UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN EN LA COMPRENSIÓN DE UNA ACTIVIDAD DEPORTIVA; UNA PERSPECTIVA DESDE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Autor

Anderson Francisco Morales Cárdenas

Asesor de Orientación

Alberto Forero Poveda

Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia

Julio 2025

Dedicatoria

Dedico este trabajo a las futuras generaciones de docentes que, con una visión transformadora, conciben las matemáticas no como un fin en sí mismas, sino como un poderoso medio para comprender y moldear el mundo

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento a mi alma máter y a mi carrera, por sembrar en mí la certeza de que en la educación reside la clave para abordar gran parte de los desafíos de nuestro país. A mis profesores, por su dedicación y el conocimiento compartido; y de manera especial, a mi tutor de trabajo de grado, por el acompañamiento esencial en cada etapa de esta construcción. Y cómo no, a mis padres, mi madrina, mi hermana y mi novia, quienes con su inquebrantable apoyo hicieron posible este proceso.

Contenido

1. Resumen 6

2. Introducción 7

3. Identificación del problema 10

4. Objetivos de la monografía 13

4.1 Objetivo General 13

4.2 Objetivos específicos 13

5. Justificación 14

6. Marco teórico 16

6.1 Conociendo el lanzamiento de martillo 16

6.2 Velocidad Angular 23

6.3 Modelación del lanzamiento de martillo 25

6.4 Parámetros cinemáticos de rendimiento en la fase de vuelo del artefacto 28

6.5 Actividad matemática (A.M) establecidas por Giaquinto 29

6.6 Perspectiva de matematización 30

6.7 El Conocimiento del Profesor de Matemáticas y su Complejización 33

6.8 La Modelación Matemática como Eje Transformador en la Formación Inicial de Docentes de Matemáticas 34

6.9 La Función Spline en GeoGebra 38

6.10 Aspectos para analizar en el modelo 39

7. Método y técnicas de recolección, sistematización y análisis de la información para la investigación sobre modelización matemática en el lanzamiento de martillo 43

7.1 Análisis en tracker 44

Recolección de datos para estimar la velocidad con la que se desplaza el martillo 45

7.2 Metodología para el Análisis y Discusión de la Información 49

7.3 Comparación y Validación de Velocidades 50

7.4 Análisis Estadístico y Generalización 51

8. Análisis y Discusión 52

8.1 Resultados entrevista 52

8.2 Análisis experimental (tracker) 57

Datos 57

8.3 Datos experimentales y teóricos de la velocidad inicial de los lanzamientos 64

8.4Simulación en GeoGebra (función spline) 68

8.5 Actividades matemáticas en el proceso de matematización. una perspectiva desde la formación de profesores de matemáticas 75

Proceso de matematización en vinculación con las categorías de la actividad matemática 79

8.6 La Matematización del Lanzamiento de Martillo como Herramienta de Decisión y Mejora para el Conocimiento del Profesor de Matemáticas 88

9. Conclusiones 93

10. Bibliografía 97

Figuras

Figura 1 Pasos para la realización del lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022) 16

Figura 2. Fase de volteo en el lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022). 18

Figura 4, Fase de apoyo unipodal en el lanzamiento de martillo, fuente: (Castaldi et al., 2022). 20

Figura 5, Apoyo bipodal en el lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022). 21

Figura 6. Grafica de velocidad-tiempo lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022). 22

Figura 7, Fase de suelta o fase final del lanzamiento de martillo, fuente: (Castaldi et al., 2022). 23

Figura 8. Representación de la fuerza del lanzador sobre el cable y de la bola sobre el cable (Gutiérrez y Soto, 1993) 25

Figura 9. Representación del ángulo azimutal del martillo durante el movimiento de rotación cuando se realizan los giros. (Gutiérrez y Soto, 2001) 26

Figura 10. Fuerzas que se producen durante los giros cuando el vector de la fuerza del cable está tirando delante de la dirección del radio de rotación (a) y detrás (b) (Brice et al., 2011). 27

Figura 11. Valores cinemáticos de suelta en el lanzamiento de martillo. (Frutos, 2014) 29

Figura 12 modelación de un tiro parabólico en GeoGebra. Fuente: Elaboración propia. 41

Figura 13. Medición del ángulo con la herramienta transportador de Tracker. Fuente: Autor. ... 45

Figura 14. Medición del ángulo con la herramienta transportador de Tracker. Fuente: Elaboración propia. 47

Figura 15. Vista lateral lanzamiento de martillo. Fuente: Autor. 47

Figura 16. Vista frontal lanzamiento de martillo. Fuente: Autor. 48

Figura 17. Representación con la función spline en Geogebra de la trayectoria del martillo. Fuente: Elaboración propia. 69

Figura 18. Representación de la derivada de la función paramétrica de la representación del lanzamiento en Geogebra. Fuente: Elaboración propia. 71

Figura 19. Punto especifico de la derivada de la función paramétrica. Fuente: Elaboración propia. 72

Figura 20 . Mapa conceptual de proceso de matematización en vinculación con las AM de Quiaquinto (2025) 79

Tablas

Tabla 1. Datos recolectados en la práctica 58

Tabla 2 Ejemplo tabulación componente en x, y de la velocidad 62

Tabla 3. Comparación entre velocidad teórica y velocidad experimental. 64

Tabla 4. Medidas de tendencia central a partir de las velocidades experimentales y teóricas. Fuente: Autor 66

Tabla 5. Comparación velocidad en tracker y en simulación en geogebra 73

Gráficos

Gráfico 1, Grafica tiempo-distancia (respecto al eje x) de la vista lateral, Fuente: Tracker 60

Gráfico 2 , Grafica tiempo-distancia (respecto al eje y) de la vista lateral, Fuente: Tracker 60

Gráfico 3 Componente en x de la velocidad en tracker 61

Gráfico 4 Componentes en y de la velocidad en tracker 62

Ecuaciones

Ecuación 1.Ecuación de distancia de un lanzamiento de martillo. (Castaldi et al. , 2022) 39

Ecuación 2. Descripción analítica de un tiro parabólico 41

Ecuación 3. Modificación de descripción analítica de un tiro parabólico 42

Ecuación 4 Despeje de la velocidad en ecuación 3 42

Ecuación 5. Evaluación de componentes para encontrar la magnitud de la velocidad del lanzamiento. 63

1. Resumen

Esta monografía aborda el uso de la modelación matemática en la formación inicial de docentes, con el lanzamiento de martillo como caso central. Basado en la perspectiva de matematización horizontal y vertical (Freudenthal, Treffers), se desarrolló un proceso metodológico que combinó análisis de video (Tracker) y simulación (GeoGebra con cálculo) para caracterizar las actividades matemáticas implicadas. Se concluye que este enfoque complejiza el conocimiento del profesor, capacitándolo para aplicar las matemáticas en la toma de decisiones y la mejora de situaciones reales, promoviendo una enseñanza funcional y significativa.

Palabras clave: Modelación matemática, formación docente, matematización, lanzamiento de martillo, actividades matemáticas.

2. Introducción

La educación matemática contemporánea se enfrenta al desafío imperante de formar ciudadanos capaces de comprender y transformar su realidad, exigiendo un enfoque que trascienda la mera memorización de algoritmos y la aplicación mecánica de fórmulas. En este contexto, la modelación matemática emerge como una estrategia didáctica y un campo de estudio crucial, al ofrecer un puente dinámico entre los conceptos matemáticos abstractos y los fenómenos del mundo real. Para que esta perspectiva se implemente efectivamente en las aulas, es fundamental que la formación inicial de docentes de matemáticas prepare a los futuros educadores para diseñar, implementar y evaluar procesos de modelación de manera significativa y profunda (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021).

La relevancia de dotar al profesorado en formación de las herramientas necesarias para abordar la modelación radica en su capacidad para promover el pensamiento crítico, la resolución de problemas auténticos y la conexión interdisciplinar de las matemáticas (Barquero Ocampo & Chaves Montero, 2023). A menudo, la formación docente tradicional se centra en un conocimiento matemático descontextualizado, lo que puede limitar la habilidad del futuro profesor para mostrar la aplicabilidad y la utilidad de la disciplina en diversos escenarios. Es aquí donde la modelación matemática se posiciona como un eje transformador, permitiendo a los docentes en formación experimentar de primera mano cómo las matemáticas pueden ser una poderosa herramienta para interpretar, analizar y predecir situaciones complejas del entorno.

El presente trabajo de grado se enmarca en esta necesidad educativa, abordando la modelación matemática a través del estudio de un fenómeno real y contextualizado. Se ha

seleccionado el lanzamiento de martillo como actividad deportiva central debido a su particular riqueza para la matematización. A diferencia de otras disciplinas, el lanzamiento de martillo involucra una combinación compleja de movimiento parabólico con una fase circular previa, lo que exige la consideración de múltiples variables físicas y biomecánicas (velocidad angular, fuerza centrípeta, ángulo y altura de liberación, entre otras). Esta complejidad lo convierte en un terreno excepcional para el desarrollo de un proceso de matematización que va más allá de la simple aplicación de ecuaciones de cinemática básica, invitando a la exploración profunda, la formulación de hipótesis y la validación de modelos dinámicos, lo cual es ideal para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas de cara a su futura práctica docente.

Para comprender a fondo este proceso, la investigación ha adoptado un enfoque metodológico cualitativo, permitiendo una inmersión profunda en la comprensión de los fenómenos involucrados. La recolección de información se realizó mediante entrevistas semiestructuradas a un experto en lanzamientos y la grabación de videos propios de la ejecución del lanzamiento de martillo. Para la sistematización y análisis de la información, se emplearon herramientas tecnológicas avanzadas como el software Tracker para la extracción precisa de datos cinemáticos (altura, ángulo, velocidad experimental) y GeoGebra para la simulación tridimensional de la trayectoria mediante funciones spline paramétricas. La aplicación del cálculo diferencial para obtener velocidades de simulación y la comparación con datos experimentales, junto con un análisis estadístico, fueron cruciales para la validación y discusión de los modelos generados.

Este estudio busca contribuir significativamente a la formación inicial de docentes de matemáticas al proveer un ejemplo concreto y replicable de cómo un fenómeno real puede ser

desglosado matemáticamente a través de diversas Actividades Matemáticas: el Descubrimiento, la Explicación (subjetiva y objetiva), la Formulación, la Aplicación y la Representación. Al vivenciar este proceso, el futuro profesor no solo afianza su conocimiento disciplinar, sino que desarrolla habilidades esenciales para su práctica pedagógica, como la capacidad de diseñar tareas que conecten la teoría matemática con la realidad, de fomentar el pensamiento crítico y de preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos interdisciplinares.

3. Identificación del problema

Las matemáticas, concebidas como una actividad humana inherente según señalan Bello y Forero (2016), encuentran su máxima expresión en la capacidad de estructurar y facilitar la comprensión del mundo que nos rodea. Como bien expone Alsina (2009), siguiendo los principios de actividad de la Educación Matemática Realista (EMR), la finalidad última de las matemáticas es precisamente "matematizar (organizar) el mundo", incluyendo la propia disciplina. Bajo esta premisa, la incorporación de contextos reales en la enseñanza se vuelve imperativa para hacer las matemáticas más accesibles y significativas. Alsina (2009) sostiene que el aprendizaje se optimiza cuando los estudiantes resuelven problemas en contextos que les resultan familiares o tienen sentido, distinguiendo en este proceso cuatro niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal. No obstante, una problemática recurrente en la práctica educativa actual radica en el salto directo a los procedimientos estándares, obviando los primeros tres niveles de comprensión. Esta omisión puede conducir a que el alumno desconozca la funcionalidad y el propósito del objeto matemático que está trabajando, percibiendo la disciplina como algo abstracto y desvinculado de su realidad.

La creación de situaciones didácticas genuinamente vinculadas al mundo real plantea un desafío particular para los profesores de matemáticas. Borromeo-Ferri (2006, citado por Huincahue, 2015) subraya la importancia de la Modelación Matemática como estrategia esencial para establecer conexiones significativas entre las matemáticas y "el resto del mundo". En esta línea, Henry Pollakenfatiza la necesidad de que los docentes cuenten con una amplia gama de situaciones que les permitan implementar procesos de modelación. Por ello, surge la posibilidad de enriquecer la experiencia de los profesores en formación en dichos procesos, para que

adquieran las herramientas necesarias que les permitan guiar a sus futuros estudiantes a través de los niveles de comprensión (situacional, referencial y general) de manera natural, hasta alcanzar la comprensión formal o abstracta en matemáticas (Alsina, 2009). En este marco, la necesidad de mejorar los procesos deportivos a través de una comprensión profunda y matemática de sus fenómenos se vuelve evidente, y es precisamente para abordar esta necesidad que se ha seleccionado el lanzamiento de martillo como objeto de estudio en esta monografía.

La elección del lanzamiento de martillo no es fortuita; a diferencia de otras disciplinas más sencillas, este deporte ofrece una riqueza inherente para la matematización que lo convierte en un laboratorio idóneo para la optimización de procesos. Su complejidad radica en la combinación de movimientos circulares previos a la liberación y trayectorias parabólicas post-lanzamiento, lo que exige el modelado de múltiples variables dinámicas (velocidad angular, fuerza centrípeta, ángulo de liberación, altura, resistencia del aire, entre otras). Esta particularidad permite una aplicación exhaustiva de la matematización horizontal y vertical, y la manifestación de todas las actividades matemáticas (Descubrimiento, Explicación, Formulación, Aplicación, Representación). Al analizar y modelar estas variables con herramientas matemáticas avanzadas (cálculo, análisis vectorial, estadística), se puede identificar con precisión los factores que influyen en el rendimiento deportivo, diagnosticar ineficiencias y proponer estrategias de mejora basadas en evidencia cuantitativa. Esta capacidad de la matematización para ofrecer una comprensión profunda y operativa del rendimiento es lo que se busca complejizar en el conocimiento del profesor de matemáticas, preparándolo para enseñar una disciplina funcional que no solo describe el mundo, sino que ofrece medios para optimizarlo.

En síntesis, el problema fundamental radica en la poca capacidad de abstracción y de comprensión de los objetos matemáticos que se genera al no facilitar problemas iniciales que involucren situaciones reales y procesos de modelación basados en los niveles de comprensión (situacional, referencial, general). Abordar este vacío en la formación docente a través de casos complejos y relevantes como el lanzamiento de martillo es esencial para formar educadores capaces de tender puentes efectivos entre el aula y el mundo, y de utilizar las matemáticas como una herramienta para la mejora de procesos reales, incluyendo los deportivos.

4. Objetivos de la monografía

4.1 Objetivo General

Analizar procesos de matematización vinculados a la comprensión de la actividad deportiva del lanzamiento de martillo como medio para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas en la perspectiva de la modelación matemática

4.2 Objetivos específicos

- Desarrollar un proceso de matematización vinculado a la comprensión y ejecución deportiva del lanzamiento de martillo.
- Caracterizar actividades matemáticas presentes en un proceso de matematización en el contexto de la interpretación del fenómeno del lanzamiento de martillo.
- Examinar elementos de la actividad matemática que permiten complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas a partir del estudio de un caso asociado a la caracterización de un fenómeno real.

5. Justificación

La matematización es fundamental en la formación docente, ya que proporciona una base sólida para entender y enseñar las matemáticas. Según Niss, Blum y Galbraith (2007), la matematización se manifiesta como una estrategia didáctica a través de la modelación matemática, la cual implica crear o utilizar modelos matemáticos al formular problemas en contextos específicos. Al desarrollar procesos de matematización, los futuros docentes adquieren una comprensión profunda de los principios y procesos matemáticos (Maass, 2006; Borromeo Ferri & Blum, 2009), lo que les permite transmitir efectivamente esa información y desarrollar procesos de enseñanza-aprendizaje más significativos (Greefrath et al., 2021). Esta inmersión en la modelación fomenta no solo el desarrollo del conocimiento del contenido matemático, sino también del conocimiento pedagógico del contenido necesario para enseñar estos procesos de forma efectiva (Carrillo-Yañez et al., 2018; Juandi et al., 2021).

Según Confrey y Maloney (2007), la modelación matemática implica encontrar una situación indeterminada, problematizarla e incorporar investigación, razonamiento y estructuras matemáticas para transformarla. Es decir, la modelación fomenta el pensamiento crítico y el razonamiento lógico en los docentes en formación, habilidades que son esenciales para su práctica profesional (Olawale & Hendricks, 2024).

También el contexto juega un papel importante en la enseñanza, ya que permite establecer una conexión motivadora basada en aspectos comunes dentro del ambiente del estudiante (Aarón, 2016). Basado en lo previamente expuesto y al reconocer la importancia de la modelación matemática en la formación docente, surge una interesante posibilidad al situarla en un contexto específico, particularmente en el ámbito deportivo; en el lanzamiento de martillo.

Según el artículo "Biomechanics of the Hammer Throw: Narrative Review" de Castaldi et al. (2022), se pueden analizar diversos aspectos biomecánicos, como los aspectos balísticos y ambientales, así como el movimiento del centro de masa tanto del martillo como del lanzador.

En el presente trabajo se propone analizar la práctica del lanzamiento de martillo desde la matematización, teniendo en cuenta las diversas actividades matemáticas que se configuran en la práctica matemática según lo establecido por Giaquinto (2005, p. 85). Estas son: Descubrimiento, la Explicación, la Formulación, la Aplicación, la Justificación y la Representación. Siendo así posible categorizar la matematización del lanzamiento de martillo, permitiendo que el deporte y su análisis estén al alcance del profesor en formación, enriqueciendo así la gama de posibilidades para trabajar con diversos objetos matemáticos.

6. Marco teórico

6.1 Conociendo el lanzamiento de martillo

El lanzamiento de martillo es una disciplina atlética relativamente reciente en comparación con otras disciplinas del atletismo, pues sus raíces se remontan a los Juegos de las Tierras Altas de Escocia, donde se lanzaban martillos de herrero reales (Castaldi et al., 2022).

El lanzamiento de martillo implica un lanzamiento con dos manos de un implemento pesado para lograr la máxima distancia. Este implemento consta de una bola de metal conectada por un cable de acero a un mango metálico. El lanzamiento se realiza desde una plataforma circular con dimensiones específicas, el diámetro es de 2,135 m y un ángulo de apertura para la zona de caída de 34,92° (en grados sexagesimales, con origen en el centro de la plataforma) Establecidas por la world athletics (*Book Of Rules | Official Documents*, s. f.).

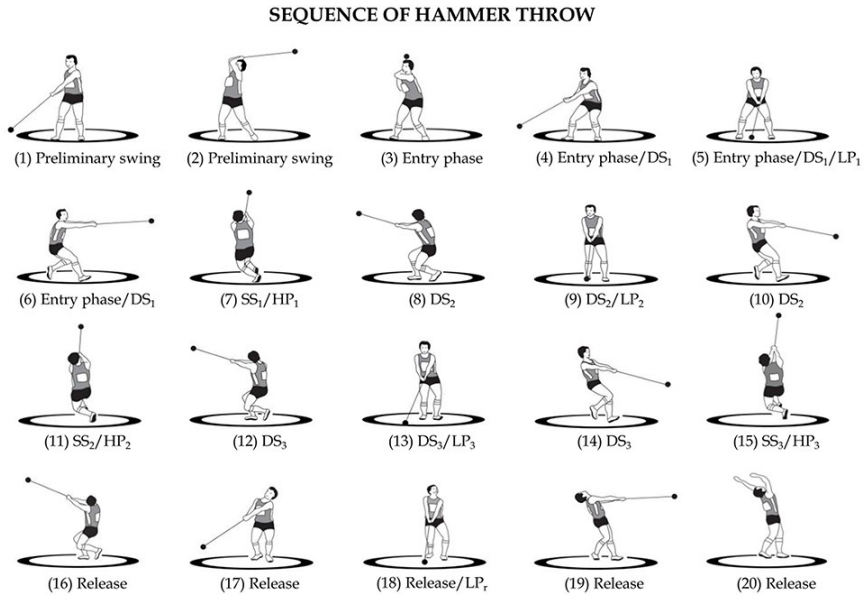


Figura 1 Pasos *para la realización del lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022)*

"Preliminary swings [1–3]. Entry phase [3–4–5–6]. Single support of the first turn (SS_1) [6–8]. Double support of the second turn (DS_2) [8–10]. Single support of the second turn (SS_2) [10–12]. Double support of the third turn (DS_3) [12–14]. Single support of the third turn (SS_3) [14–16]. Release [16–20]. First turn (T_1) [3–8]. Second turn (T_2) [8–12]. Third turn (T_3) [12–16]. Low point of the hammer in the first turn (LP_1) [5]. Low point of the hammer in the second turn (LP_2) [9]. Low point of the hammer in the third turn (LP_3) [13]. Low point at release (LP_R) [18]. High point of the hammer in the first turn (HP_1) [7]. High point of the hammer in the second turn (HP_2) [11]. High point of the hammer in the third turn (HP_3) [15]." (Castaldi et al., 2022)

El lanzamiento de martillo, como disciplina atlética de alta complejidad técnica, exige una secuencia de movimientos precisos y coordinados para optimizar el rendimiento. Dentro de esta secuencia, la fase de voleo se destaca como un componente crucial, ya que prepara el implemento para la posterior fase de giros. El presente análisis se centra en esta fase preparatoria, examinándola a partir de la descripción proporcionada por Frutos (2014) con el objetivo de comprender la mecánica y la biomecánica que intervienen en la generación de inercia y el establecimiento de una trayectoria adecuada para el martillo.

