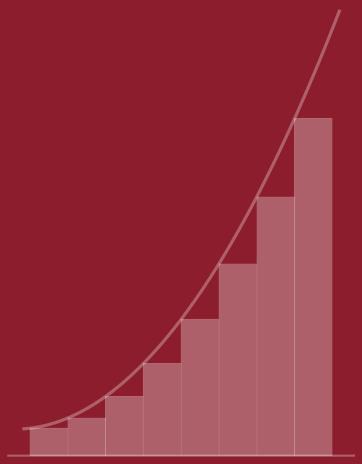
NOTAS DE CLASE ▪ VOLUMEN II

Fundamentos de Cálculo Integral

para Administración Deportiva
e Ingenierías del Medio Ambiente



W. A. Rojas C., PhD

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales

Volumen II ▪ Semestre 2026-III

CC BY-NC-SA 4.0

Créditos y licencia

Fundamentos de Cálculo Integral para Administración Deportiva e Ingenierías del Medio Ambiente
Notas de clase, volumen II
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales

© Wilson Alexander Rojas Castillo
Continuación de *Fundamentos de Cálculo Diferencial*.

CC BY NC SA

Esta obra se distribuye bajo la licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional** (CC BY-NC-SA 4.0).

Usted es libre de compartir y adaptar este material, bajo las siguientes condiciones:

BY **Atribución.** Debe dar crédito al autor original, citar la fuente e indicar si realizó cambios.

NC **No comercial.** No puede usar el material con fines comerciales.

SA **Compartir igual.** Si remezcla, transforma o construye sobre el material, debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original.

Texto legal completo: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es

Declaración sobre el uso de inteligencia artificial

En la preparación de este material se utilizó un sistema de inteligencia artificial (Claude, de Anthropic) como herramienta de apoyo en la **edición, la corrección de estilo y ortografía y la diagramación**: redacción del texto a partir de los apuntes de clase del autor, composición tipográfica, elaboración de figuras, depuración del código LaTeX y uniformidad de la presentación.

Asimismo, la totalidad de los resultados numéricos y simbólicos de los ejemplos y ejercicios fue **contrastada con álgebra computacional** antes de su inclusión, procedimiento que permitió detectar y corregir errores tanto del manuscrito original como de la transcripción.

Los contenidos, la secuencia didáctica y las decisiones pedagógicas provienen de los apuntes de clase del autor, a quien corresponde la validación matemática final y la responsabilidad plena sobre el material publicado.

Esta declaración se incluye por transparencia académica.

Sobre el autor

Wilson Alexander Rojas Castillo es docente e investigador de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, donde imparte cursos de cálculo diferencial en el Programa de Administración Deportiva. Doctor en Ciencias-Física por la Universidad Nacional de Colombia, con maestría en Astronomía y más de quince años de experiencia docente en instituciones como la Universidad Católica de Colombia y la Fundación Universitaria Los Libertadores, combina una sólida formación en física teórica —con publicaciones en revistas

como *Physical Review D* y *Physica Scripta*— con un creciente interés en la econofísica y el análisis cuantitativo del sector deportivo. Investigador Junior reconocido por Minciencias y par evaluador de proyectos académicos, ha orientado su trabajo a tender puentes entre el rigor matemático y la toma de decisiones en la gestión, convencido de que el cálculo no es un obstáculo sino una herramienta para leer, comprender y transformar el entorno deportivo y de ingeniería.

Presentación y estructura del curso

Este volumen continúa *Fundamentos de Cálculo Diferencial*. Donde aquel preguntaba cómo *cambia* una cantidad, este plantea la pregunta inversa: conocida la razón de cambio, ¿cómo se reconstruye la cantidad? Esa única pregunta, formulada con precisión, produce la integral, el teorema fundamental del cálculo y —al llevarla al infinito— las series.

A quién se dirige

El curso reúne dos públicos con necesidades distintas y una misma exigencia de rigor:

- **Administración Deportiva.** Interesa la integral como *acumulación*: ingresos acumulados, asistencia total en un periodo, excedente del consumidor, valor presente de un flujo.
- **Ingenierías del medio ambiente** —forestal, topográfica y ambiental. Interesa la integral como *magnitud física*: volúmenes de madera y de embalse, áreas de predio y de cuenca, caudal acumulado, carga contaminante, centroides y momentos.

> **Decisión de diseño.** El cuerpo matemático es **idéntico** para ambos públicos: mismos teoremas, mismas demostraciones, mismo nivel de exigencia. Lo que se duplica son las *aplicaciones*: cada sesión cierra con dos recuadros, uno de gestión deportiva y otro de ingeniería ambiental, resolviendo el mismo tipo de integral sobre contextos distintos.
> Un estudiante puede leer solo el recuadro de su área sin perder contenido; leer ambos muestra que la herramienta es la misma.

Estructura en cuatro módulos

Módulo	Título	Sesiones	Pregunta que responde
I	La integral y el teorema fundamental	1–7	¿Qué es integrar?
II	Técnicas de integración	8–14	¿Cómo se calcula?
III	Aplicaciones de la integral	15–20	¿Para qué sirve?
IV	Sucesiones y series	21–26	¿Y si el proceso no termina?

