# ESTABILIDAD DE LA DINÁMICA DISCRETA EN EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE SOLOW CON UNA ECUACIÓN LOGÍSTICA

INGRITH GINETH RUIZ CHACON
Trabajo de Grado

DECCY YANETH TREJOS
Directora

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2015

# ESTABILIDAD DE LA DINÁMICA DISCRETA EN EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE SOLOW CON UNA ECUACIÓN LOGÍSTICA

INGRITH GINETH RUIZ CHACON

Monografía para optar al título de Matemática

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2015

NOTA DE ACEPTACIÓN

_____

_____

_____

_____

_____

_____
Firma Director

_____
Firma Jurado

*A Dios, mi Madre y*
*a la persona que con su apoyo*
*y amor me impulsa a salir adelante*
*Wilson.*

# Índice general

**Preliminares** I
Introducción . . . I
Planteamiento del problema . . . II
Justificación . . . III
Objetivos . . . IV
Objetivo general . . . IV
Objetivos específicos . . . IV

**1. El Modelo Matemático** 1
1.1. El modelo de Solow . . . 1
1.2. Crecimiento Económico Vs Crecimiento Poblacional . . . 3

**2. Algunos conceptos de dinámica discreta** 5
2.1. Ecuaciones en diferencias . . . 5
2.2. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden . . . 6
2.3. Puntos de Equilibrio . . . 6
2.4. Criterios Para la Estabilidad Asintótica de los puntos de Equilibrio . . . 8
2.5. Diagramas de Cobweb . . . 10
2.6. Conjunto Estable . . . 13
2.7. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales Autónomos (Invariante en el tiempo) . . . 14
2.7.1. El análogo discreto del algoritmo Putzer . . . 14
2.7.2. Matrices Diagonalizables . . . 15
2.7.3. La forma Jordan . . . 15
2.8. Estabilidad de Sistemas Lineales . . . 16
2.9. Aproximación Lineal . . . 17

**3. Estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema $T$** 21
3.1. Puntos de equilibrio del Sistema . . . 21
3.1.1. Los puntos de equilibrio del sistema $T$ . . . 21
3.1.2. Existencia de los puntos de equilibrio . . . 21
3.2. Estabilidad . . . 24
3.3. Análisis de Sensibilidad de los Parámetros del Sistema $T$ . . . 26

**4. Conclusiones** 33

**A. Programa** **35**

**Bibliografía** **41**

# Preliminares

## Introducción

El desarrollo de este trabajo se centró en el estudio de las condiciones para la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio para un modelo económico de Solow adaptado a un sistema dinámico discreto con interacción de la tasa de crecimiento poblacional la cual es representada por una ecuación logística, publicado en el artículo: Nonlinear dynamics in a business-cycle model with logistic population growth, con la autoría de Serena Brianzoni, Cristina Mammana y Elisabetta Michetti (ver [3]).
Para lograr lo anterior, el trabajo está presentado de la siguiente manera: En primer lugar se realizó una descripción concreta del modelo expuesto, posteriormente, un estudio de los conceptos pertinentes sobre dinámica discreta que aborda temas como las ecuaciones en diferencias, los sistemas lineales y los sistemas no lineales, la obtención de los puntos de equilibrio, y el análisis correspondiente de su estabilidad y finalmente se desarrolló un análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema que describe al modelo en cuestión, aplicando los fundamentos teóricos estudiados previamente y visualizando el comportamiento de la estabilidad del sistema a través de gráficas realizadas en el programa Geogebra y una simulación en Java.

# Planteamiento del problema

## Descripción del Problema

Algunas situaciones de carácter económico pueden ser representadas y desarrolladas por medio de modelos matemáticos, en este caso el modelo de crecimiento económico de Solow con una ecuación logística, se reduce matemáticamente a estudiar un sistema dinámico de la siguiente manera:

$$T(n_t,k_t) := \begin{cases} n_{t+1} = \mu n_t(1-n_t) = f(n_t) \\ \\ k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[(1-\delta)k_t + (k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho})] = g(n_t,k_t) \end{cases}$$

Donde $f(n_t)$ representa la tasa de crecimiento poblacional, $g(n_t,k_t)$ representa la tasa de crecimiento económico y $t$ representa el tiempo.
Se desea analizar la estabilidad de dicho sistema, con el fin de entender matemáticamente el comportamiento y la interacción entre las dos ecuaciones que definen $T$.

## Delimitación del Problema

En el sistema dinámico discreto $T$ se obtendrán puntos de equilibrio, de la estabilidad de éstos puntos se puede obtener información acerca de las soluciones del mismo. No es fácil determinar la estabilidad del sistema $T$, debido a la forma que tiene la función $g(n_t,k_t)$, es por ello que surge la pregunta.

¿ Cuáles son las condiciones que debe tener el sistema $T$ para que sus puntos de equilibrio sean asintóticamente estables?

# Justificación

No existen métodos constructivos que permitan calcular las soluciones de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales (tiempo continuo) y de ecuaciones en diferencias (tiempo discreto), debido a esto es necesario hacer un análisis cualitativo o geométrico de los puntos de equilibrio, con el fin de obtener una aproximación de éstas. Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo del grupo de estudio de Tópicos en Ecuaciones, es abordar temas como el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos discretos y continuos, centrándose en la dinámica discreta para analizar la teoría necesaria que permita comprender y llevar a cabo el desarrollo del artículo [3], el cual es estudiar la estabilidad del sistema $T$ en donde se investigan las condiciones que debe tener la función $g(n_t, k_t)$ que describe el crecimiento económico para que el sistema posea puntos de equilibrio asintóticamente estables.

# Objetivos

## Objetivo general

Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto que describe el modelo expuesto en el artículo: Nonlinear dynamics in a business-cycle model with logistic population growth, con la autoría de S. Brianzoni, C. Mammana y E. Michetti (ver [3]).

## Objetivos específicos

1. Recopilar los conceptos y fundamentos teóricos matemáticos expuestos en el artículo [3].

2. Analizar los puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto que describe el modelo de crecimiento económico de Solow con una ecuación logística.

3. Exponer algunas simulaciones del sistema $T$ variando los parámetros para corroborar el estudio analítico de la estabilidad de los puntos de equilibrio de $T$.

# Capítulo 1

# El Modelo Matemático

## 1.1. El modelo de Solow

La teoría económica del crecimiento se ocupa en general de la tendencia de crecimiento a largo plazo de la economía, o sea de su crecimiento potencial. El modelo mas utilizado para explicar el crecimiento es el modelo de Solow. Es un modelo clásico que incorpora los supuestos habituales, como empleo y competencia perfecta en los mercados de productos y de factores, rendimientos decrecientes a escala para cada factor. Este modelo fue desarrollado inicialmente por Robert Merton Solow, economista estadounidense nacido el 23 de agosto de 1924 en Nueva York EE. UU, profesor del Instituto Tecnológico de Massachusetts a fines de los 50 y ganador del premio nobel de Economía en 1987. Solow es especialmente conocido por sus trabajos sobre teoría del crecimiento económico.

El objetivo del modelo de Solow es analizar si la mera acumulación de capital físico puede generar crecimiento económico a largo plazo; está descrito de la siguiente manera:

- Considera una economía cerrada al exterior donde los individuos son los dueños de los factores productivos y por tanto de la producción total del país.
- Los individuos dedican una proporción constante de la renta a consumir y la otra a ahorrar.

  Todo el ahorro se dedica a la acumulación de capital físico y a cubrir los costes de depreciación $I_t = k' + \delta k$. se tiene una función de producción dada por $y_t = (1 + k_t^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$, donde $\rho$ es un parámetro relacionado a la elasticidad de sustitución y se tiene una restricción de ahorro $Sy_t = k_{t+1} - k_t + \delta k_t$. La ecuación dinámica en término de trabajo eficiente es $Sy_t = k_{t+1}(1+n) - (1-\delta)k_t$, reemplazando $y_t'$ y despejando $k_{t+1}$ se tiene la ecuación que representa la tasa de crecimiento de capital.

  $$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[(1-\delta)k_t + S(1+k_t)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\right],$$

  donde $S = (s_w + s_r k^{\rho})$.
- Un estado estacionario es una situación en donde las variables de interés crecen a una tasa constante. Los macroeconomistas buscan estados estacionarios a largo plazo porque es una regularidad empírica observada en los datos.

Luego, el estado estacionario de la ecuación $k_{t+1}$ es:

$$k^* = \left[ \frac{S}{(1+n)-(1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}$$

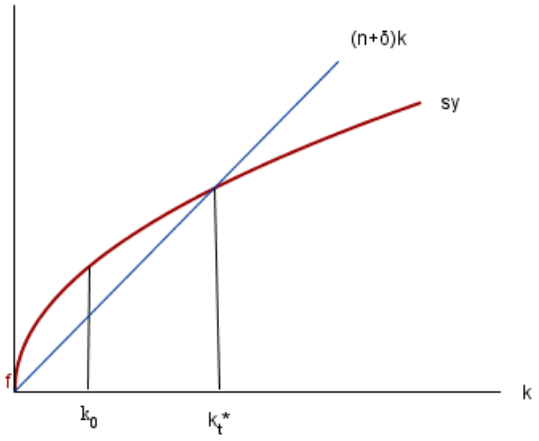



Figura 1.1: Gráfica realizada en Geogebra, representa el estado estacionario del modelo.

Algunas conclusiones que se pueden extraer del modelo original de Solow son las siguientes.

- El nivel del producto por habitante a largo plazo (estado estacionario) depende de la tasa de ahorro de la economía, que es la que determina las existencias de capital y de la función de producción.
- El modelo posee un punto estacionario único asintóticamente estable, que será alcanzado sean cuales sean las condiciones iniciales, dado que si el progreso técnico se difunde por el mundo entero, es posible prever que habrá convergencia de las tasas de crecimiento per cápita y, aún de los niveles de ingreso per cápita.
- A largo plazo no existe crecimiento de la renta per cápita en este modelo. Capital y renta per cápita permanecen constantes a lo largo del tiempo. La existencia de rendimientos decrecientes en la acumulación de capital físico por trabajador hace que a medida que la economía acumula más capital, el aumento del producto por trabajador es cada vez menor, el aumento de la inversión cada vez menor, y la acumulación de capital para el siguiente período cada vez menor.
- Esto nos lleva a una situación en donde la economía sólo puede acumular capital para cubrir los costes de la "depreciación"del capital existente y no puede formar nuevo capital momento en el que la economía deja de crecer.
- Este fue el gran descubrimiento de Solow: Una economía no puede crecer a largo plazo acumulando capital físico por trabajador por la existencia de rendimientos decrecientes en la acumulación de capital.

## 1.2. Crecimiento Económico Vs Crecimiento Poblacional

La idea primordial del modelo es tomar la tasa de Crecimiento económico y hacerla interactuar con la tasa de crecimiento poblacional, generando así una dinámica entre estos dos factores, la cual se describe en el sistema dado en (1.1) .
Se considera que en este modelo intervienen dos tipos de agentes: los accionistas y los trabajadores en una empresa, que tienen diferentes pero constantes tasas de ahorro las cuales se definirán a continuación:
La aplicación unidimensional que describe la evolución del capital per cápita $k_t$ :=(el capital por trabajador $k_t$) es definido como:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[(1-\delta)k_t + s_w(F(k_t) - k_t F'(k_t)) + s_r k_t F'(k_t)],$$

donde $\delta \in (0,1)$ es la tasa de depreciación de capital (disminución periódica del capital), $s_w \in (0,1)$ es la tasa constante de ahorro para trabajadores, $s_r \in (0,1)$ es la tasa constante de ahorro para accionistas, y $n$ es la tasa de crecimiento constante de la población.
Sea $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función de producción que aplica el capital por trabajador $k$ en la producción por trabajador. Considérese $y$ del tipo CES; es decir, $y$ es una función de producción que muestra elasticidad de sustitución constante, lo que quiere decir que la función combina en este caso, el capital y el trabajo en una cantidad agregada, entonces $y$ está dada por:

$$y = F(k_t) = (1 + k_t^{\rho})^{1/\rho}$$

$\rho \in (-\infty, 1)$, $\rho \neq 0$ es un parámetro relacionado a la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital). Debido a esta última ecuación se asume que la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo no es constante, así que se tiene en cuenta la posibilidad de fluctuaciones en la tasa de crecimiento de población.
Ahora se describe la evolución de la tasa de crecimiento de población, dentro de una aplicación logística descrita de la siguiente forma:

$$n_{t+1} = \mu n_t(1 - n_t).$$

Mas precisamente se estudiará el sistema $T = (n_{t+1}, k_{t+1})$ que describe la dinámica entre el capital per cápita $(k_t)$ y la tasa de crecimiento de población $(n_t)$. $T = (n_{t+1}, k_{t+1})$ es dado por:

$$T(n_t, k_t) := \begin{cases} n_{t+1} = \mu n_t(1 - n_t) = f(n_t) \\ \\ k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[(1-\delta)k_t + (k_t^{\rho} + 1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho})] = g(n_t, k_t) \end{cases} \tag{1.1}$$

La elasticidad de sustitución entre los dos factores de producción es dado por $\frac{1}{1-\rho}$, $\mu \in (1,3)$ para la dinámica generada por la aplicación logística ($\mu$ sera el parámetro de bifurcación). $k_t$ se asume como positivo, $\rho < 1$ y $g(n,0) = 0$, Para todo $n \in \mathbb{R}^+$ para $g$ continua.