Según Frutos (2014), la fase de voleo se define como el conjunto de movimientos preparatorios que ejecuta el lanzador antes de iniciar los giros. Esta fase persigue un doble objetivo: generar una inercia suficiente en la cabeza del martillo para facilitar su posterior aceleración y asegurar que el implemento describa una trayectoria óptima que permita una entrada fluida y eficiente en la fase de giros. Frutos (2014) enfatiza que esta preparación requiere una correcta disposición mecánica, postural y cinemática del lanzador. La descripción técnica de los voleos, según este autor, implica movimientos coordinados que se inician con una posición

específica del lanzador, a partir de la cual se ejecutan los volteos, haciendo girar el martillo alrededor del cuerpo siguiendo una trayectoria elipsoidal.

Desde una perspectiva biomecánica, la fase de voleo, según Frutos (2014), se caracteriza por la aplicación de principios físicos como la generación de inercia y el momento angular. La extensión de los brazos, por ejemplo, incrementa el radio de giro y, consecuentemente, el momento angular del sistema martillo-lanzador, lo que facilita la posterior aceleración del martillo durante los giros. Asimismo, la trayectoria elipsoidal del martillo, según Frutos (2014), optimiza la transferencia de energía al implemento. En la figura 2 se muestras las fases del voleo.

Tabla 1. Criterios para el análisis técnico de la fase de volteo en el lanzamiento de martillo (Gaede, 1990).

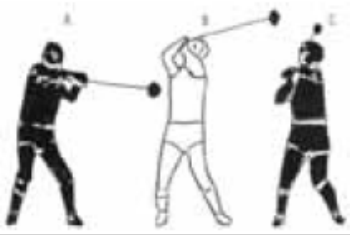
Representación gráfica	Referencia	Criterio de valoración
	ABC - cabeza	Elevada, de cara a la dirección de lanzamiento
	A - brazos	Izquierdo: flexionado, derecho: extendido
	BC - brazos	Flexionados (a la altura del hombro)
	A - martillo	Plano, alejado a la izquierda
	BC - martillo	Plano, detrás de la espalda
	C - tronco	Vertical (máxima torsión)
	BC - caderas	Cadera derecha: bloqueada
	ABC - rodillas	Ligeramente flexionadas
	ABC - peso	Sobre las dos piernas (centrado)

Figura 2. Fase de volteo en el lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022).

Según Frutos (2014), basándose en Bingisser & Jensen (2011) y Judge (1999), durante el volteo por la espalda (ver figura 3), los brazos se flexionan, pero se extienden tan pronto como sea posible. Esta flexión permite una rápida transición del martillo hacia la fase de aceleración mediante la modificación del radio de giro, cuyo eje de rotación es el hombro izquierdo. La reducción del radio de giro durante el volteo por la espalda incrementa la velocidad angular, facilitando una rápida llegada a la fase de aceleración y conservando el momento angular. Bermejo (2014) también destaca la importancia de la estabilidad y el equilibrio del tren inferior

durante el volteo, en respuesta al momento de fuerza desequilibrante ejercido por el martillo debido a su elevada masa y rotación. Para ello, el lanzador adopta una posición con los pies separados a la anchura de los hombros, rodillas flexionadas para descender el centro de masas y tronco alineado verticalmente, asegurando un equilibrio estable. Esta posición, según Bermejo (2014) citando a Bingisser & Jensen (2011) y Judge (1999), proporciona equilibrio, estabilidad y conservación del momento angular.

Tabla 2. Criterios para el análisis técnico de la transición al primer giro en el lanzamiento de martillo (Gaede, 1990).

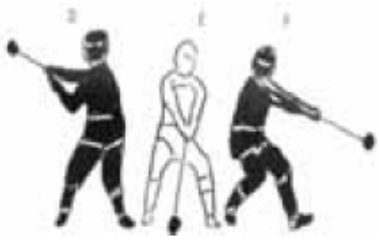
Representación gráfica	Referencia	Criterio de valoración
	EF - cabeza	Elevada, sigue al martillo
	D - brazos	Izquierdo: extendido, derecho: flexionado
	EF - brazos	Extendidos (triángulo hombros-brazos)
	E - martillo	En el punto más bajo
	DEF - tronco	Ligeramente inclinado hacia delante
	DEF - rodillas	Flexionados (posición sentado)
	EF - pierna pivote	Rotación interna sobre el talón
	EF - pierna libre	Retrasada sobre la parte media del pie
	DEF - peso	Sobre ambas piernas

Figura 3 Transición al primer giro en el lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022)

La transición a la fase de giros, según Bermejo (2014) basándose en Gutiérrez & Soto (2001), se inicia en apoyo bipodal, con el martillo ubicado lejos del lanzador, ligeramente a la derecha, y los brazos extendidos. Esta fase culmina al retornar al apoyo bipodal tras el giro sobre un apoyo simple. El objetivo principal de los giros es acelerar y cambiar el plano de movimiento del martillo para lograr una proyección con velocidad máxima y un ángulo cercano a los 40° en la fase de suelta. Bermejo (2014) indica que el número de giros (entre 2 y 4) varía según la habilidad, velocidad y fuerza del atleta, citando a Judge (1999). Los giros combinan acciones de desplazamiento rotatorio y traslación lineal (Dapena, 1984, 1986, 1989a), alternando fases de apoyo unipodal y bipodal (Gaede, 1990). Desde una perspectiva biomecánica, Bermejo (2014)

describe, siguiendo a Dapena (1989a), dos tipos de movimiento al analizar el sistema lanzador-artefacto: rotación alrededor de un eje vertical común y traslación hacia la zona de lanzamiento (Dapena, 1984). Al analizar el movimiento del martillo en relación con un sistema de referencias inercial, se distinguen tres tipos (Dapena, 1984, 1986, 1989a; Gutiérrez & Soto, 2001): rotación alrededor de un eje vertical (Z), rotación alrededor de un eje longitudinal (X) y desplazamiento del sistema, siendo las rotaciones los movimientos técnicamente más relevantes.

Tabla 3. Criterios para el análisis técnico de la fase de apoyo unipodal en los giros del lanzamiento de martillo (Gaede, 1990).

Representación gráfica	Referencia	Criterio de valoración
	JKL - cabeza	Sigue al martillo, centrada
	JKL - brazos	Extendidos, pasivos
	J - martillo	Guiado lejos hacia la izquierda
	KL - martillo	Delante y en un punto alto
	JKL - tronco	Ligeramente inclinado hacia atrás
	J - pierna pivote	Activa giro sobre el talón
	J - pierna libre	Es elevada
	KL - pierna pivote	Flexionada, apoyo sobre la parte media
	KL - pierna libre	Flexionada (giro activo)

Figura 4, Fase de apoyo unipodal en el lanzamiento de martillo, fuente: (Castaldi et al., 2022).

La fase de giros en el lanzamiento de martillo, que sucede a la fase de voleo, tiene como objetivo principal maximizar la velocidad del implemento antes de la suelta. Segú Frutos (2014), esta fase se caracteriza por la ejecución de entre tres y cuatro giros, adaptándose el número a las capacidades del lanzador. La finalidad principal de esta fase es la de acelerar el implemento a su máxima velocidad, para así poder transferir la mayor energía posible en el momento de la suelta.

Desde una perspectiva biomecánica, Frutos (2014) describe una acción coordinada entre las piernas, que generan el impulso rotatorio, y el tronco, que transfiere la energía al martillo. El análisis del movimiento del martillo, según Frutos (2014), puede realizarse mediante el ángulo

azimutal, una herramienta que permite determinar la posición del implemento en cada instante del lanzamiento.

Tabla 4. Criterios para el análisis técnico de la fase de apoyo bipodal en los giros del lanzamiento de martillo (Gaede, 1990).

Representación gráfica	Referencia	Criterio de valoración
	GHI - cabeza	Sigue al martillo, centrada
	GHI - brazos	Conducen al martillo en un plano frontal
	G - martillo	Sobre la altura de la cabeza
	HI - martillo	Delante y detrás del punto más bajo
	G - tronco	Máxima rotación (hombros-caderas)
	HI - tronco	Ligeramente inclinado atrás (centrado)
	HI - caderas	Presión activa en dirección al giro
	G - rodillas	Flexionadas (izquierda: considerablemente, derecha: ligeramente)
	G - CM	Descendido (rodilla flexionada)
	HI - pierna pivote	Ligeramente flexionada, giro sobre el talón
	HI - pierna libre	Ligeramente flexionada, giro sobre la parte media del pie

Figura 5. Apoyo bipodal en el lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022).

La fase de giros en el lanzamiento de martillo, que continúa a la fase de voleo, se caracteriza por la alternancia entre apoyos unipodales y bipodales, buscando la máxima aceleración del implemento. Según Bermejo (2014), basándose en Durán (2000), durante el apoyo unipodal, el lanzador gira sobre su eje longitudinal (referido al cuerpo, no al sistema lanzador-artefacto), con contacto talón-borde externo hasta el punto más alto de la bola y punta-borde interno desde este punto. Frutos (2014) enfatiza, citando a Bingisser & Jensen (2011), la importancia de evitar la elevación del cuerpo para no reducir el momento angular, adoptando una posición "sentada". Además, según Durán (2000), la pierna de apoyo unipodal no se flexiona durante el ascenso.

En cuanto al apoyo bipodal, Frutos (2014), basándose en Bondartschuk (1987), Judge (1999), Kuznetsov (1965) y Maheras (2009), señala que esta fase facilita la aplicación de fuerza contra el suelo para obtener mayor velocidad angular del artefacto. Por ello, se recomienda una mayor duración de esta fase en relación con el apoyo simple (Bartonietz et al., 1997; Dapena,

1989b; Judge, 1999; Kuznetsov, 1965), teoría apoyada por estudios en competición (Isele & Nixdorf, 2010; Judge et al., 2008). Esto se logra retrasando el despegue del pie de la pierna libre y disminuyendo la fase unipodal (Tschiene, 1980), aunque esta estrategia ha sido cuestionada (Morris & Bartlett, 1993). Frutos (2014) también menciona que, aunque en menor medida (Dapena & McDonald, 1989), también se puede incrementar la velocidad de giro en el apoyo unipodal mediante la transferencia de momento angular con movimientos del cuerpo y brazos (Brice et al., 2008; Dapena, 1984; Dapena & McDonald, 1989), y que, según Dapena (1989a), se produce aceleración en el apoyo bipodal y deceleración en el unipodal (ver figura 6).

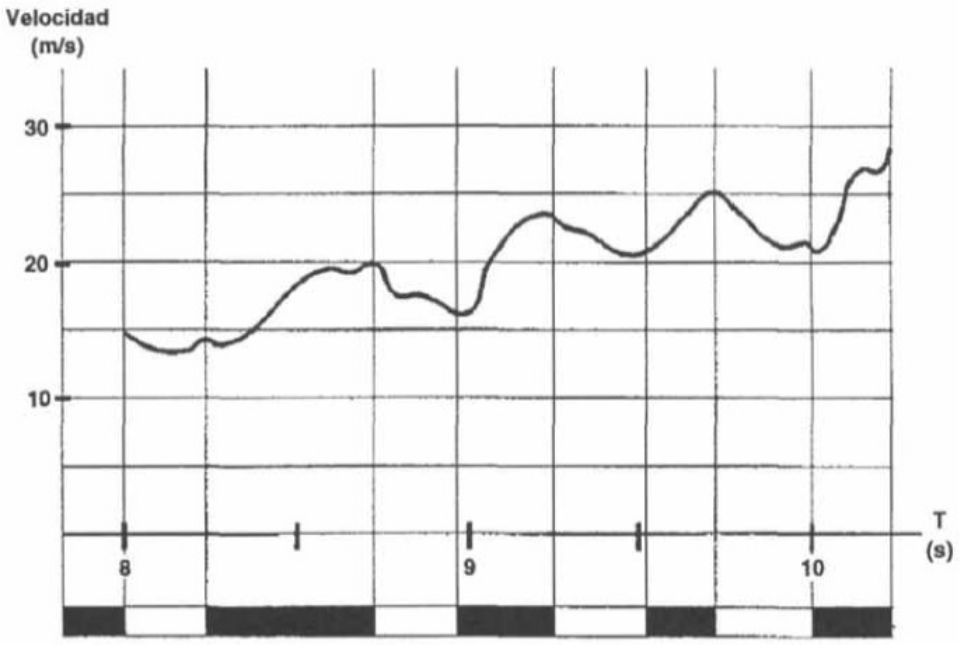


Figura 6. Grafica de velocidad-tiempo lanzamiento de martillo. (Castaldi et al., 2022).

La fase de suelta, según Frutos (2014), se inicia al finalizar el último giro en apoyo bipodal y culmina con la liberación del martillo. El objetivo principal, considerando la trayectoria parabólica del implemento, es liberarlo con máxima velocidad, a una altura elevada y

con un ángulo óptimo cercano a los 45° (Dapena, Gutiérrez, Soto, & Rojas, 2003; Gutiérrez & Soto, 2001). Frutos (2014) señala una similitud con la ejecución de un giro (ver Tabla 5), con modificaciones técnicas posteriores al contacto del pie derecho (Durán, 2000). El posicionamiento del pie derecho sobre el antepié, cuando la cabeza del martillo está a la derecha y diagonalmente abajo, inicia una extensión coordinada de rodillas, caderas, espalda y hombros, impulsada por la pierna derecha (Judge, 1999; Petrov, 1980) y aprovechando la transferencia de impulsos de la cadena cinética muscular (Bartonietz & Borgstöm, 1995). Contrariamente a la teoría de mantener una distancia máxima y constante entre la cabeza del martillo y el eje de rotación, seguida de un rápido acortamiento previo a la suelta (Maronski, 1991), estudios posteriores (Fujii & Ae, 2008; Fujii, Koyama, & Ae, 2007) han demostrado que esto no beneficia la velocidad de salida, concluyendo que la fuerza aplicada a través del cable modifica el radio de giro sin afectar significativamente la velocidad tangencial.

Tabla 5. Criterios para el análisis técnico de la fase de suelta en el lanzamiento de martillo (Gaede, 1990).

Representación gráfica	Referencia	Criterio de valoración
	M - cabeza	Sigue al martillo, centrada
	NO - cabeza	Echada hacia atrás
	MNO - brazos	Conducen al martillo en un plano frontal
	M - tronco	Vertical (máxima torsión)
	O - tronco	Ligeramente inclinado hacia atrás
	O - caderas	Extendidas
	M - rodillas	Flexionadas
	M - rodillas	Flexionadas, derecha: parte media del pie, izquierda: punta del pie
	O - pierna pivote	Extendida sobre el talón
	O - pierna libre	Sobre la punta, ligeramente flexionada
	O - lado izquierdo	bloqueado

Figura 7, Fase de suelta o fase final del lanzamiento de martillo, fuente: (Castaldi et al., 2022).

6.2 Velocidad Angular

Frutos (2014) explica que, el incremento de la velocidad angular se determina fundamentalmente por la aplicación de momento de fuerza. El objetivo durante los giros es

lograr que la cabeza del martillo adquiera un elevado momento angular (que relaciona radio, masa y velocidad angular), incrementándose desde el primer hasta el último giro (Dapena, 1989b; Dapena & Feltner, 1989). Este incremento del momento angular del sistema lanzador-martillo es un impulso angular que depende del momento de fuerza que el lanzador ejerce en el suelo (sistema de dos masas girando en torno a un eje común).

Frutos (2014) explica que la fuerza centrípeta tiende a desplazar al martillo hacia afuera y al lanzador en sentido opuesto (Gutiérrez & Soto, 2001). El lanzador no se opone a esta fuerza, sino que produce una gran tensión en el cable (ver Figura 8) (Brice, Ness, Rosemond, Lyons, & Davis, 2008), fuerza que se ha correlacionado positivamente con la distancia de lanzamiento (Pataki & Ramacsay, 1982) y que depende de la aceleración centrípeta y la masa. La aceleración centrípeta, según Frutos (2014), se relaciona directamente con la velocidad lineal e inversamente con el radio de giro (de ambas masas y en sentido opuesto).

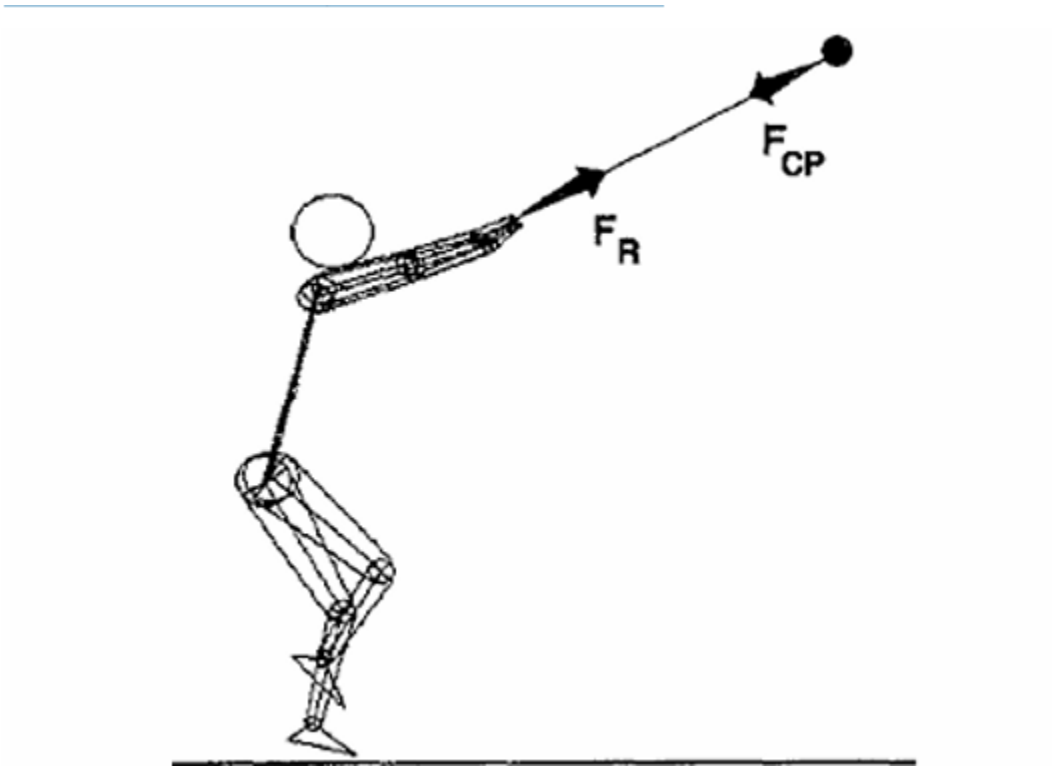


Figura 8. Representación de la fuerza del lanzador sobre el cable y de la bola sobre el cable (Gutiérrez y Soto, 1993)

6.3 Modelación del lanzamiento de martillo

El movimiento circular del martillo alrededor del atleta se analiza mediante un sistema de posicionamiento angular (ver Figura 2). Este sistema utiliza una circunferencia graduada superpuesta al círculo de lanzamiento, observando el movimiento desde una perspectiva superior. La dirección 0-180° de esta circunferencia coincide con la bisectriz del ángulo que define el sector de lanzamiento, según las coordenadas del sistema de referencias (Gutiérrez &

Soto, 2001). Este método específico para determinar la posición de la cabeza del martillo se denomina ángulo azimutal (Samozvetov, 1971).

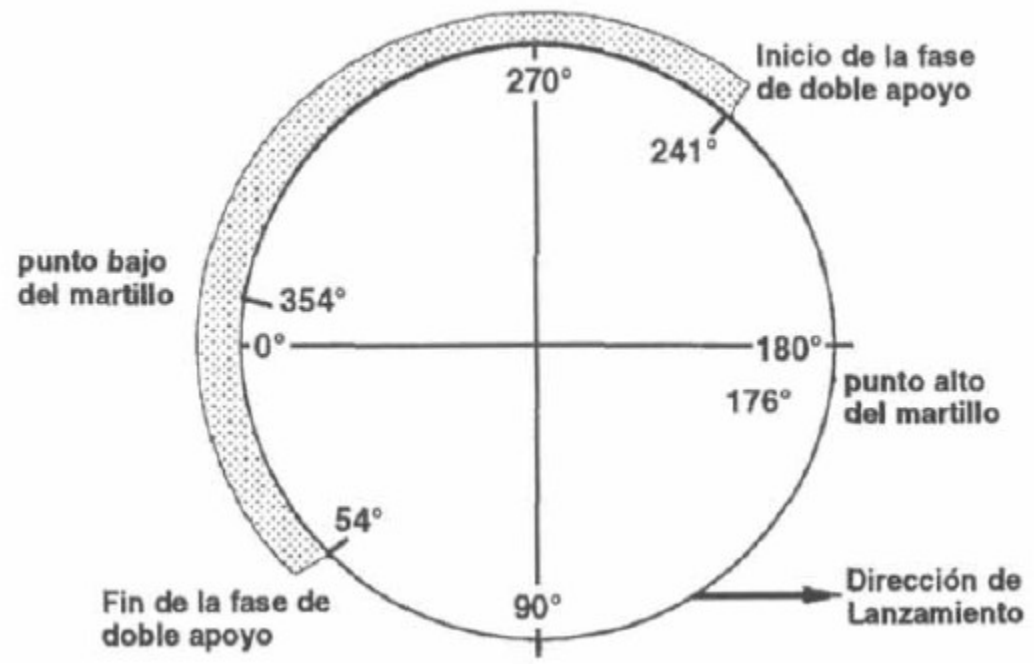
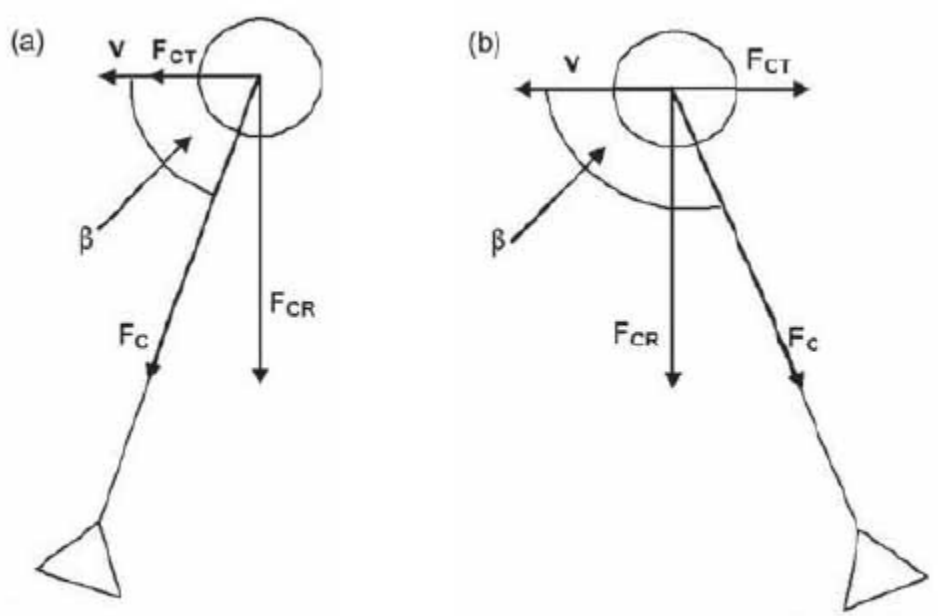


Figura 9. Representación del ángulo azimutal del martillo durante el movimiento de rotación cuando se realizan los giros. (Gutiérrez y Soto, 2001)

Frutos (2014) expone que, las fuerzas durante los giros del martillo se descomponen en vectores (ver Figura 7). El componente tangencial (fuerza tangencial) influye en la velocidad lineal de la cabeza del martillo y depende de la tensión ejercida por el lanzador a través del cable (Brice, Ness, & Rosemond, 2011). Cuando la tensión coincide con la dirección del giro (en volteos, apoyo doble y fase final de suelta), se genera una aceleración positiva que impulsa la cabeza del martillo. Por el contrario, cuando la tensión se opone al giro (en la primera parte del apoyo simple, hasta que la cabeza del martillo alcanza el punto más alto), se produce una

aceleración negativa.



