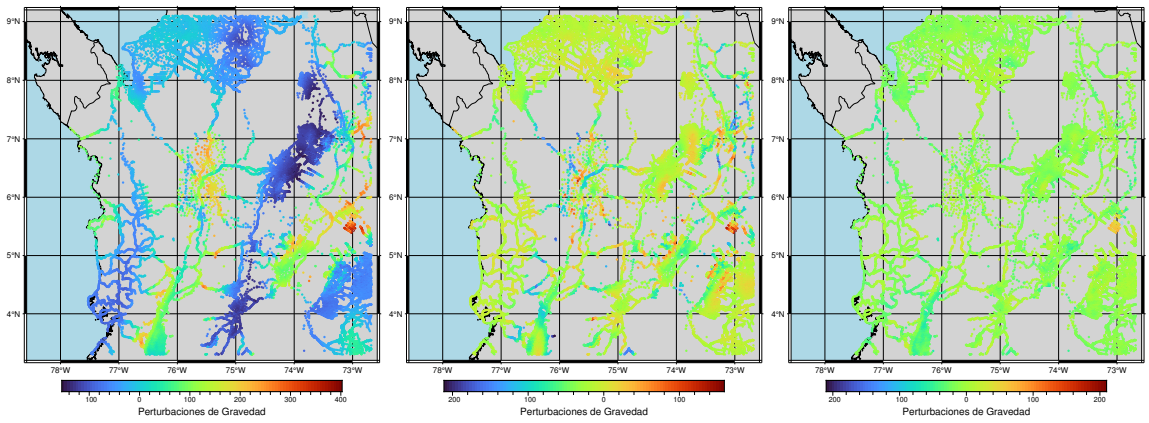
Tabla 4-1: Tratamiento de observaciones

Tratamiento Horizontal	**Cantidad**
Total de observaciones iniciales	44,273
Observaciones eliminadas por posición exacta	3,907
Observaciones eliminadas por filtro de distancia	2,697
Observaciones eliminadas por valores incoherentes	12
Observaciones con altura $\geq$ 2000 m	4,218
Observaciones con altura $\leq$ 2000 m	33,439
Eliminados del primer grupo (altura $\geq$ 2000 m)	14
Eliminados del segundo grupo (altura $\leq$ 2000 m)	569
Eliminados totales	583
Observaciones finales tras depuración	37,074
Outliers eliminados por validación cruzada (IDW)	633
Total de datos óptimos para el modelamiento	**36,441**

Comportamiento Remover Terrestres

Para este caso se usan tres modelos de fondo para llevar a cabo el proceso de remover las longitudes de onda largas y muy cortas de los datos observados en términos de δ_g según lo que se describió en el apartado de **Remover- Calcular - Restaurar** mediante la ecuación (3-24), la configuración de cada uno de los modelos (grado y orden de expansión armónica esférica) se desarrolla de la siguiente manera:

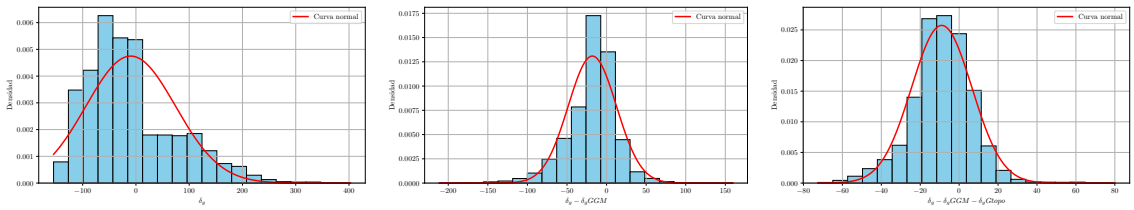
- **GGM:** XGM2019 d/o 0-719,
- $\boldsymbol{G_{topo1}}$**:** dv_ell_Earth2014 d/o desde 720 hasta 2159,
- $\boldsymbol{G_{topo2}}$**:** ERTM2160 d/o desde 2160 hasta 80000.



(a) (b) (c)

Figura 4-4: **a** δ_g; **b** $\delta_g - \delta_{g_{GGM}}$; **c** $\Delta\delta_g$. Comportamiento remover terrestres.

En términos de los histogramas para cada uno de los procesos de remover representados en la figura **4-4** se tiene el siguiente comportamiento en el cual se puede observar el suavizamiento que se genera en los observables respectivamente. En términos de los estadísticos básicos para cada una de las perturbaciones removidas el suavizado se logra observar en la desviación estándar de cada uno de los conjuntos de datos como se presenta en la tabla **4-2**.



(a) (b) (c)

Figura 4-5: Histogramas del proceso de remover para datos terrestres.

Estadístico	δg	$\delta g - \delta g_{GGM}$	$\Delta \delta g$
Media	-9.8041	-18.0016	-8.9707
Mediana	-25.8367	-14.1367	-8.6516
Std	**84.0091**	**30.4726**	**15.5019**
Máximo	402.6981	159.4829	80.0131
Mínimo	-154.6347	-211.2972	-72.5392

Tabla 4-2: Estadísticos básicos del remover en datos terrestres.

4.2.2. Descripción Datos Aéreos

Dentro del conjunto de datos aéreos, la totalidad de los datos son provenientes de empresas petroleras encargadas de la prospección geofísica en el país como lo es Ecopetrol. La resolución a lo largo de las líneas de vuelo es en promedio de 75m, la resolución entre líneas ascendentes y líneas descendentes es en promedio de 1km. Dentro del área de observaciones se tienen un total de 4310766 observaciones sin ningún tipo de procesamiento, al final se termina trabajando con un total de 81867 observaciones las cuales se ilustran en la figura **4-6** después del tratamiento de datos escrito en el apartado **3.8.1**, cada uno de los procesos ejecutados y sus resultantes en términos de la cantidad de observaciones se puede observar en la tabla **4-3**. Los primeros ajustes en los datos se debe a que son dados en términos de la anomalía de aire libre $\Delta g^{\text{Aire Libre}}$, por lo que hay que recuperar el valor observado de la gravedad mediante la corrección aire libre, como se menciona en el apartado de tratamiento de datos. De lo más importante al momento del uso de los datos aerogravimétricos así como lo menciona Liu et al. (2024) es la corrección de sesgos, ya que los datos tienen una temporalidad, procesamiento y compañía de levantamiento diferente. Esto se debe de tener en cuenta al momento del computo del Qgeoide gravimétrico.

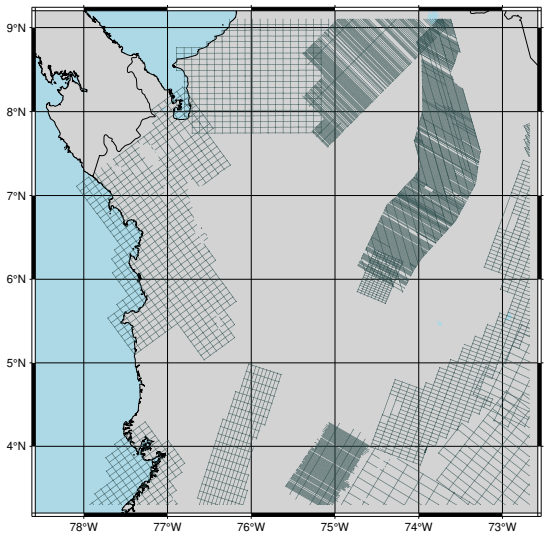


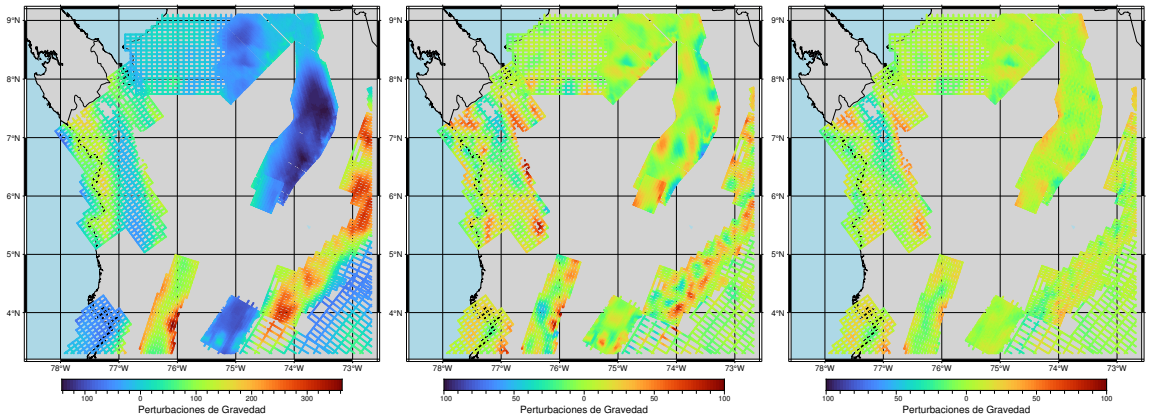
Figura 4-6: Observaciones Aéreas.

Tabla 4-3: Tratamiento de observaciones

Tratamiento Aerogravimétricos	**Cantidad**
Total de observaciones iniciales	4310766
Total de Observaciones baja Frecuencias	82258
Outliers eliminados por validación Cruzada (IDW)	391
Total de datos óptimos para el modelamiento	**81,867**

Comportamiento Remover Aerogravimétricos

Para llevar a cabo el proceso de remover, se hace uso de solo dos modelos auxiliares de geopotencial. En primer lugar para remover el comportamiento de longitud de onda larga se usa el modelo XGM2019 y para remover el comportamiento del campo de gravedad para frecuencias altas, se hace uso del modelo dv_ell_Earth2014. No se hace uso del modelo ERTM2160 ya que este modelo solo se tiene en una grilla regular, así que no es posible continuar hacia arriba el campo de gravedad en frecuencias altas mediante este modelo, en cambio tanto el modelo GGM XGM2019 como el modelo geopotencial topográfico dv_ell_Earth2014 son accesibles en términos de los armónicos esféricos por lo que se puede calcular el valor de δg a cualquier altura, importante para los datos aerogravimétricos ya que no se encuentran a la altura del terreno.



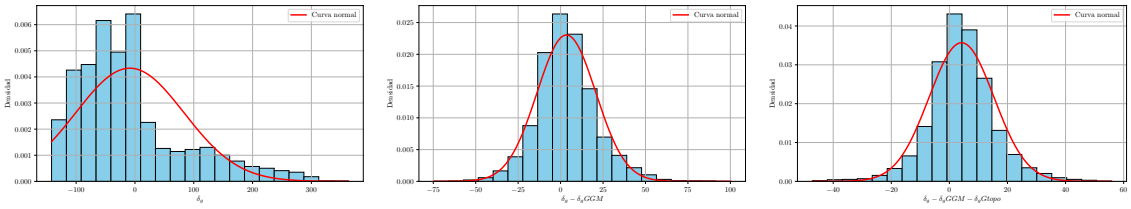
(a) (b) (c)

Figura 4-7: **a** δ_g; **b** $\delta_g - \delta_{g_{GGM}}$; **c** $\Delta\delta_g$. Comportamiento remover aéreos.

La Expansión armónica esférica de cada uno los modelos se desarrolla de la siguiente manera:

- **GGM:** XGM2019 d/o 0-719,
- $\boldsymbol{G_{topo}}$**:** dv_ell_Earth2014 d/o desde 720 hasta 5480.

En términos de los histogramas para cada uno de los procesos de remover representados en la figura **4-7**, se tiene el siguiente comportamiento en el cual se puede observar el suavizamiento que se genera en los observables respectivamente. En términos de los estadísticos básicos para cada una de las perturbaciones removidas el suavizado se logra observar en la desviación estándar de cada uno de los conjuntos de datos en la tabla **4-4**.



(a) (b) (c)

Figura 4-8: Histogramas del proceso de remover para datos aéreos.

Estadístico	δg	$\delta g - \delta g_{GGM}$	$\Delta \delta g$
Media	-8.6797	3.4375	4.1853
Mediana	-28.5438	2.5571	3.8731
Std	**92.0708**	**17.3149**	**11.1810**
Máximo	362.9876	100.1678	55.8464
Mínimo	-141.7863	-74.7079	-47.1619

Tabla 4-4: Estadísticos básicos del remover en datos aéreos.

Corrección de Sesgos

Se realiza la corrección de sesgos para los proyectos aerogravimétricos según lo mencionado en la metodología, haciendo uso de las funciones de base radial esféricas. Se obtiene un sesgo máximo estimado de 10mGal y un sesgo mínimo estimado de -3mGal, los demás proyectos dentro del área de interés tiene un sesgo no muy lejano a cero. Por lo que la corrección se sesgos se puede observar en la figura **4-9**, y las perturbaciones residuales antes de la corrección se sesgos, se puede observar en la figura **4-10**.

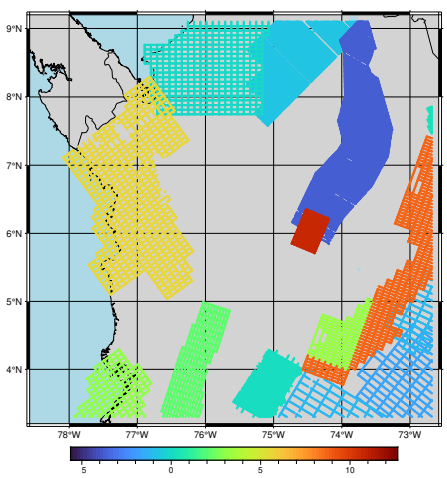


Figura 4-9: Sesgo estimado,

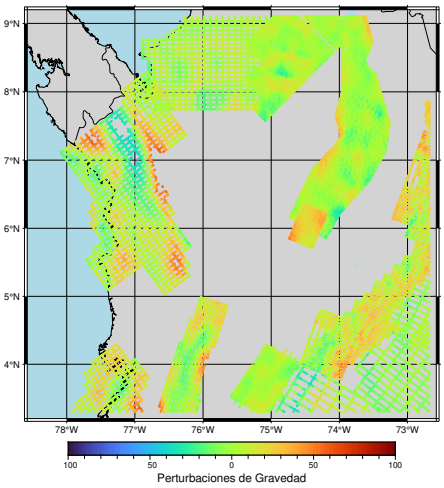


Figura 4-10: $\Delta\delta g$ sin corrección.