# Capítulo 2

# Algunos conceptos de dinámica discreta

En este capítulo se llevará a cabo un estudio de los conceptos preliminares en la teoría de la dinámica discreta, se empieza con una breve introducción de las ecuaciones en diferencias, para posteriormente estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio en los sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales, esto con el fin de desarrollar los objetivos propuestos.

## 2.1. Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias usualmente describen la evolución de cierto fenómeno sobre el curso del tiempo, por ejemplo si una determinada población tiene generaciones discretas, el tamaño de la $(n+1)$ generación $x(n+1)$ es una función de la $n$-ésima generación $x(n)$. Esta relación se expresa en la ecuación en diferencias autónoma o de tiempo invariante

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{2.1}$$

Puede verse lo anterior desde otro punto de vista, comenzando con un punto $x_0$ se genera la sucesión

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...$$

Para la cual por conveniencia se adoptara la siguiente notación

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), ...$$

De forma general $f^n(x_0)$ es la $n$-esima iteración de $x_0$ sobre $f$. El conjunto de todas las iteraciones positivas $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ donde $f^0(x_0) = x_0$, es llamado la órbita positiva de $x_0$ y se denota por $O(x_0)$.

Si la función f en (1.1) es reemplazada por la función $g$ de dos variables, dada por $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces se tiene la ecuación en diferencias no autónoma o de tiempo variante

$$x(n+1) = g(n, x(n)). \tag{2.2}$$

## 2.2. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Una típica ecuación en diferencias lineal homogénea de primer orden es dada por

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.3}$$

la solución de la ecuación establecida anteriormente está dada por:

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0$$

y la ecuación no homogénea asociada dada por

$$y(n+1))a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0), \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.4}$$

la solución de la ecuación establecida anteriormente esta dada por:

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r).$$

En ambas ecuaciones se asume que $a(n) \neq 0$, y $a(n)$ y $g(n)$ son funciones de valor real definidas sobre $n \geq n_0 \geq 0$.

## 2.3. Puntos de Equilibrio

La noción de puntos de equilibrio es central en el estudio de la dinámica de algún sistema físico. Las soluciones de un sistema dado tienden a sus puntos de equilibrio asintóticamente estables. Este es el objeto de estudio de la teoría de la estabilidad.

DEFINICIÓN **2.1.** *[4] Un punto $x^*$ en el dominio de $f$ es un punto de equilibrio de (2.1) si este es un punto fijo de $f$, es decir $f(x^*) = x^*$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Gráficamente un punto de equilibrio es la $x$-coordenada de el punto donde la gráfica de $f$ intersecta la linea diagonal $y = x$.

EJEMPLO **2.1.** *Existen dos puntos de equilibrio para la ecuación*

$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n)). \tag{2.5}$$

*Para encontrar estos puntos de equilibrio se obtienen las soluciones de (2.5)*

$$\begin{aligned} \mu x(n)(1 - x(n)) - x(n) &= 0 \\ \mu x^2(n) - \mu x(n) + x(n) &= 0 \\ \mu x^2(n) - x(n)(\mu - 1) &= 0 \\ x(n)(\mu x(n) - (\mu - 1)) &= 0. \end{aligned}$$

*Por lo tanto $x(n) = 0$ y $x(n) = \frac{\mu - 1}{\mu}$ son los puntos de equilibrio de (2.5).*

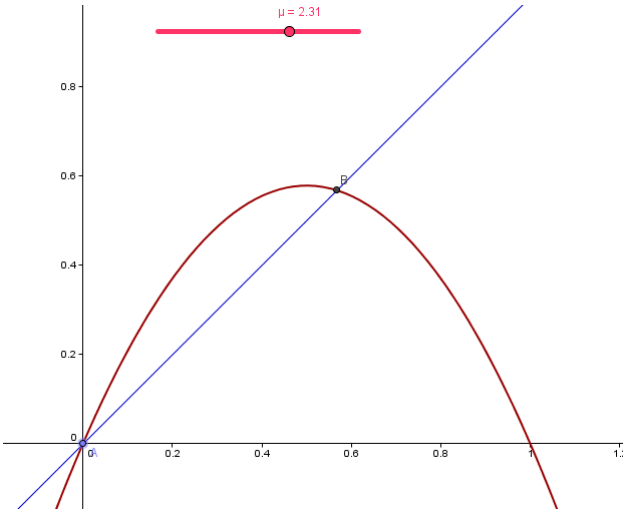



Figura 2.1: Gráfica realizada en Geogebra, donde se visualizan los puntos de equilibrio de la ecuación del ejemplo 2.1.

DEFINICIÓN **2.2.** *[4] Sea $x$ un punto en el dominio de $f$. Si existe un entero positivo $r$ y un punto de equilibrio $x^*$ de (2.1) talque $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$, entonces $x$ es eventualmente un punto de equilibrio.*

DEFINICIÓN **2.3.** *[4]*

a) *El punto de equilibrio $x^*$ de (2.1) es estable (Figura 2.1) si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ para todo $n > 0$. Si $x^*$ no es estable entonces es llamado inestable. (Figura 2.2).*

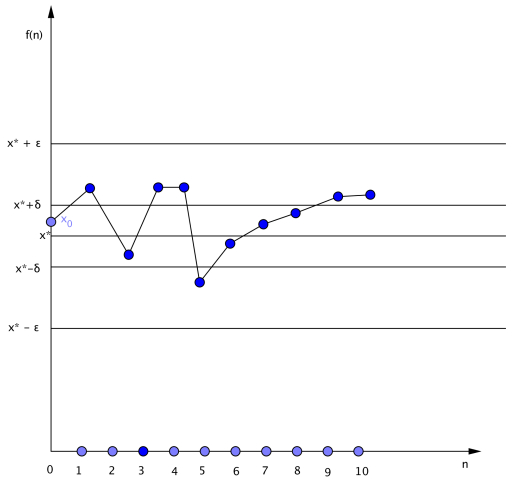



Figura 2.2: Gráfica realizada en Geogebra, $x^*$ es un punto de equilibrio estable.

b) *El punto $x^*$ es llamado atrayente si existe $\eta > 0$ tal que $|x(0) - x^*| < \eta$ implica $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$. Si $\eta = \infty$, $x^*$ es llamado atractor global.*

c) *El punto $x^*$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable si este es estable y atrayente. (Figura 2.3)*

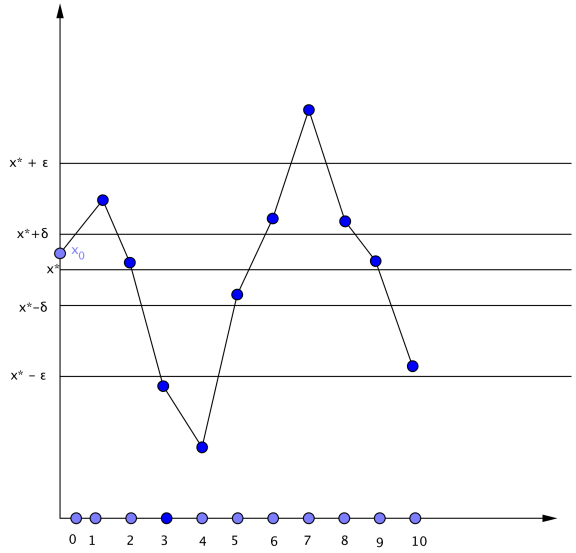



Figura 2.3: Gráfica realizada en Geogebra, $x^*$ es un punto de equilibrio Inestable.

## 2.4. Criterios Para la Estabilidad Asintótica de los puntos de Equilibrio

En esta sección se establece un simple pero poderoso criterio para la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio.

TEOREMA **2.1.** *[4] Sea $x^*$ un punto de equilibrio de la ecuación en diferencias*

$$x(n+1) = f(x(n)),$$

*donde $f$ es continuamente diferenciable en $x^*$. Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces $x^*$ es asintóticamente estable; de lo contrario el punto $x^*$ es inestable.*

*Demostración.* Suponga que $|f'(x^*)| < M < 1$. Entonces existe un intervalo $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ el cual contiene a $x^*$ tal que $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in J$. Si esto no ocurre, entonces para cada intervalo abierto $I_n = (x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n})$, para $n$ grande, existe un punto $x_n \in I_n$ talque $|f'(x_n)| > M$ Como $m \to \infty$, $x_n \to x^*$. Ya que $f'$ es una función continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x^*).$$

En consecuencia,

$$M \leq \lim_{n\to\infty} |f'(x_n)| = |f'(x^*)| < M,$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba la afirmación. Para $x(0) \in J$ se tiene que

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\xi$ entre $x(0)$ y $x^*$ talque

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi)||x(0) - x^*|,$$

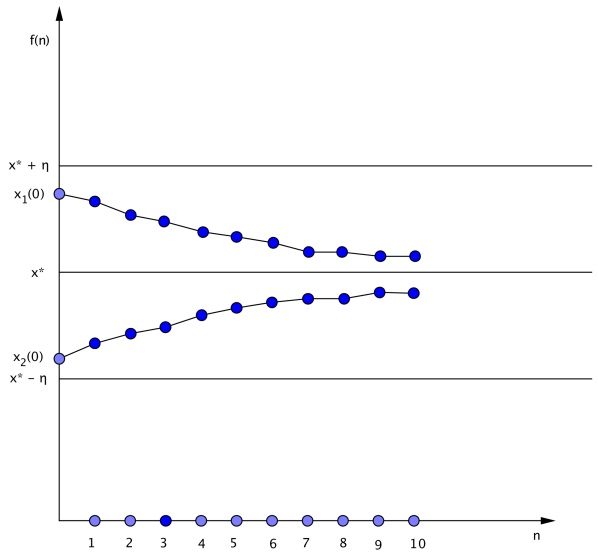



Figura 2.4: Gráfica realizada en Geogebra, $x^*$ es un punto de equilibrio Asintóticamente estable.

entonces

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|.$$

Por lo tanto

$$|x(1) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|.$$

Ya que $M < 1$, la desigualdad anterior muestra que $x(1)$ está más cerca de $x^*$ que $x(0)$. En consecuencia, $x(1) \in J$. Bajo inducción se concluye que

$$|x(n) - x^*| \leq M^n|x(0) - x^*|.$$

Para $\varepsilon > 0$ se hace $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Entonces $|x(0) - x^*| < \delta$ implica que $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ para tono $n > 0$. Esta conclusión sugiere estabilidad. Además

$$\lim_{n\to\infty} |x(n) - x^*| = 0, \text{ y por lo tanto } \lim_{n\to\infty} x(n) = x^*.$$

Así se concluye la estabilidad asintótica. □

TEOREMA **2.2.** *[4] Suponga que para un punto de equilibrio $x^*$ de (2.1), $f'(x^*) = 1$. Los siguientes enunciados son ciertos:*

*i) Si $f''(x^*) \neq 0$, entonces $x^*$ es inestable.*

*ii) Si $f''(x^*) = 0$ y $f'''(x^*) < 0$, entonces $x^*$ es asintóticamente estable.*

*Demostración.* i) Si $f''(x^*) \neq 0$, entonces la curva $y = f(x)$ es o bien cóncava hacia arriba, si $f''(x^*) > 0$ o cóncava hacia abajo si $f''(x^*) < 0$. Si $f''(x^*) > 0$ entonces $f'(x) > 1$ para todo $x$ en un intervalo pequeño $I = (x^*, x^* + \varepsilon)$. Por la prueba del teorema anterior se tiene que $x^*$ es inestable. Por otra parte, si $f''(x^*) < 0$, entonces $f'(x) > 1$ para todo $x$ en un pequeño intervalo $I = (x^* - \varepsilon, x^*)$. Por lo tanto $x^*$ es de nuevo inestable. □

En secciones posteriores se realizaran ejemplos respectivos para estos teoremas.