Leyenda: Fc = fuerza del cable; FCR = componente tangencial de la fuerza del cable; FCT = componente tangencial de la fuerza del cable; V = velocidad lineal de la cabeza del martillo; ß = ángulo entre la velocidad lineal a la fuerza del cable.

Figura 10. Fuerzas que se producen durante los giros cuando el vector de la fuerza del cable está tirando delante de la dirección del radio de rotación (a) y detrás (b) (Brice et al., 2011).

Durante la rotación del sistema lanzador-martillo, el momento angular (L) del martillo es el criterio de eficacia más importante, expresado por la fórmula $L = m \cdot r^2 \cdot \omega$ (donde m es la masa, r es el radio y ω es la velocidad angular). Frutos (2014) explica que, basándose en esta fórmula, existen tres estrategias para mejorar el rendimiento en la rotación: incrementar la masa del sistema, incrementar el radio de giro de la cabeza del martillo (distancia radial) o incrementar la velocidad angular de la cabeza del martillo. Estas estrategias, según Frutos (2014), se relacionan con aspectos antropométricos, técnicos y físicos, respectivamente.

6.4 Parámetros cinemáticos de rendimiento en la fase de vuelo del artefacto

A diferencia de lanzamientos como la jabalina o el disco, la distancia horizontal del martillo no se ve tan afectada por factores aerodinámicos como las características del artefacto, el viento, el ángulo de ataque o la rotación para la estabilidad (Best, Bartlett, & Sawyer, 1995; Hubbard & Laporte, 1997; Hunter, 2005; Mizera & Horvath, 2002; Okamoto, Sakurai, & Ikegami, 2008). Este aspecto, según lo expuesto por Frutos (2014), implica la necesidad de complejos modelos aerodinámicos para predecir la distancia de vuelo y establecer las condiciones técnicas óptimas.

En el caso del lanzamiento de martillo, el rendimiento (distancia horizontal) está determinado principalmente por las condiciones cinemáticas de la suelta, estimándose una influencia del aire de aproximadamente un 2% (Dapena et al., 2003). Frutos (2014) identifica tres factores críticos en estos movimientos parabólicos, similares a los del lanzamiento de peso (Allegretti et al., 2007; Bartonietz et al., 1997; Bartonietz, Hinz, Lorenz, & Lunau, 1988; Gutiérrez et al., 2002; Okamoto et al., 2008): la altura de liberación del artefacto (h), el ángulo de proyección (α) y la velocidad resultante de salida (v).

La figura 11 presenta valores de referencia para variables determinantes del vuelo del artefacto que influyen en la distancia final del lanzamiento. Estos valores, según Frutos (2014), provienen de estudios con lanzadores de alto rendimiento.

Tabla 6. Valores registrados en las variables cinemáticas de suelta del lanzamiento de martillo.

Autor	Altura de liberación	Velocidad de salida	Ángulo de proyección
Allegretti et al. (2007)	1.10-1.59 m (M) 1.23-1.41 m (H)	22.05-25.27 m/s (M) 24-25 m/s (H)	35.91-40.81° (M) 36.18-40.79° (H)
Brice et al. (2011)	-	24.1 m/s (M) 23.7 m/s (H)	-
Cardenas (2003)	-	30 m/s	-
Gutiérrez y Rojas (2005)	-	23.73 m/s	-
Hunter (2003)	-	25 m/s (M) 26 m/s (H)	37° (M) 36° (H)
Isele y Nixdorf (2010)	1.46 m (M)	27.1 m/s (M)	40° (M)
Judge, Hunter y Gilreath (2008)	-	25.9-27.2 m/s (M)	41-43° (M)
Okamoto, Sakurai e Ikegami (2006)	1.46-1.84 m	28.4-28.9 m/s	38.3-40°
Ueya (1992)	1.32-1.72 m	28.6-29.1 m/s	38.9-45.2°
Umegaki et al. (2009)	1.49-1.63 m	-	40.2-42°
Xie, Kong y Raynor (1998)	1.63-1.86 m	23.4-28.8 m/s	39-43°

Figura 11. Valores cinemáticos de suelta en el lanzamiento de martillo. (Frutos, 2014)

6.5 Actividad matemática (A.M) establecidas por Giaquinto

Esta investigación sobre los procesos de matematización en la comprensión de una actividad deportiva desde la perspectiva de un profesor permite revisar elementos asociados a las A.M a lo largo de la misma. Como señalan Bello y Forero (2016), basándose en los trabajos de Giaquinto (2005), se pueden identificar diferentes categorías de A.M.

- **Descubrimiento:** hace referencia a la posibilidad de revelar propiedades de los objetos matemáticos en la resolución de una situación.
- **Explicación (subjetiva y objetiva):** hace referencia a la posibilidad de argumentar el razonamiento que se establece en la solución del problema. Si es subjetiva, las razones

que se incluyen obedecen a la misma manipulación de la situación; es objetiva si los argumentos obedecen a conocimientos matemáticos construidos en el desarrollo de otra situación.

- **Formulación:** hace referencia a la construcción y enunciación de algoritmos que permitan el desarrollo de diferentes situaciones parecidas o análogas a la que se está resolviendo, al igual que a la adopción y la construcción de un sistema simbólico que permita comunicar las conclusiones en la resolución de una situación.
- **Aplicación:** esta actividad se sitúa en la posibilidad de aplicar las conclusiones producto de la práctica matemática a otro tipo de situaciones.
- **Prueba de teoremas. Definiciones y axiomas:** hace referencia al acondicionamiento al modelo que permite justificar matemáticamente propiedades o definiciones de un objeto matemático, lo que permite argumentar en una teoría la ubicación, el orden en que se adopta y se relacionan los objetos con sus propiedades y los axiomas de la teoría.
- **Representación. Sistemas de símbolos y sistemas de diagramas:** la adopción de sistemas de representación propios de los objetos matemáticos, como por ejemplo los adoptados en el sistema cartesiano o en la teoría de grafos, permiten actividad matemática alrededor del desarrollo de una situación problema.

6.6 Perspectiva de matematización

La matematización, un concepto fundamental en la didáctica de las matemáticas, se entiende como la actividad humana de organizar y estructurar la información de un problema, permitiendo identificar los aspectos matemáticos relevantes y descubrir sus inherentes regularidades, relaciones y estructuras (Educrea, 2012). Inspirada en los principios de

Freudenthal (1991), quien la concibe como un proceso activo para otorgar sentido matemático a situaciones problemáticas, esta actividad transforma la realidad en una forma más abstracta y organizada (Loyola Malqui & Huamán Vila, 2025). Su valor radica en la doble dimensión que propone: la matematización horizontal, centrada en trasladar un problema del contexto real al lenguaje matemático, y la matematización vertical, que implica el trabajo y la sofisticación de los modelos dentro del propio dominio matemático (Educrea, 2012; Loyola Malqui & Huamán Vila, 2025). Aun así, estas dos perspectivas de matematización se reúnen en un objetivo esencial como la herramienta de estudiantes y docentes para solucionar problemas de la realidad mediante procesos matemáticos.

La matematización horizontal implica el paso de un problema contextualizado a un problema matemático. En el caso del lanzamiento de martillo, esto se manifestaría en acciones como observar la trayectoria del martillo, identificar variables clave (ángulo de lanzamiento, velocidad inicial, altura de liberación), hacer suposiciones simplificadoras (ignorar la resistencia del aire inicialmente) y traducir estas observaciones a un sistema de coordenadas o a ecuaciones matemáticas (por ejemplo, definir la posición del martillo en función del tiempo).

Por su parte, la matematización vertical se refiere al trabajo dentro del mundo matemático, donde el modelo se desarrolla y se refina. Para el lanzamiento de martillo, esto involucraría la manipulación algebraica de las ecuaciones de movimiento, el uso de cálculo diferencial para encontrar el ángulo óptimo de lanzamiento, la aplicación de la función Spline en GeoGebra para ajustar datos de trayectorias reales, o la exploración de conceptos como energía cinética y potencial. Esta fase permite abstraer, generalizar y formalizar los conceptos

matemáticos, profundizando la comprensión del fenómeno y de la disciplina misma (Treffers, 1987; Macias-Becerra et al., 2022).

Esta investigación adoptará y desarrollará precisamente esta perspectiva amplia de la matematización. Es decir, se comprenderá y aplicará la matematización como un proceso que no solo abarca la traducción inicial de la situación problemática a un lenguaje matemático, sino también el posterior procesamiento y refinamiento de los modelos dentro del sistema matemático para su análisis, argumentación y generalización. Se busca que las matemáticas, a través de este enfoque, sirvan como una herramienta activa para la toma de decisiones y la mejora de la comprensión de la realidad, yendo más allá de una mera descripción o predicción.

Autores como Treffers (1987) han profundizado en la integración de estas dimensiones, subrayando su importancia en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Loyola Malqui & Huamán Vila, 2025; Macias-Becerra et al., 2022). Esta visión es crucial en el contexto de la formación inicial de docentes, ya que les permite desarrollar una comprensión más profunda y aplicada de la disciplina. Al incorporar esta perspectiva, el presente trabajo de grado busca no solo analizar el fenómeno del lanzamiento de martillo a través de la modelación, sino también evidenciar cómo este proceso contribuye a una preparación más integral y contextualizada de los futuros profesores de matemáticas.

Desde la perspectiva de la modelación, esta situación permite no solo la matematización horizontal, al traducir su dinámica a términos matemáticos, sino también la vertical, al trabajar con modelos que pueden ser ajustados, interpretados y justificados. En este sentido, se convierte en un contexto idóneo para analizar cómo se complejiza el conocimiento docente a través de la modelación de fenómenos auténticos.

6.7 El Conocimiento del Profesor de Matemáticas y su Complejización

Para esta investigación, la complejización del conocimiento del profesor implica un enriquecimiento de su comprensión no solo sobre la disciplina en sí, sino también sobre cómo esta se relaciona con el mundo real y cómo puede ser enseñada de formas más significativas.

Diversas perspectivas teóricas han abordado el conocimiento profesional del docente. Por ejemplo, Shulman (1986, 1987) introdujo el concepto de Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), que se refiere a la amalgama de la materia y la pedagogía, es decir, cómo el contenido es transformado para su enseñanza. Esto incluye conocer las formas de representar ideas matemáticas, las dificultades comunes de los estudiantes, las estrategias para abordarlas y el currículo. En el contexto de la matematización y la modelación, la complejización del PCK de un profesor implicaría:

- Conocimiento del contenido: Una comprensión profunda de los conceptos matemáticos subyacentes al lanzamiento de martillo (trayectorias parabólicas, vectores, fuerzas, etc.).
- Conocimiento didáctico del contenido: Saber cómo presentar estos conceptos de manera que los estudiantes puedan matematizar y modelar el fenómeno del lanzamiento de martillo, incluyendo la selección de problemas, el uso de herramientas tecnológicas y la gestión de la clase.
- Conocimiento curricular: Entender cómo se insertan estos procesos de matematización y modelación dentro del plan de estudios y qué progresiones de aprendizaje son adecuadas.
- Conocimiento de los estudiantes y su aprendizaje: Reconocer las concepciones previas de los estudiantes sobre la actividad deportiva y las matemáticas, y las estrategias para fomentar su pensamiento matemático.

6.8 La Modelación Matemática como Eje Transformador en la Formación Inicial de Docentes de Matemáticas

La formación inicial de docentes de matemáticas enfrenta el reto de preparar profesionales que no solo dominen la disciplina, sino que también sean capaces de guiar a sus futuros estudiantes en la aplicación de conceptos matemáticos a la resolución de problemas complejos del mundo real. En este contexto, la modelación matemática emerge como una estrategia didáctica y un área de conocimiento fundamental. Su relevancia radica en que, al involucrar al estudiante en la construcción de modelos, se promueve una comprensión más profunda y contextualizada de las matemáticas, trascendiendo el enfoque meramente algorítmico y procedimental (Barquero Ocampo & Chaves Montero, 2023; Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024).

La modelación matemática se define como el proceso a través del cual se construyen modelos matemáticos que intentan explicar, predecir y solucionar aspectos de un fenómeno o situación real (Villa-Ochoa, 2007, citado en Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Este proceso implica un ciclo iterativo que abarca desde la comprensión de la situación real hasta la interpretación y validación de los resultados matemáticos. Para el futuro docente, comprender y experimentar este ciclo es crucial, pues le permite no solo dominar la técnica, sino también apreciar el papel de las matemáticas como herramienta para interpretar y transformar el mundo (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021).

La inclusión de la modelación matemática en el currículo de formación inicial docente es imprescindible porque dota a los futuros profesores de habilidades didácticas y pedagógicas específicas. Al participar activamente en procesos de modelación, los docentes en formación

aprenden a diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje que fomentan la investigación, la exploración, la creación de conjeturas y la argumentación en el aula (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Esta experiencia directa les capacita para trascender la enseñanza tradicional y propiciar un aprendizaje significativo en sus estudiantes.

Asimismo, la modelación matemática enriquece el conocimiento didáctico-matemático del profesorado al establecer conexiones explícitas entre los conceptos matemáticos abstractos y su aplicación en situaciones auténticas. Los docentes desarrollan la capacidad de identificar variables relevantes, configurar modelos que representen sistemas complejos, interpretar soluciones matemáticas en el contexto real y generalizar los hallazgos a otros escenarios (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Esta perspectiva les permite no solo transmitir conocimientos, sino enseñar a pensar matemáticamente, cultivando un pensamiento crítico y una capacidad de análisis en sus estudiantes.

Este ciclo de modelación, tal como lo describen diversos autores (e.g., Blum & Leiss, 2007, como se citó en Kaiser & Sriraman, 2007; Maaß, 2006), generalmente comprende las siguientes fases interconectadas:

- Comprensión y estructuración de la situación real: Se parte de un problema o fenómeno del mundo real (el lanzamiento de martillo). En esta fase, el profesor y los estudiantes identi fican el problema, comprenden su contexto, formulan preguntas y extraen la información relevante, distinguiéndola de la irrelevante. Es crucial observar la actividad, identificar variables físicas y simplificar el escenario.
- Matematización (o construcción del modelo matemático): Se traduce el problema real a un lenguaje matemático. Esto implica la selección de conceptos, teoremas y herramientas

matemáticas apropiadas para representar las relaciones identificadas en la fase anterior. Para el lanzamiento de martillo, esto podría significar la formulación de ecuaciones de trayectoria parabólica, el uso de vectores para la velocidad y la fuerza, y la realización de suposiciones (como ignorar la resistencia del aire) que transforman el fenómeno en un problema soluble matemáticamente.

- Trabajo o manipulación dentro del modelo matemático: Una vez formulado el modelo, se utilizan herramientas y técnicas matemáticas para resolver el problema dentro del sistema matemático. Esto incluye resolver ecuaciones, realizar cálculos, aplicar algoritmos, optimizar funciones o utilizar software como GeoGebra para simular y analizar la trayectoria del martillo.
- Interpretación de los resultados matemáticos en el contexto real: Las soluciones obtenidas en la fase anterior se traducen de nuevo al contexto del problema original. Se analizan qué significan esos números o gráficos en términos del lanzamiento de martillo (e.g., la distancia alcanzada, la altura máxima, el tiempo de vuelo, el ángulo ideal de salida).
- Validación y refinamiento del modelo: Los resultados interpretados se contrastan con la realidad o con datos experimentales. Se evalúa si el modelo es adecuado, preciso y útil para explicar o predecir el fenómeno. Si hay discrepancias significativas (e.g., el modelo ideal no se ajusta a una trayectoria real), se inicia un proceso de refinamiento, volviendo a fases anteriores para ajustar suposiciones, añadir variables o elegir modelos matemáticos más complejos, como el uso de la función Spline para capturar las variaciones de una trayectoria real.

Un aspecto fundamental de la formación docente centrada en la modelación es el desarrollo de la habilidad para justificar las decisiones matemáticas tomadas durante el proceso. Esto implica no solo aplicar reglas y fórmulas, sino comprender por qué se eligen ciertos modelos, cómo se interpretan los resultados y cuándo un modelo es adecuado o necesita ser refinado. Esta justificación profunda es esencial para la validación de los modelos y para el desarrollo de un rigor matemático aplicable a la resolución de problemas (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024).

La modelación matemática también impulsa una transferencia de conocimiento que va más allá del aula de matemáticas. Al enfrentar problemas interdisciplinarios, los futuros docentes aprenden a contextualizar la disciplina y a mostrar a sus estudiantes cómo las matemáticas son una herramienta poderosa para entender fenómenos en ciencias, tecnología, ingeniería y otras áreas. Esta habilidad para aplicar y adaptar modelos a situaciones análogas prepara al docente para un entorno educativo cada vez más complejo y multidisciplinar (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Rojas, 2017).

Además, la modelación contribuye a una complejización del conocimiento del profesor de matemáticas al confrontarlo con la variabilidad inherente de los datos reales y la necesidad de un análisis estadístico para la interpretación de los resultados. Al trabajar con datos experimentales que no siempre se ajustan perfectamente a los modelos teóricos, el docente en formación aprende a manejar la incertidumbre, a calcular el error y a discutir las limitaciones de las modelaciones, habilidades esenciales para una comprensión realista de las matemáticas en la práctica (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024).

En síntesis, la modelación matemática es un pilar indispensable en la formación inicial de docentes de matemáticas. Va más allá de la enseñanza de un contenido específico, ya que configura una mentalidad pedagógica que fomenta la investigación, el pensamiento crítico, la resolución de problemas auténticos y la conexión de las matemáticas con el mundo real. De este modo, se prepara a los futuros profesores para ser agentes de cambio en el aula, capaces de inspirar en sus estudiantes una apreciación profunda y funcional de la disciplina.

6.9 La Función Spline en GeoGebra

En GeoGebra, la función Spline permite la construcción de curvas suaves que atraviesan una serie de puntos designados por el usuario. Un spline, en su concepción matemática, se define como una función compuesta por segmentos polinómicos. La relevancia de los splines radica en su habilidad para generar representaciones gráficas continuas y susceptibles de análisis matemático, disminuyendo las fluctuaciones que a menudo se presentan al interpolar un número significativo de puntos con un único polinomio de alto grado (GeoGebra Team, n.d.).

En el contexto de GeoGebra, la función Spline genera curvas donde cada segmento entre dos puntos consecutivos se define mediante una función polinómica. Para asegurar la continuidad visual y matemática de la curva en los puntos de conexión (nodos), se aplican condiciones que restringen las derivadas de los polinomios adyacentes en estos puntos. Estas condiciones resultan en una curva con una tangente bien definida en cada nodo, contribuyendo a la apariencia de suavidad. La adaptabilidad de la función Spline en GeoGebra la convierte en un recurso valioso para la representación de formas complejas, trayectorias continuas y la ejecución de interpolaciones en diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones dentro del entorno dinámico del software (GeoGebra Team, n.d.).

6.10 Aspectos para analizar en el modelo

De acuerdo con lo encontrado en la revisión teórica y los resultados de la entrevista con Carlos Ladino, se encuentra que las variables más influyentes se encuentran en el final del lanzamiento. Frutos (2014), en su recopilación de datos, menciona tres de estos aspectos, los cuales son: La altura de liberación, la velocidad del implemento y el ángulo de liberación con respecto al piso.

Para encontrar la distancia de un lanzamiento, se puede analizar desde lo físico como un lanzamiento parabólico con una altura diferente a 0, Castaldi et al. (2022) lo describe con la siguiente formula:

$$L = v_0^2 \cos\theta + \frac{\sin\theta + \sqrt{\sin\theta^2 + \frac{2gh_0}{v_0^2}}}{g}$$

Ecuación 1.Ecuación de distancia de un lanzamiento de martillo. (Castaldi et al. , 2022)

Donde:

$v_0 = Velocidad\ inicial$

$h_0 = Altura\ incial$

$g = \ Gravedad$

$\theta = Ángulo\ de\ salida$

La fórmula presentada se relaciona directamente con el lanzamiento de martillo porque modela el movimiento de un proyectil con una altura inicial de lanzamiento distinta de cero, lo cual describe con precisión la fase de vuelo del martillo tras ser soltado por el atleta. Esta ecuación incorpora variables clave para el deporte: v_0 representa la velocidad con la que el implemento es lanzado, un aspecto crucial destacado por Carlos Ladino (CL) y Frutos (2014).