Módulo I. La integral y el teorema fundamental

S1. El problema inverso: de la derivada a la antiderivada

S2. La integral indefinida: reglas básicas y verificación

S3. Sumas de Riemann y la integral definida

S4. El teorema fundamental del cálculo

S5. Propiedades de la integral definida

S6. Integrales de funciones por tramos y con valor absoluto

S7. *Primer corte evaluativo*

Módulo II. Técnicas de integración

S8. Integración por sustitución

S9. Integrales que producen logaritmo y exponencial

S10. Integrales de funciones trigonométricas

S11. Sustitución trigonométrica

S12. Integración por partes

S13. Fracciones parciales

S14. *Segundo corte* y estrategia general de integración

Módulo III. Aplicaciones de la integral

S15. Área entre curvas

S16. Volúmenes de revolución: discos y arandelas

S17. Volúmenes por cascarones y longitud de arco

S18. Valor medio de una función y teorema del valor medio integral

S19. Trabajo, centroides y momentos

S20. Integrales impropias

Módulo IV. Sucesiones y series

S21. Sucesiones y convergencia

S22. Series infinitas: geométrica y telescópica

S23. Criterios de convergencia I: integral, p-series, comparación

S24. Criterios II: razón, raíz y series alternantes

S25. Series de potencias y radio de convergencia

S26. Series de Taylor y Maclaurin. Síntesis del curso

Los apéndices

	Título	Contenido
A	Métodos numéricos de integración	trapecio, Simpson, ceros de una función
B	Aplicaciones avanzadas: medio ambiente	caudales, biomasa, contaminación, topografía
C	Aplicaciones avanzadas: gestión y economía	excedentes, valor presente, curvas de Lorenz
D	La función zeta y la hipótesis de Riemann	lectura de divulgación, sin demostraciones

Los cuatro son material de consulta, no sesiones: no ocupan calendario y solo el A puede entrar en evaluación, si el curso alcanza a cubrirlo. El D no es evaluable en ningún caso.

Sobre dos temas de los apuntes originales

Los apuntes manuscritos incluyen *ceros de una función* y la *hipótesis de Riemann*. Ninguno pertenece al temario estándar de un curso de cálculo integral:
el primero es una herramienta **numérica** —necesaria para factorizar denominadores en fracciones parciales— y encaja mejor como apéndice técnico; el segundo es un problema abierto de teoría de números, magnífico como lectura de cierre pero imposible de desarrollar con las herramientas del curso.
Por eso ambos quedan en apéndices y no ocupan sesión.

Los recuadros

Definición

Enunciado formal. Es lo que debe saber con precisión.

Teorema

Resultado demostrado. En este volumen la mayoría lleva demostración completa: el público de ingeniería la necesita.

Ejemplo

Desarrollo con cada paso numerado y justificado.

Así se ve un recuadro de error

Error frecuente, observado repetidamente en exámenes.

Verificación

Comprobación por una vía independiente. En cálculo integral hay una verificación universal: **derivar el resultado** y comprobar que devuelve el integrando.

Aplicación: gestión deportiva

Uso del concepto en administración y economía del deporte.

Aplicación: ingeniería ambiental

Uso del mismo concepto en contextos forestales, topográficos y ambientales.

Índice general

Presentación y estructura del curso **3**

1. El problema inverso: de la derivada a la antiderivada **12**
1.1. La pregunta que abre el curso . . . 12
1.2. Antiderivada . . . 12
1.3. Del ritmo a la cantidad: condiciones iniciales . . . 14
1.4. Aplicaciones . . . 14
1.5. Síntesis . . . 15
Ejercicios propuestos . . . 16

2. La integral indefinida: reglas básicas **17**
2.1. Notación . . . 17
2.2. La regla de la potencia . . . 17
2.2.1. El caso excepcional $n = -1$ . . . 18
2.3. Linealidad . . . 18
2.4. Tabla de integrales inmediatas . . . 18
2.5. Estrategia: reescribir antes de integrar . . . 19
2.6. Aplicaciones . . . 20
2.7. Síntesis . . . 21
Ejercicios propuestos . . . 21

3. Sumas de Riemann y la integral definida **23**
3.1. Un problema viejo . . . 23
3.2. La construcción . . . 23
3.3. Fórmulas de sumatoria . . . 24
3.4. Una integral calculada por definición . . . 24
3.5. Signo y significado del área . . . 25
3.6. Aplicaciones . . . 25
3.7. Síntesis . . . 26
Ejercicios propuestos . . . 27

4. El teorema fundamental del cálculo **28**
4.1. Dos historias que confluyen . . . 28
4.2. Primera parte: la función acumulada . . . 28
4.3. Segunda parte: la regla de evaluación . . . 30
4.4. El método en acción . . . 30
4.5. Aplicaciones . . . 32
4.6. Síntesis . . . 33
Ejercicios propuestos . . . 33

5. Propiedades de la integral definida **35**
5.1. Propiedades algebraicas . . . 35
5.2. Propiedades de orden . . . 36
5.3. Simetría: un atajo que ahorra la mitad del trabajo . . . 37