## 2.5. Diagramas de Cobweb

El diagrama de Cobweb (Telaraña), expuesto por Pierre-François Verhulst, es un método gráfico importante para el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio de $x(n+1) = f(x(n))$, el cual consiste en realizar una gráfica de $f$ en el plano $(x(n), x(n+1))$. Entonces dado $x(0) = x_0$, señalamos el valor $x(1)$ al trazar una linea vertical a través de $x_0$ de modo que también se cruza la gráfica de $f$ en $(x_0, x(1))$. Luego se traza una linea horizontal de $(x_0, x(1))$ a la linea diagonal $y = x$ en el punto $(x(1), x(1))$. Una linea vertical trazada desde el punto $(x(1), x(1))$ se encontrará con la gráfica de $f$ en el punto $(x(1), x(2))$. Continuando este proceso, se puede encontrar $x(n)$ para todo $n > 0$.

EJEMPLO **2.2.** ***La Ecuación Logística***.

En el ejemplo 2.1 se hallaron los puntos de equilibrio de una ecuación en diferencias, esta ecuación recibe un nombre especial, es llamada la ecuación logística y se abordará un poco mas sobre ella en este ejemplo.
Sea $y_n$ el tamaño de población en el tiempo $n$. Si $\mu$ es la tasa de crecimiento de la población de una generación a otra, entonces se puede considerar un modelo matemático en la forma:

$$y(n+1) = \mu y(n), \quad \mu > 0 \tag{2.6}$$

Si la población inicial es dada por $y(0) = y_0$, entonces se tiene que $y(n) = \mu^n y_0$ es la solución de (2.6).

- Si $\mu > 1$, entonces $y(n)$ aumenta indefinidamente, y $\lim_{n\to\infty} y(n) = \infty$.
- Si $\mu = 1$, entonces $y(n) = y_0$ para todo $n > 0$, lo que significa que el tamaño de la población es constante para el futuro indefinido.
- Sin embargo, para $\mu < 1$, se tiene $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$, y la poblacion eventualmente se extingue.

Para la mayoría de las especies biológicas sin embargo ninguno de los casos anteriores es válido ya que la población aumenta hasta que alcanza un límite superior determinado. entonces, debido a las limitaciones de los recursos disponibles, las criaturas se molestan y participan en la competencia por los recursos limitados, esta competición es proporcional al número de disputas entre ellas, dada por $y^2(n)$. Un modelo más razonable sería el siguiente:

$$y(n+1) = \mu y(n) - b y^2(n). \tag{2.7}$$

Si en (2.7) Se tiene que $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$, se obtiene

$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n)) = f(x(n)). \tag{2.8}$$

Esta expresión es la mas simple ecuación en diferencias no lineal de primer orden, comúnmente conocida como la ecuación logística discreta. Como se vio en el ejemplo 2.1 los puntos de equilibrio de la ecuación (2.8) son $x(n) = 0$ y $x(n) = \frac{\mu - 1}{\mu}$. Para analizar la estabilidad de estos puntos, se hará uso del teorema (2.1) y se tiene que la derivada de (2.8) es:

$$f'(x(n)) = \mu - 2\mu x(n),$$

reemplazando cada punto de equilibrio en la derivada hallada de obtiene que $f'(0) = \mu$ y $f'\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 2-\mu$, se considerará el parámetro $\mu$ dentro del intervalo $(1,3)$ por tanto, el punto que es asintóticamente estable es $x(n) = \frac{\mu-1}{\mu}$. El diagrama de Cobweb para esta ecuación en diferencias se visualiza a continuación, y se evidencia que efectivamente con este método gráfico se cumplen los mismos requerimientos que en el método analítico.

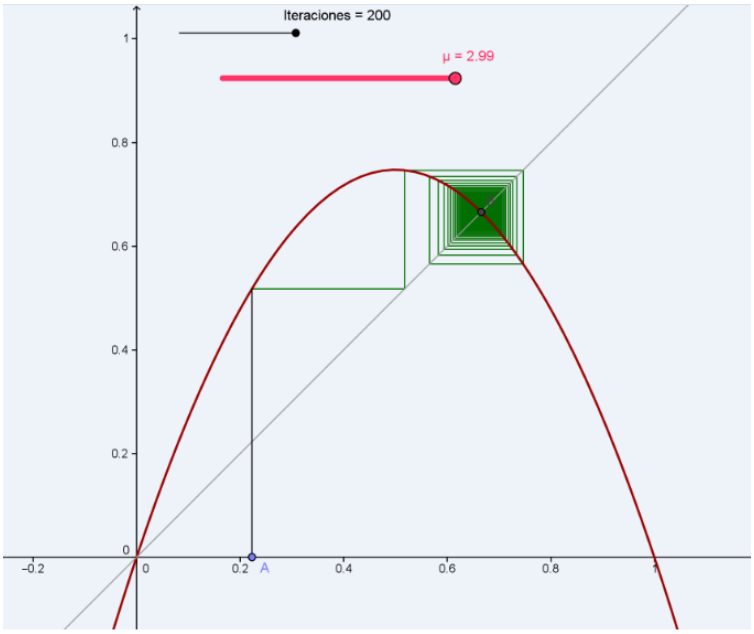



Figura 2.5: Diagrama de Cobweb realizado en Geogebra, con $\mu$ en el intervalo $(1,3)$ .

Los casos en que $\mu$ pertenece al complemento del intervalo $(1,3)$ no son considerados, ya que el punto de equilibrio que es asintóticamente estable es el trivial, pero esto no es válido ya que la ecuación representa crecimiento de población. En las siguientes gráficas se evidencian estas situaciones.

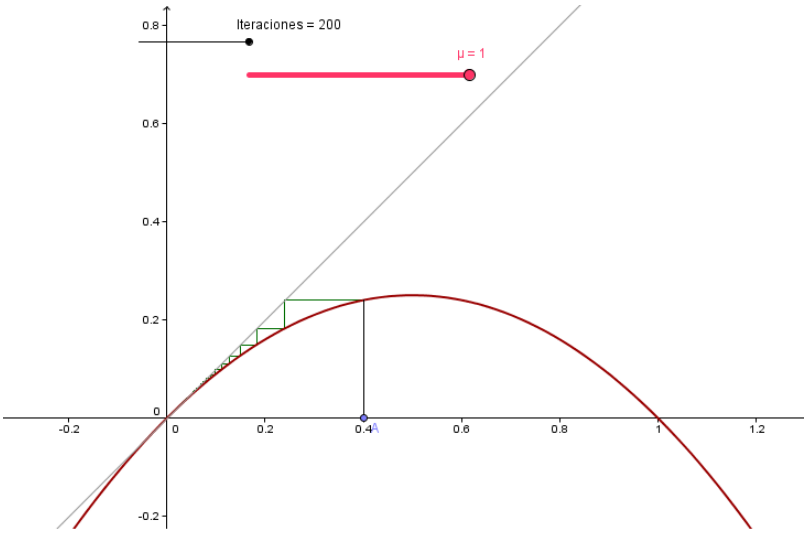



Figura 2.6: Diagrama de Cobweb realizado en Geogebra, con $\mu = 1$ .

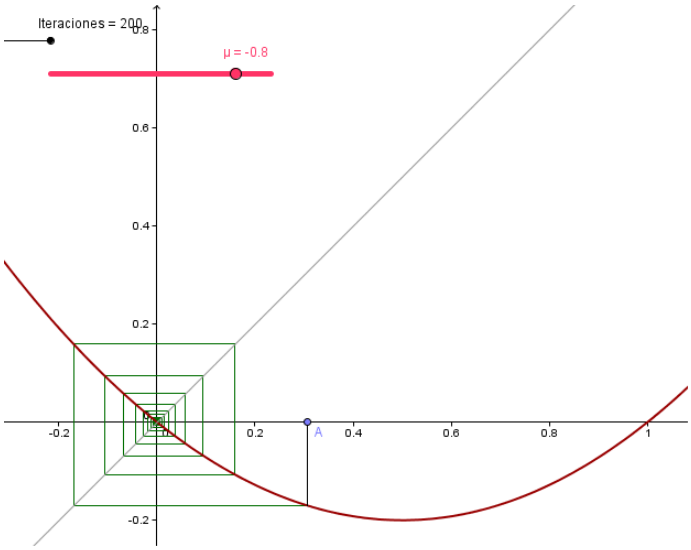



Figura 2.7: Diagrama de Cobweb realizado en Geogebra, con $\mu < 1$ .

## 2.6. Conjunto Estable

Sea $x^*$ un punto de equilibrio de una aplicación $f$ entonces la base de atracción (o el conjunto estable) $W^s$ de $x^*$ es definido como:

$$W^s(x^*) = \{x : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*\}.$$

En otras palabras, $W^s(x^*)$ consiste de todos los puntos que están asintóticamente próximos a $x^*$. Obsérvese que si $x^*$ es un punto de equilibrio atrayente, $W^s(x^*)$ contiene un intervalo abierto alrededor de $x^*$. El intervalo maximal en $W^s(x^*)$ que contiene a $x^*$ es llamado el conjunto inmediato de atracción y es denotado por $B^s(x^*)$.

EJEMPLO **2.3.** *La aplicación $f(x) = x^2$ tiene un punto de equilibrio atrayente $x^* = 0$ su base de atracción $W^s(0) = \{x \in (-1,1)\}$. Notese que $1$ es un punto fijo inestable y $-1$ es un punto de equilibrio eventual que va a $1$ después de una iteración, es decir el número r para la definicíon de punto de equilibrio eventual es $1$. Por el diagrama de cobweb para esta ecuación se visualiza la estabilidad de estos puntos de equilibrio.*

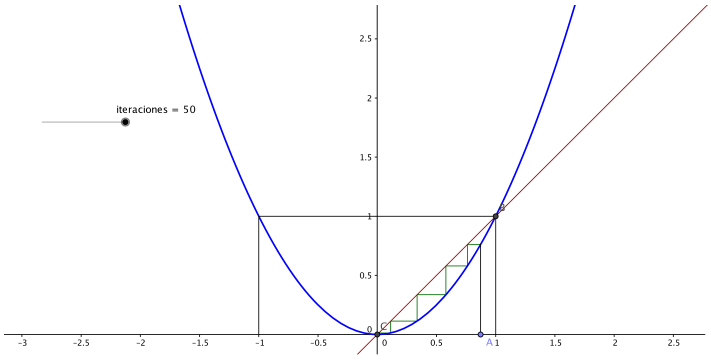



Figura 2.8: Diagrama de Cobweb realizado en Geogebra, $x^* = 0$ es asintóticamente estable ).

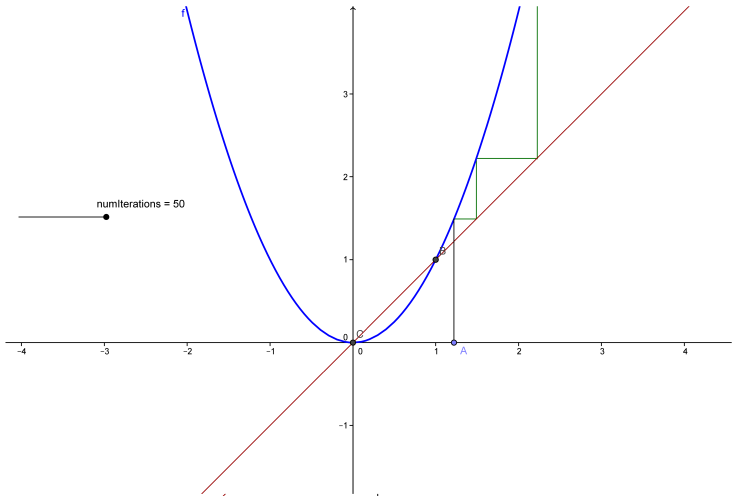



Figura 2.9: Diagrama de Cobweb realizado en Geogebra, $x^* = 1$ es inestable .