4.2.3. Descripción Datos Altimetría Satelital

En términos generales los datos de altimetría satelital, aunque no resulta ser su principal objetivo; se pueden convertir en observaciones de gravedad (anomalías de gravedad, deflexiones de la vertical, gradiente vertical de gravedad, etc.). Para esta tesis se hace uso de las anomalías gravimétricas dadas mediante el DTU21Gra Andersen and Knudsen (2020), proporcionadas por el doctor Ole Baltazar Andersen. Para completar las zonas "offshore", y así determinar de mejor manera el cuasigeoide marino. Los datos son brindados en una grilla regular de $1' \times 1'$ como se observa en la figura **4-11**.

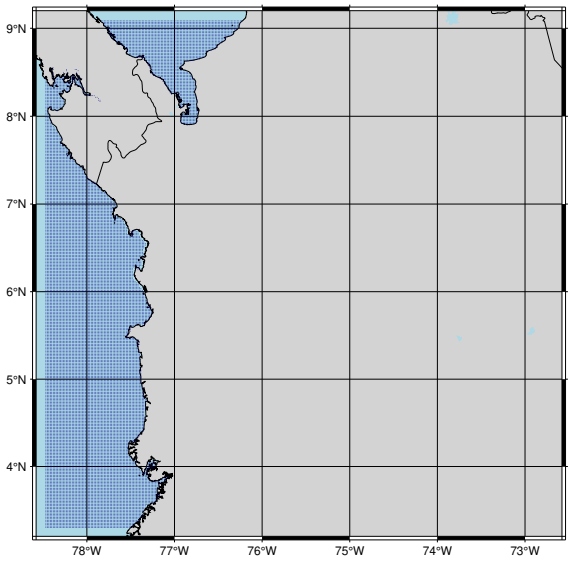


Figura 4-11: Altimetría Satelital DTU21Gra.

los resultados del modelo DTU21Gra así como se menciona en Liu et al. (2024) logra captar

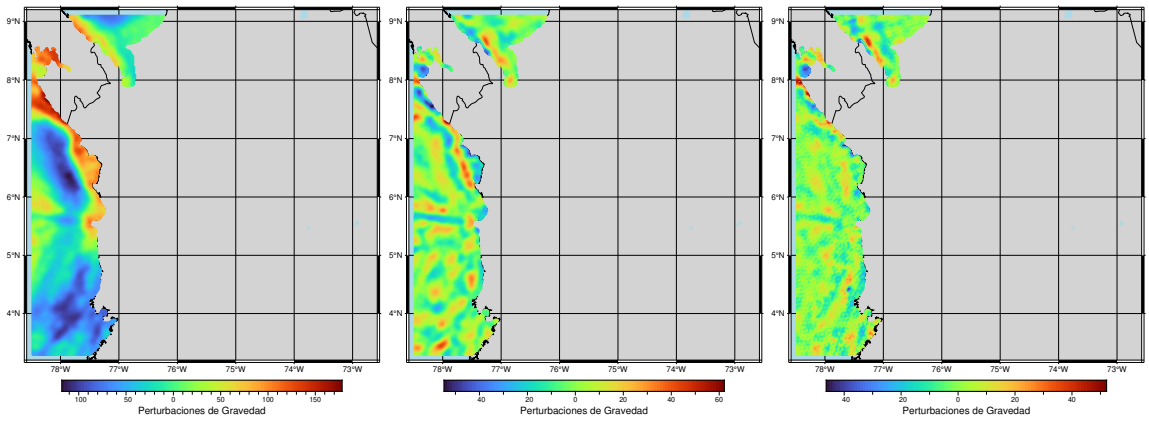
señales no modeladas en los GGM disponibles. En consecuencia, el incluir estos datos mejora el refinamiento del Qgeoide local en zonas marinas.

Comportamiento Remover DTU21Gra

El proceso de remover, al igual que los datos aerogravimétricos se realiza mediante las $\delta gGGM$ de longitud de onda corta mediante el modelo XGM2019 y las $\delta gGtopo$ de longitud de onda corta mediante el modelo dv_ell_Earth2014, las expansiones se realizan de la siguiente manera:

- **GGM:** XGM2019 d/o 0-719,
- $\boldsymbol{G_{topo}}$**:** dv_ell_Earth2014 d/o 720 - 5480.

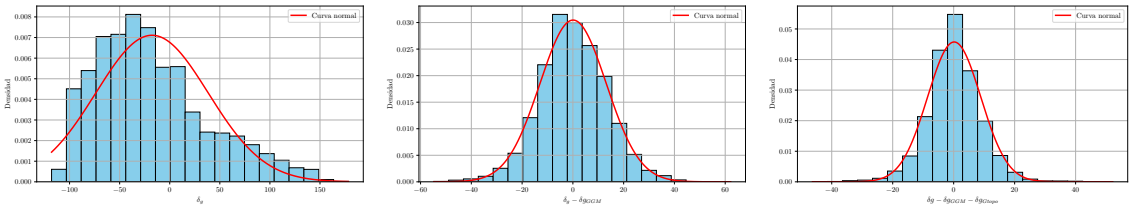
El comportamiento del proceso de remover en términos de las perturbaciones de gravedad se puede observar en la figura **4-12**:



(a) (b) (c)

Figura 4-12: **a** Δ_g; **b** $\Delta_g - \Delta_{g_{GGM}}$; **c** $\Delta_{g_{res}}$. Comportamiento Remover DTU21Gra.

En términos de los histogramas para cada uno de los procesos de remover representados en la figura **4-12** se tiene el siguiente comportamiento en el cual se puede observar el suavizamiento que se genera en los observables al igual que en los anteriores conjuntos de datos. Los estadísticos básicos en cada remover de frecuencias conocidas se observa en la tabla **4-5**.



(a) (b) (c)

Figura 4-13: Histograma del proceso de remover para datos de altimetría satelital.

Estadístico	Δg	$\Delta g - \Delta g_{GGM}$	Δg_{res}
Media	-17.6845	0.0829	0.1637
Mediana	-27.2580	-0.3344	-0.0040
Std	**56.1091**	**13.0951**	**8.7215**
Máximo	178.3950	62.1441	52.1631
Mínimo	-117.9630	-54.7924	-46.3219

Tabla 4-5: Estadísticos básicos del remover en datos DTU21Gra.

4.3. Configuración del modelo para IHRF MEDE

Para realizar el modelado del campo de gravedad local haciendo uso de las FBRE, se debe de tener en cuenta cuatro aspectos fundamentales para la configuración del modelo según la metodología explicada en la sección **3**

- **Localización de las funciones de base radial esféricas:** Como se mencionó anteriormente, para la generación de la posición de los parámetros, en donde estarán centradas las FBRE, se hace uso de la espacialización de los parámetros mediante el uso de la Reuter Grid Reuter (1982), definido en **Ubicación de las FBRE**, Los parámetros se muestran en la figura **4-14** de color verde,

- **Forma o filtro de las SRBF (B_n):** Este filtro dependiente de la forma en que se calcula B_n. Se debe de declarar en dos pasos dentro de la metodología mencionada antes, en **el paso de análisis** (al momento de computar la matriz de diseño A) y en **el paso de síntesis** (al momento de computar la matriz B). Así que para el paso de análisis dentro de la presente tesis se hace uso del filtro tipo Shannon para los datos del DTU21Gra y los datos terrestres. En el caso de los datos aerogravimétricos en el paso de análisis se hace uso del filtro tipo CuP. Para el paso de síntesis se hace uso del filtro tipo Cup al momento de estimar el potencial perturbador ($\hat{T}$). Revisar las gráficas **2-8 2-7**,

- **Frecuencias del modelo:** Se toma una expansión máxima desde $N_{max} = 2000$ hasta $N_{max} = 5700$ de las ecuaciones (3-28) (3-29), para once diferentes modelados realizados dentro del proyecto. Definir hasta que grado se expanden las FBRE no sólo afecta en el modelamiento final y su desviación estándar sino que modifica tanto el cálculo de la Reuter Grid como el cálculo de B_n,

- **Efecto de Borde:** Configuración de las zonas Ω_c, Ω_o y Ω_i, para eliminar el efecto de borde de las funciones de las FBRE, teniendo en cuenta el valor de $\eta_0 = 0{,}1°$. Según las coordenadas de la estación de MEDE, las diferentes áreas (Ω_c, Ω_o y Ω_i) se configuran de la siguiente manera:

  - $\Omega_i : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 2{,}84°, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 2{,}84°)$,

- $\Omega_o : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 3°, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 3°)$,
- $\Omega_c : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 3{,}1°, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 3{,}1°)$.

En términos gráficos la configuración del modelo se observa en la figura **4-14**, donde los puntos verdes hacen referencia a los puntos de la Reuter Grid (para $N_{max} = 4000$) que limitan el área de computo (Ω_c), el marco rojo hace referencia al área de observación (Ω_o) y el marco azul hace referencia al área de interés (Ω_i), cabe aclarar que la cantidad de parámetros (puntos verdes) se modifica según la expansión máxima de frecuencias, es decir el valor de N_{max}:

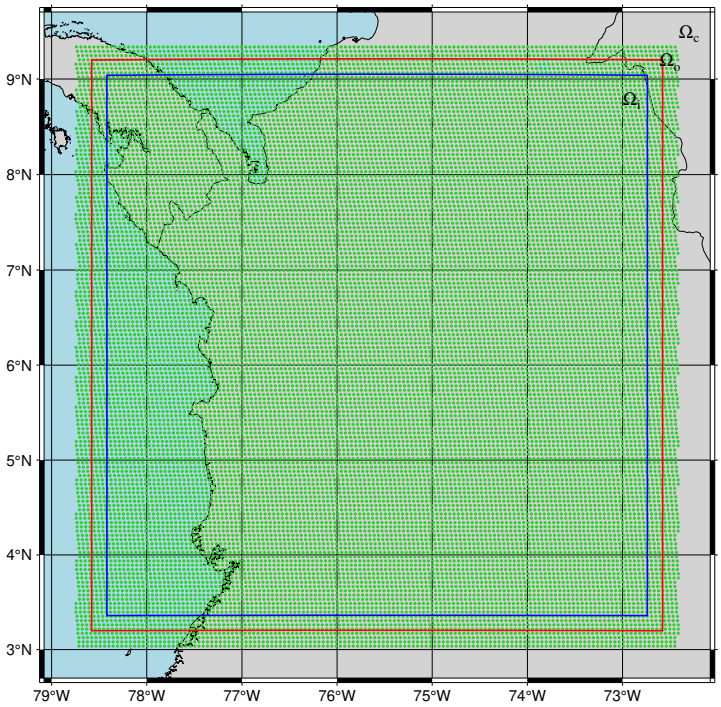


Figura 4-14: Configuración del modelo Qgeoide.

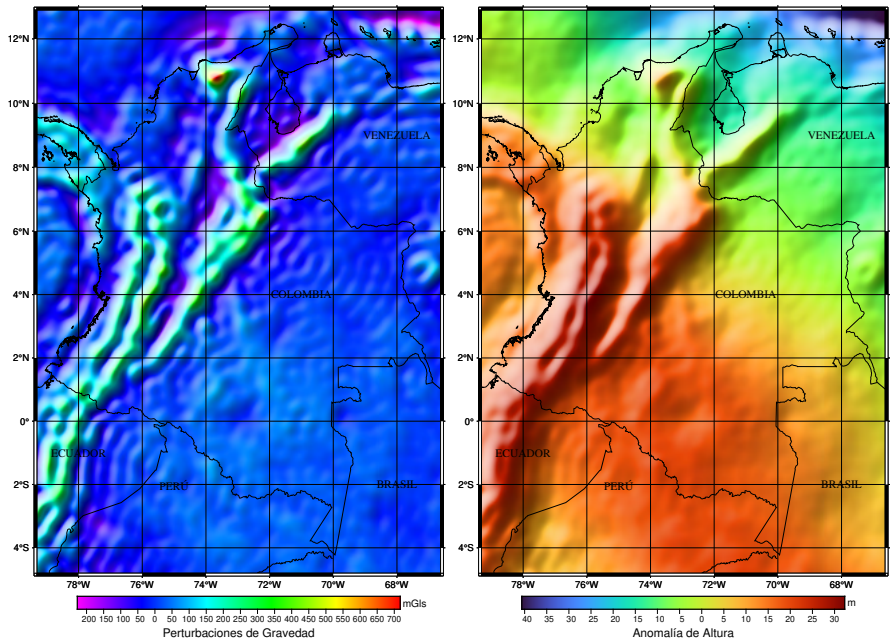
4.4. Modelos Implementados

4.4.1. XGM2019

Este modelo geopotencial global, es un modelo combinado del campo gravitacional representado por armónicos esféricos hasta el grado y orden d/o 5399, con una resolución espacial de 2' Zingerle et al. (2020a). Las fuentes de datos usadas para el cálculo de éste modelo incluye el modelo GOCO'06s para la longitud de onda muy larga (d/o 300), una cuadrícula de 15' de anomalías gravimétricas en tierra y océano proporcionadas por la NGA, se cuenta con un aumento de información mediante el modelo EARTH2014 de potencial topográfico, además de usar anomalías gravimétricas oceánicas del modelo DTU13Gra con una resolución de 1' Zingerle et al. (2020b).

Para la expansión hasta d/o 719, se hace uso de la combinación de datos satelitales y terrestres mediante ecuaciones normales completas hasta 719 Zingerle et al. (2020b), para los armónicos esféricos mas allá de d/o 719 se halla una solución mediante mínimos cuadrados en bloque-diagonal para los datos de alta frecuencia (topográficos y altimétricos). Este modelo como lo menciona Zingerle et al. (2020b) muestra un comportamiento mejorado con respecto al XGM2016 al momento de la validación cruzada con GNSS/Nivelación, Lo que muestra que el modelo en comparación con otros modelos con refinamiento local (EIGEN6v4, EGM2008), globalmente se muestra más consistente, además de mostrar un mejor comportamiento en validaciones en regiones costeras con el DTU17MDT.

En términos visuales para la superficie de la tierra se muestra el comportamiento tanto de $\delta gGGM$ en la figura **4-15**a y el comportamiento de ζ^{GGM} en la figura **4-15**b. Los armónicos esféricos de este modelo son los usados para el modelo de fondo de longitud de onda larga con expansión d/o 719. Este modelo está disponible como serie de coeficientes armónicos esféricos en `https://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime`.