Además, θ es el ángulo de liberación respecto al plano horizontal, también considerado fundamental por CL ("ángulo de despegue") y Frutos (2014) ("ángulo de liberación con respecto al piso"). La presencia de h_0 indica la altura desde la cual el martillo es soltado, un factor siempre superior a cero en este deporte y mencionado por Frutos (2014) como influyente. Finalmente, la fórmula calcula la distancia horizontal (L), el objetivo principal del lanzamiento de martillo, e incluye la constante de la gravedad (g), la fuerza predominante en la trayectoria del implemento.

Para analizar esta ecuación, se ha de tener en cuenta que esta sería la distancia de un lanzamiento ideal, es decir, donde no se tiene en cuenta la resistencia del aire, pues en el lanzamiento de martillo si bien la resistencia del aire influye mínimamente en su ejecución se puede despreciar esta, teniendo en cuenta la densidad del implemento.

Además, es necesario puntualizar cómo se estudia analíticamente la trayectoria de un lanzamiento parabólico con una altura inicial diferente a 0. A continuación se muestra la trayectoria de un lanzamiento parabólico, que también se puede observar aquí

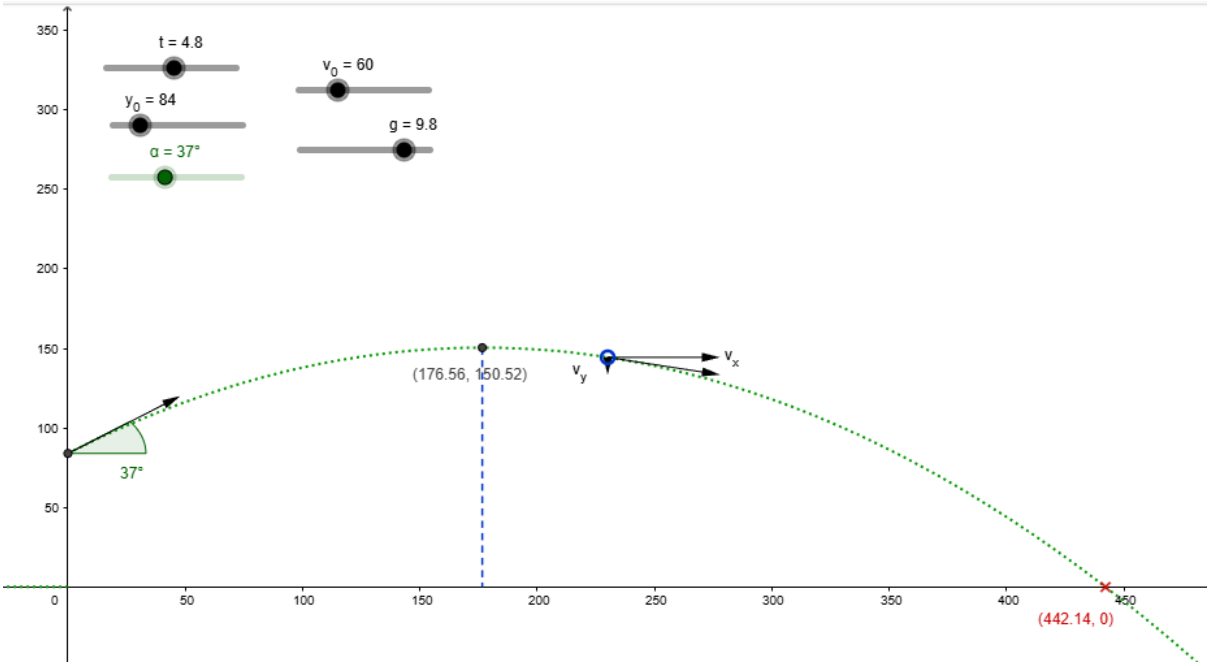


Figura 12 modelación de un tiro parabólico en GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

Para describir un tiro parabólico analíticamente, en términos de **x, y,** en la página 64 del libro de física de Resnick, Halliday y Krane (2001), se muestra la ecuación que describe la trayectoria de un movimiento parabólico de un proyectil, donde al despejar la distancia máxima se obtiene la siguiente ecuación que permite obtener la distancia máxima en **x** en función del ángulo de salida $\propto$, la altura de salida y_0, siendo g, la gravedad como una constante.

$$x_{max} = x_0 + \frac{v_0 \cos(\alpha)\left(v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gy_0}\right)}{g}$$

Ecuación 2. Descripción analítica de un tiro parabólico.

Partiendo de esta ecuación, se puede modificar de manera tal que su forma sea la misma que la ecuación 1

$$x_{max} = x_0 + \frac{v_0^2 \cos(\alpha)\left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gy_0}{v_0^2}}\right)}{g}$$

Ecuación 3. Modificación de descripción analítica de un tiro parabólico

Llegando así a que la ecuación que permite estimar la distancia del lanzamiento de martillo. Es decir, la ecuación que permite hallar la distancia recorrida por el martillo se modela analíticamente partiendo de la ecuación de tiro parabólico con una altura (h) diferente de 0.

En este orden de ideas, dado que, para la toma de datos en la parte experimental, se tuvo en cuenta la altura desde la que se liberó el implemento, el ángulo de liberación y se hizo la toma de la distancia, el dato que no se tiene en la práctica es la velocidad con la que se libera el implemento. Por tanto, despejando de la ecuación 3, se obtiene que:

$$v_0 = \frac{Lg}{\cos(\propto)\sqrt{2g(h + L\tan(\propto))}}$$

Ecuación 4 Despeje de la velocidad en ecuación 3

Con esta ecuación, va a ser posible encontrar la velocidad teórica, con los datos experimentales encontrados.

7. Método y técnicas de recolección, sistematización y análisis de la información para la investigación sobre modelización matemática en el lanzamiento de martillo

La investigación pretende analizar procesos de matematización vinculados a la comprensión de la actividad deportiva del lanzamiento de martillo para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas en la perspectiva de la modelación matemática. Para lograr esto, se ha hecho un estudio cualitativo. Esta perspectiva ha permitido profundizar en la comprensión de los procesos involucrados en la actividad deportiva y su proceso de matematización. Así, el enfoque ha proporcionado una visión más completa y rica del fenómeno estudiado.

Con el propósito de entender los aspectos matemáticos, físicos y biomecánicos relevantes en la ejecución del lanzamiento de martillo, se utilizó la entrevista semiestructurada la cual facilita la interacción, lo que potencia la calidad de las conclusiones debido al involucramiento de las partes durante este tipo de intervención, como lo asegura Abad (s.f.). Esta entrevista fue hecha con el entrenador de lanzamientos nivel III de la IAAF (máxima autoridad del atletismo) Carlos Ladino (CL). Las preguntas hechas fueron:

1. Desde su conocimiento como entrenador de lanzamientos ¿cuáles son los aspectos físicos y biomecánicos más relevantes en la ejecución del lanzamiento de martillo?
2. ¿Cuáles son las fases o movimientos que se realizan en la ejecución del lanzamiento?
3. ¿Qué condiciones ideales tanto técnicas como físicas son necesarias para tener el mejor lanzamiento?

4. ¿Cuál es el tiempo ideal que dure un lanzamiento desde su fase inicial (Voleo)?
5. ¿Cómo se entrena a un lanzador de martillo?

Con base en la entrevista y la revisión teórica, se obtuvieron los aspectos físicos y biomecánicos más relevantes en la ejecución del lanzamiento de martillo, con los que se procedió a obtener los objetos matemáticos involucrados y desarrollar un proceso de matematización vinculado a la comprensión y ejecución de esos aspectos puntuales que son más influyentes en la ejecución deportiva. Siguiente a ello, se realizaron videos propios durante la ejecución del lanzamiento de martillo desde la vista frontal y la vista lateral o longitudinal.

7.1 Análisis en tracker

La recolección de datos a través del software Tracker (Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education) para determinar la altura, el ángulo de liberación y la distancia en los lanzamientos se llevó a cabo mediante las siguientes metodologías:

Para los 3 siguientes ítems se hizo uso de la vista lateral que es con la que se trabajó a lo largo de todo el proyecto.

- **Altura**: Se empleó el software de análisis de video "tracker" para calcular la altura de liberación. Este proceso implicó la medición de la distancia vertical entre dos puntos específicos en el video: el punto A, correspondiente a la posición del pie del atleta en el momento del lanzamiento, y el punto B, que representa la posición de las manos del atleta al liberar el implemento.

- **Ángulo de liberación**: La medición del ángulo de liberación se realizó utilizando un transportador incorporado en el software. Se tomó como referencia la línea horizontal del suelo y el punto exacto en el que el atleta liberó el martillo.

- **Velocidad**: La velocidad alcanzada en el punto de liberación de cada lanzamiento se encontró a partir de los cálculos realizados por el software durante el análisis del lanzamiento, tomando en cuenta la velocidad correspondiente al fotograma correspondiente a la liberación del martillo.

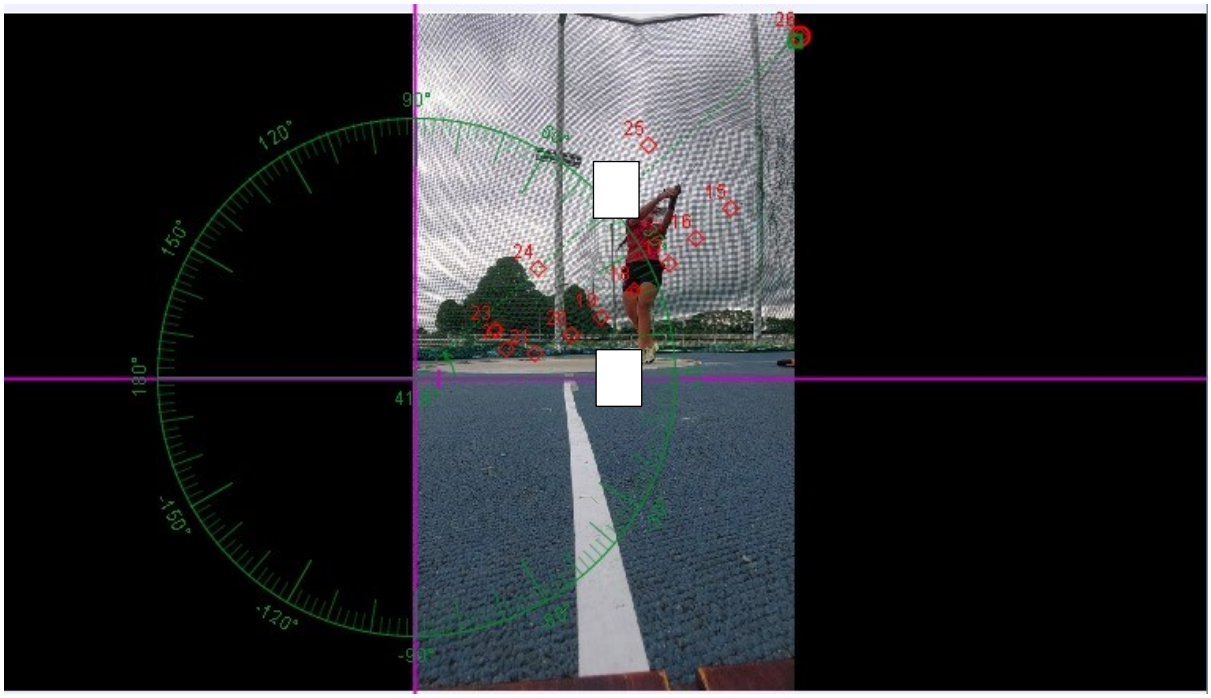


Figura 13. Medición del ángulo con la herramienta transportador de Tracker. Fuente: Autor.

Recolección de datos para estimar la velocidad con la que se desplaza el martillo

Para optimizar el análisis en Tracker, se siguió la siguiente estrategia:

- Ubicación del plano cartesiano: Se configuró el plano cartesiano de Tracker de manera que todo el movimiento del martillo se ubicara preferentemente en el primer cuadrante.

Esto aseguró que no se generaran datos negativos, facilitando el procesamiento y la interpretación.

- Perspectiva de grabación: Tanto en la vista frontal como en la vista lateral, los equipos de grabación se ubicaron en un plano tangente al círculo de lanzamiento. Esta disposición fue crucial para poder hacer un seguimiento preciso de la cabeza del martillo utilizando la herramienta de "masa puntual" de Tracker, minimizando las distorsiones de la perspectiva. Al colocar las cámaras en un plano tangente, se asegura que el movimiento principal del martillo, especialmente durante la fase crítica de aceleración y liberación, ocurra predominantemente de manera lateral con respecto a la cámara, y no directamente hacia o desde ella. Esto reduce significativamente las variaciones en la percepción de profundidad y el tamaño aparente del implemento en el encuadre. De este modo, la herramienta de "masa puntual" de Tracker puede registrar con mayor fidelidad las coordenadas bidimensionales de la cabeza del martillo en cada fotograma, permitiendo calcular sus velocidades y trayectorias con una precisión mejorada, al minimizar los errores derivados de la vista lateral.

- *Vista lateral*

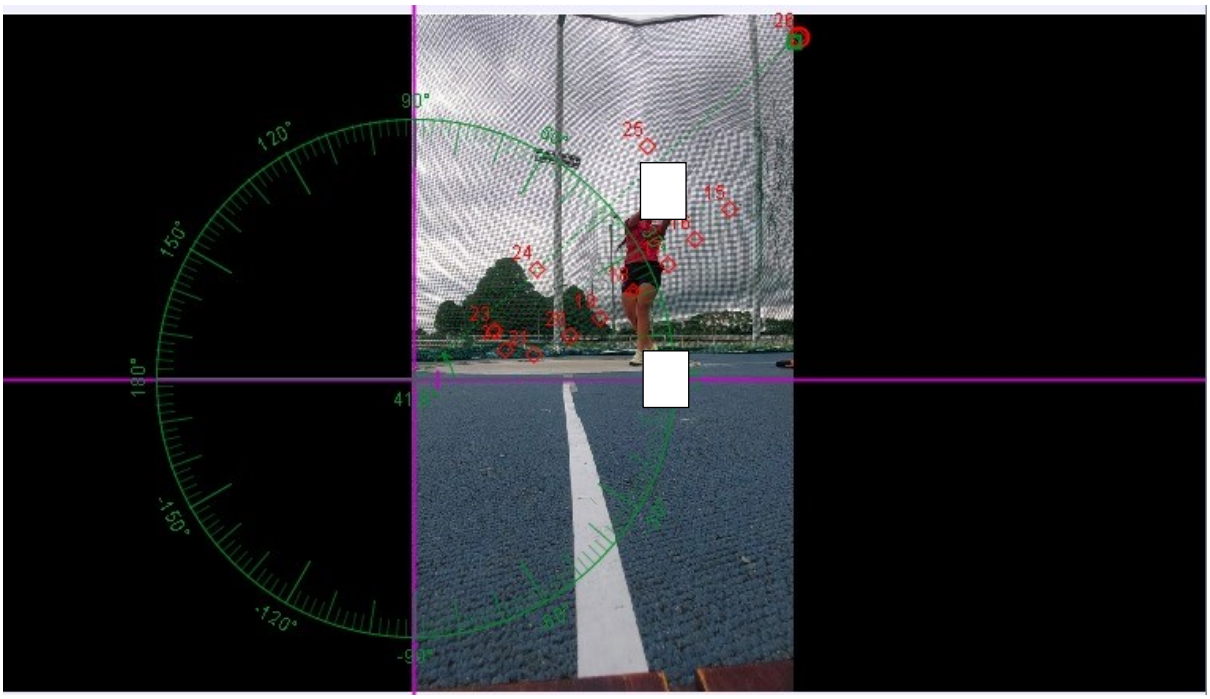


Figura 14. Medición del ángulo con la herramienta transportador de Tracker. Fuente: Elaboración propia.

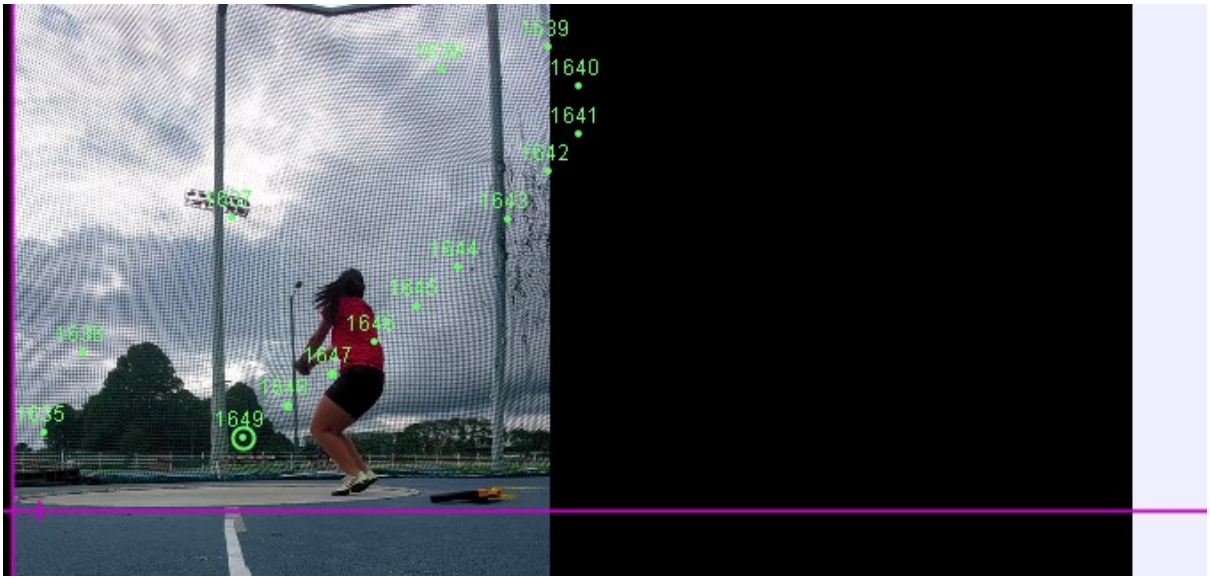


Figura 15. Vista lateral lanzamiento de martillo. Fuente: Autor.

- *Vista frontal*



Figura 16. Vista frontal lanzamiento de martillo. Fuente: Autor.

Lo ideal es que, tanto de la vista frontal como de la vista lateral, los equipos de grabación se encuentren en un plano tangente al círculo de lanzamiento para de esta manera poder hacer el seguimiento del martillo (cabeza del martillo) con la herramienta masa puntual de tracker.

7.2 Metodología para el Análisis y Discusión de la Información

En el presente proyecto de grado, con base en los datos sistematizados y los hallazgos iniciales, se procedió a un análisis más profundo y a la discusión, integrando herramientas de modelación matemática y cálculo diferencial para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Modelación Tridimensional con GeoGebra

- Reconstrucción de la Trayectoria 3D: Para simular la trayectoria del lanzamiento de martillo en tres dimensiones, se combinaron los datos obtenidos de Tracker de las dos vistas: la vista frontal (que proporcionó datos de altura en el eje Z y posición horizontal en el eje Y) y la vista lateral (de donde se extrajo la profundidad en el eje X). Esta combinación permitió reconstruir cada punto de la trayectoria del martillo en un espacio tridimensional como (x, y, z) para los tres sujetos analizados.
- Creación de Curvas Spline: Utilizando la función spline de GeoGebra, se creó una lista de puntos que fueron unidos para generar una curva suave. Las splines son particularmente útiles para modelar movimientos que no siguen una función matemática simple, como las fases de rotación del martillo. En este estudio, se modelaron los dos últimos giros o pivotes del lanzamiento, asumiendo que cada punto (x, y, z) tenía un parámetro (t) en común, representando el tiempo. La función spline en GeoGebra generó una curva paramétrica, donde las coordenadas (x(t), y(t), z(t)) son definidas por funciones del parámetro t.

- Análisis de Velocidad Instantánea mediante Derivación: Para analizar la variación de la velocidad y, específicamente, obtener la velocidad en el punto de liberación del martillo, se recurrió al cálculo diferencial. Se derivó la función paramétrica del spline con respecto al parámetro t (tiempo), lo que proporcionó el vector velocidad instantánea (x′(t), y′(t), z′(t)) en cada punto de la trayectoria.

- Cálculo de la Magnitud de la Velocidad: Una vez obtenido el vector velocidad instantánea en el instante de tiempo de la liberación del martillo (dato precisado desde Tracker), se calculó su magnitud o norma. Esta magnitud se consideró la velocidad inicial del movimiento (Velocidad de Simulación), y se obtuvo aplicando la fórmula de la norma de un vector en 3D: $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$. Este proceso se realizó para los tres sujetos estudiados.

7.3 Comparación y Validación de Velocidades

- Velocidad Teórica vs. Velocidad Experimental: Se realizó una comparación entre la velocidad experimental obtenida directamente del software Tracker y la velocidad de simulación calculada a partir de la derivada del spline en GeoGebra. Esta comparación fue crucial para validar la precisión del modelo matemático construido.

- Análisis de Error: Se calculó el porcentaje de error entre ambas velocidades para cada sujeto, permitiendo cuantificar la concordancia o discrepancia entre el modelo y la realidad. Se identificaron casos con errores aceptables (Anderson: 6.73%, Sara: 13.54%) y casos con errores significativamente mayores (Ashley: 63.17%), lo que llevó a una

discusión sobre posibles imprecisiones en la identificación del punto de liberación o el seguimiento de la trayectoria en las grabaciones originales.