## 2.7. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales Autónomos (Invariante en el tiempo)

El siguiente es un sistema de $k$ ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{array}{lllll} x_1(n+1) = & a_{11}x_1(n) + & a_{12}x_2(n) + \cdots + & a_{1k}x_k(n), \\ x_2(n+1) = & a_{21}x_1(n) + & a_{22}x_2(n) + \cdots + & a_{2k}x_k(n), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k(n+1) = & a_{k1}x_1(n) + & a_{k2}x_2(n) + \cdots + & a_{kk}x_k(n). \end{array}$$

Este sistema puede ser escrito de la siguiente forma

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{2.9}$$

donde $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz $k \times k$ real no singular. Si para algún $n_0 \geq 0$, $x(n_0) = x_0$ es especificado, entonces el sistema es un problema de valor inicial, cuya solución es dada por

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0.$$

$A^0 = I$ la matriz identidad.
Donde $n_0 = 0$, sin perdida de generalidad se tiene lo siguiente:
Sea $y(n - n_0) = x(n)$ entonces (2.9) se convierte en

$$y(n+1) = Ay(n),$$

con $y(0) = x(n_0)$ y

$$y(n) = A^n y(0).$$

### 2.7.1. El análogo discreto del algoritmo Putzer

En ecuaciones diferenciales el algoritmo Putzer es usado para obtener $e^{At}$, donde $A$ es una matriz de $k \times k$. Aquí se introduce un algoritmo análogo para obtener $A^n$. Recuérdese que para una matriz de valor real $A = (a_{ij})$, un valor propio es un número $\lambda$ tal que $A\xi = \lambda\xi$ para algún $\xi$ no vacío. Una forma equivalente de escribir esta relación es:

$$(A - \lambda I)\xi = 0. \tag{2.10}$$

La ecuación (2.10) tiene solución distinta de cero si y solo si

$$det(A - \lambda I) = 0$$

o

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \tag{2.11}$$

Entonces se tiene que

$$x_i(n) = \lambda_i \xi_i,$$

es una solución de (2.9).

### 2.7.2. Matrices Diagonalizables

Si una matriz $A$ es semejante a una matriz diagonal $D = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$, entonces $A$ se dice diagonalizable. Los elementos de $D$ son los valores propios de $A$. Para matrices diagonalizables es facil calcular $A^n$. Si

$$P^{-1}AP = D = diag[\lambda_1, ..., \lambda_k],$$

donde $P$ es una matriz no singular, entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

y consecuentemente,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$

Explícitamente

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

### 2.7.3. La forma Jordan

Si la matriz $A$ no es diagonalizable: esto ocurre cuando $A$ tiene valores propios repetidos, y en consecuencia no se generan $k$ vectores propios linealmente independientes. Si una matriz $A$ de $k \times k$ no es diagonalizable, entonces es semejante a la llamada forma de Jordán, es decir $P^{-1}AP = J$, donde $J = diag(J_1, ..., J_r)$; $1 \leq r \leq k$, y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Ahora se sabe que $A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$, donde

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & 0 \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_k^n \end{pmatrix}$$

Nótese que para algún $J_i$, $i = 1, 2, ..., r$ se tiene que $J_i = \lambda_i I + N_i$, donde

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \cdots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

Donde $s_i$ es el orden de la i-ésima posición de $J_i$ y entonces la solución del sistema $x(n+1) = Ax(n)$ es $x(n) = PJ^nP^{-1}$.

## 2.8. Estabilidad de Sistemas Lineales

El objetivo de esta sección es estudiar las condiciones suficientes y necesarias para la estabilidad de sistemas lineales, centrándose en los sistemas autónomos.

DEFINICIÓN **2.4.** *[4] El radio espectral de una matriz A es el máximo de los valores absolutos de los elementos de su espectro, es denotado por $\rho(A)$ luego:*

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : donde \ \ \lambda \ \ es\ un\ valor\ propio\ de\ A\}.$$

EJEMPLO **2.4.** *Sea $x_{n+1} = Ax_n$ un sistema de ecuaciones en diferencias lineal donde,*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

*El polinomio característico asociado es: $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$. Los valores propios son:*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-(a+d)) \pm \sqrt{(-(a+d))^2 - 4(ad-bc)}}{2}.$$

*El radio espectral* $\rho(A) = \dfrac{-(-(a+d)) + \sqrt{(-(a+d))^2 - 4(ad-bc)}}{2}$.

TEOREMA **2.3.** *[4] .*

*i) La solución cero de $x(n+1) = Ax(n)$ es estable si y solo si $\rho(A) \leq 1$.*

*ii) La solución cero de $x(n+1) = Ax(n)$ es asintóticamente estable si y solo si $\rho(A) < 1$*

*Demostración.* Sea $A = PJP^{-1}$, donde $J = diag(J_1, ..., J_r)$ es la forma de Jordan de $A$ y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

La solución cero es estable si y solo si $\|A^n\| = \|PJ^nP^{-1}\| \leq M$, $M$ es una constante positiva; ahora, $J^n = diag(J_1^n, ..., J_r^n)$ donde, por la sección (2.7.3) se tiene el valor como expresión matricial de $J_i^n$.
$J_i^n$ es no acotada si $|\lambda_i| > 1$ o si $|\lambda_i| = 1$. Si $|\lambda_i| < 1$ entonces $J_i^n \to 0$ como $n \to \infty$. Para ver esto, es suficiente probar que $|\lambda_i|^n n^l \to 0$, como $n \to \infty$, para algun $l \in \mathbb{Z}^+$, esta conclusión sigue de la regla de L'hopital ya que $|\lambda_i|^n n^l = n^l e^{(ln|\lambda_i|)^n}$. La prueba de ii) ha sido también establecida por el argumento anterior. □

## 2.9. Aproximación Lineal

La linealización de un sistema de ecuaciones no lineal es indispensable para poder aplicar resultados ya conocidos para la estabilidad en sistemas lineales, ya que a través de ésta se puede obtener una aproximación de forma lineal que facilita nuestro estudio, es por ello que se estudiará este resultado en la parte discreta que es la que se requiere para este trabajo.

DEFINICIÓN **2.5.** *[5] Un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones en diferencias es hiperbólico si la matriz Jacobiana calculada en el punto no tiene valores propios cero o puramente imaginarios.*

Se enunciará sin demostración el teorema de Hartman y Grobman (véase su demostración en [6]), este teorema permite realizar el proceso de linealización de un sistema de ecuaciones en diferencias.

TEOREMA **2.4.** *[5] Si $x^*$ es un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones en diferencias lineal $x_{n+1} = Ax_n$, entonces existe un homeomorfismo h definido sobre alguna vecindad N de $x^*$ talque el punto de equilibrio de $x_{n+1} = G(x_n)$ presenta el mismo comportamiento que en el sistema lineal.*

Consideremos el sistema no lineal de ecuaciones en diferencias

$$x_{n+1} = G(x_n), \tag{2.12}$$

$x \in \mathbb{R}^m$, con un punto de equilibrio $x^*$, y asumamos que $G$ es diferenciable en las $m$ variables del vector $x$. una aproximación lineal cerca a $x^*$ es dada por la expansión en series de Taylor truncada de las funciones $G_i$. Sea $\xi = x - x^*$, se tiene la aproximación

$$\begin{array}{rcccl}
x_{n+1}^{(1)} = & \xi_{n+1}^{(1)} + x^{*(1)} = & G_1(x^*) + \frac{\partial G_1(x^*)}{\partial x_n^{(1)}}\xi_n^{(1)} + \cdots + & \frac{\partial G_1(x^*)}{\partial x_n^{(m)}}\xi_n^{(m)}, \\
x_{n+1}^{(2)} = & \xi_{n+1}^{(2)} + x^{*(2)} = & G_2(x^*) + \frac{\partial G_2(x^*)}{\partial x_n^{(1)}}\xi_n^{(1)} + \cdots + & \frac{\partial G_2(x^*)}{\partial x_n^{(m)}}\xi_n^{(m)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n+1}^{(m)} = & \xi_{n+1}^{(m)} + x^{*(m)} = & G_m(x^*) + \frac{\partial G_m(x^*)}{\partial x_n^{(1)}}\xi_n^{(1)} + \cdots + & \frac{\partial G_m(x^*)}{\partial x_n^{(m)}}\xi_n^{(m)}
\end{array}$$

Donde $x_n^{(i)}$, $\xi_n^{(i)}$ $x^{*(i)}$ denotan respectivamente el i-ésimo elemento de los vectores $x_n$, $\xi_n$, $x^*$ y $G_i$ es la i-ésima coordenada de la función $G$.

En equilibrio $x^{*(i)} = G_i(x^*)$ para todo $i$, Por lo tanto y considerando que el primer termino sobre la representación anterior de cada ecuación en el sistema es igual a cero, el sistema linealizado puede ser escrito como:

$$\xi_{n+1} = JG(x^*)\xi_n,$$

donde, en general $JG(x)$ denota la matriz de las primeras derivadas parciales (frecuentemente llamada Matriz Jacobiana)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x^*)}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial G_1(x^*)}{\partial x_n^{(2)}} \cdots & \frac{\partial G_1(x^*)}{\partial x_n^{(m)}} \\ \frac{\partial G_2(x^*)}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial G_2(x^*)}{\partial x_n^{(2)}} \cdots & \frac{\partial G_2(x^*)}{\partial x_n^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_m(x^*)}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial G_m(x^*)}{\partial x_n^{(2)}} \cdots & \frac{\partial G_m(x^*)}{\partial x_n^{(m)}} \end{pmatrix}$$

Haciendo $Det(JG(x^*) - \lambda I) = 0$ se obtiene el polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^m - p_0\lambda^{m-1} - \cdots - p_m = 0, \tag{2.13}$$

donde los $p_i$ son las derivadas parciales en cada cordenada evaluadas en el punto $x^*$.

DEFINICIÓN **2.6.** *[5] Un punto de equilibrio es un punto de silla si los valores propios de (2.13) son reales y su valor absoluto mayor que uno. Un punto de silla es inestable.*

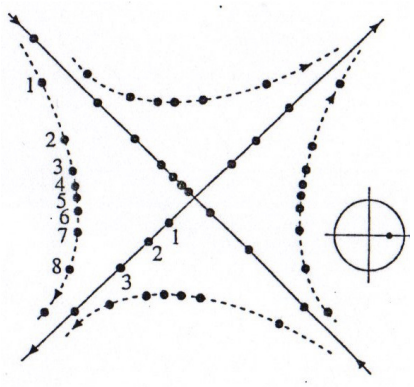



Figura 2.10: Punto de silla. Gráfica tomada de [1]

DEFINICIÓN **2.7.** *[5] Un punto de equilibrio es un nodo si los valores propios de (2.13) son reales y su valor absoluto menor que uno.*

*a) Si los valores propios son negativos, entonces todas las trayectorias se acercan al origen.*

*b) Si los valores propios son positivos, entonces todas las trayectorias se alejan del origen.*

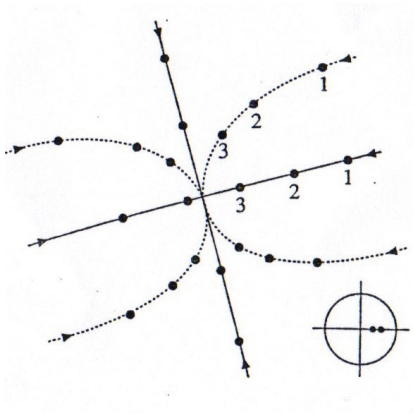



Figura 2.11: Nodo asintóticamente estable. Gráfica tomada de [1]

*Por esta razón en el caso en el que el punto de equilibrio sea un nodo, este es asintóticamente estable si se da a) o es inestable si se tiene b).*

DEFINICIÓN **2.8.** *[5] Un punto de equilibrio es una espiral cuando los valores propios de (2.13) son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las trayectorias son curvas en forma de espiral, éstas pueden:*

*a) acercarse todas al origen en caso de ser la parte real de los valores propios menor que uno en modulo.*

*b) Separarse del origen en el caso de ser la parte real de los valores propios mayor que uno en modulo.*

*Por ésta razón un punto de equilibrio espiral es o bien asintóticamente estable cuando a) se tiene, o inestable cuando se tiene b).*