(a) (b)

Figura 4-15: **a** $\delta_{g_{GGM}}$; **b** ζ^{GGM}. Expandido hasta d/o 719.

4.4.2. GOCO'06S

Este modelo de frecuencias muy bajas, es calculado como una solución combinada de datos de satélite y un conjunto de datos global de anomalías gravitacionales Fecher et al. (2017), Este modelo se resuelve hasta d/o 720. Una de las cosas importantes nombradas en Fecher et al. (2017)

es que es el primer modelo en aplicar una ponderación variable regionalmente, además de ser el primer modelo independiente del modelo EGM2008 que contiene datos de GOCE. Al igual que el modelo XGM2019 la validación cruzada se realiza mediante un conjunto de datos independientes de GNSS/Nivelación, se realiza también pruebas de órbita, además del cálculo de la topografía dinámica media Fecher et al. (2017). Algo importante mencionado en Fecher et al. (2017) es que al incluir los datos de GOCE, el modelo presenta una mejoría en áreas insuficientemente observadas. Este modelo de frecuencias muy bajas es usado en la presente tesis para identificar el proyecto aerogravimétrico más insesgado para la posterior corrección de sesgos mediante FBRE. En términos visuales el comportamiento de δ_g sobre la superficie de la tierra en expansión d/o 300 se observa en la figura **4-16**, Este modelo está disponible como serie de coeficientes armónicos esféricos en `https://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime`.

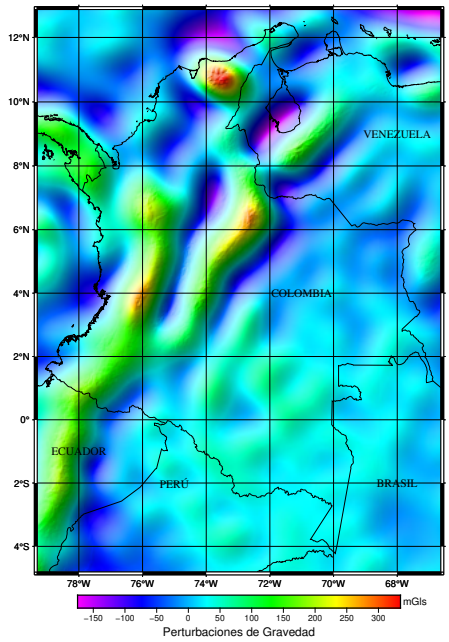
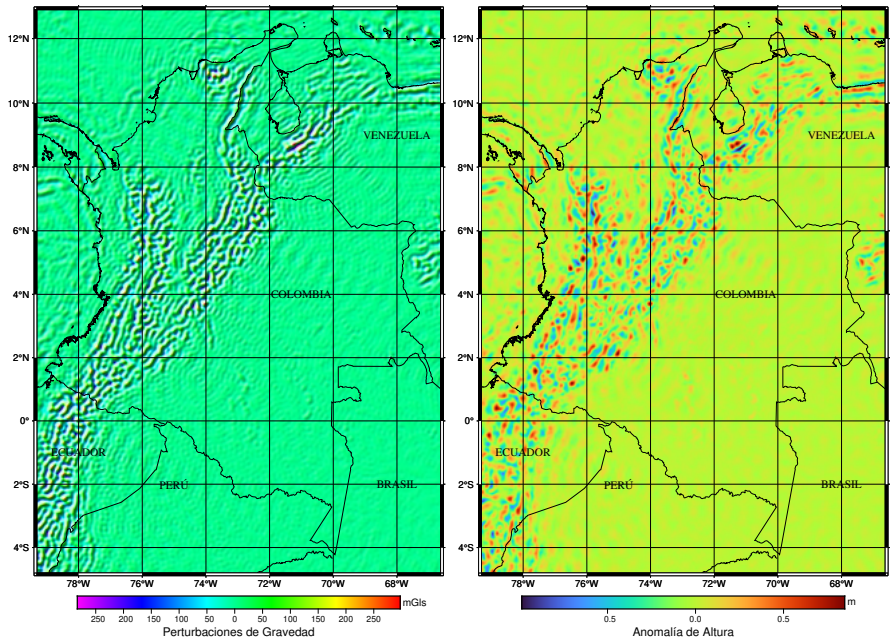


Figura 4-16: $\delta_{g_{GGMs}}$. Expandido hasta d/o 300.

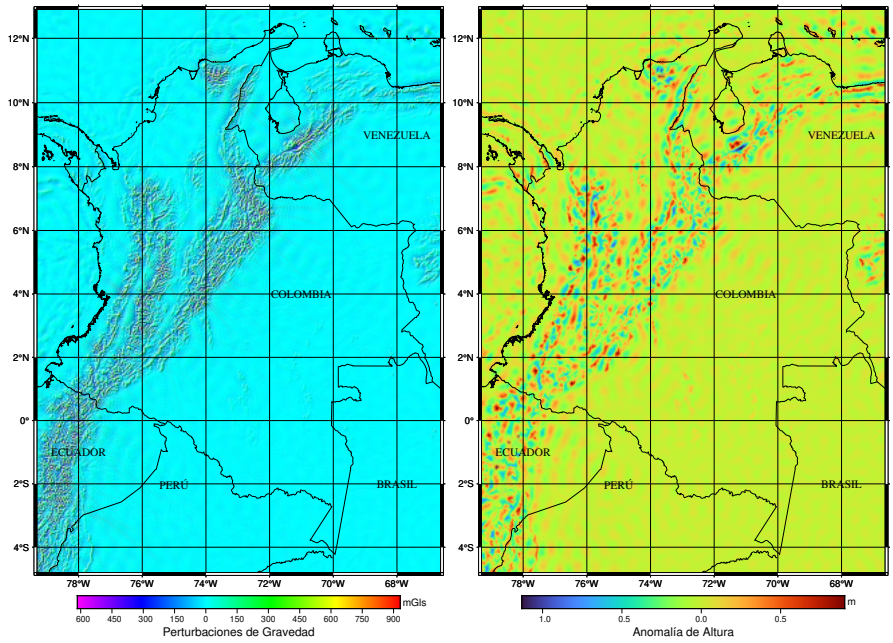
4.4.3. dv_ell_Earth2014

Este modelo de potencial topográfico presenta un tipo de modelado hacia adelante con capas de masas volumétricas, basándose en dos niveles de aproximación, en **aproximación esférica**, en la cual las capas de masa se refieren a una esfera (potencial topográfico esférico) Rexer et al. (2016)Rexer et al. (2017) y **una aproximación elipsoidal**, en donde la superficie de referencia es una elipse de revolución generando un potencial elipsoidal Rexer et al. (2016) Rexer (2017). Las capas son proporcionadas por el modelo de topografía EARTH2014 en armónicos esféricos hasta 10800 Hirt and Rexer (2015). Esta forma de modelamiento hacia adelante por capas de masas es validada mediante los observables de gradiometría de los satélites GOCE Rexer et al. (2016).



(a) (b)

Figura 4-17: **a** $\delta_{g_{Gtopo}}$; **b** ζ^{Gtopo}. Expandido d/o 720-2159.



(a) (b)

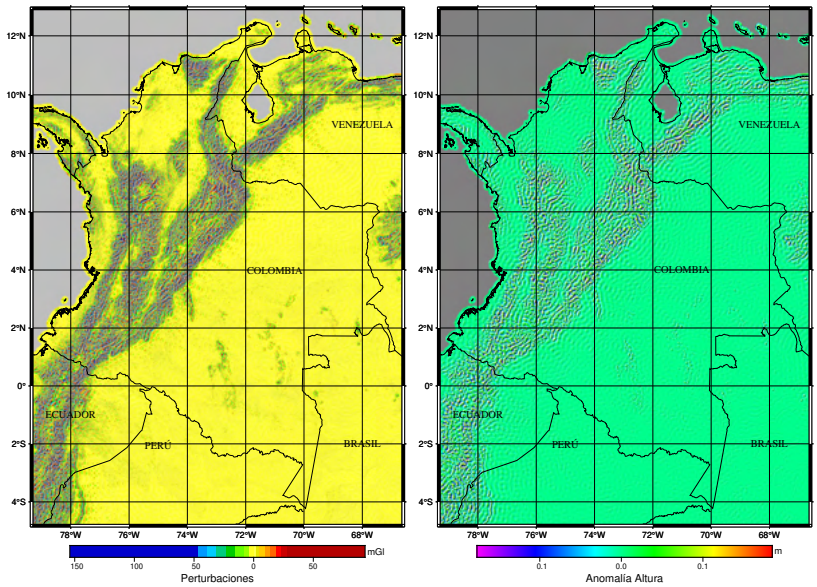
Figura 4-18: **a** $\delta_{g_{Gtopo}}$; **b** ζ^{Gtopo}. Expandido d/o 720-5480.

Las capas se clasifican en corteza, océano, hielo y lagos Rexer (2017). Este modelo es usado en

la presente tesis como modelo de fondo para representación de frecuencias media-altas (d/o 720-2159, para datos terrestes en el proceso de remover), (d/o 720-5480, para los datos aerogravimétricos y DTU21Gra para el proceso de remover), (d/o 720-2159 para datos terrestres, aéreos y DTU21Gra para el proceso de Restore) como se pueden ver en las figuras **4-17**,**4-18**. El modelo está disponible como serie de armónicos esféricos en `http://ddfe.curtin.edu.au/models/Earth2014/potential_model/`

4.4.4. ERTM2160

Es un modelo de geopotencial topográfico residual de muy altas frecuencias en formato grid a una resolución espacial de 220m $\approx 0.002° \approx 7.2''$ Hirt et al. (2014), este modelo proporciona las funciones gravitacionales de : $\delta_g Gtopo$,ζ^{topo},ξ y η. Este modelo es desarrollado mediante un modelado gravitacional de alta resolución usando el modelo topográfico SRTM (Shuttle Radar Topography Mission), Como se menciona en Liu (2023), este modelo es el primero que representa las características del campo gravitacional a corta escala y con ultra alta resolución, representando expansiones armónicas esféricas desde 2160 hasta $\approx$ 80000. Dado que el modelo no es presentado en series de armónicos esféricos no es posible calcular la componente de $\delta_g Gtopo$ y ζ^{topo} a cualquier altura, además de necesitar métodos de interpolación para obtener dicha componente sobre la superficie de la tierra, para las zonas "offshore"no se tiene puntos de grilla del modelo. En términos visuales el comportamiento de $\delta_g Gtopo$ y ζ^{topo} se observa en las figuras **4-19**a, **4-19**b respectivamente.



(a) (b)

Figura 4-19: **a** $\delta_{g_{Gtopo}}$; **b** ζ^{topo}.

El modelo está disponible en `http://ddfe.curtin.edu.au/gravitymodels/ERTM2160`. Para

la presente tesis este modelo es usado como modelo de fondo para representar las frecuencias ultra altas.

4.4.5. SRTMv2Gravity

El modelo SRTMv2Gravity es un modelo de representación de gravedad con una resolución espacial de 3", está basado en el modelo Topográfico MERIT (Multi-Error-Removed-Improved-Terrain), con una densidad constante de $\rho = 2670\frac{kg}{m^3}$ Hirt et al. (2019). El modelo en formato grid ofrece dos diferentes componentes, en primer lugar proporciona el comportamiento de muy altas frecuencias asociado a la atracción gravitacional de la topografía global de la tierra residual, y en segundo lugar ofrece una superficie de correcciones gravimétricas del terreno que reflejan la atracción gravitacional de la topografía global de la Tierra medida Hirt et al. (2019). El modelo MERIT a diferencia del modelo SRTM remueve las señales proporcionadas por las copas de los árboles, por lo que representa de mejor manera el suelo desnudo.

El modelo SRTMv2Gravity transforma las alturas del modelo de terreno en efectos gravitacionales mediante la integral de Newton Hirt et al. (2019) usando combinación de técnicas de vanguardia de análisis espectral de señales. Este modelo de efectos topográficos gravitatorios es la continuación del modelo ERTM2160 con mejoras. Para la presente tesis este modelo es usado para capturar junto con el modelo GOCO'06S el proyecto Aerogravimétrico más insesgado dentro del área de observaciones para posteriormente realizar la estimación de sesgos mediante el uso del GMM y FBRE. La componente usada es **"ResidualGravity"** disponible en `http://ddfe.curtin.edu.au/models/SRTM2gravity2018`

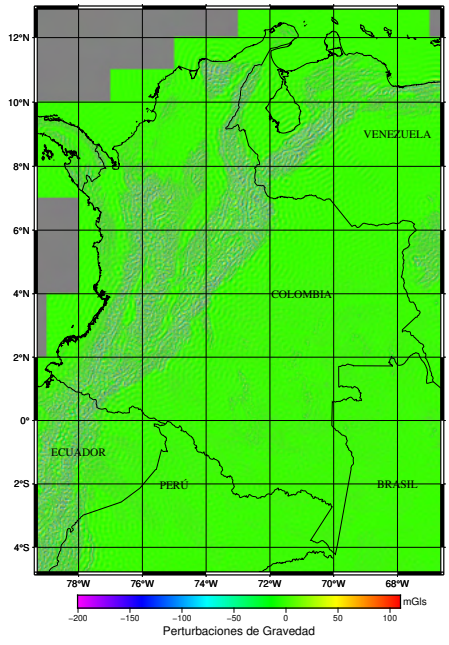


Figura 4-20: gravedad residual del modelo SRTMv2Gravity.

4.5. Datos de Validación

4.5.1. Validación Absoluta

El conjunto de datos de validación responden a alturas normales H^N y alturas elipsoidales h en un total de 3316 puntos. Como se puede observar en la figura **4-20**. La consistencia del modelo con los datos de validación de GNSS/Nivelación se representa por la desviación estándar de las diferencias entre la anomalía de altura geométrica ζ^{geom} y la anomalía de altura gravimétrica del modelo de cuasigeoide calculado ζ^{grav}.