7.4 Análisis Estadístico y Generalización

- Inferencia Estadística: Los resultados cuantitativos obtenidos (velocidades, errores) fueron sometidos a un análisis estadístico inferencial para extraer conclusiones significativas y discernir patrones en el rendimiento de los atletas. Esto permitió evaluar la significancia de las diferencias observadas y la variabilidad inherente de los datos.
- Generalización y Aplicabilidad: La discusión de los hallazgos se centró en la aplicabilidad del modelo y los métodos a situaciones análogas. Se exploró cómo los conocimientos sobre la cinemática del lanzamiento de martillo, la función spline y el cálculo diferencial pueden ser transferidos a otros lanzamientos o gestos deportivos que compartan características similares, lo que contribuye a la complejización del conocimiento del profesor de matemáticas al mostrar la versatilidad de la modelación matemática.

Con base en los hallazgos encontrados se procedió a examinar elementos de la actividad matemática que permiten complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas a partir del estudio de un caso asociado a la caracterización de un fenómeno real.

8. Análisis y Discusión

El presente apartado muestra el desarrollo un proceso de investigación y análisis centrado en la recolección y el procesamiento de datos, así como en la profundización del conocimiento matemático. Se iniciará con la entrevista como herramienta clave para la recolección de información, seguida de un análisis detallado de las respuestas obtenidas. Posteriormente, se explorará la recolección de datos y su análisis a través de Tracker, lo que permitirá comparar las velocidades experimentales y teóricas obtenidas a partir de la ecuación del movimiento parabólico.

Luego, se abordará el ámbito de la estadística descriptiva y las medidas de tendencia central para comprender mejor los patrones de los datos recolectados. Se presentará una simulación en GeoGebra y se contrastará con la velocidad experimental obtenida de Tracker, ofreciendo una perspectiva visual y comparativa. Finalmente, se discutirán las actividades matemáticas del proceso de matematización, destacando cómo este proceso contribuye a la complejización del conocimiento del profesor de matemáticas. El objetivo es proporcionar una visión clara y estructurada de cómo se entrelazan la experimentación, el análisis de datos y la evolución del saber pedagógico en el contexto de la investigación.

8.1 Resultados entrevista

La entrevista realizada a Carlos Ladino (CL), entrenador de lanzamientos nivel III de la IAAF, constituyó un eje fundamental para comprender la perspectiva experta sobre la biomecánica y el entrenamiento del lanzamiento de martillo. Los resultados obtenidos no solo

proporcionan información valiosa sobre la práctica deportiva, sino que, en el contexto de este trabajo, sirven como un puente crítico para analizar y discutir la pertinencia y la capacidad explicativa de la modelación matemática en fenómenos reales, así como su potencial para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas y fundamentar la toma de decisiones para la mejora del rendimiento deportivo.

Al indagar sobre los aspectos físicos y biomecánicos más relevantes en la ejecución, CL destacó la velocidad final del implemento, la velocidad final del lanzador (que actúa como velocidad inicial del implemento), el ángulo de ataque y el ángulo de despegue del implemento. Estos elementos son, esencialmente, las condiciones iniciales críticas para el movimiento de proyectil que caracteriza la fase de vuelo del martillo. La "velocidad final del implemento" es la magnitud de la velocidad lineal tangencial que el martillo adquiere justo en el instante de suelta, resultado de la transferencia de energía y momento angular desde el lanzador. Esta velocidad, junto con el "ángulo de despegue", define completamente la trayectoria parabólica subsiguiente (si se ignora la resistencia del aire) y, por ende, la distancia alcanzada.

El "ángulo de ataque" (probablemente refiriéndose al ángulo óptimo de aplicación de fuerza o la inclinación del lanzador) es crucial para maximizar la componente horizontal de la velocidad lineal del martillo y asegurar que la fuerza generada por el lanzador se transfiera de la manera más eficiente posible al implemento, justo antes de la liberación. La perspectiva del entrenador subraya que la efectividad del lanzamiento se reduce a un conjunto de parámetros cuantificables y optimizables, lo cual reafirma la posibilidad y la necesidad de una matematización rigurosa para su comprensión y mejora. En este sentido, la Formulación de las ecuaciones de tiro parabólico y la subsiguiente Aplicación del cálculo diferencial para modelar la

trayectoria y la velocidad en nuestro estudio, encuentran en esta visión experta una correspondencia directa, al buscar precisamente la cuantificación y optimización de estas variables clave.

La definición de un lanzamiento óptimo por parte de CL como aquel que logra la "mayor amplitud con el menor esfuerzo posible" introduce el concepto de eficiencia biomecánica y energética, un objetivo que la modelación matemática puede abordar de manera precisa. La mención de una "aceleración progresiva entre tres y cuatro giros", la "máxima extensión corporal" y la "mayor relajación posible" no son meras descripciones técnicas; se refieren a principios fundamentales de la física de la rotación y la transferencia de energía.

La "aceleración progresiva" durante los giros es vital para aumentar el momento angular del sistema lanzador-martillo de forma controlada y continua, lo que se traduce directamente en un incremento de la velocidad tangencial del martillo ($v = \omega r$, donde ω es la velocidad angular y r es el radio de giro). La "máxima extensión corporal" permite al lanzador aumentar el radio de giro del sistema al momento de la suelta, lo cual, para una misma velocidad angular, incrementa linealmente la velocidad tangencial del martillo, o facilita una mayor aceleración angular. Por su parte, la "mayor relajación posible" busca minimizar la tensión muscular antagonista, asegurando que la energía generada por los músculos principales (especialmente piernas y tronco) se transfiera eficientemente al martillo, reduciendo la disipación de energía. Este principio de "a menor esfuerzo, mayor avance" subraya la optimización del impulso angular y la aplicación de fuerza en el tiempo, validando la necesidad de un análisis matemático que cuantifique esta eficiencia energética y de movimiento.

CL también proporcionó datos numéricos específicos, como la velocidad rotacional ideal de 32 metros por segundo entre el primer y cuarto giro, y un tiempo de vuelo óptimo de entre uno y dos segundos. La "velocidad rotacional" se refiere, en el contexto del entrenador, a la velocidad lineal tangencial que el martillo debería alcanzar. Esta cifra es un punto de referencia crucial para la fase circular del movimiento, directamente conectada con la energía cinética que el implemento lleva al momento de la liberación. Es importante destacar que, si bien el entrenador hace referencia a esta velocidad tangencial ideal en la fase de giro, la velocidad inicial del implemento utilizada para la modelación de la trayectoria parabólica en este estudio fue obtenida a través de la sistematización y análisis de datos cinemáticos con el software Tracker (como se detalla en la metodología), y no directamente como un valor suministrado por el experto.

El "tiempo de vuelo óptimo" (1-2 segundos) es una consecuencia directa de la componente vertical de la velocidad inicial y la altura de liberación, estando ambas bajo la influencia de la gravedad. La observación de CL de que un tiempo superior a 2.5 segundos indica una baja velocidad de despegue (aproximadamente 24-25 m/s) ofrece criterios cuantitativos directos para la validación y discusión de los modelos generados en el estudio (a partir de datos de Tracker y GeoGebra). La Aplicación de nuestros modelos matemáticos (donde se calculan las velocidades y tiempos de vuelo) permite comparar los valores teóricos y simulados con estas métricas del experto. Las discrepancias o concordancias se convierten en puntos de Análisis crítico, donde el futuro docente puede discernir la influencia de factores no modelados explícitamente (como la resistencia del aire) o las implicaciones de las ineficiencias en la

ejecución. Esta comparación fundamenta la capacidad del docente para usar las matemáticas como una herramienta diagnóstica y predictiva en el contexto del rendimiento deportivo.

Finalmente, las consideraciones de CL sobre el entrenamiento (mantenimiento del equilibrio, trabajo en el sistema bipolar o posición bipodal, aumento metodológico del aprendizaje, e incremento progresivo de la velocidad entre giros para maximizar la velocidad final) revelan la profunda aplicabilidad práctica de los hallazgos matemáticos en la planificación deportiva. El "mantenimiento de un buen equilibrio" y el "trabajo en el sistema bipodal" son esenciales para una transferencia eficaz de las fuerzas de reacción del suelo a través del cuerpo del lanzador hacia el martillo, contrarrestando la fuerza centrífuga generada por el giro.

Un modelo matemático puede ilustrar cómo una base inestable reduce la eficiencia de esta transferencia de fuerza. El "incremento progresivo de la velocidad entre giros" es un principio que busca optimizar la cadencia y la aceleración angular para construir la máxima velocidad lineal posible justo antes de la suelta. La modelación matemática no solo describe el fenómeno, sino que, a través de la Aplicación y la Representación visual (por ejemplo, con las simulaciones en GeoGebra), puede ofrecer una comprensión profunda de por qué estas estrategias de entrenamiento son mecánicamente efectivas. Un modelo que muestre la curva ideal de aceleración o el ángulo de liberación óptimo se convierte en una herramienta pedagógica poderosa para entrenadores y atletas. Para el profesor en formación, entender que su conocimiento matemático puede influir directamente en la mejora del rendimiento deportivo, promueve una visión de las matemáticas como un medio para la toma de decisiones estratégicas en el mundo real, afianzando la relevancia y el impacto de su futura labor.

8.2 Análisis experimental (tracker)

En la recolección de datos se analizaron los dos últimos giros del lanzamiento, dado que, por las condiciones de grabación, no se podía analizar desde el momento inicial del lanzamiento o voleo. Por tanto, se analizaron los últimos dos giros. A continuación, se muestra la recolección de los datos de las tres variables escogidas para analizar los lanzamientos, los cuales son, Altura, distancia real y el ángulo de liberación del implemento. Lo anterior para poder saber cuál es la velocidad teórica que hay en cada uno de los lanzamientos con base en la ecuación 4.

A continuación, se muestra la recolección de datos establecida, de acuerdo con los datos que mostró tracker (a excepción de la distancia que se midió manualmente al momento de la grabación), es decir, se estimó el ángulo de salida y la altura desde la que se soltó el implemento con ayuda del software Tracker.

Datos

Datos obtenidos en el experimento (Vista lateral)			
ITEM	H (m)	Distancia real (m)	Ángulo (°)
Anderson	1,640	46,410	26,300
Sara	1,427	32,200	41,400
Ashley	1,475	39,100	37,000
Ashley	1,420	34,550	34,200
Anderson	1,558	45,330	24,100
Sara	1,463	34,700	36,100
Ashley	1,384	34,480	24,900
Anderson	1,585	50,850	25,900
Sara	1,484	43,730	35,000
Ashley	1,442	38,220	30,300
Sara	1,565	34,530	32,300
Ashley	1,518	35,420	26,100
Anderson	1,302	47,810	22,900

Sara	1,600	39,050	39,400
Ashley	1,400	42,030	29,600
Anderson	1,620	51,580	26,700
Sara	1,590	35,200	36,000
Ashley	1,374	35,370	27,600
Ashley	1,459	40,720	28,00

Tabla 1. Datos recolectados en la práctica. Fuente: Elaboración propia.

Los datos obtenidos en el experimento de lanzamiento de martillo, presentados en la tabla, revelan una variabilidad considerable en los parámetros de lanzamiento entre los diferentes atletas (Anderson, Sara, Ashley) y en sus respectivos intentos. La altura de liberación (H) oscila desde 1.302 m hasta un valor atípicamente elevado de 36 m para Sara, sugiriendo un posible error de registro en este último dato. Los ángulos de lanzamiento también presentan una dispersión notable, variando desde 1.590° hasta 41.400°, con la mayoría de los lanzamientos situándose en un rango más típico de entre 20° y 40°. La distancia real alcanzada muestra una dependencia aparente con estos parámetros, aunque la relación no es estrictamente lineal a simple vista, con lanzamientos con ángulos similares produciendo distancias diferentes y viceversa. Adicionalmente, con respecto a la velocidad experimental, el software Tracker empleado para el análisis de los videos ofrece la funcionalidad de generar gráficas de espacio-tiempo. Estas representaciones visualizan el desplazamiento del martillo tanto en la dirección horizontal (x) como en la vertical (y) en función del tiempo transcurrido, proporcionando una comprensión detallada de la cinemática del movimiento. A continuación, se pueden observar ejemplos de estas gráficas, ilustrando el ajuste que Tracker realiza para describir el desplazamiento horizontal y vertical en relación con el tiempo.

Cuantitativamente, se observa que Anderson tiende a lanzar desde una altura ligeramente mayor en promedio (excluyendo el valor anómalo de Sara) y con ángulos generalmente más

bajos en comparación con Sara y Ashley. Sus distancias alcanzadas también se encuentran en el extremo superior del rango observado, sugiriendo una posible optimización de sus parámetros de lanzamiento. Sara exhibe una mayor variabilidad en su altura y ángulo de liberación, incluyendo el valor atípico mencionado, lo que podría influir en la dispersión de sus distancias. Ashley, por su parte, muestra una consistencia moderada en su altura de liberación, con ángulos que varían en un rango intermedio y distancias que se sitúan generalmente en la parte media de los resultados. El análisis de las gráficas espacio-tiempo generadas por Tracker complementa esta perspectiva cuantitativa, permitiendo examinar las tasas de cambio del desplazamiento en ambas direcciones a lo largo del tiempo, lo que se relaciona directamente con las componentes de la velocidad.

Cualitativamente, los resultados sugieren que la optimización de la distancia en el lanzamiento de martillo es una interacción compleja entre la altura y el ángulo de liberación. Si bien la teoría del tiro parabólico predice un ángulo óptimo cercano a los 45° en ausencia de resistencia del aire y con una altura de lanzamiento nula, los datos experimentales, donde la altura de liberación es significativa y la resistencia del aire juega un papel, indican que el ángulo óptimo podría desviarse de este valor. La variabilidad observada entre los atletas también subraya la influencia de la técnica individual y la fuerza aplicada en el resultado final del lanzamiento. La capacidad de Tracker para generar gráficas de desplazamiento versus tiempo facilita una comprensión más profunda de cómo la velocidad, inferida de la pendiente de estas gráficas, varía a lo largo de la trayectoria y entre los diferentes lanzamientos. La presencia de valores atípicos, como la altura de liberación de Sara, resalta la importancia de la verificación y

el control de calidad en la recopilación de datos experimentales para asegurar la validez de cualquier análisis posterior.

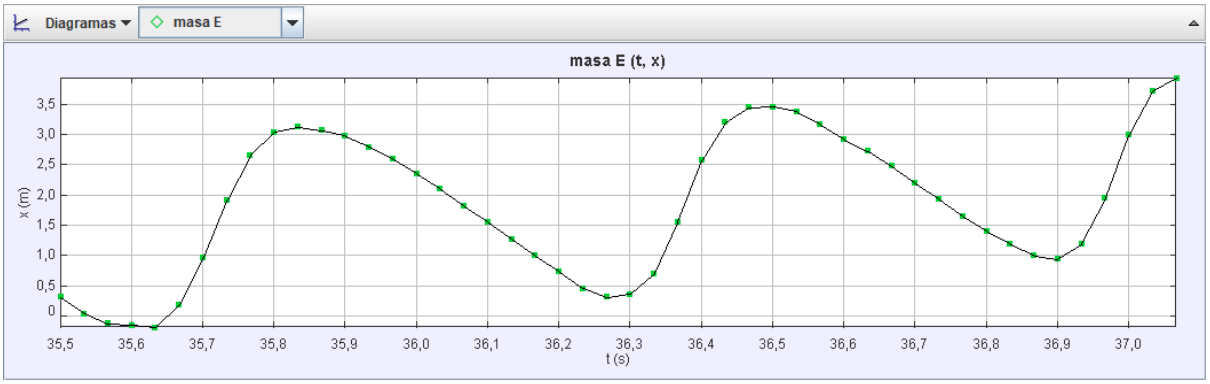


Gráfico 1. Grafica tiempo-distancia (respecto al eje x) de la vista lateral, Fuente: Elaboración propia.

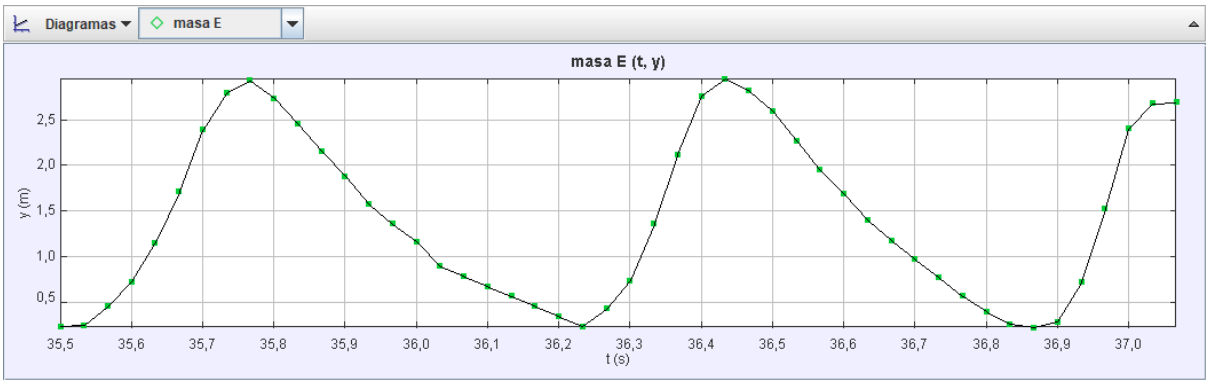
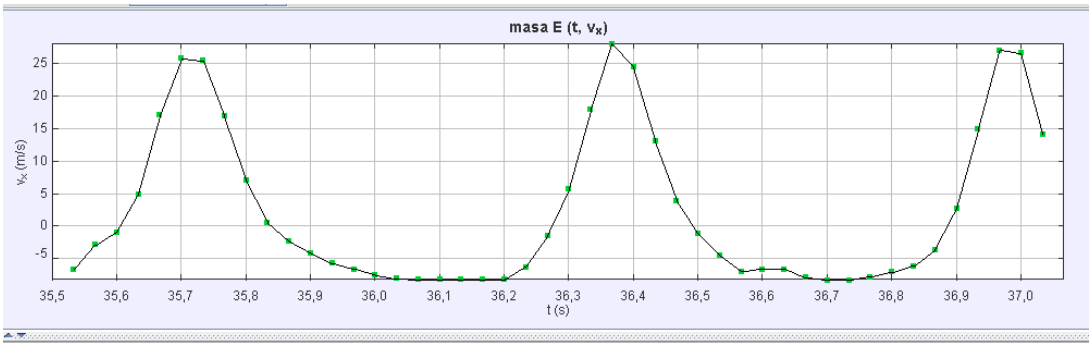


Gráfico 2. Gráfica tiempo-distancia (respecto al eje y) de la vista lateral, Fuente: Elaboración propia.

A partir de las gráficas presentadas anteriormente, se puede evidenciar cómo el software Tracker permite determinar la velocidad en cada uno de los puntos registrados a lo largo de la trayectoria del lanzamiento. Esta información se presenta tanto en forma tabular como mediante representaciones gráficas, lo cual facilita el análisis visual y cuantitativo del movimiento. Específicamente, para los dos casos previamente abordados (la vista lateral y la vista frontal), Tracker genera las correspondientes gráficas de velocidad, las cuales representan, desde el punto

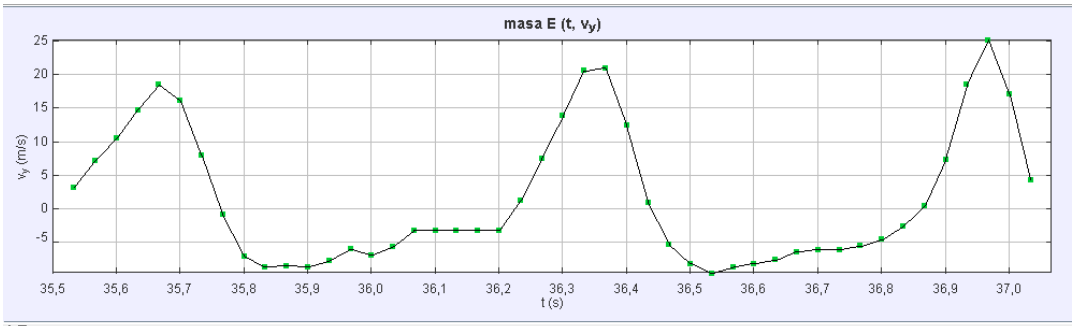
de vista matemático, las derivadas de las gráficas de posición (gráficas 1 y 2). Es decir, estas nuevas gráficas permiten observar la variación de la velocidad en función del tiempo, mostrando cómo cambia la rapidez y dirección del objeto a medida que se desplaza. A continuación, se presentan los ejemplos correspondientes en las gráficas 3 y 4, que ilustran esta información para ambas perspectivas de análisis.



Datos ▾ masa I

t (s)	v_x (m/s)
62,733	-16,50
62,767	-17,73
62,800	-12,52
62,833	-5,008
62,867	1,302
62,900	5,209
62,933	7,512
62,967	8,614
63,000	8,815
63,033	9,015
63,067	9,015
63,100	9,716
63,133	10,12
63,167	

Gráfico 3. Componente en x de la velocidad en tracker. Fuente: Elaboración propia.



Datos | masa I

t (s)	v_y (m/s)
62,733	-13,54
62,767	-16,73
62,800	-14,52
62,833	-8,514
62,867	-3,205
62,900	1,502
62,933	5,108
62,967	6,811
63,000	7,863
63,033	8,314
63,067	8,865
63,100	9,315
63,133	8,714
63,167	

Gráfico 4. Componentes en y de la velocidad en tracker. Fuente: Elaboración propia.

Con estos datos, tracker permite ver las velocidades encontradas como las componentes de un vector, es decir, las velocidades en **x** como en el componente en **x** de la velocidad y así velocidades en **y** como los componentes en **y** del vector de la velocidad.