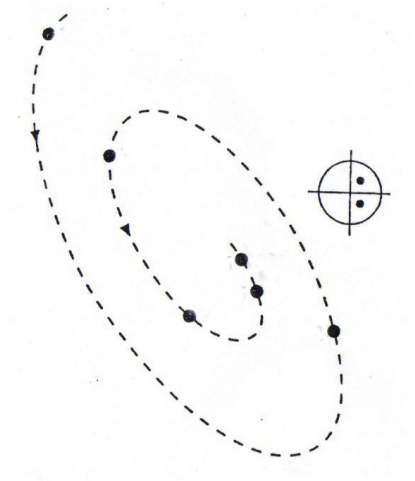


Figura 2.12: Punto de equilibrio espiral. Gráfica tomada de [1]

TEOREMA **2.5.** *[4]* ***Estabilidad Vía Linealización*** *Suponga que G es continuamente diferenciable sobre una vecindad abierta $H \subset \mathbb{R}^{k+1}$ de $(x^*, x^*, ..., x^*)$, donde $x^*$ es un punto de equilibrio de $x_{n+1} = G(x_n)$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.*

*(i) Todas las raíces características de* (2.13) *están dentro del disco unitario en el plano complejo si y solo si el punto de equilibrio $x^*$ es (localmente) asintóticamente estable. Si al menos una raíz característica de* (2.13) *está afuera del disco unitario en el plano complejo, entonces el punto de equilibrio $x^*$ es inestable.*

*(ii) Si una raíz característica de* (2.13) *está sobre el disco unitario y todas las otras raíces características están ya sea dentro o sobre el disco unitario entonces el punto de equilibrio $x^*$ puede ser estable, inestable o asintóticamente estable.*

*Demostración.*

i) $\Rightarrow$Puesto que el punto es asintóticamente estable, existe una vecindad abierta $H$ alrededor de el punto de equilibrio tal que si $x_0 \in H$ y $x_m = A^m x_0$ entonces $x_m \to 0$ cuando $m \to \infty$. En particular, si $v_0 \in H$ es un autovector de $A$, entonces $v_m = A^m v_0 = \lambda^m v_0$, es decir, $\|v_m\| = |\lambda|^m \|v_0\|$. Y como $\|v_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$, necesariamente se ha de tener $|\lambda| < 1$, para todo autovalor.
$\Leftarrow$ Si $|\lambda| < 1$ para todo valor propio, entonces se descompone $A$ en su forma canónica de Jordan:

$$A = P^{-1} J P y,$$

se sabe que se cumple:

$$A^m = P^{-1} J^m P.$$

Como cada valor propio tiene módulo menor que uno, $|\lambda| < 1$, todos los elementos de $J^m$ toman la forma $\alpha(m)|\lambda|^{m-n}$, donde $\alpha(m)$ es un coeficiente que depende polinómicamente de $m$. La suma de los módulos de los elementos de una fila o columna se comporta como $\beta(m)|\lambda|^{m-n} \to 0$ cuando $m \to \infty$. En otras palabras, unas de las normas subordinadas de la matriz A es menor que 1, y esto significa que $A^m$ tiende a la matriz nula cuando $m \to \infty$, y se sigue inmediatamente que $x_m = A^m x_0 \to 0$ cuando $m \to \infty$ para cualquier $x_0 \in G$.

(ii) Esta parte puede ser probada a través de lo siguiente:
Primero consideremos la ecuación logística $x(n+1) = x(n)(1 - x(n)) = f(x(n))$. La ecuación linearizada alrededor del punto $x^* = 0$ es $\xi_{n+1} = \xi_n$ con las raíces características $\lambda = 1$. Pero el punto de equilibrio $x^*$ es inestable.
Ahora consideremos la ecuación $x(n+1) = x(n) - x^3(n) = f(x(n))$. La ecuacón linearizada es dada por $u(n+1) = u(n)$ con las raíces características $\lambda = 1$. Ahora para el punto de equilibrio $x^* = 0$, se tiene que $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6 < 0$. Esto implica por el teorema (2.2) que $x^*$ es asintóticamente estable.

□

# Capítulo 3

# Estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema $T$

## 3.1. Puntos de equilibrio del Sistema

Para el sistema $T$ descrito por (1.1) los puntos de equilibrio se determinan al igualar $f(n_t) = n_t$ y $g(n_t, k_t) = k_t$, para obtener dichos valores, se realizará un estudio de existencia, ya que la función $g(n_t, k_t) = k_t$ es implícita.

### 3.1.1. Los puntos de equilibrio del sistema $T$

Los puntos de equilibrio para el sistema $T$ son todas las soluciones del sistema algebraico $T(n,k) = (n,k)$. Como se vió en el ejemplo 2.1, los puntos de equilibrio de la ecuación $n_{t+1} = \mu n_t(1-n_t)$ pertenecen a las lineas $n_t = 0$ y $n_t = n^*$; donde $n^* = \frac{\mu-1}{\mu}$. De la segunda ecuación $k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[(1-\delta)k_t + (k_t^\rho + 1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^\rho)$ se tiene que los $k$-valores son los puntos de equilibrio de las aplicaciones unidimensionales $g_0(k) = g(0,k)$ y $g_{n^*}(k) = g(n^*,k)$.

Por lo tanto los puntos de equilibrio del sistema $T$ están dados por:

$$E_0 = (0, g(0,k)) \quad \text{y} \quad E_{n^*} = (n^*, g(n^*,k)).$$

### 3.1.2. Existencia de los puntos de equilibrio

En esta sección se aborda el cuestionamiento sobre la existencia de los puntos de equilibrio para el sistema $T$; Para ello se necesitan definir dos funciones muy importantes para el desarrollo de las proposiciones que se tendrán a continuación. Sea

$$g(n^*,k) = \frac{1}{1+\frac{\mu-1}{\mu}}\left[(1-\delta)k_t + (k_t^\rho + 1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^\rho)\right] \tag{3.1}$$

$$= \frac{\mu}{2\mu-1}\left[(1-\delta)k_t + s_w f(k_t) + (s_r - s_w)kf'(k_t)\right], \tag{3.2}$$

donde $f(k_t) = (1+k^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$.

Se define

$$F(k_t) = (k_t^\rho + 1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^\rho) = s_w f(k_t) + (s_r - s_w)kf'(k_t) \tag{3.3}$$

Ahora para $g(n_t^*, k_t) = k_t$ vamos a determinar la siguiente función

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2\mu-1}[(1-\delta)k_t + F(k_t)] = k_t &\iff [(1-\delta)k_t + F(k_t)] = k_t\left(\frac{2\mu-1}{\mu}\right) \\
&\iff \left(1-\delta-\frac{2\mu-1}{\mu}\right)k_t + F(k_t) = 0 \\
&\iff \left(\frac{1-\mu}{\mu}-\delta\right)k_t + F(k_t) = 0 \\
&\iff -\left(\delta+\frac{\mu-1}{\mu}\right)k_t + F(k_t) = 0
\end{aligned}$$

Luego tenemos definida la función $g(k_t) = \left(\delta + \frac{\mu-1}{\mu}\right)k_t$.

PROPOSICIÓN **3.1.** *[2] Si $s_r < \delta + \frac{\mu-1}{\mu}$, donde $\rho \in (0,1)$, $\mu \in (1,3)$ el sistema T dado por (1.1) tiene un punto de equilibrio interior $(\frac{\mu-1}{\mu}, k) \in \mathbb{R}^2_+$; de lo contrario T no tiene puntos de equilibrio.*

El objetivo de la demostración es encontrar un punto de intersección entre las funciones $F$ y $g$ las cuales se obtuvieron anteriormente, para ello es necesario garantizar que la función $F$ es estrictamente creciente , es concava y tiene una asíntota oblicua; este punto de intersección hallado será el punto de equilibrio de el sistema $T$.

*Demostración.*

- la función (3.3) es estrictamente creciente, ya que si suponemos $x < y$; entonces:

$$\begin{aligned}
F(x) - F(y) &= (x^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r x^\rho) - (y^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k^\rho) \\
&= s_w\left((x^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}} - (y^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\right) + s_r(x^\rho - y^\rho) \\
&< 0
\end{aligned}$$

  Esto es cierto ya que $x < y$, luego $x^\rho$ sigue siendo menor que $y^\rho$ y $s_w \in (0,1)$, y $s_r \in (0,1)$. Lo cual satisface que la función $F(k_t)$ es estrictamente creciente.

- La función dada en (3.3) tiene una asíntota oblicua con coeficiente de dirección $s_r$ y es cóncava. Para ver esto se hará lo siguiente:
  Por la definición de asíntota oblicua se mostrará que:

$$\lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{F(k_t)}{k_t} = \lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{(k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho})}{k_t} = s_r$$

La igualdad anterior se tiene para el término $\rho$ de la forma $\frac{1}{a}$ con $a \in \mathbb{N} - \{1\}$; aplicando el teorema del binomio al término $(k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$, se requiere que $\frac{1-\rho}{\rho} \in \mathbb{Z}$ supongase que $n = \frac{1-\rho}{\rho}$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{(k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho})}{k_t} &= \lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{\left[\binom{n}{0}(k_t^{\rho})^n + \binom{n}{1}(k_t^{\rho})^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}(k_t^{\rho}) + \binom{n}{n}\right](s_w + s_r k_t^{\rho})}{k_t} \\
&= \lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{s_w k_t^{\rho n}}{k_t} + \cdots + \frac{s_w n k_t^{\rho}}{k_t} + \frac{s_w}{k_t} + \frac{s_r k_t^{\rho+\rho n}}{k_t} + \cdots + \frac{s_r n k_t^{2\rho}}{k_t} + \frac{s_r k_t^{\rho}}{k_t} \\
&= \lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{s_w}{k_t k_t^{-\rho n}} + \cdots + \frac{s_w n}{k_t k_t^{-\rho}} + \frac{s_w}{k_t} + \frac{s_r k_t}{k_t} + \cdots + \frac{s_r n}{k_t k_t^{-2\rho}} + \frac{s_r}{k_t k_t^{-\rho}}
\end{aligned}$$

Luego aplicando el límite a cada término y sumando obtenemos que todos los términos tienden a cero excepto $\frac{s_r k_t}{k_t}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{(k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho})}{k_t} &= \lim_{k_t \longrightarrow \infty} \frac{s_r k_t}{k_t} \\
&= \lim_{k_t \longrightarrow \infty} s_r \\
&= s_r
\end{aligned}$$

Finalmente, en el caso en el que el término $\rho$ sea de la forma $\frac{b}{a}$ con $b \neq a \neq 1$ y $b, a \in \mathbb{N}$ el límite de la función es infinito, esto implica que las asíntotas no son oblicuas por tanto no es de nuestro interés este caso. Así se ha mostrado que la función $F(k_t)$ tiene asíntota oblicua con coeficiente de dirección $s_r$. Para ver la concavidad de la función $F(k_t)$ se demostrará que para $x < y$ se tiene que $F'(x) - F'(y) > 0$
La derivada de la función $F(k_t)$ esta dada por:

$$F'(k_t) = (1-\rho)k_t^{\rho-1}(k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-2\rho}{\rho}}(s_w + s_r k_t^{\rho}) + (k_t^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\rho s_r k_t^{\rho-1}$$

y se tiene que:

$$F'(x) = (1-\rho)x^{\rho-1}(x^{\rho}+1)^{\frac{1-2\rho}{\rho}}(s_w + s_r x^{\rho}) + (x^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\rho s_r x^{\rho-1}$$

$$F'(y) = (1-\rho)y^{\rho-1}(y^{\rho}+1)^{\frac{1-2\rho}{\rho}}(s_w + s_r y^{\rho}) + (y^{\rho}+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\rho s_r y^{\rho-1}.$$

Cuya diferencia $F'(x) - F'(y) > 0$ esto por los intervalos a donde pertenecen los parámetros.

- Por otra parte $F(0) = s_w > 0$; $g(k_t)$ es una función lineal con $g(0) = 0$ y curva de inclinación $g'(k_t) = \delta + \frac{\mu-1}{\mu}$. En virtud de los items anteriores, se tiene que el coeficiente de dirección $s_r$ es menor que $\delta + \frac{\mu-1}{\mu}$ entonces existe un único punto de intersección entre $F$ y $g$, el cual es llamado punto de equilibrio; de lo contrario, si $s_r \geq \delta + \frac{\mu-1}{\mu}$ los puntos de intersección no existen.

□

## 3.2. Estabilidad

En esta sección se hará un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema $T$. Como la función $g(n,k)$ es implícita, el cálculo y análisis de los puntos de equilibrio es complejo, por lo tanto es necesario dotar a esta función de ciertas condiciones que permitan con mayor facilidad dicho análisis.