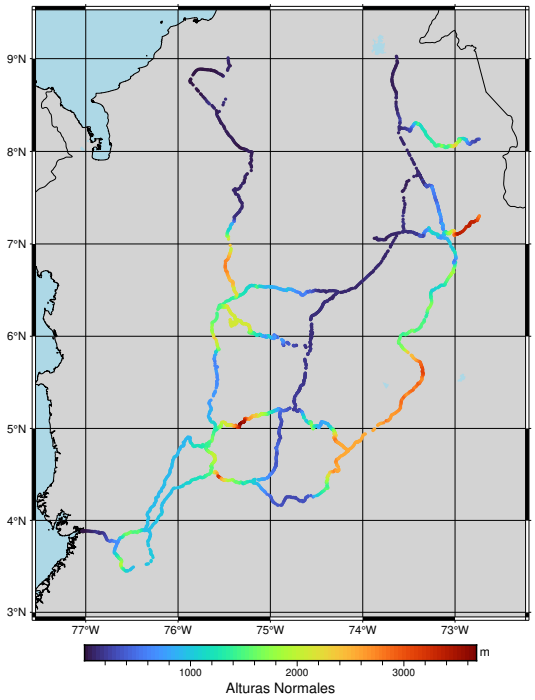


Figura 4-21: Datos de GNSS/Nivelación

Es debido aclarar que los circuitos de nivelación deben de ser compensados por números geopotenciales para la determinación posterior de alturas normales, en primer lugar se debe de realizar un ajuste nodal soportado en puntos fiduciales, para después ajustar las líneas de nivelación unidas por circuitos, apoyándose en los puntos nodales ajustados. Para el proceso de compensación por números geopotenciales se hace uso de los programas NUMGEOPOT y COMPNGP distribuidos en las escuelas SIRGAS, y usados por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi. La validación del modelo entonces se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta\zeta_i = \zeta_i^{\text{GNSS/Nivelación}} - \zeta_i^{\text{QgeoidMEDE2025}}, \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4-1}$$

donde n es el número máximo de puntos de Nivelación y GNSS disponibles en la zona de cobertura del modelo QgeoidMEDE2025. Dado que al modelar el comportamiento del campo de gravedad de la tierra de manera local, mediante la estimación de parámetros de un modelo combinado

extendido de Gauss-Márkov (Por lo cual se posee una solución continua en el espacio), se pueden generar matrices de diseño $\boldsymbol{B}$ específicas para los puntos de las líneas de GNSS/Nivelación, y de ésta forma lograr estimar de manera puntual (posición exacta) la anomalía de altura gravimétrica ζ^{grav}. Así los valores de $\Delta\zeta_i$ estarán libres de errores de interpolación y el ajuste final de los parámetros del modelamiento cuasigeoidal no se verán afectados por estos errores.

4.5.2. Validación Relativa

Los datos de validación relativa responden al mismo conjunto de datos para validación absoluta los cuales se observan en la figura **4-21**, más sin embargo para la validación relativa el objetivo es determinar las diferencias entre anomalías de altura geométricas a lo largo de las líneas de nivelación y las diferencias de las anomalías de altura gravimétricas representadas por el modelo QgeoidMEDE2025. La validación relativa se determina mediante la siguiente ecuación Liu et al. (2024):

$$\Delta\zeta_{ij} = \left(\zeta_i^{geom} - \zeta_j^{geom}\right) - \left(\zeta_i^{grav} - \zeta_j^{grav}\right), \tag{4-2}$$

Con i, j moviéndose bajo una ruta específica por el conjunto de datos de GNSS/Nivelación. La selección del mejor modelo o de los parámetros que determinan el mejor modelo se realiza bajo el estadístico RMS de las diferencias $\Delta\zeta_{ij}$. Este valor de RMS representa la consistencia del modelo a los datos de GNSS/Nivelación en función a la longitud de las líneas de nivelación. Aún así se debe aclarar que para trayectos cortos de nivelación el error estará asociado al modelo gravimétrico de cuasigeoide, y para trayectos largos los errores estarán asociados a la nivelación.

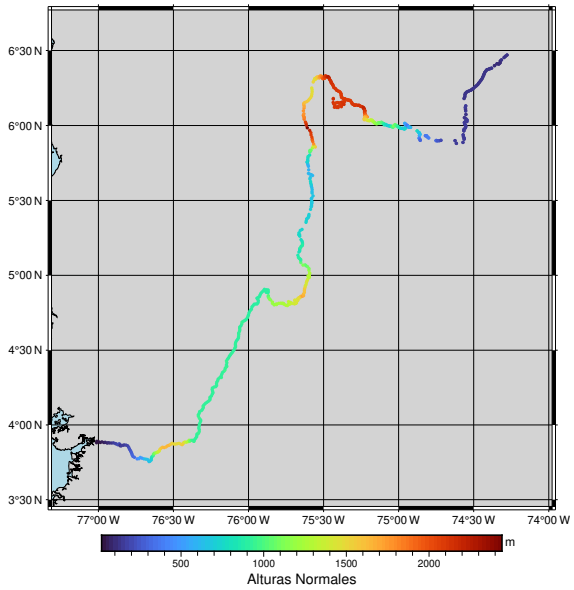


Figura 4-22: Línea de longitud aproximada de 700km.

5 Análisis e Interpretación de Resultados

En este apartado se presentan los resultados de los diferentes modelados de cuasigeoide generados para este trabajo de tesis (un total de 35 modelos variando la frecuencia máxima en el intervalo: $2000 \leq N_{max} \leq 5700$), cada uno de ellos comparados con el conjunto de datos de GNSS/Nivelación para la selección de los parámetros del mejor modelo Qgeoide gravimétrico.

5.1. Validación GNSS/Nivelación

5.1.1. Validación Absoluta

Para la validación con los datos de GNSS/Nivelación se hace uso de la ecuación 4-1, en términos gráficos las diferencias tienen un comportamiento representado en la figura **5-1**. Para comparaciones paralelas también se muestran las diferencias con el modelo QgeoidCOL2023, SAM y modelos globales. Los estadísticos básicos de las diferencias para cada uno de los modelos se pueden observar en la figura **5-2**.

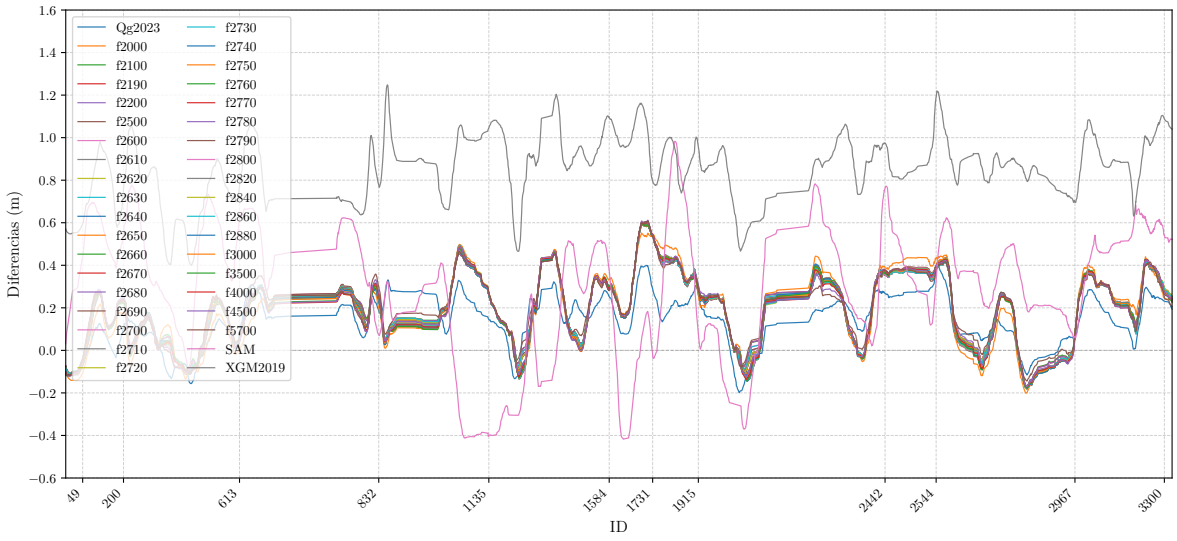


Figura 5-1: Diferencias de los modelos QgeoidMEDE2025, QgeoidCOL2023 y datos de GNSS/Nivelación.

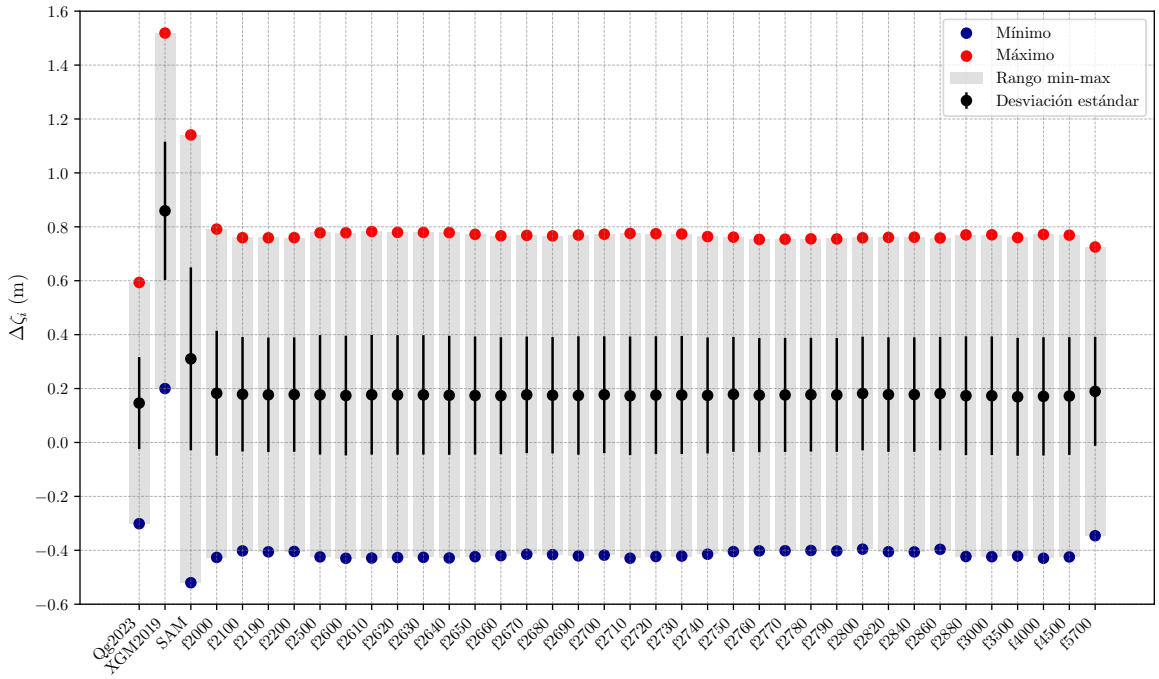
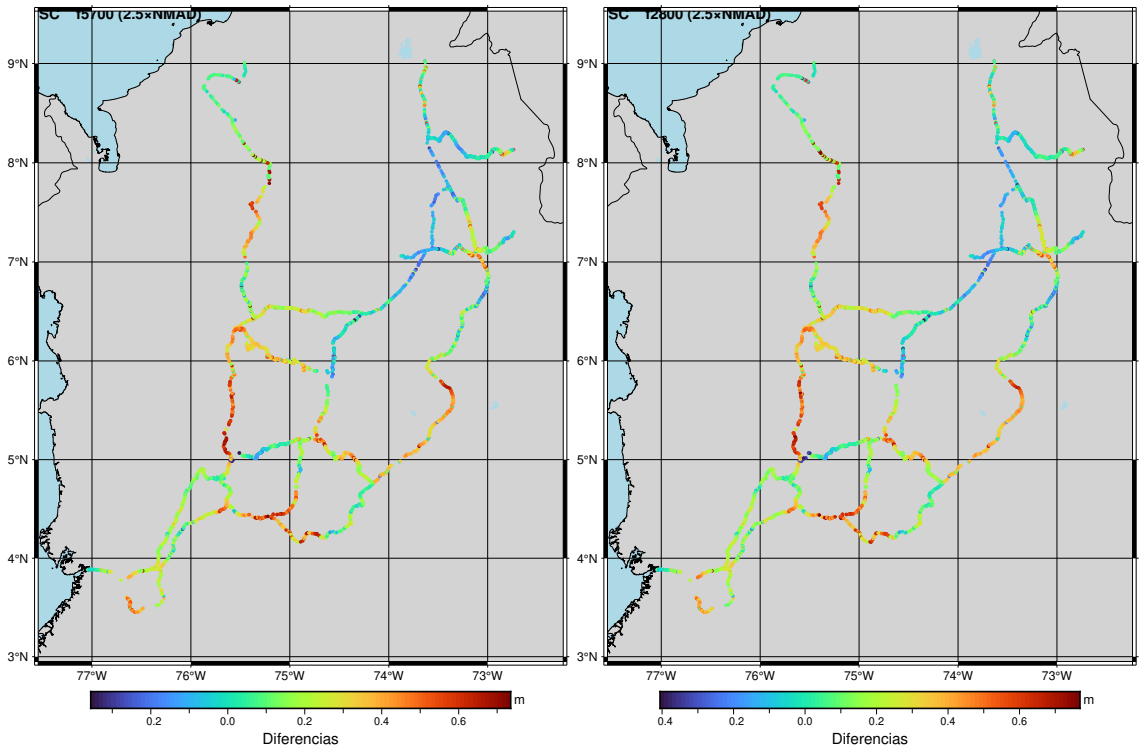


Figura 5-2: Comportamiento de Estadísticas básicas de $\Delta\zeta_i$ para los modelos representados en **5-1**.

Según los valores de los estadísticos básicos de $\Delta\zeta_i$ representados en la figura **5-2**, el modelo de Qgeoide mejor comportado es el expandido hasta $Nmax = 5700$, esto puede deberse a que los datos de GNSS/Nivelación en gran parte de la zona de estudio se encuentran situados en las posiciones de los datos gravimétricos, más sin embargo las desviaciones estándar de las anomalías de altura del modelo expandido a 5700 en lugares donde hay vacíos de información gravimétrica sean más altas que modelos expandidos a frecuencias mas bajas. Esto es importante porque hay que mantener un equilibrio entre los ajustes locales y regionales del modelo Qgeoide finalmente escogido. Con respecto a los demás modelos, el modelo QgeoidMEDE2025 expandido a 5700 representa la segunda mejor consistencia con los datos de GNSS/Nivelación. Los valores de los estadísticos básicos de $\Delta\zeta_i$ de los dos modelos QgeoidMEDE2025 con mejor consistencia se pueden observar en la siguiente tabla:

Estadísticos	QgeoidMEDE2025 f5700 (m)	QgeoidMEDE2025 f2800 (m)
Máximo	0.725198	0.759265
Mínimo	-0.346009	-0.395871
Media	0.192587	0.186011
Desviación Estándar	0.202132	0.210762

Tabla 5-1: Estadísticos básicos de $\Delta\zeta_i$.