Un ejemplo puede ser en el segundo fotograma captado donde:

t (s)	v_x (m/s)	v_y (m/s)
62,733	-16,50	-13,54
62,767	-17,73	-16,73
62,800	-12,52	-14,52

Tabla 2. Ejemplo tabulación componente en x, y de la velocidad. Fuente: Elaboración propia.

Es decir, la velocidad estimada en ese punto es la magnitud o norma del vector en ese punto calculado así:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + \left(v_y\right)^2} = \sqrt{(-17.73)^2 + (-16.73)^2} \approx 24.73 m/s$$

Ecuación 5. Evaluación de componentes para encontrar la magnitud de la velocidad del lanzamiento.

Este mismo proceso lo hace tracker para cada uno de los puntos. En el análisis del final del lanzamiento, se toma únicamente la velocidad del fotograma donde se muestra cuando se suelta el implemento. Sin embargo, se puede analizar la velocidad experimental para el lanzamiento con cada una de las gráficas y tabulación de los datos como se muestra a continuación:

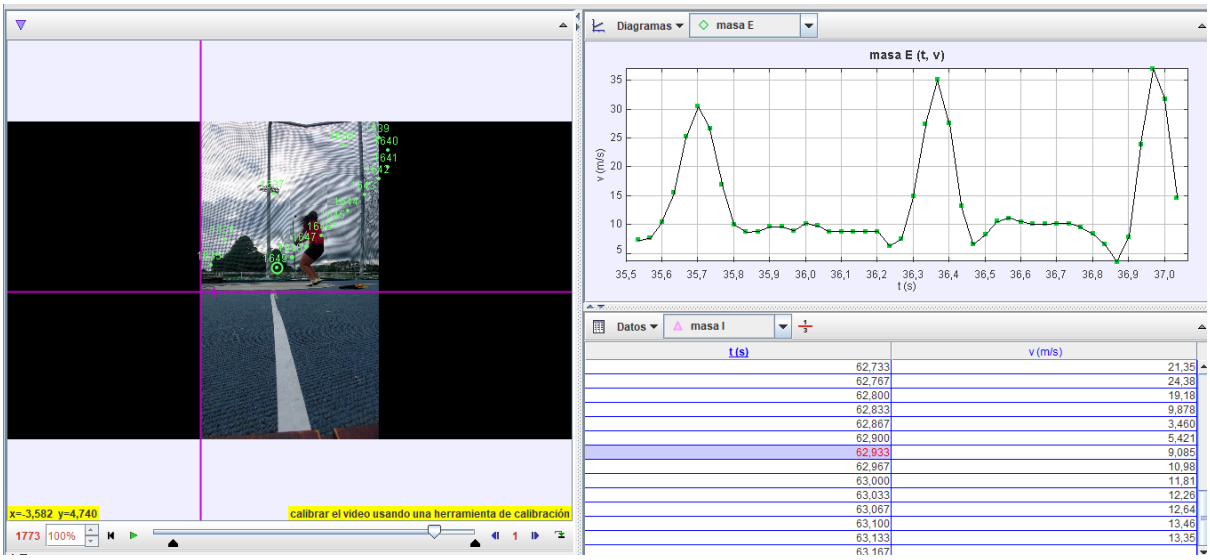


Gráfico 5. Grafica de velocidad experimental en tracker. Fuente: Elaboración propia

Dadas las velocidades experimentales, obtenidas con tracker, se puede hacer una comparación de lo que pasa tanto en lo practico como en lo experimental, es decir que se puede hacer una comparación y establecer un rango de error de experimental respecto a lo teórico.

8.3 Datos experimentales y teóricos de la velocidad inicial de los lanzamientos

Las velocidades tomadas, como se mencionó anteriormente, fueron las del fotograma donde se suelta el implemento. A continuación, se muestra la velocidad teórica y experimental del experimento:

Velocidad experimental vs Velocidad Teórica			
ITEM	Velocidad experimental (m/s)	Velocidad teórica (m/s)	Error (%)
Anderson	14,910	23,130	35,54%
Sara	16,590	17,410	4,71%
Ashley	15,290	19,490	21,55%
Ashley	11,420	18,540	38,40%
Anderson	16,310	23,540	30,71%
Sara	14,730	18,210	19,11%
Ashley	13,160	20,190	34,82%
Anderson	15,340	24,420	37,18%
Sara	28,220	20,870	35,22%
Ashley	13,460	20,110	33,07%
Sara	30,970	18,710	65,53%
Ashley	12,720	20,110	36,75%
Anderson	19,650	24,790	20,73%
Sara	42,050	19,290	117,99%
Ashley	14,470	21,290	32,03%
Anderson	15,170	24,360	37,73%
Sara	16,100	18,490	12,93%
Ashley	12,540	19,830	36,76%
Ashley	16,040	21,250	24,52%

Tabla 3. Comparación entre velocidad teórica y velocidad experimental.

Al observar la tabla comparativa entre la velocidad experimental y teórica en los lanzamientos de martillo, se evidencia una tendencia general a que la velocidad teórica sobreestima la velocidad experimental. Esto se manifiesta en la mayoría de los lanzamientos

realizados por Anderson, Sara y Ashley, donde el error porcentual calculado es positivo y, en muchos casos, considerable. Las diferencias entre los valores sugieren que el modelo teórico empleado, basado en el tiro parabólico desde una altura inicial no nula, si bien captura algunos aspectos del movimiento, no incorpora la totalidad de los factores que influyen en la velocidad real del martillo durante su lanzamiento.

La discrepancia entre la teoría y el experimento podría atribuirse a diversas fuentes de error. En el ámbito experimental, la medición de la velocidad a través del software Tracker, a partir del análisis de videos, está sujeta a imprecisiones inherentes al proceso de digitalización y seguimiento del objeto. Factores como la calidad de la grabación, la resolución espacial y temporal, la correcta calibración de la escala y la perspectiva de la cámara pueden introducir errores sistemáticos o aleatorios en la determinación de la velocidad experimental. Por otro lado, el modelo teórico simplifica la realidad al no considerar la resistencia del aire, la rotación del martillo y su efecto aerodinámico, las posibles variaciones en el ángulo de lanzamiento real respecto al ideal, y las fluctuaciones en la fuerza aplicada durante el lanzamiento. Estas omisiones en el modelo teórico podrían explicar la sobreestimación de la velocidad observada en los resultados experimentales.

A continuación, con base en la anterior tabla, y teniendo en cuenta cada uno de los pesos con los que cada sujeto lanzó, se hizo una descripción desde la estadística inferencial que se muestra en la tabla 3, a continuación:

Medidas de tendencia central					
Sujeto	Peso implemento	ITEM	Media	Mediana	Desviación estándar
Anderson	7 kg	Experimental	16,956	16,310	1,988
		Teórica	23,820	23,540	0,706

Sara	4 kg	Experimental	19,597	16,345	7,622
		Teórica	18,205	18,350	0,568
Ashley	4 kg	Experimental	12,460	12,630	0,641
		Teórica	19,667	19,970	0,664
Anderson	6 kg	Experimental	15,255	15,255	0,085
		Teórica	24,390	24,390	0,030
Sara	3 kg	Experimental	35,135	35,135	4,889
		Teórica	20,080	20,080	0,558
Ashley	3 kg	Experimental	14,815	14,880	0,959
		Teórica	20,535	20,680	0,767

Tabla 4. Medidas de tendencia central a partir de las velocidades experimentales y teóricas. Fuente: Elaboración propia.

Al observar las medidas de tendencia central de las velocidades experimentales y teóricas, se confirma la tendencia previamente identificada de que la velocidad teórica consistentemente sobreestima la velocidad experimental en los lanzamientos de martillo. Esta disparidad se evidencia en las medias y medianas calculadas para cada sujeto y peso del implemento. En particular, los lanzamientos de Anderson con martillos de 7 kg y 6 kg muestran una diferencia notable entre la velocidad predicha por la teoría y la obtenida experimentalmente. Si bien las medianas también reflejan esta sobreestimación, en algunos casos la diferencia es ligeramente menor que la observada en las medias, lo que podría sugerir la presencia de valores atípicos en los datos experimentales que influyen en el promedio.

El análisis de la desviación estándar revela una mayor variabilidad en las velocidades experimentales en comparación con las teóricas. Esta dispersión es especialmente pronunciada en los lanzamientos de Sara con martillos de 4 kg y 3 kg, donde la desviación estándar experimental supera significativamente a la teórica. Esta mayor variabilidad en los datos experimentales probablemente refleja las inconsistencias inherentes a la ejecución de lanzamientos reales, influenciadas por factores como la técnica del atleta, las condiciones

ambientales y las limitaciones en la precisión de la medición mediante análisis de video. En contraste, la menor desviación estándar en las velocidades teóricas indica una mayor consistencia en las predicciones del modelo, lo cual es esperable dada su naturaleza determinista y la ausencia de la incorporación de variables del mundo real.

La excepción a esta tendencia general se observa en los lanzamientos de Ashley, donde las desviaciones estándar entre las velocidades experimentales y teóricas son comparativamente similares para ambos pesos de martillo. Esto podría indicar una mayor consistencia en sus lanzamientos en relación con las predicciones teóricas, aunque la diferencia entre las medias de la velocidad experimental y teórica aún persiste. En resumen, el análisis estadístico refuerza la idea de que el modelo teórico empleado tiende a sobreestimar la velocidad real del martillo, y que los lanzamientos experimentales presentan una mayor variabilidad, probablemente debido a la complejidad de los factores que intervienen en la ejecución real del movimiento.

8.4Simulación en GeoGebra (función spline)

Para simular la trayectoria del lanzamiento de martillo en tres dimensiones, se analizaron videos en Tracker desde dos perspectivas: la vista frontal y la vista lateral. De la vista frontal se extrajeron los datos $(x_{frontal}, y_{frontal})$ ya que en esta proyección el eje z representa la altura y el eje y la posición horizontal. Sin embargo, para obtener la profundidad del movimiento $x_{lateral}$, se utilizó la vista lateral, de donde se extrajeron los datos del eje **x**, que en esta proyección corresponde a la profundidad real del lanzamiento. Al combinar ambas vistas, fue posible reconstruir la trayectoria del martillo en un espacio tridimensional para los tres sujetos analizados. Quedando así que cada punto de la trayectoria en 3 dimensiones se puede ver como: $(x_{lateral}, x_{frontal}, y_{frontal})$

A partir de esto, con cada uno de los sujetos analizados se usó la función de crear una lista de puntos y estos se unieron a partir de ***spline,*** la cual sirve para crear una curva suave que pasa por un conjunto de puntos dados. Es útil para modelar trayectorias o movimientos que no siguen una función matemática simple, como la trayectoria del martillo en un lanzamiento.

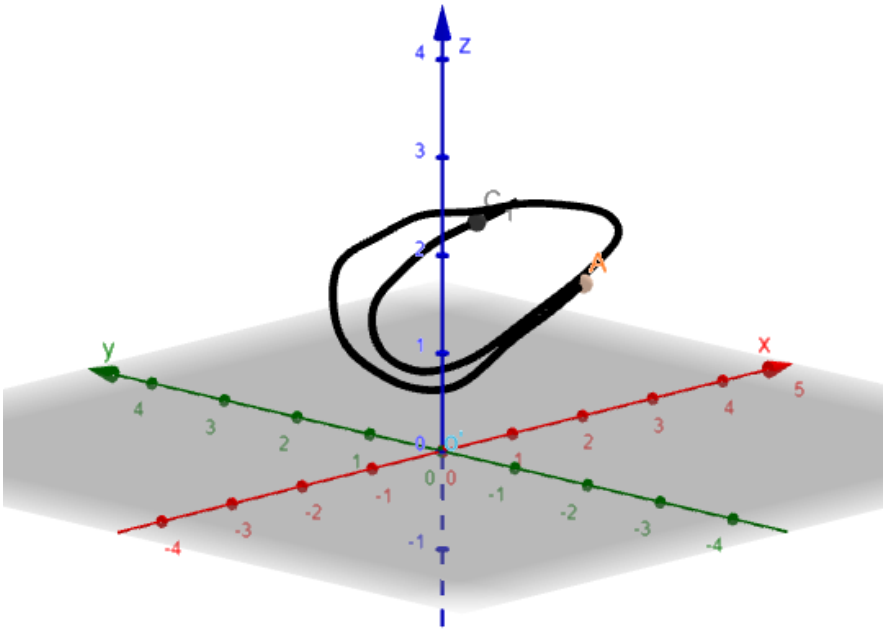


Figura 17. Representación con la función spline en Geogebra de la trayectoria del martillo. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la figura 17, la trayectoria en tres dimensiones del lanzamiento del martillo sigue e intenta imitar un círculo, en este caso solo se modelo los últimos 2 giros del lanzamiento, es decir teniendo en cuenta que cada punto, (x, y, z) tienen un parámetro (t) en común que es el tiempo, se realizó la simulación que permitió ver la trayectoria aproximada del lanzamiento en los dos últimos pivotes o giros.

La función Spline implementada en GeoGebra genera una curva paramétrica, donde las coordenadas (x, y, z) de cada punto en la curva son definidas por funciones del parámetro t, que en el contexto de un movimiento físico puede representar el tiempo. De esta manera, la trayectoria curva mostrada en la gráfica adjunta se describe por un conjunto de ecuaciones de la

forma $x(t), y(t), y\ z(t)$, permitiendo rastrear la posición del objeto en el espacio a medida que el parámetro t varía (GeoGebra Team, n.d.).

Considerando el objetivo de analizar la variación de la velocidad en el lanzamiento, específicamente en el punto de liberación del martillo, se recurre al cálculo diferencial. Al derivar la función paramétrica del spline con respecto al parámetro t (tiempo), se obtiene el vector velocidad instantánea en cada punto de la trayectoria. Este proceso de derivación, aplicado a cada componente de la función spline $\left(\frac{dt}{dx}, \frac{dt}{dy}, \frac{dt}{dz}\right)$, proporciona información detallada sobre la magnitud y dirección de la velocidad del martillo a lo largo de toda su trayectoria. La representación gráfica de esta derivada, como se puede observar en la Figura 18 (mencionada en la descripción del usuario), permite visualizar la velocidad instantánea en cada punto, incluyendo

el crucial instante de la liberación, donde se pueden analizar las características cinemáticas del lanzamiento en ese preciso momento.

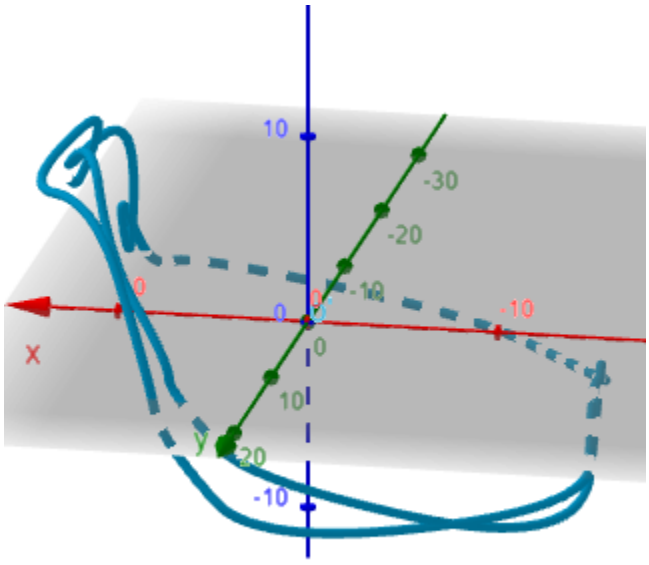


Figura 18. Representación de la derivada de la función paramétrica de la representación del lanzamiento en Geogebra. Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, para encontrar la velocidad inicial (La del punto de liberación del martillo) se ubicó el punto donde se suelta el martillo y desde ahí se encontró el vector que llega a la velocidad instantánea de ese mismo punto de la trayectoria, de la siguiente manera:

$$v = Vector\left(Punto, a' \frac{T_{liberación}}{T_{total}}\right)$$

Donde a' es la función spline derivada, T es tiempo y se obtiene a partir del software tracker, ya que en este hay un tiempo total (toda la trayectoria) y es importante precisar que se busca exactamente la derivada en el instante de tiempo de la liberación del martillo.

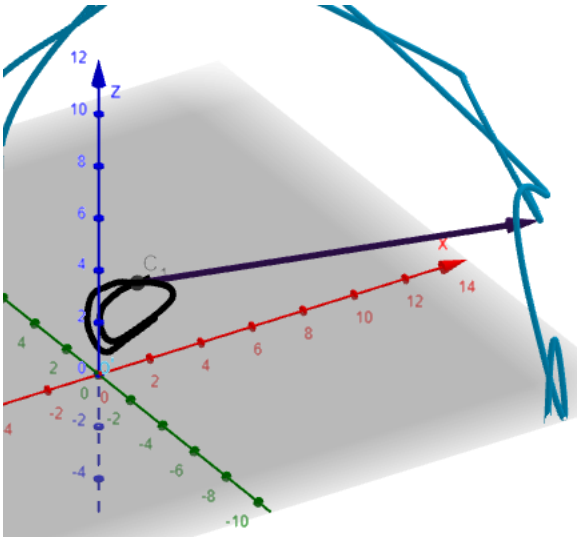


Figura 19. Punto especifico de la derivada de la función paramétrica. Fuente: Elaboración propia.

A partir del vector encontrado y con las componentes (x, y, z) de este se puede encontrar la normal o vector resultante que es el que permite encontrar la magnitud de la velocidad y se puede calcular a partir de:

$$n = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

Lo cual en teoría debería ser la velocidad inicial del movimiento.

Este proceso se realizó en los tres sujetos estudiados, por lo tanto, se relacionan los recursos construidos en GeoGebra.

Modelación Anderson: Modelación lanzamiento Anderson - GeoGebra

Modelación Sara: Modelación lanzamiento Sara - GeoGebra

Modelación Ashley: Modelación lanzamiento Ashley - GeoGebra

A partir de esta modelación, se encontró la siguiente velocidad experimental teniendo en cuenta las 3 dimensiones (x, y, z) para cada uno de los sujetos evaluados.

ITEM	Velocidad Tracker (m/s)	Velocidad Simulación (m/s)	Error (%)
Anderson	14,910	13,970	6,73%
Sara	15,680	13,810	13,54%
Ashley	15,110	9,260	63,17%

Tabla 5. Comparación velocidad en tracker y en simulación en Geogebra. Fuente: Elaboración propia.

La modelación realizada en GeoGebra permitió simular con gran precisión la trayectoria tridimensional del lanzamiento del martillo, enfocándose en los dos últimos giros antes de la liberación. A partir de videos analizados desde dos vistas ortogonales (frontal y lateral) y del uso del software Tracker, fue posible obtener los datos de posición en los ejes x, y, z que posteriormente fueron combinados para reconstruir el movimiento en 3D. Esta reconstrucción se representó en GeoGebra mediante funciones *spline*, que permitieron suavizar las trayectorias y establecer relaciones paramétricas con respecto al tiempo.

El análisis de la derivada de estas funciones spline hizo posible calcular el vector velocidad instantánea en cualquier punto de la trayectoria, especialmente en el instante crítico de la liberación del martillo. A partir de dicho vector, se obtuvo la magnitud de la velocidad, considerada como la velocidad inicial del lanzamiento. Este procedimiento se aplicó a tres sujetos distintos, generando para cada uno una simulación individual.

Finalmente, al comparar la velocidad obtenida mediante Tracker con la simulación realizada en GeoGebra, se evidenció una concordancia aceptable en dos de los tres casos analizados. Los errores porcentuales encontrados fueron de 6,73 % para Anderson y 13,54 % para Sara, lo cual valida la precisión del modelo. No obstante, en el caso de Ashley se presentó un error significativamente mayor (63,17 %), lo que sugiere posibles imprecisiones en la identificación del punto de liberación o en el seguimiento de la trayectoria en las vistas originales.

En resumen, esta modelación permitió comprender mejor las características cinemáticas del lanzamiento de martillo y demostró que, con herramientas digitales accesibles como GeoGebra y Tracker, es posible analizar movimientos complejos con un alto grado de detalle y precisión.

8.5 Actividades matemáticas en el proceso de matematización. una perspectiva desde la formación de profesores de matemáticas

La presente investigación se adentra en el proceso de matematización de la actividad deportiva del lanzamiento de martillo, con el objetivo explícito de caracterizar las estructuras y relaciones matemáticas inherentes a su ejecución y comprensión. Este abordaje no solo persigue una descripción del fenómeno deportivo, sino que se erige como un medio directo y significativo para complejizar el conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva de la modelación matemática. Esta complejización se fundamenta en la capacidad del futuro docente para transitar el ciclo de modelación, desde la identificación del problema en el mundo real hasta la interpretación de los resultados matemáticos y su aplicación (Kaiser & Sriraman, 2007; Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021).

Para ello, se diseñó una metodología secuencial y estructurada que abarcó diversas etapas. Inicialmente, se llevó a cabo una fase de identificación y selección de los objetos matemáticos relevantes para el estudio, basándose en la revisión de la literatura especializada en biomecánica deportiva (Bartonietz & Borgstöm, 1995; Frutos, 2014; Biomechanics of the Hammer Throw: Narrative Review, 2022) y complementada con las perspectivas de expertos en biomecánica y entrenamiento de lanzamiento de martillo. Esta fase inicial es crucial para el futuro profesor, ya que lo entrena en la capacidad de discernir las estructuras matemáticas subyacentes en fenómenos del mundo real, un pilar de la modelación y una competencia esencial en la formación docente (Barquero Ocampo & Chaves Montero, 2023; Greefrath et al., 2021). Posteriormente, se procedió a la recolección sistemática de datos empíricos mediante la grabación de lanzamientos (Paso 2), estableciendo una base objetiva para el análisis cuantitativo

y la posterior construcción de modelos. La etapa siguiente se centró en el análisis detallado de estos datos (Paso 3), extrayendo la información necesaria para inferir la dinámica del movimiento del implemento durante el lanzamiento, permitiendo una transición rigurosa del fenómeno observado a los datos matemáticos procesables.