Para el análisis de estabilidad local de los puntos de equilibrio, se denota con $J(n,k)$ la matriz Jacobiana del Sistema $T$ en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN **3.2.** *[2] Los valores propios de $J(n,k)$ están dados por $\lambda_1 = f'(n)$ y $\lambda_2 = \frac{\partial g}{\partial k}(n,k)$.*

*Demostración.* La matriz Jacobiana del sistema es

$$\begin{aligned} J(n,k) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial k} \\ \frac{\partial g}{\partial n} & \frac{\partial g}{\partial k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu - 2\mu n & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n} & \frac{\partial g}{\partial k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para obtener el polinomio característico evaluamos $(J(n,k) - I\lambda)$, esto es

$$\begin{pmatrix} (\mu - 2\mu n) - \lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n} & \frac{\partial g}{\partial k} - \lambda \end{pmatrix}$$

Luego

$$p(\lambda) = ((\mu - 2\mu n) - \lambda)(\frac{\partial g}{\partial k} - \lambda) = \frac{\partial g}{\partial k}(\mu - 2\mu n) - \lambda\left((\mu - 2\mu n) + \frac{\partial g}{\partial k}\right) + \lambda^2$$

Por lo tanto sus raíces son:

$$\lambda_1 = \mu - 2\mu n = f'(n)$$

y

$$\lambda_2 = \frac{\partial g}{\partial k}(n,k)$$

□

El análisis de estabilidad local de un punto de equilibrio puede ser llevado a cabo mediante la localización de los valores propios de la matriz Jacobiana en el plano complejo, en virtud del teorema de estabilidad vía linealización se sabe que una condición suficiente y necesaria para la estabilidad local, es que ambos valores propios estén dentro del circulo unitario en el plano complejo.

Se consideraran las siguientes proposiciones para el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema $T$.

PROPOSICIÓN **3.3.** *[2] Si $\rho \in (0,1)$, $s_r < \delta$ y $\mu \in (1,3)$ entonces el punto de equilibrio $E_0$ es inestable.*

*Demostración.* Sea $J(E_0)$ la matriz Jacobiana del sistema $T$ evaluada en el punto de equilibrio $E_0$ dada por:

$$\begin{aligned} J(E_0) &= \begin{pmatrix} \mu - 2\mu n & 0 \\ \frac{-1}{(1+n)^2}F(k) & \frac{1}{1+n}\frac{\partial F}{\partial k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -F(k) & \frac{\partial F}{\partial k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio característico asociado es:

$$P(\lambda) = (\mu - \lambda)(\frac{\partial F}{\partial k} - \lambda) = 0$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = \mu$ y $\lambda_2 = \frac{\partial F}{\partial k}$.
Como $\mu \in (1,3)$ entonces $|\lambda_1| = |\mu| = \mu > 1$. Para $\lambda_2$ se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial k} = (1-\rho)k^{\rho-1}(k^\rho+1)^{\frac{1-2\rho}{\rho}}(s_w + s_r k^\rho) + (k^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\rho s_r k^{\rho-1}$$

Como $\rho \in (0,1)$ y $s_r < \delta$ entonces $\frac{\partial F}{\partial k} < 1$. Así, en virtud del teorema de estabilidad vía linealización, si al menos una raíz característica de $T$está afuera del disco unitario en el plano complejo, en este caso dicha raíz es $\lambda_1 = \mu$, entonces el punto de equilibrio $E_0$ es inestable, y es un punto silla. □

PROPOSICIÓN **3.4.** *[2] Si $\rho \in (0,1)$, $s_r < \delta$, $\mu \in (1,3)$ y $\frac{\partial F}{\partial k} < \frac{2\mu-1}{\mu}$, entonces $E_{n^*}$ es asintóticamente estable.*

*Demostración.* $J(E_{n^*})$ es la matriz Jacobiana del sistema $T$ evaluada en el punto de equilibrio $E_{n^*}$

$$J(E_{n^*}) = \begin{pmatrix} -\mu + 2 & 0 \\ \frac{-F(k)}{(\frac{2\mu-1}{\mu})^2} & \frac{\mu}{2\mu-1}\frac{\partial F}{\partial k} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico asociado está dado por:

$$P(\lambda) = ((-\mu+2) - \lambda)\left(\frac{\mu}{2\mu-1}\frac{\partial F}{\partial k} - \lambda\right) = 0$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = -2+\mu$ y $\lambda_2 = \frac{\mu}{2\mu-1}\frac{\partial F}{\partial k}$.
Como $\mu \in (1,3)$ entonces $|\lambda_1| = |-2+\mu| < 1$ y se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial k} = (1-\rho)k^{\rho-1}(k^\rho+1)^{\frac{1-2\rho}{\rho}}(s_w+s_r k^\rho) + (k^\rho+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}\rho s_r k^{\rho-1}$$

y además $\rho \in (0,1)$, $s_r < \delta$ y $\frac{\partial F}{\partial k} < \frac{2\mu-1}{\mu}$ entonces $\frac{\mu}{2\mu-1}\frac{\partial F}{\partial k} < 1$. Así, en virtud del teorema de estabilidad vía linealización, si todas las raices características de $T$ están dentro del disco unitario en el plano complejo, entonces el punto de equilibrio $E_{n^*}$ es asintóticamente estable y es un nodo. □

Las proposiciones anteriores se tienen para el caso de $\rho \in (0,1)$; si el valor de $\rho$ es menor que cero, entonces el comportamiento del sistema y en especial de la función $F(k_t)$ es diferente, existirán más puntos de equilibrio que en el caso anterior, y se discutirán otras condiciones respecto a los parámetros de la función $g(n,k)$ para estudiar la estabilidad.

PROPOSICIÓN **3.5.** *[2] Si $\rho < 0$ y $s_r < s_w$ entonces $T$ tienen hasta tres puntos de equilibrio de $E_0$ y $E_{n^*}$, los inestables, separados del conjunto de atracción de los estables.*

*Demostración.* Del desarrollo de la demostración de la proposición (3.1) se tiene que la función $F(k_t)$ es cóncava. Al al ser $\rho < 0$ y $s_r < s_w$ la función $F(k_t)$ tiene puntos de inflexión, estos puntos, representan el cambio en la concavidad de la función $F(k_t)$, y por lo tanto se hallarán hasta tres soluciones positivas de la ecuación $F = g$, los cuales representan los puntos de intersección entre $F$ y $g$ para los diferentes valores de $E_0$ y $E_{n^*}$. □

PROPOSICIÓN **3.6.** *[2] Existe $\overline{\rho}$ talque si $\overline{\rho} < \rho < 0$ y $s_r > s_w$ entonces, $E_0$ y $E_{n^*}$ tiene un único punto de equilibrio positivo asintóticamente estable.*

*Demostración.* Al igual que en la proposición anterior, como $\rho$ toma valores negativos, el sistema $T$ tiene hasta tres puntos de equilibrio, respecto a $E_0$ y $E_{n^*}$, en general los puntos de equilibrio generados de la forma $E_0 = (0,k^*)$ son inestables, esto ya que por la proposición 3.3, se concluyó que la inestabilidad se obtiene en los puntos de equilibrio triviales; de los puntos de equilibrio restantes se deduce que el punto de equilibrio netamente real, es el que es asintóticamente estable, esto de la proposición 3.4. □

## 3.3. Análisis de Sensibilidad de los Parámetros del Sistema $T$

Se realizaron algunos ejemplos en donde se puede visualizar de una mejor manera el comportamiento de los resultados analíticos estudiados anteriormente.

EJEMPLO **3.1.** *Caso (i) $\rho \in (0,1)$ y $s_r < \delta$*
*Sea $\rho = 0.2$, $\delta = 0.7$, $s_r = 0.5$, $s_w = 0.4$ y $\mu = 1.5$. Luego $T$ esta dado por:*

$$T := \begin{cases} n_{t+1} = 1.5n_t(1-n_t) = f(n) \\ \\ k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2})] = g(n,k) \end{cases}$$

Se hallan los puntos de equilibrio de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 1.5n_t - 1.5n_t^2 = n_t &\iff 1.5n_t - 1.5n_t^2 - n_t = 0 \\ &\iff n_t(1.5 - 1.5n_t - 1) = 0 \end{aligned}$$

El primer punto de equilibrio para esta ecuación es $n_t = 0$. Para hallar el otro punto de equilibrio se encuentra el valor de $n_t$ para $1.5 - 1.5n_t - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 1.5 - 1.5n_t - 1 = 0 &\iff 1.5 - 1.5n_t = 1 \\ &\iff -1.5n_t = 1 - 1.5 \\ &\iff n_t = 0.3333 \end{aligned}$$

Ahora de la segunda ecuación se hallan los puntos de equilibrio de la siguiente manera.

$$\frac{1}{1+n_t}[0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2})] = k_t$$

Para $n_t = 0$

$$\begin{aligned} 0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2}) = k_t &\iff 0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2}) - k_t = 0 \\ &\iff -0.7k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2}) = 0 \\ &\iff -0.2k_t + 2.4k_t^{0.8} + 4.6k_t^{0.6} + 4.4k_t^{0.4} + 2.1k_t^{0.2} + 0.4 = 0 \end{aligned}$$

Entonces $k_t \approx 498302.1255$. Por tanto el primer punto de equilibrio para $T$ es $E_0 = (0, 498302.1255)$

Para $n_t = 0.3333$

$$\begin{aligned} 0.75[0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2})] = k_t &\iff 0.75[0.3k_t + (k_t^{0.2}+1)^4(0.4+0.5k_t^{0.2})] - k_t = 0 \\ &\iff -0.4k_t + 1.8k_t^{0.8} + 3.4k_t^{0.6} + 3.3k_t^{0.4} + 1.5k_t^{0.2} + 0.3 = 0 \end{aligned}$$

Entonces $k_t \approx 8732.49$. Y por lo tanto el segundo punto de equilibrio para $T$ es $E_{n^*} = (0.3333, 8732.49)$

Ahora se desea estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio encontrados; para ello se obtiene la matriz Jacobiana del sistema y se evalúa en los puntos de equilibrio.
Para el punto de equilibrio $E_0 = (0, 498302.1255)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_0) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_0) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_0) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_0) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5 - \lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_0) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_0) - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \frac{1}{1+n_t}[0.8 + 1.92k_t^{-0.2} + 2.76k_t^{-0.4} + 1.76k_t^{-0.6} + 0.42k_t^{-0.8}]$$

y al evaluar en el punto $E_0$,

$$\frac{\partial g}{\partial k}(0,498302.1255) \approx 0.95445.$$

Por lo tanto,

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1.5-\lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_0) & 0.95445-\lambda \end{pmatrix}.$$

Cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = (1.5-\lambda)(0.95445-\lambda) = 0$, el cual tiene raíces $\lambda_1 = 0.95445$ y $\lambda_2 = 1.5$.Luego el punto de equilibrio $E_0$ es inestable y es un punto silla, ya que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$.

Ahora para el punto de equilibrio $E_{n^*} = (0.3333, 8732.49)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_{n^*}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_1)-\lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_1) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{n^*}) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_{n^*})-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5-\lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_1) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_1)-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al evaluar el punto $E_1$ en la derivada de $g$ respecto a $k$, se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial k}(0.3333, 8732.49) \approx 0.8953$$

Por lo tanto

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 0.5-\lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_1) & 0.8953-\lambda \end{pmatrix}$$

donde el polinomio característico asociado es $P(\lambda) = (0.5-\lambda)(0.8953-\lambda) = 0$, el cual tiene raíces $\lambda_1 = 0.5$ y $\lambda_2 = 0.8953$. Luego el punto de equilibrio $E_{n^*}$ es asintóticamente estable y es un nodo, ya que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$.

En la figura 3.1 se visualiza el punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema $T$.