(a) (b)

Figura 5-3: **a** $\Delta\zeta_i$ para f5700; **b** $\Delta\zeta_i$ para f2800.

Para el caso del modelo Qgeoide expandido hasta $Nmax = 5700$ presenta una consistencia con los datos de GNSS/Nivelación de $20{,}21cm$, esto podría deberse a diferentes razones según comenta Liu et al. (2024):

- Inconsistencias en los datos (desviación entre el cuasigeoide gravimétrico y la superficie de referencia del Datum vertical local).
- Ruido aleatorio, errores o distorsiones sistemáticas en las alturas elipsoidales h o físicas H^N.
- Efectos geodinámicos, como la deformación de la superficie debidos a sismos, especialmente cuando los datos de GNSS/Nivelación se recopilan durante un gran periodo de tiempo, como es el caso de la Red de Nivelación Nacional de Colombia y la Red Pasiva GNSS de Colombia.

Para el caso del modelo de cuasigeoide expandido hasta $Nmax = 2800$ se mantiene una consistencia de $21{,}07cm$. En términos de los valores máximos y mínimos los dos modelos presentados en la tabla **5-1** difieren en $3{,}4cm$ y $4{,}92cm$ respectivamente.

5.1.2. Validación Relativa

Para la validación relativa de los modelos de cuasigeoide gravimétricos con los datos de GNSS/Nivelación se hace uso de la ecuación 4-2. Esta validación es importante porque elimina el problema de W_0^{Local} que tienen los datos de GNSS/Nivelación y que podría influir directamente en la validación absoluta del modelo de cuasigeoide gravimétrico. Para esta validación se muestran las diferencias relativas con modelos GGM como lo es el XGM2019, y el modelo SAM, además de los dos modelos de QgeoidMEDE2025 que representan la mejor consistencia con los datos de GNSS/Nivelación según se muestra en la tabla **5-1**.

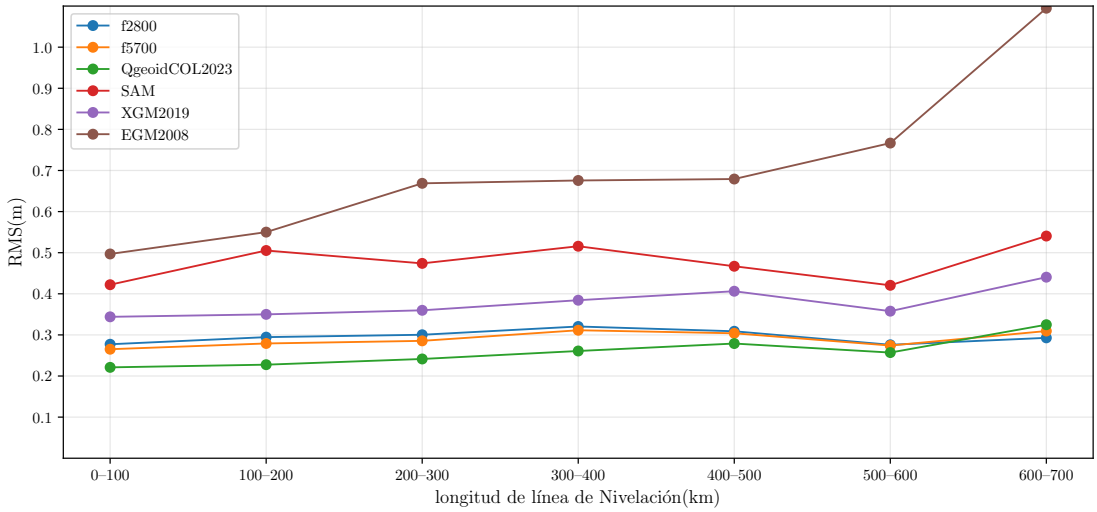


Figura 5-4: RMS a lo largo de la línea de Nivelación.

Según lo representado por la figura **5-4** el RMS de los valores de $\Delta\zeta_{ij}$ para los modelos de QgeoidMEDE2025 a las frecuencias de 2800 y 5700 resulta tener un comportamiento más estable y bajo que el RMS registrado para los modelos XGM2019, SAM, EGM08. Se puede afirmar que el modelo QgeoidMEDE2025 expandido a 5700 en trayectos cortos de la nivelación tiende a tener levemente un mejor RMS que el modelo expandido a 2800, esto se debe a que el kernel de las funciones de base radial esféricas se expande a más alta frecuencia para el caso de 5700. Para una longitud de 700km de la línea de nivelación resulta tener un mejor comportamiento el modelo expandido hasta 2800. Se logra evidenciar el refinamiento del modelo de geopotencial global (XGM2019) usado para el modelamiento, ya que registra un RMS de los valores de $\Delta\zeta_{ij}$ levemente mayor a los registrados por los dos modelados de QgeoidMEDE2025, esto nos indica que nuestros datos gravimétricos tanto terrestres como aéreos aportan señal y refinan el modelo de Qgeoide.

Por otro lado, el RMS reportado por el modelo QgeoideCOL2023 resulta tener un mejor comportamiento con respecto al modelo QgeoidMEDE2025 para longitudes de líneas de nivelación

inferiores a 600km, para líneas de nivelación de 700km de longitud el modelo QgeoidMEDE2025 es mas estable dentro de la zona de cobertura del modelo. Estas diferencias de RMS con respecto al modelo QgeoidCOL2023 puede deberse al no truncamiento inmediato de la zona de calculo al tomar más extensión en área y más datos que influyen en el cálculo del potencial perturbador y posteriormente puede contribuir al cálculo del cuasigeoide, información que en el caso del modelo QgeoidMEDE2025 se está truncando y posteriormente esta información es solamente proveída por el modelo de longitud de onda larga XGM2019.

Aunque los errores formales que se evidencian en el modelado expandido a 2800 son menores, la validación con los datos de GNSS /Nivelación indican una mejor consistencia del modelo de cuasigeoide gravimétrico expandido a 5700. Por lo que el modelo adoptado y presentado como el modelo QgeoidMEDE2025 para los resultados finales ilustrados en la presente tesis responden a un $Nmax = 5700$.

5.2. Resultados Finales

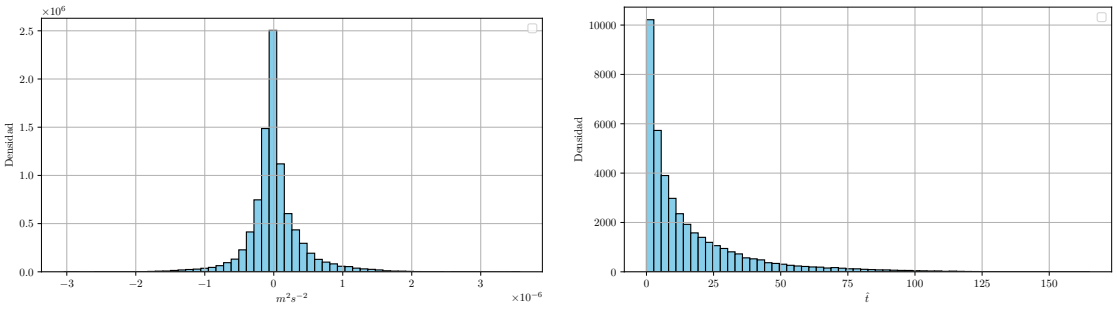
5.2.1. Significancia de parámetros estimados $\hat{d}$

Para realizar la prueba estadístico t, y revisar cuales parámetros son significativamente diferente de cero, se sigue lo desarrollado en Liu et al. (2020b), en donde se tienen las siguientes hipótesis:

$$H_o : d = 0, \quad H_a : d \neq 0. \tag{5-1}$$

Se pone entonces a prueba el estadístico t_c vs t_{tabla}, de la siguiente manera:

$$t_c = \frac{|\hat{d}|}{\hat{\sigma}} \;\; vs \;\; t_{(^{\circ}Libertad,p)}. \tag{5-2}$$



(a) (b)

Figura 5-5: **a** parámetros estimados; **b** estadístico t.

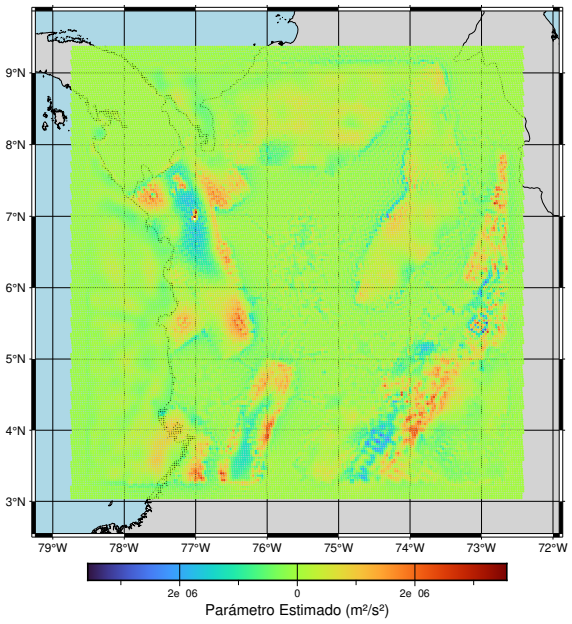


Figura 5-6: $\hat{d}_k$,

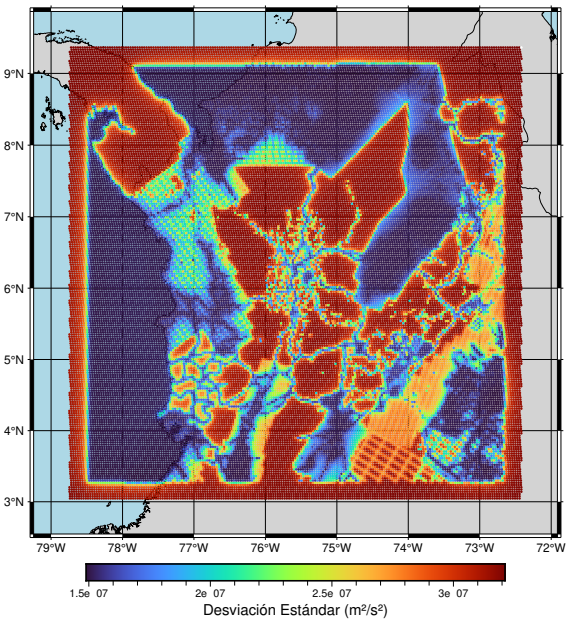


Figura 5-7: $\hat{\sigma_{d_k}}$.

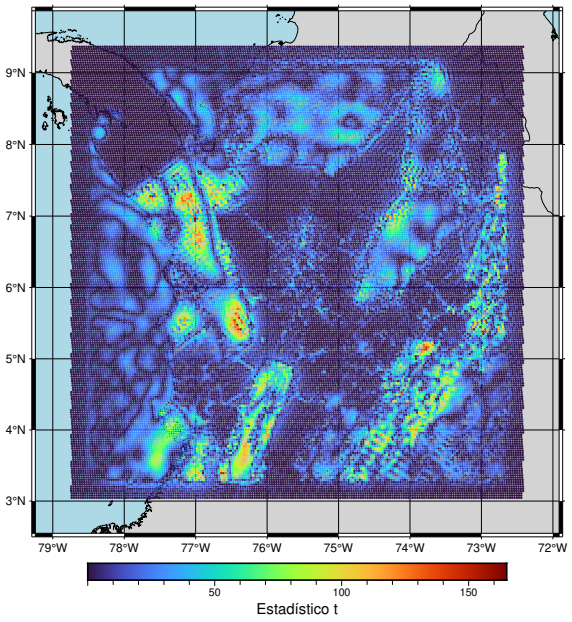


Figura 5-8: t_{stat},

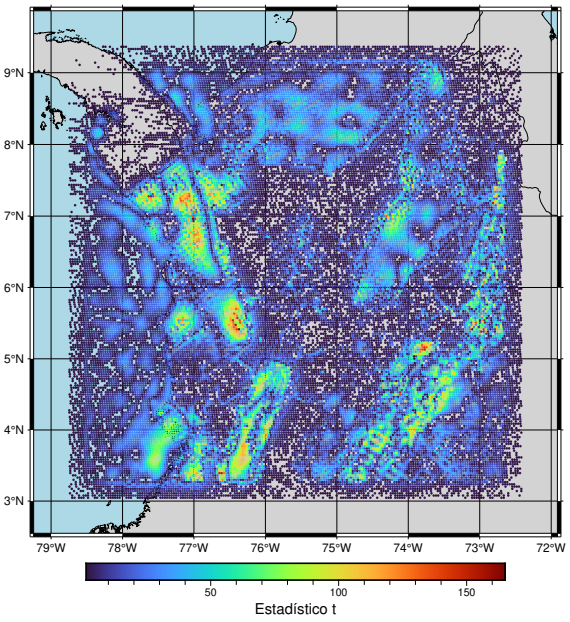
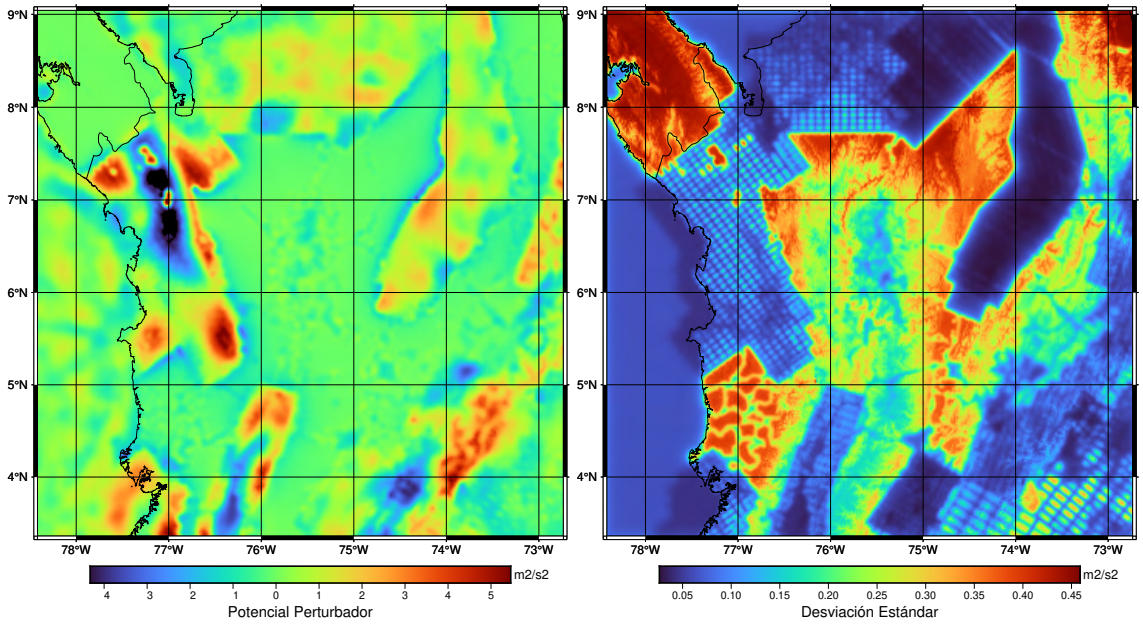


Figura 5-9: $t_{stat} > t_{tab}$.