Un componente crucial de la investigación fue la construcción de un modelo analítico del lanzamiento de martillo (Paso 4), cuya validez y limitaciones se exploraron mediante su comparación con una simulación generada a través del software de análisis de video Tracker. Este ejercicio de modelización y validación es fundamental para el conocimiento profesional del docente, ya que le permite comprender las interacciones y la tensión inherente entre la teoría matemática y la realidad empírica (Borromeo Ferri & Blum, 2009; Maass, 2006). Además, se realizó un estudio comparativo de las velocidades experimental, obtenida del análisis de video (Paso 5), y teórica, calculada a partir del modelo analítico, profundizando en la aplicación de conceptos avanzados del cálculo diferencial y el álgebra vectorial, como la derivada y los componentes vectoriales (Resnick, Halliday, & Krane, s.f.), elementos esenciales para una comprensión profunda del fenómeno desde la perspectiva de la modelación matemática. Los resultados cuantitativos obtenidos fueron sometidos a un análisis estadístico inferencial (Paso 6), con el fin de extraer conclusiones significativas y discernir patrones en el rendimiento de los atletas (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018), lo que complejiza la interpretación de los modelos al considerar la variabilidad inherente a los datos reales. Finalmente, se implementó una simulación paramétrica tridimensional utilizando la función spline en el entorno de GeoGebra (Paso 7), modelando los instantes cruciales de los dos últimos giros del lanzamiento en función del tiempo, lo que a su vez permitió la aproximación de la velocidad del martillo en cada punto

de su trayectoria (Paso 8). La investigación culminó con un análisis estadístico comparativo del desempeño de los atletas observados (Paso 9), buscando identificar variaciones y consistencias en sus ejecuciones y proporcionando una visión integral de la utilidad y poder predictivo de la modelación en el deporte.

A continuación, se detallarán los pasos específicos que conformaron este proceso de matematización. Estos pasos serán posteriormente analizados a la luz de las categorías de la Actividad Matemática (A.M.) propuestas por Giaquinto (2005), ofreciendo una perspectiva integral de la naturaleza del pensamiento matemático involucrado en la comprensión de esta disciplina deportiva y, crucialmente, en la complejización del conocimiento del profesor de matemáticas en la perspectiva de la modelación matemática.

Numeración de series de pasos:

1. **Identificación y Selección de Objetos Matemáticos:** Se llevó a cabo una fase inicial de búsqueda teórica y entrevistas con expertos para identificar los objetos matemáticos pertinentes al análisis del lanzamiento de martillo.
2. **Recolección de Datos Audiovisuales:** Se procedió a la grabación sistemática de lanzamientos de martillo para la posterior extracción de información relevante.
3. **Análisis y Extracción de Datos:** Los objetos matemáticos identificados fueron analizados, y se extrajeron los datos necesarios para realizar inferencias sobre la dinámica del lanzamiento.

4. **Desarrollo y Comparación de Modelos:** Se construyó un modelo analítico del lanzamiento de martillo, el cual fue posteriormente contrastado con el análisis de una simulación realizada mediante el software Tracker.

5. **Análisis de Velocidades Experimental y Teórica:** Se realizó un estudio comparativo de las velocidades experimental y teórica de los lanzamientos, abordando de manera implícita y explícita conceptos como la derivada, los componentes vectoriales y las variables inherentes al proceso de matematización.

6. **Inferencia Estadística de Resultados:** Se aplicaron técnicas de estadística inferencial para analizar los resultados obtenidos en las etapas previas.

7. **Simulación Paramétrica Tridimensional en GeoGebra:** Se implementó una simulación en GeoGebra de los dos últimos giros del lanzamiento, modelándolos mediante la función spline para obtener una representación paramétrica tridimensional donde el tiempo actuó como parámetro.

8. **Derivación y Aproximación de la Velocidad:** Se calculó la derivada de la función paramétrica obtenida, cuya norma o magnitud en cada punto se interpretó como una aproximación de la velocidad a lo largo del recorrido del martillo.

9. **Análisis Estadístico Comparativo entre Atletas:** Se efectuó un análisis estadístico con el objetivo de identificar patrones y diferencias en los lanzamientos de cada atleta grabado.

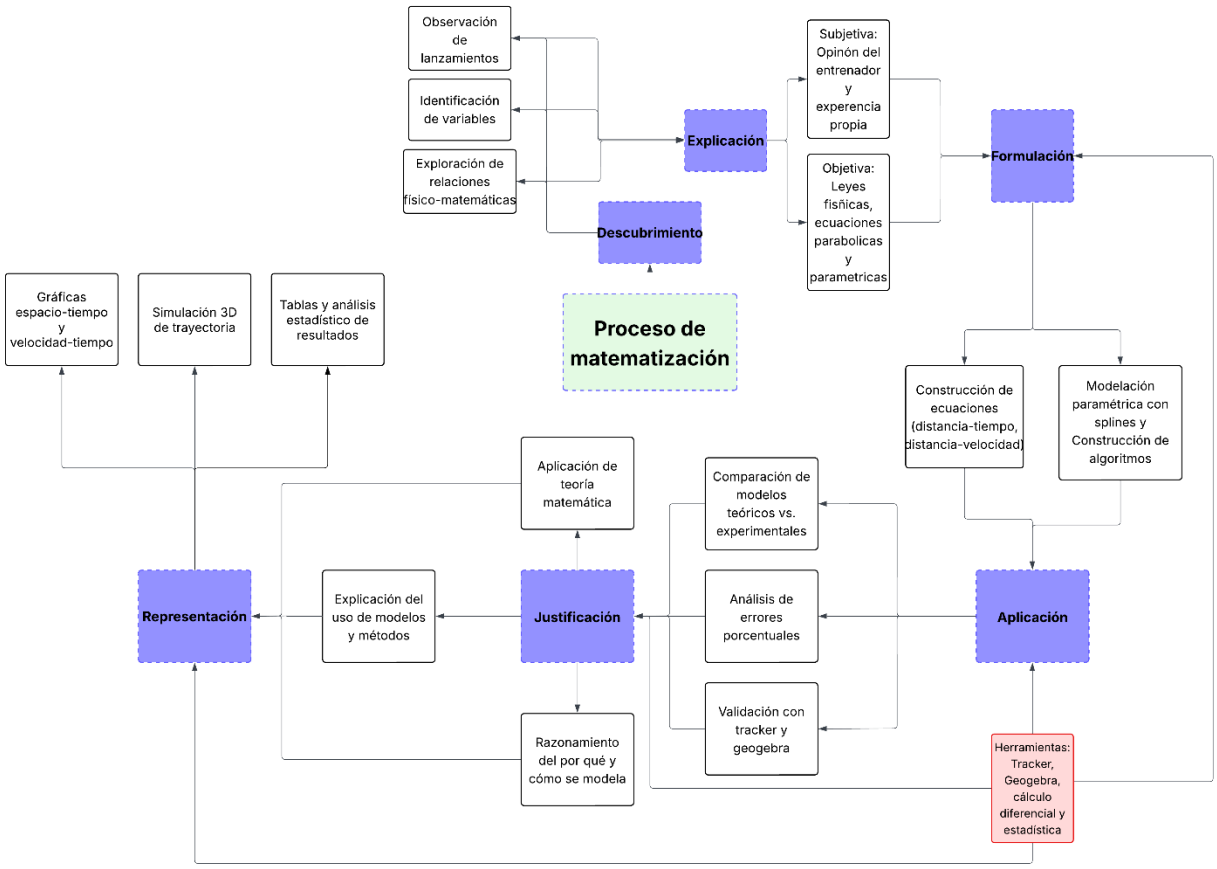


Figura 20 . Mapa conceptual de proceso de matematización en vinculación con las AM de Quiaquinto (2025)

Proceso de matematización en vinculación con las categorías de la actividad matemática

Descubrimiento: Sentando las Bases del Pensamiento Matemático para la Modelación

La fase de descubrimiento es fundamental en la formación docente porque inicia al futuro profesor en la identificación de elementos matemáticos en situaciones no estructuradas, transformando la mera observación en una indagación matemática rigurosa (Giaquinto, 2005). La observación inicial del lanzamiento de martillo, particularmente a través de la Recolección de

Datos Audiovisuales (Paso 2), donde se perciben trayectorias curvas, alturas máximas y velocidades aparentes, entrena la capacidad del docente para "ver" las matemáticas en el mundo real, una habilidad fundamental en la Matemática Realista propuesta por Freudenthal (1991) y Treffers (1987), que busca conectar los conceptos abstractos con la experiencia (González, s.f.; Loyola Malqui & Huamán Vila, 2025). Este proceso es crítico para que el profesor aprenda a descontextualizar un fenómeno concreto y llevarlo al ámbito matemático, superando la percepción de las matemáticas como una disciplina puramente abstracta (García, s.f.; Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021) y reconociéndolas como una herramienta inherente para la descripción y el modelado de la realidad.

El análisis de las gráficas espacio-tiempo en Tracker, un proceso empírico derivado del Análisis de Velocidades Experimental y Teórica (Paso 5), es un claro ejemplo de descubrimiento en la modelación. Este análisis, basado en datos cinemáticos empíricos (Dapena, 1984, 1986, 1989a, 1989b; Fujii & Ae, 2008; Fujii et al., 2007), revela propiedades del movimiento como su naturaleza (uniforme, acelerado), la velocidad instantánea a través de la pendiente de la tangente, la dirección del movimiento mediante el signo de la pendiente, y la magnitud/dirección de la velocidad a través de los vectores. Esta experiencia expone al docente a la riqueza de la información que puede extraerse de datos empíricos para construir y validar modelos, promoviendo una comprensión funcional de conceptos fundamentales del cálculo, como la derivada y su relación con la velocidad instantánea. Además, el contraste entre el ángulo óptimo teórico (aproximadamente 45° en un lanzamiento ideal sin resistencia del aire, según modelos físicos simplificados) y las desviaciones observadas en los datos experimentales obtenidos empíricamente, no es un mero hallazgo; es un acto de descubrimiento que impulsa al futuro

docente a reflexionar sobre la complejidad de los factores reales (como la resistencia del aire o las variaciones técnicas del atleta) que modifican el ideal en la práctica, complejizando su conocimiento sobre las limitaciones y perfeccionamiento de los modelos y fomentando una enseñanza más crítica y realista de la modelación matemática.

Explicación Subjetiva: Construyendo la Comprensión Conceptual para la Comunicación de Modelos

La explicación Subjetiva es vital en la formación inicial docente porque aborda la construcción de sentido personal sobre el fenómeno estudiado y las decisiones metodológicas tomadas en el proceso de modelación (Giaquinto, 2005). La descripción inicial del movimiento, derivada directamente del Análisis y Extracción de Datos (Paso 3) basada en la observación de los videos, permite al futuro profesor articular sus primeras impresiones de manera estructurada y desarrollar un lenguaje descriptivo preciso. Esta habilidad es fundamental para introducir fenómenos complejos en el aula y para iniciar el ciclo de modelación con sus estudiantes, fomentando una comprensión inicial que luego podrá ser formalizada (Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021).

Asimismo, la justificación de la elección de variables, fundamentada en la Identificación y Selección de Objetos Matemáticos (Paso 1) a partir de la revisión teórica y la opinión del experto (la entrevista semiestructurada con Carlos Ladino, una técnica cualitativa que permite explorar en profundidad las perspectivas, Abad, 2018; Denzin, 1978; Flick, 2014), enseña al docente a argumentar y fundamentar sus elecciones metodológicas en bases sólidas. Este es un hábito indispensable para la práctica pedagógica, que promueve la rigurosidad en la planificación y el discurso (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Forero Poveda, 2020), y es crucial

para guiar a los estudiantes en las decisiones iniciales de un problema de modelación. La interpretación de las gráficas de desplazamiento y velocidad en Tracker, que revelan la trayectoria y los puntos clave del movimiento del martillo, entrena al docente para no solo leer datos, sino para darles significado contextualizado y explicarlos a otros, lo cual es esencial para una enseñanza significativa de la modelación.

Finalmente, la descripción del proceso de creación del spline en Simulación Paramétrica Tridimensional en GeoGebra (Paso 7) y la interpretación del vector velocidad obtenido de la Derivación y Aproximación de la Velocidad (Paso 8) son ejemplos clave de cómo el profesor en formación aprende a argumentar el significado físico de conceptos matemáticos abstractos (como un vector o una derivada de una función paramétrica), conectándolos con la realidad concreta y observable del lanzamiento de martillo. Esta capacidad de vincular lo abstracto con lo real y de explicarlo claramente es un pilar fundamental en la didáctica de las matemáticas y en la enseñanza de la modelación, complejizando la forma en que el docente entiende y comunica el modelo.

Explicación Objetiva: Rigor y Fundamentación Matemática en la Validación de Modelos

La explicación objetiva es crucial para el profesor de matemáticas porque establece el rigor y la fundamentación de sus argumentos en el proceso de modelación (Giaquinto, 2005), dotándolos de un carácter predictivo y verificable. La aplicación de la ecuación de tiro parabólico para argumentar la distancia teórica, en el contexto del Desarrollo y Comparación de Modelos (Paso 4), y el uso del cálculo diferencial para obtener la velocidad en el Análisis de Velocidades Experimental y Teórica (Paso 5) y la Derivación y Aproximación de la Velocidad

(Paso 8), enseñan al docente a justificar sus modelos y cálculos con principios físicos (Resnick, Halliday, & Krane, s.f.) y matemáticos establecidos (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Este es un componente esencial para construir una base sólida en el contenido matemático que luego podrán transmitir con confianza y precisión, y para comprender las bases de los modelos matemáticos complejos.

La interpretación de las medidas de tendencia central y desviación estándar, resultado de la Inferencia Estadística de Resultados (Paso 6) y el Análisis Estadístico Comparativo entre Atletas (Paso 9), es particularmente importante para la explicación objetiva de los modelos. La estadística inferencial permite al docente evaluar la significancia de las diferencias y la variabilidad de los datos experimentales de manera rigurosa, minimizando la subjetividad en la interpretación (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018; Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Esta capacidad es fundamental para analizar el rendimiento deportivo y discernir patrones con base científica, lo que complejiza el conocimiento del profesor sobre la validación estadística de los modelos y la interpretación de sus resultados en contextos de incertidumbre.

Además, la justificación matemática de la función spline en la Simulación Paramétrica Tridimensional en GeoGebra (Paso 7), por sus propiedades de interpolación y suavizado (Cárdenas & Suárez, 2018), y el uso de la norma del vector para calcular la magnitud de la velocidad en la Derivación y Aproximación de la Velocidad (Paso 8), demuestran cómo el docente debe aplicar y argumentar la necesidad de herramientas matemáticas avanzadas para una caracterización precisa y objetiva de un fenómeno complejo. Esto fortalece su conocimiento disciplinar y su habilidad para seleccionar y justificar las herramientas de modelación adecuadas, complejizando su capacidad de análisis y rigor en la construcción de modelos realistas.

Formulación: Construcción y Adaptación de Modelos para la Solución de Problemas

La formulación es una actividad matemática vital en la formación docente porque se enfoca en la capacidad de construir y adaptar modelos matemáticos a situaciones del mundo real, una habilidad central en la resolución de problemas aplicados y la modelación (Giaquinto, 2005; Kaiser & Sriraman, 2007; Malaspina Jurado & Herrera Siesquen, 2021). La Adopción de la ecuación de tiro parabólico (Paso 4), aunque es un modelo preexistente, implica una actividad de formulación al adaptar sus condiciones de aplicación (como la consideración de la altura inicial) al contexto específico del lanzamiento de martillo. Esta capacidad de reconocer y seleccionar un modelo adecuado y generalizable es crucial para el futuro profesor, ya que le permite identificar su versatilidad para problemas semejantes en otras disciplinas deportivas de lanzamiento (jabalina, disco, bala), entrenando así su pensamiento modelizador y su capacidad de transferir información (Barquero Ocampo & Chaves Montero, 2023; Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024).

Un ejemplo más avanzado de formulación es la Construcción de la función spline paramétrica en GeoGebra (Paso 7). Este desarrollo representa la creación de un modelo matemático específico y adaptado a la trayectoria observada del martillo, mostrando cómo el docente puede desarrollar herramientas matemáticas personalizadas para un fenómeno particular. Esta formulación es adaptable a situaciones similares que involucren trayectorias complejas, buscando optimizar el gesto deportivo, y es un claro ejemplo de cómo la modelación va más allá de la aplicación de fórmulas preestablecidas, exigiendo creatividad y adaptación de herramientas matemáticas avanzadas.

La enunciación del algoritmo para calcular la velocidad teórica, definido bajo las condiciones propias del lanzamiento de martillo (altura de liberación, distancias, etc.), y el desarrollo del método para obtener la velocidad experimental con Tracker (ambos implícitos en el Análisis de Velocidades Experimental y Teórica, Paso 5), refuerzan la habilidad del docente para definir procedimientos rigurosos y sistemáticos para la construcción de datos para un modelo. Finalmente, la construcción del método para obtener la velocidad a partir de la derivada del spline (Paso 8) muestra la capacidad de formular nuevas aproximaciones integrando distintas herramientas y conceptos del cálculo diferencial para resolver un problema físico, lo que enriquece su repertorio de modelador y complejiza su conocimiento sobre las técnicas de aproximación y derivación en contextos aplicados.

Aplicación: Transferencia y Pertinencia de los Modelos Matemáticos

La aplicación es quizás la actividad matemática más evidente de la importancia de la modelación en la formación docente (Giaquinto, 2005), ya que se refiere a la transferencia de conceptos, modelos o métodos matemáticos construidos o comprendidos en un fenómeno particular a contextos análogos o diferentes para analizar o resolver problemas. En este proceso de matematización del lanzamiento de martillo, la Aplicación se evidencia en aspectos cruciales para la formación del profesorado y la utilidad práctica de la modelación.

La utilización de la velocidad teórica para validar datos experimentales, ligada al Análisis Estadístico Comparativo entre Atletas (Paso 9), es una aplicación directa que enseña al docente a contrastar la teoría con la práctica (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024). Esta validación no solo verifica la coherencia del modelo, sino que también permite evaluar la eficiencia real de

un lanzamiento (Dapena, 1984) y diagnosticar posibles áreas de mejora, demostrando la función diagnóstica y predictiva de la modelación en el rendimiento deportivo (Gutiérrez & Soto, 2001).

La modelización de trayectorias en otros lanzamientos o disciplinas, utilizando la función spline desarrollada en la Simulación Paramétrica Tridimensional en GeoGebra (Paso **7)**, demuestra la versatilidad de los métodos de interpolación y representación de modelos. Más allá del martillo, esta misma aproximación paramétrica podría ser aplicada para analizar y modelar trayectorias de otros implementos en atletismo (jabalina, disco, bala) o gestos deportivos similares (Cárdenas & Suárez, 2018), evidenciando la amplitud de la aplicabilidad matemática y complejizando la visión del docente sobre el alcance de la modelación más allá de un caso particular.

Asimismo, la extrapolación de conclusiones cinemáticas a fenómenos análogos (Paso 9) permite que los hallazgos sobre la variabilidad de la velocidad o la interacción entre altura y ángulo de liberación no se limiten al martillo. Estos pueden ser generalizados para comprender la dinámica de otros movimientos proyectiles o rotacionales en física o ingeniería, fomentando la capacidad del futuro profesor para transferir el conocimiento matemático a nuevos contextos y demostrar la utilidad de las matemáticas como herramienta universal de análisis (Rojas, 2017; Macias-Becerra et al., 2022).

Un aspecto sumamente importante de la aplicación en la formación inicial docente es el diseño de herramientas pedagógicas basadas en el modelo. La experiencia de construir el modelo analítico y la simulación en GeoGebra (Paso 7 y 9) capacita al futuro profesor para transformar estas construcciones matemáticas en recursos didácticos dinámicos (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Olawale & Hendricks, 2024). Esto les permite enseñar conceptos

complejos de cálculo (derivadas, vectores), geometría (trayectorias parabólicas, splines) o estadística (análisis de datos, error) en un contexto real y altamente motivador, demostrando cómo la matematización impacta directamente en la práctica pedagógica y complejiza su conocimiento didáctico-matemático (Bello & Forero, c.2016).

Representación: Claridad y Comunicación del Pensamiento Matemático a través de Modelos

La representación es una actividad matemática transversal que es esencial en la formación docente porque se relaciona directamente con la claridad y la efectividad en la comunicación del pensamiento matemático y de los modelos construidos (Giaquinto, 2005). El uso de diversas formas de representación, como las gráficas espacio-tiempo y de velocidad en Tracker (provenientes del análisis experimental y la extracción de datos) y los modelos analíticos a través de ecuaciones (Pasos 4 y 5), enseña al futuro profesor la importancia de traducir datos y teorías en formatos comprensibles y visualizables.

La simulación tridimensional en GeoGebra (Paso 7) proporciona una representación gráfica dinámica de la trayectoria modelada con splines, lo cual es una herramienta poderosa para visualizar fenómenos complejos (Cárdenas & Suárez, 2018), mientras que los vectores velocidad en GeoGebra (Paso 8) ofrecen una representación gráfica de la velocidad instantánea, visualizando conceptos abstractos. Además, las tablas de datos experimentales y teóricos (Tabla 1 y 2), junto con las tablas de medidas de tendencia central y desviación estándar (Tabla 3), ofrecen una representación organizada y estadística de los resultados, vital para la comunicación de hallazgos cuantitativos. Las gráficas de ajuste del movimiento en Tracker (Gráfico 1 y 2) y las gráficas de velocidad obtenidas por Tracker (Gráfico 3 y 4), junto con la tabla comparativa de

velocidades Tracker vs. Simulación (Tabla 4), son representaciones visuales y numéricas que validan los modelos y facilitan la comparación entre lo teórico y lo empírico.