EJEMPLO **3.2.** *Caso (ii) $\rho < 0$ y $s_r < s_w$.*
*Sea $\rho = -1$, $\delta = 0.7$, $s_r = 0.4$, $s_w = 0.5$ y $\mu = 2.5$. Luego $T$ esta dado por:*

$$T := \begin{cases} n_{t+1} = 2.5n_t(1-n_t) = f(n) \\ \\ k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[0.3k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1})] = g(n,k) \end{cases}$$

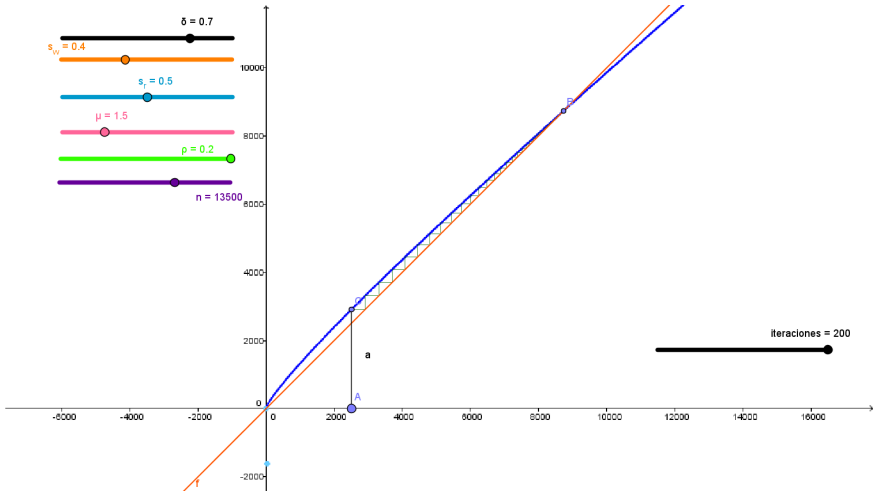



Figura 3.1: Gráfica ecuación g(0,45454)

Se hallan los puntos de equilibrio de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 2.5n_t - 2.5n_t^2 = n_t &\iff 2.5n_t - 2.5n_t^2 - n_t = 0 \\ &\iff n_t(2.5 - 2.5n_t - 1) = 0 \end{aligned}$$

El primer punto de equilibrio para esta ecuación es $n_t = 0$. Para hallar el otro punto de equilibrio se encuentra el valor de $n_t$ para $2.5 - 2.5n_t - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 2.5 - 2.5n_t - 1 = 0 &\iff 2.5 - 2.5n_t = 1 \\ &\iff -2.5n_t = 1 - 2.5 \\ &\iff n_t = 0.6 \end{aligned}$$

Ahora de la segunda ecuación se hallan los puntos de equilibrio de la siguiente manera.

$$\frac{1}{1+n_t}[0.3k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1})] = k_t$$

Para $n_t = 0$

$$\begin{aligned} 0.3k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1}) = k_t &\iff 0.3k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1}) - k_t = 0 \\ &\iff -0.7k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1}) = 0, \end{aligned}$$

entonces, la ecuación anterior tiene 3 raíces $k_{t_1} = 0$, $k_{t_2} = -0.642857 - 0.123718i$, $k_{t_3} = -0.642857 + 0.123718i$. Por lo tanto los puntos de equilibrio de $T$ para $n_t = 0$ son:
$E_{0_1} = (0,0)$, $E_{0_2} = (0, -0.642857 - 0.123718i)$ y $E_{0_3} = (0, -0.642857 + 0.123718i)$

Para $n_t = 0.6$

$$0.625[0.3k_t + (k_t^{-1}+1)^{-2}(0.5+0.4k_t^{-1})] = k_t \iff \frac{-0.8125k(k^2 + 1.61538k + 0.692308)}{(k+1)^2} = 0$$

Entonces, la ecuación anterior tiene 3 raíces $k_{t'_1} = 0, k_{t'_2} = -0.807692 - 0.199852i, k_{t'_3} = -0.807692 + 0.199852i$. Y por lo tanto los puntos de equilibrio de $T$ para $n_t = 0.6$ son:
$E_{n_1^*} = (0.6, 0)$, $E_{n_2^*} = (0.6, -0.807692 - 0.199852i)$ y $E_{n_3^*} = (0.6, -0.807692 + 0.199852i)$.

Ahora se analiza la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio. Se tendrá en cuenta que:

$$\frac{\partial g}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n_t}\left[\frac{0.7 + 1.5k_t + 0.9k_t^2 + 0.3k_t^3}{(1+k_t)^3}\right]$$

- Para el punto de equilibrio $E_{0_1} = (0, 0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_{0_1}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_{0_1}) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_{0_1}) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{0_1}) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_{0_1}) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.5 - \lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{0_1}) & 0.7 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Por lo tanto el polinomio característico es $P(\lambda) = (2.5 - \lambda)(0.7 - \lambda)$=0, el cual tiene raíces $\lambda_1 = 2.5$ y $\lambda_2 = 0.7$.Luego el punto $E_{0_1}$ es inestable ya que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$

- Para el punto de equilibrio $E_{0_2} = (0, -0.642857 - 0.123718i)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_{0_1}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_{0_2}) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_{0_2}) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{0_2}) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_{0_2}) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.5 - \lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{0_2}) & (1.6000001 - 0.51961i) - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Por lo tanto el polinomio característico es $P(\lambda) = (2.5 - \lambda)((1.6000001 - 0.51961i) - \lambda)$=0, el cual tiene raíces $\lambda_1 = 2.5$ y $\lambda_2 = (1.6000001 - 0.51961i)$. Luego el punto $E_{0_2}$ es inestable y espiral ya que $|\lambda_1| > 1$ y $|Re(\lambda_2)| > 1$.

  Realizando el mismo análisis se obtiene que el punto $E_{0_3}$ tiene los mismos resultados que el punto $E_{0_2}$ y por lo tanto es inestable.

- Para el punto de equilibrio $E_{n_1^*} = (0.6, 0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_{n_1^*}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_{n_1^*}) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_{n_1^*}) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{n_1^*}) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_{n_1^*}) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{n_1^*}) & 0.4375 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio característico es $P(\lambda) = (-0.5-\lambda)(0.4375-\lambda)$=0, el cual tiene raíces $\lambda_1 = -0.5$ y $\lambda_2 = 0.4375$. Luego el punto $E_{0_1}$ es asintóticamente estable ya que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$.

- Para el punto de equilibrio $E_{n_2^*} = (0.6, -0.807692 - 0.199852i)$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(E_{n_2^*}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(E_{n_2^*}) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial k}(E_{n_2^*}) \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{n_2^*}) & \frac{\partial g}{\partial k}(E_{n_2^*}) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.5-\lambda & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial n}(E_{n_2^*}) & (4.37499+0.97426i)-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio característico es $P(\lambda) = (-0.5-\lambda)(0.4375-\lambda)$=0, el cual tiene raíces $\lambda_1 = -0.5$ y $\lambda_2 = 4.37499 + 0.97426i$. Luego el punto $E_{n_2^*}$ es inestable ya que $|\lambda_1| < 1$ y $|Re(\lambda_2)| > 1$.

Realizando el mismo análisis se obtiene que el punto $E_{n_3^*}$ tiene los mismos resultados que el punto $E_{n_2^*}$ y por lo tanto es inestable.

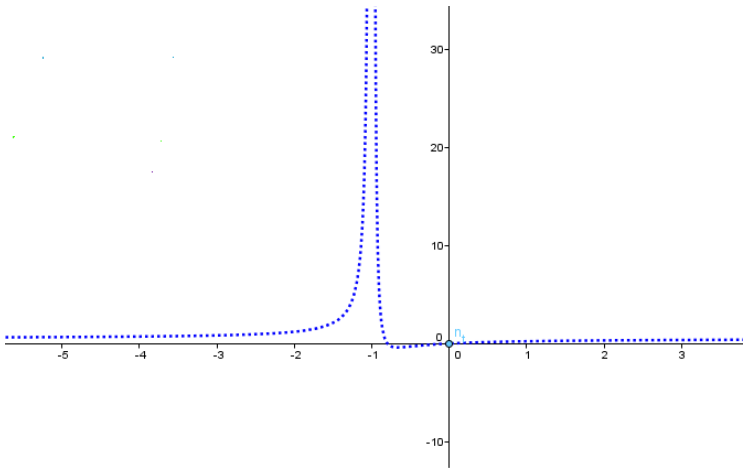



Figura 3.2: Gráfica en Geogebra, Función $F(k_t)$ para el caso (ii) .

EJEMPLO **3.3.** *Caso (iii) Existe* $\overline{\rho} < 0$ *talque* $\overline{\rho} < \rho < 0$ *y* $s_r > s_w$. *Sea* $\overline{\rho} = -3.5$ *entonces* $-3.5 < \rho = -3 < 0$, $s_r = 0.5$, $s_w = 0.4$ *y* $\mu = 2.5$. *Luego T está dado por:*

$$T := \begin{cases} n_{t+1} = 2.5n_t(1-n_t) = f(n) \\ \\ k_{t+1} = \frac{1}{1+n_t}[0.7k_t + (k_t^{-3}+1)^{-4/3}(0.4+0.5k_t^{-3})] = g(n,k) \end{cases}$$

Como se ha visto en ejemplos anteriores, los puntos de equilibrio de la primera ecuación son $n_t = 0$ y $n_t = 0.6$.

Del mismo modo como en los ejemplos anteriores, se hallan los puntos de equilibrio para la segunda ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1+n_t}[0.7k_t + (k_t^{-3}+1)^{-4/3}(0.4+0.5k_t^{-3})] = k_t.$$

Haciendo algunos procesos operativos, para $n_t = 0$ se encuentran las siguientes raíces: $k_t = 1.05553$, $k_t = 0.5051 - 0.947804i$, $k_t = 0.5051 + 0.947804i$ y $k_t = 1.26226$. Para $n_t = 0.6$ se encuentran las raíces: $k_t = 1.0381$, $k_t = 0.424263 - 0.734845i$, $0.476113 - 0.916286i$ y $0.476113 + 0.916286i$.
Por lo tanto para $n_t = 0$ los puntos de equilibrio de $T$ están dados por: $E_{0_1} = (0, 1.05553)$, $E_{0_2} = (0, 0.5051 - 0.947804i)$, $E_{0_3} = (0, 0.5051 + 0.947804i)$ y $E_{0_4} = (0, 1.26226)$. Y para $n_t = 0.6$ los puntos de equilibrio de $T$ están dados por: $E_{n_1^*} = (0.6, 1.0381)$, $E_{n_2^*} = (0.6, 0.424263 - 0.734845i)$, $E_{n_3^*} = (0.6, 0.476113 - 0.916286i)$ y $E_{n_4^*} = (0.6, 0.476113 + 0.916286)$.

Ahora para el análisis de la estabilidad se debe tener en cuenta que:

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \frac{1}{1+n_t}\left[0.7 + \frac{4(0.1+\frac{0.2}{k^3})}{\left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{7/3}k^4} - \frac{0.6}{\left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{4/3}k^4}\right].$$

Para los puntos de equilibrio con $n_t = 0$ el valor propio $\lambda_1 = \mu$ y $|\lambda| > 1$ ya que $\mu \in (1,3)$; por lo tanto estos puntos de equilibrio son inestables. Al reemplazar los valores de las $k_t$-raíces en la derivada anteriormente expuesta, y con $n_t = 0.6$ se tiene una conclusión similar con los puntos $E_{n_2^*}$, $E_{n_3^*}$, $E_{n_4^*}$ pero esta vez $|\lambda_2| > 1$, por lo tanto estos puntos son inestables, Una situación diferente ocurre con el punto de equilibrio $E_{n_1^*} = (0.6, 1.0381)$. el primer valor propio $\lambda_1 = -0.5$ y el segundo valor propio $\lambda_2 = 0.43492$, por lo tanto $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, se concluye que el punto de equilibrio $E_{n_1^*}$ es el único asintóticamente estable para el sistema $T$.

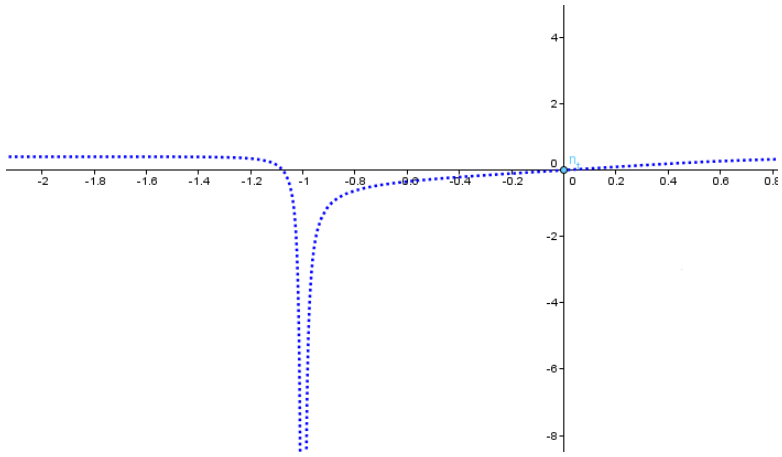



Figura 3.3: Gráfica en Geogebra, Función $F(k_t)$ para el caso (iii) .