Para el modelo desarrollado hasta un $N_{max} = 5700$ se tiene un total de 40046 parámetros que se pueden observar en el mapa **5-6**, junto a su desviación estándar en el mapa **5-7**, de los cuales sólo el $13{,}77\,\%$ es decir un total de **5516** parámetros son no significativamente diferente de cero, dejando un total de **34530** parámetros significativos estadísticamente, los cuales responden a un $86{,}23\,\%$ del número total de parámetros. Visualmente el estadístico t del total de número

de parámetros se puede observar en el mapa **5-8**, en el mapa **5-9** se muestra el estadístico t de los parámetros que son significativamente diferente de cero. Se puede concluir que en los lugares donde se tiene una gran densidad de datos gravimétricos el estadístico t es más grande y los parámetros son significativos, esto se debe a que en los lugares donde hay información gravimétrica nuestros datos aportan señal proveniente del campo de gravedad que los modelos de fondo no captura por completo.

5.2.2. Estimación Potencial Perturbador Residual $\hat{T}^{res}$



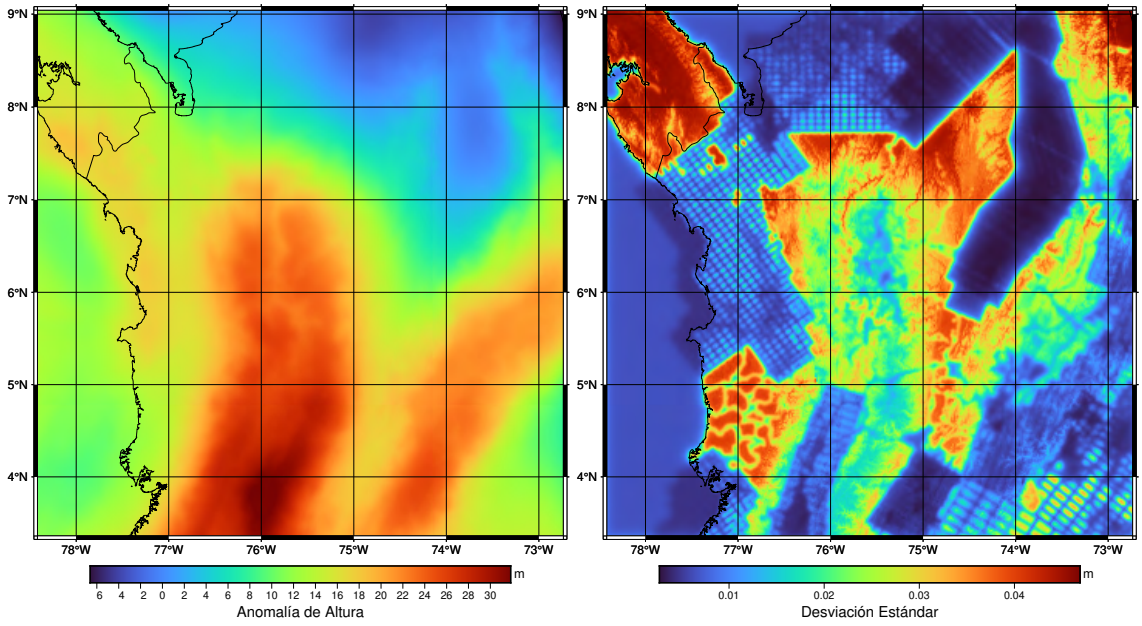
(a) (b)

Figura 5-10: **a** potencial perturbador $\hat{T}$; **b** desviación estándar del potencial perturbador $\hat{\sigma_T}$.

La estimación del potencial de perturbación se realiza según la ecuación 3-30, y su desviación estándar se calcula mediante la expresión matemática 3-31. A partir del mapa **5-10**a y el mapa **5-10**b se puede afirmar que el potencial perturbador residual es captado para las zonas donde se encuentren posicionadas las observaciones de gravedad en el terreno. En los lugares donde se tienen potenciales cercanos a cero se adopta el potencial de perturbación que proveen los modelos de fondo. Ya que el modelo de cuasigeoide se expande a unas frecuencias altas $N_{max} = 5700$, en el mapa de las desviaciones estándar del potencial es posible visualizar las líneas de vuelo de proyectos aerogravimétricos, esto a frecuencias más bajas de expansión del modelo es mas tenue. Dado que la función de base radial esférica cae más rápido espacialmente para una expansión alta, los errores formales cerca de las posiciones de las observaciones gravimétricas serán más pequeños y en las vecindades tenderán a subir mucho más rápido lo que hará que el

gradiente se marque más y que en las zonas con laguna de datos los errores formales crezcan mucho más que un modelo expandido a frecuencias bajas.

5.2.3. Estimación Anomalía de Altura $\hat{\zeta}$ y su desviación estándar $\hat{\sigma_\zeta}$



(a) (b)

Figura 5-11: **a** anomalías de altura $\hat{\zeta}$; **b** desviación estándar $\hat{\sigma_\zeta}$.

En el mapa **5-11**a se observa el modelo de anomalías de altura $\hat{\zeta}$ correspondientes al modelo QgeoidMEDE2025, en el mapa **5-11**b se observa el valor de la desviación estándar de la anomalía de altura estimada. El modelo entonces cuenta con las siguientes especificaciones:

Tipo	Qgeoide Gravimétrico Puro
Método	SRBF + GMM + VCE + LC
Resolución Espacial	1' x 1'
Grado de expansión	5700
Modelos de fondo	**GGM:** XGM2019 d/o 0–719 **Gtopo1:** dv_ell_Earth2014 d/o 720–2159 **Gtopo2:** ERTM2160 d/o 2160–80000
Concepto de Sistema de Mareas Permanente	Zero Tide
Término de Orden Cero	Primer y Segundo término
$(\hat{\sigma_{max}}, \hat{\sigma_{min}})$	$(\pm 0{,}2666cm, \pm 4{,}6903cm)$

Tabla 5-2: Resumen de características del modelo QgeoidMEDE2025.

Comparación con otros modelos

Se realiza las diferencias con otros modelos de cuasigeoide tanto globales como regionales, para observar las diferencias en el grideado del modelo QgeoidMEDE2025.

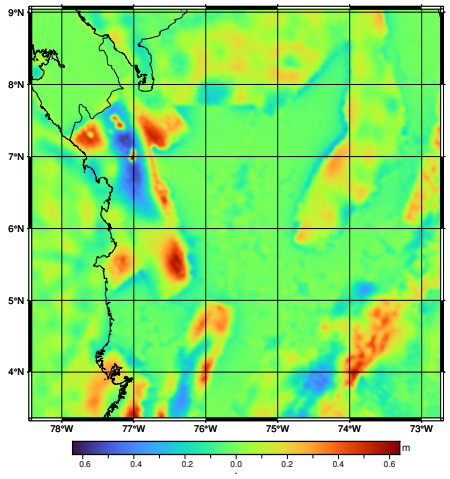


Figura 5-12: XGM2019,

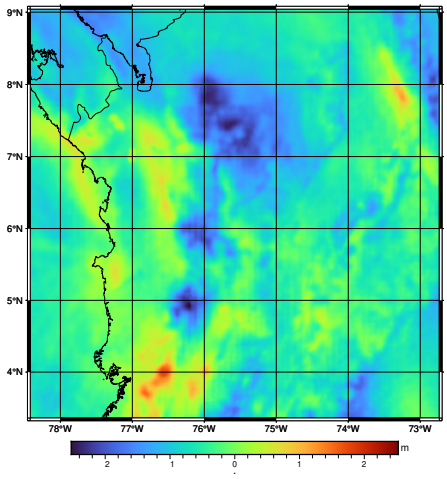


Figura 5-13: EGM08,

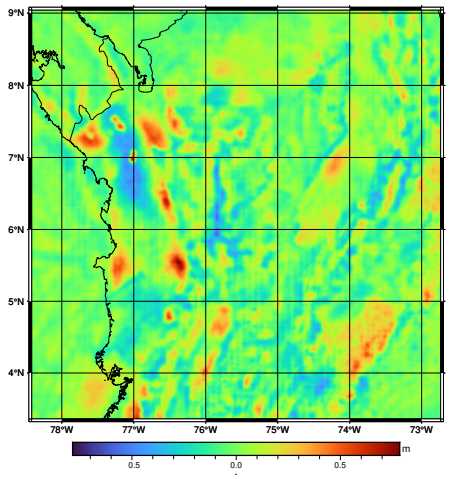


Figura 5-14: QgeoidCOL2023,

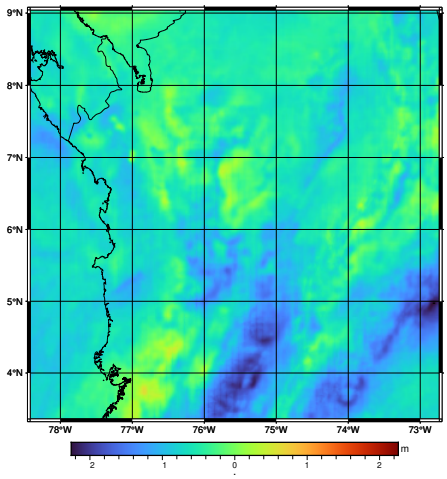


Figura 5-15: QgeoidSAM.

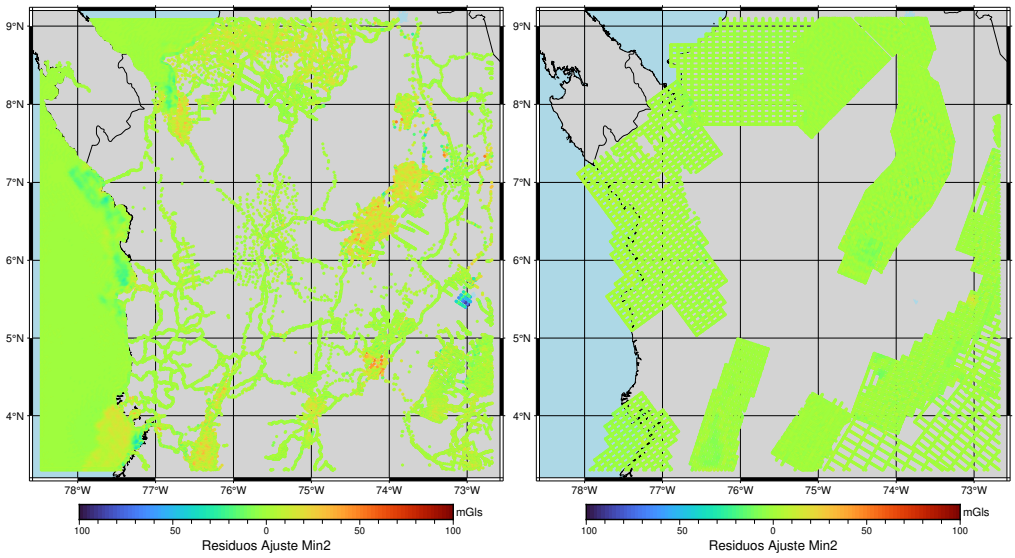
Estadísticos	$\Delta_\zeta^{XGM2019}(m)$	$\Delta_\zeta^{EGM08}(m)$	$\Delta_\zeta^{QgeoidCOL2023}(m)$	$\Delta_\zeta^{SAM}(m)$
Máximo	0.639748	1.766603	0.784881	0.615210
Mínimo	-0.545100	-2.526226	-0.564136	-2.259010
Media	0.008676	-0.579499	-0.001076	-0.673459
Desviación Estándar	0.114836	0.210762	0.131808	0.362456

Tabla 5-3: Estadísticos básicos de $\Delta\zeta_i$.

Según el mapa de diferencias con el modelo XGM2019 **5-12**, se puede afirmar que las mayores diferencias se encuentran exactamente en donde QgeoidMEDE2025 tiene mayor densidad de datos gravimétricos, lo cual se entendería como el ajuste o refinamiento regional realizado al modelo geopotencial de referencia. El modelo que registra tanto una mayor diferencia positiva y negativa es el EGM08, más sin embargo las diferencias con el modelo de cuasigeoide para las Américas del Sur tiene una mayor desviación estándar. Con respecto al modelo QgeoidCOL2023 este resulta ser el segundo modelo con el cual el modelo QgeoidMEDE2025 presenta menos discrepancias. Las mayores diferencias según el mapa **5-14** se registran en el pacífico donde se tienen conjuntos de datos Aerogravimétricos faltantes en el modelado de QgeoidCOL2023.

5.2.4. Residuales del Ajuste por Min^2

Se presentan los residuales del ajuste por mínimos cuadrados del modelo extendido combinado de Gauss-Márkov, para las observaciones terrestres presentados en el mapa **5-16**a y su correspondiente histograma **5-17**a, y los correspondientes residuales de las observaciones aerogravimétricas **5-16**b y el histograma de los residuales **5-17**b.