Esta habilidad de utilizar múltiples formas de representación (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Matemáticas y contexto, 2000) es crucial para el docente, ya que le permite explicar conceptos complejos de manera accesible a sus estudiantes, organizar la información de forma efectiva y validar los modelos construidos de forma intuitiva. Un profesor competente en representación puede transitar fluidamente entre lo simbólico, lo gráfico, lo numérico y lo verbal, facilitando la comprensión del proceso de matematización en el aula y fortaleciendo su didáctica, preparándolos para enseñar la modelación como un lenguaje que interconecta diferentes representaciones de la realidad y del modelo matemático.

8.6 La Matematización del Lanzamiento de Martillo como Herramienta de Decisión y Mejora para el Conocimiento del Profesor de Matemáticas

El análisis de los datos y modelos construidos a lo largo de esta investigación, desarrollado con exhaustividad en los apartados previos sobre las Actividades Matemáticas, no se limita a una descripción del fenómeno del lanzamiento de martillo. Por el contrario, profundiza en cómo el proceso de matematización, en su totalidad, se convierte en una herramienta invaluable para que el futuro profesor de matemáticas tome decisiones fundamentadas y mejore su comprensión de la actividad deportiva, complejizando su conocimiento profesional en la perspectiva de la modelación matemática. Esta perspectiva se alinea con la visión de la matematización propuesta por Freudenthal (1991) y Treffers (1987), quienes enfatizan que el objetivo final es el desarrollo de un pensamiento matemático funcional y aplicado que impacte directamente en la realidad (Loyola Malqui & Huamán Vila, 2025;

González, s.f.). A continuación, se detalla cómo la interconexión de las diversas actividades matemáticas, a través de la modelación del lanzamiento de martillo, contribuyó a este propósito central.

El inicio de este camino de análisis se fundamentó en el descubrimiento, una actividad que transformó la mera observación en una indagación matemática rigurosa, tal como se detalló previamente. Mediante la observación inicial y el meticuloso análisis de las gráficas espacio-tiempo generadas por Tracker, el futuro docente fue capaz de identificar y revelar propiedades cinemáticas cruciales del movimiento del martillo. Un hallazgo particularmente significativo fue la detección de la relación intrínseca entre la derivada y la velocidad instantánea, una conexión fundamental que dota al profesor de la capacidad de comprender la dinámica del movimiento desde una perspectiva de cálculo avanzada, reforzando su conocimiento para la enseñanza de la modelación y la interpretación de fenómenos cambiantes. Este proceso de descubrimiento se amplió al contrastar el ángulo óptimo teórico ideal con las desviaciones observadas en los datos experimentales (Dapena, 1984), lo cual fomentó una reflexión crítica sobre los factores reales que modifican el rendimiento y sentó las bases para identificar posibles áreas de mejora y optimización en el lanzamiento, un aprendizaje valioso para abordar la complejidad de los modelos en la práctica y sus limitaciones.

Complementando este proceso inicial, la explicación, tanto en su vertiente subjetiva como en la objetiva, consolidó la comprensión profunda y la base argumentativa necesaria para futuras intervenciones pedagógicas del profesor. La justificación de las variables y la interpretación de los datos cinemáticos, sustentadas en el rigor del cálculo diferencial (Resnick, Halliday, & Krane, s.f.) y la estadística inferencial (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018),

capacitaron al docente para evaluar de forma objetiva la eficiencia de un lanzamiento específico, identificar desviaciones del óptimo matemático y, en consecuencia, precisar dónde y cómo se podría intervenir para mejorar el rendimiento deportivo (Gutiérrez & Soto, 2001). Esta capacidad de explicar con fundamento teórico-matemático es un pilar para la toma de decisiones informadas, tanto en el análisis deportivo como en la comunicación de modelos matemáticos a estudiantes, complejizando su Pedagogical Content Knowledge (PCK) para la modelación (Greefrath et al., 2021).

La formulación representó la fase donde se crearon las herramientas matemáticas indispensables para el diagnóstico y la optimización del gesto deportivo, aspectos esenciales en la modelación. La adopción y adaptación de modelos preexistentes, como la ecuación de tiro parabólico, junto con la construcción de modelos específicos como la función spline paramétrica en GeoGebra, como se detalló anteriormente, proporcionaron al futuro docente y al propio deportista una herramienta diagnóstica invaluable. Con ella, se puede analizar la trayectoria específica del martillo con alta fidelidad, identificar puntos críticos de liberación o ángulos ineficientes, y comparar el rendimiento individual con modelos óptimos previamente establecidos (Maronski, 1991), lo que se traduce directamente en la capacidad de proponer mejoras técnicas y estratégicas. Este proceso de formulación en un contexto real complejiza el conocimiento del profesor sobre cómo construir, refinar y validar modelos matemáticos, preparándolo para diseñar tareas de modelación auténticas en el aula (Carrillo-Yañez et al., 2018; Juandi et al., 2021).

Finalmente, la aplicación y la representación son las actividades que materializaron el impacto de la matematización en la capacidad de toma de decisiones y mejora, tanto a nivel

pedagógico como deportivo. La utilización de la velocidad teórica para validar datos experimentales (Dapena, 1984) permitió un contraste directo entre la teoría y la práctica, evaluando la eficiencia real del lanzamiento. La trascendencia de la aplicación se manifestó en la modelización de trayectorias en otros lanzamientos o disciplinas y la extrapolación de conclusiones cinemáticas a fenómenos análogos (Rojas, 2017), demostrando cómo el docente en formación puede transferir el conocimiento matemático adquirido a otras áreas de la física o el deporte, evidenciando la versatilidad de la modelación y su capacidad de generalización. Más allá del análisis científico, la aplicación didáctica se concretó en el diseño de herramientas pedagógicas basadas en el propio modelo analítico y la simulación en GeoGebra. Esto capacita al futuro profesor para transformar sus construcciones matemáticas en recursos educativos dinámicos (Chavarría-Vásquez & Gamboa-Araya, 2024; Olawale & Hendricks, 2024), que permiten enseñar conceptos complejos de cálculo, geometría y estadística en un entorno real y altamente motivador. La representación, omnipresente a través de gráficas (espacio-tiempo, velocidad, 3D), ecuaciones, tablas de datos y vectores, no solo facilitó la comprensión, sino que proporcionó el lenguaje visual y simbólico para comunicar diagnósticos precisos sobre el lanzamiento y proponer estrategias de mejora basadas en evidencia matemática, convirtiendo las matemáticas en una herramienta para la acción y la optimización del rendimiento, lo que es clave para la enseñanza efectiva de la modelación y la complejización del conocimiento didáctico del profesor (Bello & Forero, c.2016).

En síntesis, el análisis profundo de los procesos de matematización del lanzamiento de martillo demuestra concluyentemente que este enfoque dota al futuro profesor de matemáticas de una capacidad excepcional para comprender críticamente, analizar rigurosamente y proponer

mejoras activas en un fenómeno real. Al ir más allá de la simple descripción, la matematización, en la perspectiva de la modelación matemática, permite identificar variables clave, proponer escenarios óptimos, analizar desviaciones y fundamentar decisiones orientadas a la optimización. Este enfoque no solo complejiza su conocimiento profesional en un sentido teórico, al integrar conceptos avanzados de cálculo, estadística y biomecánica, sino que lo prepara para enseñar matemáticas como una disciplina viva, pertinente y directamente aplicable a los desafíos del mundo real, y para guiar a sus propios estudiantes en el ciclo de la modelación matemática como una forma auténtica de hacer y comprender las matemáticas.

9. Conclusiones

El estudio demostró que el desarrollo de un proceso de matematización, enmarcado en el análisis de un fenómeno real como el lanzamiento de martillo, es un catalizador potente para un aprendizaje matemático profundo. Este proceso, que transita rigurosamente entre la observación cualitativa (a través de entrevistas con expertos en biomecánica deportiva) y el análisis cuantitativo (mediante la extracción y sistematización de datos de videos con el software Tracker), culminó en la construcción de modelos matemáticos capaces no solo de describir el movimiento del implemento, sino también de explicar y predecir su comportamiento dinámico.

La integración de herramientas tecnológicas fue fundamental en este desarrollo. La utilización de Tracker permitió la sistematización precisa de datos cinemáticos, convirtiendo la observación empírica en información cuantitativa manejable. Por su parte, GeoGebra se reveló como una herramienta indispensable para la simulación tridimensional y la representación dinámica de la trayectoria del martillo mediante funciones spline paramétricas. Esta capacidad de transitar entre el dato crudo, el análisis numérico y la visualización interactiva enriqueció profundamente la comprensión espacial y temporal del movimiento, constituyendo un prototipo de proceso de modelación replicable y adaptable.

Asimismo, la aplicación del cálculo diferencial, específicamente a través de las derivadas del spline para obtener la velocidad de simulación, y su posterior comparación con la velocidad experimental y teórica, validó la potencia de las matemáticas para modelar y aproximar la realidad física del lanzamiento. Este ejercicio de validación y análisis de error no solo confirmó la coherencia de los modelos construidos, sino que también expuso sus limitaciones y la variabilidad inherente de los datos empíricos. Esta experiencia directa es una lección esencial

para el futuro profesor, quien aprende a apreciar la incertidumbre y la necesidad de refinar los modelos en la práctica, un componente crucial de la perspectiva de la modelación matemática.

Adicionalmente, la investigación permitió la clara identificación y caracterización de las cinco Actividades Matemáticas (A.M.) propuestas por Giaquinto (2005) —Descubrimiento, Explicación (Subjetiva y Objetiva), Formulación, Aplicación y Representación— dentro del proceso de modelación del lanzamiento de martillo. Esta caracterización concluye que la matematización trasciende la mera aplicación de fórmulas o algoritmos preestablecidos; en cambio, es un proceso dinámico y multifacético. Estas actividades se revelaron como pilares para desarrollar un pensamiento matemático integral en el contexto de un fenómeno real, fomentando la observación crítica, la argumentación fundamentada, la creatividad en la construcción de modelos y la efectividad en la comunicación de los hallazgos.

Particularmente, la fase de descubrimiento demostró ser un potente motor para el aprendizaje, al permitir la observación inicial del lanzamiento y el análisis de gráficas en Tracker. Esto promovió la identificación autónoma de propiedades cinemáticas del movimiento y la relación inherente entre la derivada y la velocidad. Este tipo de descubrimiento activo, impulsado por datos empíricos, es fundamental para caracterizar cómo el estudiante (y el profesor en formación) puede "desenterrar" las matemáticas presentes en su entorno.

La explicación, tanto subjetiva (basada en observaciones iniciales y juicios previos al modelado formal) como objetiva (sustentada en principios matemáticos y análisis riguroso de datos), es crucial para construir y comunicar el conocimiento matemático. El proceso de justificar la elección de variables, interpretar gráficas complejas y aplicar modelos analíticos

caracterizó la necesidad de una argumentación sólida y coherente, que vincula los conceptos abstractos con el fenómeno real.

La formulación de modelos, evidenciada en la adaptación de modelos físicos clásicos como el tiro parabólico al contexto del lanzamiento y la construcción de un modelo más complejo como el spline paramétrico, caracterizó la habilidad de crear y refinar estructuras matemáticas adecuadas para representar el fenómeno. Esto subraya que la matematización requiere que el docente sea un constructor de modelos, no solo un aplicador, lo que implica la capacidad de seleccionar o diseñar las herramientas matemáticas más apropiadas para cada problema específico.

La aplicación de los modelos y conclusiones a contextos análogos (como otros lanzamientos deportivos o fenómenos cinemáticos) y el diseño de herramientas pedagógicas basadas en la modelación, caracterizó la transferibilidad y utilidad del conocimiento adquirido. Esto demostró cómo las matemáticas pueden ir más allá de un caso particular, ofreciendo soluciones generalizables.

Finalmente, la representación se caracterizó como un elemento transversal y esencial en todo el proceso de matematización. La variedad de representaciones utilizadas (gráficas de Tracker, modelos analíticos, simulaciones 3D en GeoGebra, tablas de datos, vectores) facilitó no solo el análisis detallado del fenómeno, sino también la claridad y efectividad en la comunicación de los hallazgos. Un dominio de múltiples formas de representación es indispensable para interpretar y explicar fenómenos complejos.

El estudio del lanzamiento de martillo, a través de sus actividades de matematización, proveyó elementos clave que complejizan de manera significativa el conocimiento del profesor de matemáticas. Esta complejización no es meramente conceptual, sino que abarca su conocimiento didáctico y su perspectiva sobre la utilidad de las matemáticas.

La perspectiva de matematización adoptada no es simplemente un ejercicio académico, sino una herramienta profundamente funcional y transformadora para la toma de decisiones en la práctica. Al sumergirse en la matematización de un fenómeno real como el rendimiento deportivo, el profesor en formación desarrolla una visión de las matemáticas como una disciplina inherentemente activa, heurística y orientada a la solución de problemas. Esta visión lo dota de la capacidad no solo de analizar y comprender situaciones complejas, sino, crucialmente, de optimizarlas y fundamentar decisiones. Esta capacidad de ir más allá de la descripción para influir en la realidad prepara al futuro docente no solo para impartir conocimiento disciplinar, sino para cultivar en sus estudiantes un pensamiento crítico, una habilidad de resolución de problemas y una apreciación auténtica del poder de las matemáticas en la vida práctica y en su entorno cotidiano. La matematización, por tanto, se consolida como un pilar en la formación del profesor de matemáticas, capacitándolo para ser un agente de transformación en el aula, guiando a sus estudiantes hacia una comprensión profunda y funcional de las matemáticas.

10. Bibliografía

Abad, P. (2018). *La entrevista semiestructurada reflexiva, una técnica cualitativa alternativa para explorar la contribución del liderazgo a los equipos de trabajo en el campo de la educación. In Memorias del cuarto Congreso Internacional de Ciencias Pedagógicas de Ecuador: La formación y superación del docente:" desafíos para el cambio de la educación en el siglo XXI"* (pp. 118-126). Instituto Superior Tecnológico Bolivariano.

Barquero Ocampo, S., & Chaves Montero, A. (2023). La modelización matemática como eje transversal en el desarrollo de la matemática en el bachillerato costarricense. *UNED Research Journal*, *15*(1), 1-19. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9812470

Bartonietz, K., & Borgstöm, A. (1995). The throwing event at the World Championship in Athletics 1995, Göteborg - Technique of the world´s best athletes. Part 1: Shot put and hammer throw. New Studies in Athletics, 10(4), 43-63.

Bello, J. & Forero, A. (c. 2016). El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. En Una experiencia con la Geometría de Descartes. Editorial UD. https://editorial.udistrital.edu.co/contenido.php?id=846&f=6

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2009). Mathematical modelling from the eyes of preservice teachers. *Acta Didactica Napocensia, 2*(2), 121-136.

Book of Rules | Official Documents. (s. f.). worldathletics.org. https://worldathletics.org/about-iaaf/documents/book-of-rules

Bingisser, M., & Jensen, R. (2011). Teaching the hammer throw: perfecting technique. Track Coach, 194, 6284-6286, 6292.

Biomechanics of the Hammer Throw: Narrative Review. (2022). *frontiers*, *4*. https://doi.org/10.3389/fspor.2022.853536

Cárdenas, J. H., & Suárez, J. (2018). *Modelación matemática computacional en la ejecución de técnicas de pateo en el Taekwondo (Dollyo Chagui)*. https://www.redalyc.org/journal/2740/274058504010/html/

Carrillo-Yañez, E., Flores, R., & Contreras, J. (2018). The emergence of mathematical modeling competencies: An investigation of prospective secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 202-221.

Chavarría-Vásquez, J., & Gamboa-Araya, R. (2024). La modelación matemática en el proceso de formación de docentes de matemática de secundaria. *Revista Electrónica Educare*, *28*(1), 84-106. https://www.redalyc.org/journal/1941/194179381005/html/

Dapena, J. (1984). The pattern of hammer speed during a hammer throw and influence of gravity on its fluctuations. Journal of Biomechanics, 17(8), 553-559.

Dapena, J. (1986). A kinematic study of center of mass motion in the hammer throw. Journal of Biomechanics, 19(2), 147-158. Dapena, J. (1989a). Some biomechanical aspects of hammer throwing. Athletics Coach, 23(3), 12-19.

Dapena, J. (1989b). Influence of direction of the cable force and of the radius of the hammer path on speed fluctuations during hammer throwing. Journal of Biomechanics, 22(6), 565-575.

Dapena, J., & Feltner, M. (1989). Influence of the direction of the cable force and of the radius of the hammer path on speed fluctuations

Denzin, N. K. (1978). The research act: A theoretical introduction to sociological methods. McGraw-Hill.

Durán, J. (2000). Lanzamiento de martillo. En: J. Bravo, J. Campos, J. Durán y J.L. Martínez (ed). Lanzamientos. Atletismo 3, pp. 160-231. Madrid: Real Federación Española de Atletismo.

Flick, U. (2014). An introduction to qualitative research. SAGE Publications.

Forero Poveda, F. P. (2020). PROCESOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. *Revista de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín*, *9*(2), e 2357-5749. https://revistas.unal.edu.co/index.php/rfc/article/view/86884/75628

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Kluwer Academic Publishers.

Frutos, J. B. (2014). *Descripción de la biomecánica del lanzamiento de martillo*. Dialnet. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4555119#:~:text=El%20presente%20art%C3%ADculo%20realiza%20una%20revisi%C3%B3n%20de%20los,c%C3%B3mo%20y%20por%20qu%C3%A9%20se%20realizan%20determinadas%20acciones.

Fujii, N., & Ae, M. (2008). Analysis of relationship between hammer head velocity and radius of curvature. Proceedings of: XXVI Symposium of the International Society of Biomechanics in Sport. Seoul: korea, pp. 150.

Fujii, H., Koyama, Y., & Ae, M. (2007). Reexamination of acceleration mechanism in hammer throw. Journal of Biomechanics, 40(Suppl2), 622.

García, M. (s. f.). *Matemática para no matemáticos - Funes - Universidad de los Andes*. http://funes.uniandes.edu.co/20143/

Gonzalez, M. A. A. (2016). *El contexto, elemento de análisis para enseñar*. https://www.redalyc.org/journal/853/85350504004/html/

González, M. J. (s. f.). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado - Funes - Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/1638/

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. En p. Mancosu, K.F. Jorgensen y S.A. Perdersen, *Visualization, explanation and reasoning explanationand reasonig Styles* (pp. 75-87). Países bajos: Springer

Gutiérrez, M., & Soto, V.M. (2001). Análisis biomecánico de los lanzamientos en atletismo. Análisis biomecánico del lanzamiento de mar tillo (pp. 8-49). Investigación en Ciencias del Deporte, Número 1. CSD: Madrid.

Greefrath, G., Siller, H. S., Klock, H., & Wess, R. (2021). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 383-407.

Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. P. (2018). Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw-Hill Education.

Judge, L. (1999). Teaching the women´s hammer. Track Coach, 148, 4713-4719

Juandi, D., Mulyana, N., & Rosidin, U. (2021). Improving mathematical modeling competencies of mathematics teachers in a technology-supported learning environment. *Frontiers in Education, 6*, Article 1509652.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2007). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (págs. 11–26). Springer.

Loyola Malqui, J. L., & Huamán Vila, E. (2025). Matemática realista en estudiantes de educación secundaria. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *9*(1), 16357–23354. https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/download/16357/23354/

Maass, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 113-122.

Macias-Becerra, E. D., Ordóñez-Hernández, L. S., & Forero-Poveda, A. (2022). Matematización en procesos de generación de conciencia ambiental: un estudio en formación de profesores de matemáticas. *Revista Científica*, *43*(1), 124-140. https://www.redalyc.org/journal/5043/504371975009/html/

Malaspina Jurado, U., & Herrera Siesquen, N. (2021). La modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista Educación*, *35*(1), 127-147. https://www.redalyc.org/journal/5216/521653370007/html/

M, G. (2005). Mathematical Activity. En *Springer eBooks* (pp. 75-87).https://doi.org/10.1007/1-4020-3335-4_5

Matemáticas y contexto. Enfoque y estrategias para el aula. (2000). *Educación Matemática*, *12*(2), 152-153. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/2/17Valiente.pdf

Maronski, R. (1991). Optimal distance from the implement to the axis of rotation in hammer and discus throws. Journal of Biomechanics, 24(11), 999-1005.

Modelación matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza - Funes - Universidad de los Andes. (s. f.). http://funes.uniandes.edu.co/3171/

Olawale, S. S., & Hendricks, J. K. (2024). NOVEL APPROACHES FOR TEACHING MATHEMATICAL MODELING TO PRESERVICE TEACHERS: A SYSTEMATIC REVIEW. *EMTEKA: Jurnal Pendidikan Matematika, 11*(1).

Petrov, V. (1980). Hammer throw technique and drills. Translated excerpts from Legkaja Atletika, Moscow, #8.

Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. S. (s.f.). *Física 1* (4a ed.). [Compañía Editorial Continental].

Rojas, J. D. Z. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *Matemática en la educación*, *5216*(53370007), 1-13. https://www.redalyc.org/journal/5216/521653370007/html/

Sociedad Chilena de Educación Matemática. (s. f.). *Modelación matemática en la formación inicial de profesores de educación secundaria - Funes - Universidad de los Andes*. http://funes.uniandes.edu.co/22791/#:~:text=El%20estudio%20se%20enfoca%20en%20l

a%20formaci%C3%B3n%20inicial,%28Niss%2C%201989%2C2011%3B%20Blum%20%26%20Borromeo%2C%202009%3B%20Aravena%2C%202016%29.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education. The Wiskobas Project*. Reidel Publishing Company.