# Capítulo 4

# Conclusiones

- No existen métodos constructivos para obtener la solución explícita de un sistema de ecuaciones en diferencias no lineal, pero la obtención de los puntos de equilibrio de dicho sistema, es de gran ayuda en el momento de estudiar el comportamiento de las soluciones, ya que éstas se aproximan o convergen a los puntos de equilibrio cuando son asintóticamente estables.

- El estudio de la dinámica discreta, y mas exactamente el teorema de la estabilidad vía linealización es una herramienta muy útil para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal, facilita el trabajo de hallar en que puntos se encuentra dicha estabilidad, y permite determinar en que momento el sistema es estable.

- Existen sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales cuyo análisis de estabilidad es complejo, este es el caso del sistema $T$ expuesto en este trabajo, ya que la función $g(n_t, k_t)$ perteneciente a éste, al depender de una cantidad considerable de parámetros, no permite aplicar directamente el teorema de estabilidad vía linealización, es por ello que se debió dotar a $g(n,k)$ de condiciones bajo sus parámetros.

- Se pudo observar que el parámetro mas sensible a perturbaciones es $\rho$, ya que al poner condiciones sobre el, varía de manera considerable el sistema, y se pueden obtener cantidades diferentes de puntos de equilibrio del sistema.

- El sistema $T$ tiene un único punto de equilibrio asintóticamente estable cuando $\rho \in (0,1)$, $s_r < \delta$; $\rho < 0$ y $s_r > s_w$. Además la estabilidad asintótica del sistema $T$, se encuentra en los puntos de equilibrio no triviales.

- Las fluctuaciones realizadas en la ecuación que describe la tasa de crecimiento poblacional inciden en el cambio del capital y del crecimiento de la economía a largo plazo.

# Respuesta al Planteamiento del problema

Las condiciones que debe tener el sistema $T$ para que los puntos de equilibrio de el mismo sean asintóticamente estables son:

- Para que $T$ tenga un único punto de equilibrio asintóticamente estable, en la función $g(n_t, k_t)$ se debe considerar el valor de $\rho$ entre el intervalo $(0, 1)$ y también que la tasa de ahorro de los accionistas sea menor que la tasa de depreciación del capital, esto es $s_r < \delta$.
- Otra condición que debe tener el sistema $T$ para tener único punto de equilibrio asintóticamente estable es considerar en la función $g(n_t, k_t)$ el parámetro $\rho < 0$ y que la tasa de ahorro de los accionistas sea mayor que la tasa de ahorro de los trabajadores, esto es $s_r > s_w$.

# Apéndice A

# Programa

Se realizó un programa de autoría original de quien desarrolló este trabajo, para hallar los puntos de equilibrio del sistema $T$ y deducir su estabilidad con valores determinados en los parámetros y con $\rho \in (0,1)$, esto con el fin de hacer una comprobación al procedimiento analítico, y además para obtener la estabilidad de $T$ de una forma inmediata.

```
import java.awt.BorderLayout;
import javax.swing.*;
import java.awt.event.*;

public class Ventana extends JFrame implements ActionListener{

    JTextArea arearesultados = new JTextArea();
    JScrollPane scroll = new JScrollPane(arearesultados);
    private JTextField capturaro;
    private JLabel enunciadoro;
    private JTextField capturadelta;
    private JLabel enunciadodelta;
    private JTextField capturasw;
    private JLabel enunciadosw;
    private JTextField capturasr;
    private JLabel enunciadosr;
    private JTextField capturamu;
    private JLabel enunciadomu;
    private JTextField capturaraiz;
    private JLabel enunciadoraiz;
     double ro;
    double delta;
    double sr;
    double sw;
    double mu;
    double raiz1;
    double raiz2;
```

```
double raiz;
double k;
double valorverdad = 0;
double I=-498300;
double a,b;
double cuadraticaB;
double cuadraticaC;
double parte1;
double parte2;

double lamba1=0;
double lamba2=0;
double valorposicion=0;
double B; // B es la evalucion de la derivada de la
segunda ecuación evaluada en el punto fijo (n,k)
// n  punto fijo de la primera ecuacion
// k punto fijo de la segunda ecuación
String valora,valorb;


private JButton Generar;


public Ventana() {
    setLayout(null);
    setTitle("Trabajo grado");

    enunciadoro=new JLabel("Ro:");
    enunciadoro.setBounds(10,10,100,30);
    add(enunciadoro);

    enunciadodelta=new JLabel("Delta:");
    enunciadodelta.setBounds(10,30,100,30);
    add(enunciadodelta);

    enunciadosr=new JLabel("Sr:");
    enunciadosr.setBounds(10,50,100,30);
    add(enunciadosr);

    enunciadosw=new JLabel("Sw:");
    enunciadosw.setBounds(10,70,100,30);
    add(enunciadosw);

    enunciadomu=new JLabel("Mu:");
    enunciadomu.setBounds(10,90,100,30);
    add(enunciadomu);
```

```
    enunciadoraiz=new JLabel("Raiz deseada:");
    enunciadoraiz.setBounds(10,110,100,30);
    add(enunciadoraiz);

    capturaro=new JTextField();
    capturaro.setBounds(120,10,50,20);
    add(capturaro);

    capturadelta=new JTextField();
    capturadelta.setBounds(120,30,50,20);
    add(capturadelta);

    capturasr=new JTextField();
    capturasr.setBounds(120,50,50,20);
    add(capturasr);

    capturasw=new JTextField();
    capturasw.setBounds(120,70,50,20);
    add(capturasw);

    capturamu=new JTextField();
    capturamu.setBounds(120,90,50,20);
    add(capturamu);

    capturaraiz=new JTextField();
    capturaraiz.setBounds(120,110,50,20);
    add(capturaraiz);

    Generar=new JButton("Generar");
    Generar.setBounds(10,140,100,30);
    add(Generar);
    Generar.addActionListener(this);

    arearesultados.setEditable(false);
    scroll.setBounds(10,180,300,100);
    add(scroll, BorderLayout.CENTER);


}



public void actionPerformed(ActionEvent e) {
    if (e.getSource()==Generar) {
        String textoro=capturaro.getText();
```

```
            String textodelta=capturadelta.getText();
            String textosw=capturasw.getText();
            String textosr=capturasr.getText();
            String textomu=capturamu.getText();
             String textoraiz=capturaraiz.getText();



            ro= Double.parseDouble(textoro);
            raiz=Double.parseDouble(textoraiz);
            delta= Double.parseDouble(textodelta);
             sr= Double.parseDouble(textosr);
             sw= Double.parseDouble(textosw);
             mu= Double.parseDouble(textomu);


              raiz1=0;
              raiz2= ((mu - 1)/mu);
              raiz2=Math.rint(raiz2*10000)/10000;

             if(raiz==1){
                raiz=raiz1;
             }
             else{
                  raiz=raiz2;
             }


k=I;
  a = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
  ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;
  valora = String.valueOf(a);

  while(valora=="NaN"){
  I=I+1;
  k=I;
  a = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
  ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;
  valora = String.valueOf(a);
       }


  k=I;
  a = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
  ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;
```

```
    if(a>0){
       valorposicion=1;
   } //indica que la funcion toma valores positivos en caso que no
   son los valores negativos



//reemplazar a n = raiz1 o raiz2
    while(valorverdad ==0){

    k=I;
    a = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
    ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;
    k=I+1;
    b = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
    ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;

    if(valorposicion==1){
      // caso que los valores son positivos ambos
        if(b>0){
          I=I+1;
        }
        else{
            // si ocurre esto es porque la funcion cambia de signo
         valorverdad= valorverdad +5;
        }
    }
    else{
             if(b<0){
         I=I+1;
          }
            else{
            // si ocurre esto es porque la funcion cambia de signo
         valorverdad= valorverdad +5;
            }
    }

    }


   valorverdad=0;

  while(valorverdad ==0){

    k=I;
    a = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
```

```
    ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;
    k=I+0.00001;
    b = (1/(1+raiz1))*((1-delta)*k + Math.pow((Math.pow(k,ro) + 1)
    ,((1-ro)/ro))*(sw + sr*Math.pow(k,ro))) - k;

   if((a>0&&b>0)||(a<0&&b<0)){
      I=I+0.0000001;
    }
    else{
        valorverdad= valorverdad +5;
    }

  }

  // aproximaciones exactas hasta 0.0001
 k=Math.rint(k*10000)/10000;
 raiz2=Math.rint(raiz2*10000)/10000;

 parte1=((ro-1)*(-Math.pow(k, ro-1))*(Math.pow(Math.pow(k,ro) + 1
 , ((1 - 2*ro)/ro))))*(sr*(Math.pow(k,ro)) + sw);
  parte2=(ro*sr*Math.pow(k, ro-1))*(Math.pow(Math.pow(k,ro) + 1
  ,((1-ro)/ro) ));

   // aproximaciones exactas hasta 0.0001
  parte1=Math.rint(parte1*10000)/10000;
  parte2=Math.rint(parte2*10000)/10000;

// B evalucion de la derivada de la funcion g(n,k)
en los puntos de n=raiz2
   B=(1/(1 + raiz1))*(-delta + parte1 + parte2 + 1);
   B=Math.rint(B*10000)/10000;

//  (1-delta+k^(-1+ro) (1+k^ro)^((1-ro)/ro) r s+k^(-1+ro)
(1+k^ro)^(-1+(1-ro)/ro) (1-ro) (k^ro sr+sw))/n
  //Despejo los valores de la cuadratica que genera el jacobiano;
  cuadraticaB= -mu+(2*mu*raiz1)-B;
  cuadraticaC = (mu-(2*mu*raiz1))*B;

   // aproximaciones exactas hasta 0.0001
  cuadraticaB=Math.rint(cuadraticaB*10000)/10000;
  cuadraticaC=Math.rint(cuadraticaC*10000)/10000;

//jacobiano raices
 lamba1= (-cuadraticaB - Math.sqrt(Math.pow(cuadraticaB, 2)
 - (4*(cuadraticaC))))/2;
```

```
 lamba2= (-cuadraticaB + Math.sqrt(Math.pow(cuadraticaB, 2)
 - (4*(cuadraticaC))))/2;


 lamba1=Math.rint(lamba1*10000)/10000;
 lamba2=Math.rint(lamba2*10000)/10000;

  System.out.println(k);
  arearesultados.append("Punto fijo de la ecuacion k: "+k+" \n ");
  System.out.println(B);
  arearesultados.append
  ("Evalucion del punto fijo k en la derivada g(n,k) "+B+" \n ");
  System.out.println("Punto fijo n= "+raiz1+" k = "+k+" es "+lamba1);
  arearesultados.append("Raiz 1 del jacobiano del sistema: "+lamba1+" \n ");
  System.out.println("Punto fijo n= "+raiz1+" k = "+k+" es "+lamba2);
  arearesultados.append("Raiz 2 del jacobiano del sistema: "+lamba2+" \n ");
        }
    }

    public static void main(String[] ar) {
        Ventana formulario1=new Ventana();
        formulario1.setBounds(30,30,350,350);
        formulario1.setVisible(true);
    }
}
```

# Bibliografía


[1] V. Bohm, L. Kaas, *Differential savings, factor shares, and endogenous growth cycles*, J Econ Dyn Control, 2000, 965-980.

[2] S. Brianzoni, C. Mammana, E. Michetti, *Nonlinear dynamics in a business-cycle model with logistic population growth*, Chaos, solitons and Fractals 2009, 714-130.

[3] S. Brianzoni, C. Mammana, E. Michetti, *Complex dynamics in the neoclassical growth model with differential savings and non-constant labor force growth*, Stud Nonlinear Dyn Econom, 2007, Article 3.

[4] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 1996.

[5] A. Medio, *Nonlinear Dynamics A Primer*, Cambridge, University Press, 2001.

[6] D. Trupkin, *Solow Tiempo Discreto*, Internet: <http://www2.um.edu.uy/dtrupkin/TP2_2011_solucion.pdf>.

[7] S. Zimmerman, *An undergraduate's guide to the Hartman-Grobman and Poincaré Bedoxin Theorems*, Spring, 2008.