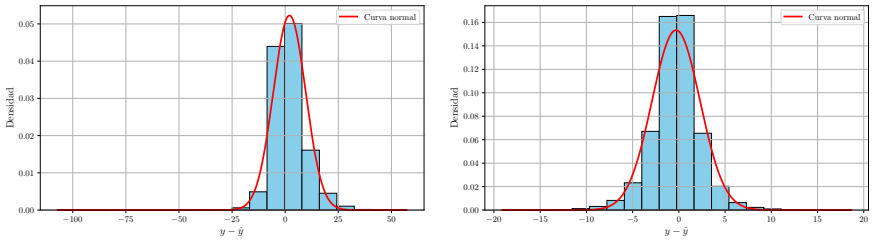


(a) (b)

Figura 5-16: **a** residuales de observaciones terrestres, **b** residuales de observaciones aéreas

Dada la baja información o metadato de las observaciones gravimétricas para el territorio colombiano, se debe diseñar más parámetros de limpieza de la información para evitar el ingreso de errores no deseados o sesgos en el cálculo del cuasigeoide, se logra observar en la parte oriental de los residuales terrestres la presencia de un sesgo. Esto puede causar que la estimación de los componentes de varianza no sea confiable al tener observaciones dentro del conjunto de datos

terrestres con diferente variabilidad. En el caso de los datos aéreos los residuales se comportan normalmente.



(a) (b)

Figura 5-17: **a** histograma residuales terrestres; **b** histograma residuales aéreos.

Los estadísticos básicos de los residuales del ajuste bajo el principio de los mínimos cuadrados se pueden observar en la tabla **5-4**.

Estadísticos	Residuales Terrestres (mgal)	Residuales Aéreos (mgal)
Máximo	57.1488	18.6259
Mínimo	-107.0895	-19.0967
Media	2.0144	-0.3045
Desviación Estándar	7.6308	2.6015

Tabla 5-4: Estadísticos básicos de los residuales del ajuste.

La estimación de los componentes de varianza mediante VCE, resulta en un $\sigma^2_{Terr} = 6{,}22870e^{-9}$ para el conjunto de datos terrestres y un $\sigma^2_{Aere} = 6{,}86059e^{-9}$, lo que resulta en $\sigma_{Terr} = 7{,}892$mGal y en $\sigma_{Aere} = 2{,}619$mGal. Mediante el proceso de L-curva el parámetro de regularización de Tikhonov estimado es $\lambda = 19000$.

5.3. Número Geopotencial C^{IHRF} en Estación MEDE

Se realiza el cálculo del número geopotencial según la superficie de cuasigeoide usada para materializar el Sistema de Referencia Internacional de Alturas en la estación de monitoreo permanente MEDE. Las anomalías de altura ζ del modelo QgeoidCOL2023 y SAM son interpoladas por método bilineal de los modelos grid. La anomalía de altura del modelo QgeoidMEDE2025 es calculada directamente haciendo uso de los coeficientes estimados $\hat{d}_k$ y un vector de diseño B. Es importante aclarar que el modelo SAM no contempla el segundo término del término de orden cero de la anomalía de altura ζ_0, por lo que hay que tenerlo en cuenta al momento de calcular el número geopotencial para IHRF. Debido a que, los tres modelos se encuentran en el concepto

de sistema de mareas permanente Zero Tide sólo es necesario agregar la corrección al potencial por ITRF (ΔW^{ITRF}), ya que las coordenadas de MEDE son de la solución SIRGAS.

	QgeoidMEDE2025	**QgeoidCOL2023**	**SAM**
$\hat{\zeta}$	24.20476m	24.55260m	23.84758m
$W_p(Provisorio)$	$62621899.431\frac{m^2}{s^2}$	$62621902.832\frac{m^2}{s^2}$	$62621903.389\frac{m^2}{s^2}$
W_p^{ZT}	$62621898.861\frac{m^2}{s^2}$	$62621902.262\frac{m^2}{s^2}$	$62621902.819\frac{m^2}{s^2}$
C_p^{ZT}	$14954.539\frac{m^2}{s^2}$	$14951.138\frac{m^2}{s^2}$	$14950.581\frac{m^2}{s^2}$
$\boldsymbol{C_p^{IHRF}}$	$\mathbf{14953.6\frac{m^2}{s^2}}$	$\mathbf{14950.2\frac{m^2}{s^2}}$	$\mathbf{14949.64\frac{m^2}{s^2}}$

Tabla 5-5: Resultados C^{IHRF}.

En términos de potencial las diferencias de las soluciones proporcionadas entre QgeoidMEDE2025 contra los modelos de QgeoidCOL2023 y SAM difieren en $3{,}4\frac{m^2}{s^2}$ y $3{,}96\frac{m^2}{s^2}$ respectivamente. Estas diferencias se deben a los diferentes métodos de cálculo, tratamiento de datos, extensión objetivo y datos gravimétricos disponibles.

5.3.1. Cálculo de diferencia de potencial vértice Auxiliar

Ya que este número geopotencial C_p^{IHRF} está calculado al centro de fase de la antena Cors MEDE. Se debe de determinar una diferencia de potencial entre el centro de fase de la antena Cors y un vértice de la Red de Nivelación Nacional, esto con dos propósitos:

- Brindar a los usuarios un vértice accesible referido al Sistema de Referencia Internacional de Alturas, ya que la estación Cors se encuentra a techo y de acceso restringido.
- Poder compensar por números geopotenciales la Red de Nivelación Nacional a partir de del número geopotencial C_{IHRF}.

Para proporcionar la diferencia de potencial se realiza las correspondientes mediciones de desniveles geométricos mediante nivelación geodésica de precisión y nivelación trigonométrica. La nivelación geométrica se lleva desde el vértice 05001008 hasta un punto auxiliar de nivelación un piso abajo de la estación Cors como se muestra en la figura **5-18**. Finalmente, se aplica una nivelación trigonométrica para darle el desnivel geométrico final al centro de fase de la estación de monitoreo permanente. Las mediciones de gravedad se realizan en MEDE, MEDE-01 y 05001008 como se muestran en la figura **5-19**.

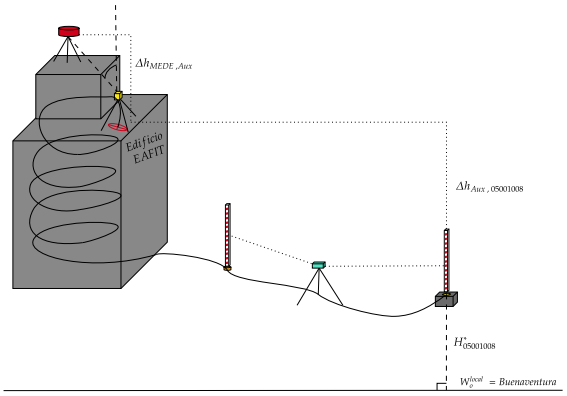


Figura 5-18: $\Delta h_{(MEDE,05001008)}$,

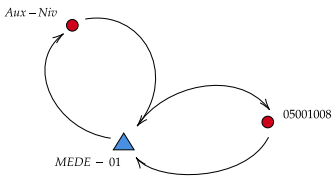


Figura 5-19: Mediciones Gravimetría.

El valor del número geopotencial para MEDE C^{IHRF} es de: **14953.6** $\frac{m^2}{s^2}$, según el modelo Qgeoidmede2025, la diferencia de potencial entre el centro de fase de la antena Cors MEDE y el vértice 05001008, se define de la siguiente manera:

$$C^{IHRF}_{(05001008)} = 14953{,}6 + \int_{H_{MEDE}}^{H_{05001008}} \bar{g}\delta n, \tag{5-3}$$

$$C^{IHRF}_{(05001008)} = 14953{,}6 - 26{,}1133 \cdot \bar{g},$$

$$C^{IHRF}_{(05001008)} = 14953{,}6 - 26{,}1133 \cdot \frac{g_{MEDE} + g_{05001008}}{2},$$

$$C^{IHRF}_{(05001008)} = 14953{,}6 - 26{,}1133 \cdot \frac{9{,}77734688 + 9{,}77740021}{2},$$

$$C^{IHRF}_{(05001008)} = 14953{,}6 - 26{,}1133 \cdot 9{,}777373545,$$

$$\boldsymbol{C^{IHRF}_{(05001008)} = 14698{,}280\frac{m^2}{s^2}}. \tag{5-4}$$

Por lo que la altura normal del vértice 05001008 se calcula de según la siguiente expresión matemática Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006):

$$H^N = \frac{C^{IHRF}}{\gamma}\left[1 + \frac{1}{a}(1 + f + m - 2fsen^2\varphi)\frac{C^{IHRF}}{\gamma} + \left(\frac{C^{IHRF}}{a\gamma}\right)^2\right], \tag{5-5}$$

$$\boldsymbol{H^N_{05001008} = 1503{,}1055m}. \tag{5-6}$$

La propagación de errores al cálculo de $C^{IHRF}_{05001008}$ y $H^N_{05001008}$, se realiza asumiendo independencia de las mediciones y aplicando el principio de propagación de Gauss.

$$\sigma^2_{C^{IHRF}_{05001008}} = \sigma^2_{C^{IHRF}_{MEDE}} + \left(\frac{\partial C^{IHRF}}{\partial \Delta n}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\Delta n} + \left(\frac{\partial C^{IHRF}}{\partial \bar{g}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\bar{g}}, \tag{5-7}$$

$$\sigma^2_{C^{IHRF}_{05001008}} = \sigma^2_{C^{IHRF}_{MEDE}} + (-\bar{g})^2 \cdot \sigma^2_{\Delta n} + (-\Delta n)^2 \cdot \sigma^2_{\bar{g}},$$

$$\sigma^2_{C^{IHRF}_{05001008}} = \sigma^2_{C^{IHRF}_{MEDE}} + (-\bar{g})^2 \cdot \sigma^2_{\Delta n} + (-\Delta n)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\sigma^2_{g_1} + \sigma^2_{g_2}\right)\right)^2,$$

$$\sigma^2_{C^{IHRF}_{05001008}} = 0{,}12^2 + (-9{,}777373545)^2 \cdot 0{,}0005^2 + (-26{,}1133)^2 \cdot 8e^{-16},$$

$$\sigma_{C^{IHRF}_{05001008}} = \pm 0{,}12009 \frac{m^2}{s^2}. \tag{5-8}$$

Para determinar la desviación estándar en la altura normal calculada para el vértice 05001008, la desviación determinada para el valor del potencial $C^{IHRF}_{05001008}$ se divide por el valor de la gravedad normal a la altura del elipsoide GRS80

$$\sigma_{H^N_{05001008}} = \frac{\sigma_{C^{IHRF}_{05001008}}}{\gamma_0}, \tag{5-9}$$

$$\sigma_{H^N_{05001008}} = \frac{0{,}12009}{9{,}78092843165},$$

$$\sigma_{H^N_{05001008}} = 1{,}227cm. \tag{5-10}$$

Estos valores de número geopotencial 14698.280 m^2s^{-2} $\pm 0{,}12009 m^2s^{-2}$ y altura normal 1503.1055 m $\pm$1,227cm que se proporcionan para el vértice 05001008, se refieren al IHRF de manera precisa y confiable, ya que responden al modelado de alta resolución del campo de gravedad regional de la Tierra. Este vértice puede usarse con confianza para trabajos de ingeniería que requieran alturas físicas precisas.

6 Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Conclusiones

El refinamiento del campo de gravedad local es fundamental para materializar el Sistema de Referencia Internacional de Alturas. La calidad del modelado para proporcionar los números geopotenciales más confiables y precisos con respecto a los GGM depende del método de solución, extensión del área objetivo y tanto de la disponibilidad de datos gravimétricos como su tratamiento, procesamiento o limpieza. Este ultimo aspecto es importante para lograr definir una superficie cuasigeoidal lo más insesgada posible. Para ello, en este proyecto se realiza un exhaustivo procedimiento de limpieza para eliminar errores sistemáticos, errores groseros y valores atípicos del conjunto de datos gravimétricos. Dado que, los datos aerogravimétricos son levantados en distintos tiempos, por diferentes empresas y con un posprocesamiento diferente se realiza la corrección de sesgos propuesta en Liu et al. (2024) para los 12 proyectos dentro del área de observaciones Ω_o. Esto permite refinar los modelos de fondo como se puede ver en la validación con el conjunto de datos GNSS/Nivelación tanto en su validación absoluta como relativa, registrando una mejora en la consistencia del modelo con respecto al XGM2019. Ésto sólo sucede en los lugares donde se cuenta con datos gravimétricos. Para la componente de alta frecuencia del campo de gravedad o lo que sería el efecto gravitacional de masas topográficas residuales se realiza una combinación armónica esférica de los modelos dv_ell_Earth2014 y ERTM2160 esto con el propósito de modelar el efecto topográfico de una manera confiable y precisa, esto es importante porque el área objetivo Ω_i contempla una topografía abrupta dada la presencia de las cordilleras de los Andes.

El truncado en el espacio optimiza el tiempo de cálculo al tener menos observaciones y menos parámetros (Reuter grid) para estimar, por lo que hace viable el cálculo continuo del modelo a un costo computacional bajo. Esto permite además disminuir la distancia del grideado final del modelo a una resolución espacial de $1' \times 1'$ además de aumentar la expansión del kernel de las funciones de base radial esféricas a una frecuencia más alta. Sin embargo, el truncamiento en el espacio puede influir en la estimación final de la anomalía de altura $\hat{\zeta}$ al no contemplar la información gravimétrica terrestre y aérea más allá de 3° disponible. Ésta podría ser una de las razones por las cuales el modelo QgeoidCOL2023 tiene una ligera mejor consistencia con los datos de GNSS/Nivelación que el modelo QgeoidMEDE2025, más sin embargo, la gran parte del conjunto de datos de GNSS/Nivelación no se encuentra en los lugares donde están posicionados los datos de gravimetría terrestre y aérea, por lo que esto podría afectar los estadísticos del los

Δ_{ζ_i}, con respecto a la validación relativa el modelo QgeoidMEDE2025 registra una consistencia mejor que el modelo QgeoidCOL2023 para líneas de nivelación con longitudes superiores de 600km dentro del área de cubrimiento. Dadas las razones por las cuales difieren los valores de ζ^{grav} y de ζ^{geom}, las diferencias podrían atribuirse a errores en la captura de la altura elipsoidal y de la altura normal, debido al registro de esta información durante un periodo largo de tiempo. El ajuste parámetrico de los valores de Δ_{ζ_i} podría mejorar la consistencia del modelo QgeoidMEDE2025 con respecto a los datos de GNSS/Nivelación. No obstante, al ser el principal objetivo del modelo QgeoidMEDE2025 el cálculo de números geopotenciales para IHRF, realizar este ajuste podría dañar o afectar el valor de $C^{IHRF}_{(MEDE)}$. Por lo que esta tesis proporciona el modelo gravimétrico puro.

Ésta superficie de cuasigeoide proporcionada puede usarse para el cálculo de números geopotenciales referidos a IHRF ya que responde al modelado de alta resolución del campo de gravedad local. Solo hay que tener en cuenta las especificaciones del modelo para calcular correctamente los valores de C^{IHRF}, como lo es el concepto de sistema de mareas permanente y el término de orden cero ζ_0.

6.2. Recomendaciones

El modelo de cuasigeoide gravimétrico debe de actualizarce o recalcularse si en primer lugar, los modelos de geopotencial global y geopotencial topográfico se actualizan, en segundo lugar, en la medida que se tengan más datos gravimétricos debe de estarse actualizando constantemente el modelo de cuasigeoide y en tercer lugar, si los datos de altimetría satelital de anomalías marinas del modelo DTU son actualizados y no están contemplados en el cálculo del modelo geopotencial global, el modelo QgeoidMEDE2025 debe de recalcularse y actualizarce hasta tener una diferencia significativa.

Para subsanar el truncamiento en el espacio de Ω_i, Ω_o y Ω_c, podría realizarce el modelo QgeoideMEDE2025 abarcando una extensión mayor en la cuál se tenga la certeza que la determinación ζ_{MEDE} no se verá afectada por masas más lejanas no contempladas en el área actual de QgeoidMEDE2025 y de las cuales no son del todo bien representadas por el GGM, se podría además robustecer aún más el procesamiento de datos terrestres para disminuir los errores formales o las varianzas-covarianzas del modelo extendido combinado de Gauss-Márkov. Esto con el fin de lograr una mejor estimación de parámetros y reducción de los residuales del modelo. Podría además generarse la segregación de los proyectos gravimétricos terrestres esto con el fin de configurar pesos relativos ω_l y una corrección de sesgos para los datos terrestres.

Se podría proporcionar una superficie de corrección al modelo gravimétrico para que las diferencias $(\Delta\zeta_i, \Delta\zeta_{ij})$ disminuyan, más sin embargo, para el cálculo de números geopotenciales

(C^{IHRF}) debe de usarse la superficie gravimétrica pura. Con esto se podrían proporcionar dos superficies una para el usuario del sistema GNSS y otra superficie para temas científicos.

Bibliografía

Andersen, O. B. and Knudsen, P. (2020). The dtu17 global marine gravity field: First validation results. In *Fiducial Reference Measurements for Altimetry: Proceedings of the International Review Workshop on Satellite Altimetry Cal/Val Activities and Applications*, pages 83–87. Springer.

Bentel, K. and Schmidt, M. (2015). Combining different types of gravity observations in regional gravity modeling in spherical radial basis functions. In *International Association of Geodesy Symposia*. Springer International Publishing Switzerland, Munich, Germany. Chapter in a book.

Bentel, K., Schmidt, M., and Gerlach, C. (2013). Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere. *Int J Geomath*, 4:67–96.

Bucha, B., Janák, J., Papčo, J., and Bezděk, A. (2016). High-resolution regional gravity field modelling in a mountainous area from terrestrial gravity data. *Geophysical Journal International*, 207(2):949–966. Accepted: 2016 August 12; Received: 2016 July 1; In original form: 2016 May 2; Advance Access publication: 2016 August 19.

Childers, V. A., Bell, R. E., and Brozena, J. M. (1998). Airborne gravimetry: an investigation for filtering. *Geophysics*, 64:61–69. Manuscript received by the Editor October 30, 1995; revised manuscript received May 26, 1998.

Cid Palacios, R., Ferrer Martínez, S., and Nacional, I. G. (1999). *Geodesia: geométrica, física y por satélites*. Instituto Geográfico Nacional.

de Matos, A. C. O. C., Blitzkow, D., Guimarães, G. d. N., and Silva, V. C. (2021). The south american gravimetric quasi-geoid: Qgeoid2021. v. 1.0. GFZ Data Services.

Denker, H. (2013). Regional gravity field modeling: Theory and practical results. In Xu, G., editor, *Sciences of Geodesy - II*. Springer, Berlin, Heidelberg.

Eicker, A. (2008). *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. Inaugural dissertation zur erlangung des akademischen grades doktor ingenieur (dr. ing.), Institut für Geodäsie und Geoinformation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bonn, Germany.

Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W. (2004). A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems. *Geophysical Journal International*, 156(3):411–425.

Featherstone, W. E. (2001). Absolute and relative testing of gravimetric geoid models using global positioning system and orthometric height data. *Computers & Geosciences*, 27:807–814. Received 9 February 2000; received in revised form 11 August 2000; accepted 12 August 2000.

Fecher, T., Pail, R., Gruber, T., and GOCO Consortium (2017). Goco05c: A new combined gravity field model based on full normal equations and regionally varying weighting. *Surveys in Geophysics*, 38:571–590. Received 27 May 2016; accepted 5 December 2016; published online 7 January 2017.

Forsberg, R. (1993). Modelling the fine-structure of the geoid: Methods, data requirements and some results. *Surveys in Geophysics*, 14(4):403–418.

Freeden, W., Gervens, T., and Schreiner, M. (1998). *Constructive Approximation on the Sphere with Applications to Geomathematics*. Oxford University Press, Oxford.

Guimarães, G. d. N., Tocho, C., Piña, W. H. S., Cancoro de Matos, A. C. O., Gómez, A., Antokoletz, E. D., and Blitzkow, D. (2024). GuÍa06 directrices para el cÁlculo de los valores de potencial de gravedad en las estaciones ihrf de la regiÓn sirgas. GT III SIRGAS.

Guo, J.-Y. (2023). *Physical Geodesy*. Springer Textbooks in Earth Sciences, Geography and Environment. Springer Cham, 1 edition.

Hansen, P. C. (2000). The l□curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In Johnston, P., editor, *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, volume 4 of *Advances in Computational Bioengineering*, pages 119–142. WIT Press, Southampton.

Hansen, P. C. and O'Leary, D. P. (1993). The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(6):1487–1503.

Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco, USA.

Hirt, C., Kuhn, M., Claessens, S. J., Pail, R., Seitz, K., and Gruber, T. (2014). Study of Earth's short-scale gravity field using the high-resolution SRTM topography model. *Computers & Geosciences*, 73:71–80.

Hirt, C. and Rexer, M. (2015). Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models – available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 39:103–112.

Hirt, C., Yang, M., Kuhn, M., Bucha, B., Kurzmann, A., and Pail, R. (2019). SRTM2gravity: an ultrahigh resolution global model of gravimetric terrain corrections. *Geophysical Research Letters*, 46.

Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2006). *Physical Geodesy*. Springer.

IAG (2015). Definition and realization of an international height reference system (ihrs) and establishment of a global absolute gravity reference system.

Instituto Geográfico Agustín Codazzi (2004). Parámetros oficiales de transformación para migrar a MAGNA–SIRGAS la información existente en Datum Bogotá. Technical report, Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá, Colombia.

Klees, R., Slobbe, D. C., and Farahani, H. H. (2018). A methodology for least-squares local quasi-geoid modelling using a noisy satellite-only gravity field model. *Journal of Geodesy*, 92:431–442.

Koch, K.-R. and Kusche, J. (2002). Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy*, 76(5):259–268.

Leal, A. and Pérez, S. (2017). Modelo geoidal para la zona norte de colombia: Propuesta metodológica. Technical report, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C.

Lieb, V. (2017). Enhanced regional gravity field modeling from the combination of real data via mrr. Veröffentlichungen der DGK, Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Munich.

Lieb, V., Schmidt, M., Dettmering, D., and Börger, K. (2016). Combination of various observation techniques for regional modeling of the gravity field. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121:3825–3845.

Liu, Q. (2023). Regional gravity field refinement for geoid height modeling based on the combination of data from various observation techniques. Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Liu, Q., Schmidt, M., Pail, R., and Willberg, M. (2020a). Determination of the regularization parameter to combine heterogeneous observations in regional gravity field modeling. *Remote Sensing*, 12(10):1617.

Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., et al. (2020b). Regional gravity field refinement for (quasi-) geoid determination based on spherical radial basis functions in colorado. *J Geod*, 94:99.

Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., et al. (2024). High-resolution regional gravity field modeling in data challenging regions for the realization of geopotential-based height systems. *Earth Planets Space*, 76(35).

Mäkinen, J. (2021). The permanent tide and the international height reference frame ihrf. *Journal of Geodesy*, 95(106).

Morelli, C. et al. (1972). The international gravity standardization net 1971 (i.g.s.n.71). Technical report, Air Force Cambridge Research Laboratories, European Office of Aerospace Research and Development, Osservatorio Geofisico Sperimentale. Distributed by NTIS, National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce.

Moritz, H. (1988). Geodetic reference system 1980: Corrigendum. *Bulletin Géodésique*, 62(3):187–192. Due to errors in the formulas published in the 1992 Geodesists Handbook, readers should refer to this corrigendum.

Naeimi, M., Flury, J., and Brieden, P. (2015). On the regularization of regional gravity field solutions in spherical radial basis functions. *Geophysical Journal International*, 202(2):1041–1053.

Rapp, R. H. (1984). *Geodesia Geométrica Volumen I (Principios Básicos)*. Columbus, Ohio 43210.

Reuter, R. (1982). *Über Integralformeln der Einheitssphäre und harmonische Splinefunktionen*. Phd thesis, RWTH Aachen University.

Rexer, M. (2017). *Spectral Solutions to the Topographic Potential in the context of High-Resolution Global Gravity Field Modelling*. PhD thesis, Technische Universitaet Muenchen.

Rexer, M., Hirt, C., Claessens, S., and Tenzer, R. (2016). Layer-based modelling of the Earth's gravitational potential up to 10-km scale in spherical harmonics in spherical and ellipsoidal approximation. *Surveys in Geophysics*, 37:1035–1074. Received 29 March 2016; accepted 10 August 2016; published online 29 August 2016.

Rexer, M., Hirt, C., and Pail, R. (2017). High-resolution global forward modelling – a degree-5480 global ellipsoidal topographic potential model. In *European Geosciences Union General Assembly 2017*, Vienna, Austria. Abstract EGU2017-7725; presented on 25/04/2017.

Sánchez, L., Huang, J., Ågren, J., Barzaghi, R., and Vergos, G. S. (2021). Recovering potential values from regional (quasi-)geoid models. Technical report, DGFI-TUM, Canadian Geodetic Survey, University of Gävle / Lantmäteriet / Royal Institute of Technology, Politecnico di Milano, Aristotle University of Thessaloniki. Summary based on: Sánchez L., Ågren J., Huang J., Wang Y. M., Mäkinen J., Pail R., Barzaghi R., Vergos G. S., Ahlgren K., Liu Q. (2021) *Strategy for the realisation of the International Height Reference System (IHRS)*, Journal of Geodesy, 95(3), `https://doi.org/10.1007/s00190-021-01481-0`.

Slobbe, C., Klees, R., Farahani, H. H., Huisman, L., Alberts, B., Voet, P., and Doncker, F. D. (2019). The impact of noise in a grace/goce global gravity model on a local quasi-geoid. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124(3):3219–3237.

Snow, K. (2024). Adjustment computations: Parts i and ii of notes. Class notes. Based on former Geodetic Science Courses GS 650, GS 651, & GS 762 taught at The Ohio State University by Prof. Burkhard Schaffrin.

Späth, F. G. E., Antokoletz, E. D., and Tocho, C. N. (2020). *Tópicos de Gravimetría: Primera Parte*. Editorial de la UNLP, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata.

Sánchez, L. and Sideris, M. G. (2015). Vertical datum unification for the international height reference system (ihrs). *Geophysical Journal International*, 209(2):570–586.

Sánchez, L., Ågren, J., Huang, J., et al. (2021). Strategy for the realization of the international height reference system (ihrs). *J Geod*, 95:33.

Sánchez, L., Čunderlík, R., Dayoub, N., et al. (2016). A conventional value for the geoid reference potential wo. *J Geod*, 90:815–835.

Sánchez, L. R. (2003). *Determinación de la superficie vertical de referencia para Colombia*. PhD thesis, Technische Universität Dresden, Dresden.

Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Scripta series in mathematics. Winston, Washington; distributed solely by Halsted Press, New York. Translation of "Metody resheniia nekorrektnykh zadach". Includes bibliography (pp. 236–255) and index.

Torge, W. (2001). *Geodesy*. De Gruyter, Berlin, New York, 3rd edition.

Varga, M., Pitoňák, M., Novák, P., and Bašić, T. (2021). Contribution of grav-d airborne gravity to improvement of regional gravimetric geoid modelling in colorado, usa. *Journal of Geodesy*, 95:53.

Wang, Y. M., Sánchez, L., Ågren, J., et al. (2021). Colorado geoid computation experiment: overview and summary. *J Geod*, 95:127.

Willberg, M., Zingerle, P., and Pail, R. (2020). Integration of airborne gravimetry data filtering into residual least-squares collocation: example from the 1 cm geoid experiment. *Journal of Geodesy*, 94(75).

Wittwer, T. (2015). *Regional gravity field modelling with radial basis functions*, volume 72 of *Publications on Geodesy*. NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Netherlands Geodetic Commission, Delft, the Netherlands.

Xu, J., Schreier, F., Doicu, A., and Trautmann, T. (2016). Assessment of tikhonov-type regularization methods for solving atmospheric inverse problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 184:274–286.

Zingerle, P. (2022). *Advanced methodologies for large-scale gravity field modelling*, volume Heft Nr. 888 of *DGK: C (Dissertationen)*. München.

Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., and Oikonomidou, X. (2020a). The combined global gravity field model xgm2019e. *Journal of Geodesy*, 94:66.

Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., and Oikonomidou, X. (2020b). The combined global gravity field model xgm2019e. *Journal of Geodesy*, 94(66). Published online: 20 July 2020.

Zingerle, P., Pail, R., Scheinert, M., and Schaller, T. (2019). Evaluation of terrestrial and airborne gravity data over antarctica—a generic approach. *Journal of Geodetic Science*. Received 2019-01-25; accepted 2019-04-30.