5.4. Aplicaciones . . . 38
5.5. Síntesis . . . 38
Ejercicios propuestos . . . 38

6. Funciones por tramos y con valor absoluto 40
6.1. El principio único de esta sesión . . . 40
6.2. Funciones definidas por tramos . . . 40
6.3. Funciones con valor absoluto . . . 41
6.4. Integral definida frente a área geométrica . . . 42
6.5. Aplicaciones . . . 43
6.6. Síntesis . . . 45
Ejercicios propuestos . . . 45

7. Primer corte evaluativo 47
7.1. Estructura de la evaluación . . . 47
7.2. Rúbrica de calificación . . . 47
7.3. Los nueve errores que más cuestan . . . 48
7.4. Ítem tipo resuelto . . . 48
7.5. Cómo prepararse . . . 49
Ejercicios propuestos . . . 49

8. Integración por sustitución 51
8.1. La regla de la cadena, leída al revés . . . 51
8.2. El método en cinco pasos . . . 51
8.2.1. Cuando falta una constante . . . 52
8.3. Sustitución en integrales definidas . . . 53
8.4. Aplicaciones . . . 54
8.5. Síntesis . . . 55
Ejercicios propuestos . . . 55

9. Integrales con logaritmo y exponencial 57
9.1. El patrón u'/u . . . 57
9.1.1. Dos integrales que conviene tener . . . 58
9.2. Exponenciales . . . 58
9.3. Aplicaciones . . . 59
9.4. Síntesis . . . 61
Ejercicios propuestos . . . 61

10. Integrales de funciones trigonométricas 63
10.1. Tres identidades y una estrategia . . . 63
10.2. Potencias de seno y coseno . . . 63
10.2.1. Cuando ambos exponentes son pares . . . 64
10.3. Potencias de tangente y secante . . . 65
10.4. Aplicaciones . . . 65
10.5. Síntesis . . . 67
Ejercicios propuestos . . . 67

11. Sustitución trigonométrica 68
11.1. El problema . . . 68
11.2. Los tres casos . . . 68
11.2.1. El triángulo de referencia . . . 69
11.3. El método, paso a paso . . . 69
11.4. Aplicaciones . . . 70

11.5. Síntesis 72
Ejercicios propuestos 72

12. Integración por partes **73**
12.1. La regla del producto, invertida 73
12.2. Cómo elegir u 74
12.3. Los tres casos típicos 74
12.3.1. Caso 1: aplicación directa 74
12.3.2. Caso 2: el integrando aparentemente solo 75
12.3.3. Caso 3: aplicación repetida 75
12.3.4. Caso 4: la integral cíclica 76
12.4. Aplicaciones 76
12.5. Síntesis 78
Ejercicios propuestos 78

13. Fracciones parciales **79**
13.1. La idea 79
13.2. Caso I: factores lineales distintos 79
13.3. Caso II: factores lineales repetidos 80
13.4. Caso III: factor cuadrático irreducible 81
13.5. Aplicaciones 82
13.6. Síntesis 84
Ejercicios propuestos 84

14. Estrategia general de integración y segundo corte **86**
14.1. El problema real: no calcular, sino decidir 86
14.2. Tabla de decisión 86
14.3. Ejercicios de reconocimiento 87
14.4. Estructura de la evaluación 87
14.4.1. Rúbrica 87
14.5. Los diez errores que más cuestan 88
14.6. Ítem tipo resuelto 88
Ejercicios propuestos 89

15. Área entre curvas **90**
15.1. La idea 90
15.2. El procedimiento 91
15.2.1. Cuando las curvas se cruzan 91
15.3. Integrar respecto de y 92
15.4. Aplicaciones 93
15.5. Síntesis 94
Ejercicios propuestos 94

16. Volúmenes de revolución: discos y arandelas **96**
16.1. De rebanar a integrar 96
16.2. Discos 97
16.3. Arandelas 97
16.4. Aplicaciones 98
16.5. Síntesis 100
Ejercicios propuestos 100

17. Cascarones cilíndricos y longitud de arco **101**
17.1. Por qué hace falta otro método . . . 101
17.2. Longitud de arco . . . 102
17.3. Aplicaciones . . . 103
17.4. Síntesis . . . 105
Ejercicios propuestos . . . 105

18. Valor medio de una función **106**
18.1. Promediar infinitos valores . . . 106
18.2. El teorema del valor medio para integrales . . . 107
18.3. Valor eficaz . . . 108
18.4. Aplicaciones . . . 109
18.5. Síntesis . . . 110
Ejercicios propuestos . . . 110

19. Trabajo, centroides y momentos **112**
19.1. Una sola idea, tres nombres . . . 112
19.2. Trabajo de una fuerza variable . . . 112
19.3. Trabajo de bombeo . . . 113
19.4. Centroide de una región plana . . . 114
19.5. Aplicaciones . . . 115
19.6. Síntesis . . . 117
Ejercicios propuestos . . . 117

20. Integrales impropias **119**
20.1. Dos maneras de romper la definición . . . 119
20.2. Tipo I: intervalo infinito . . . 120
20.3. Tipo II: integrando no acotado . . . 121
20.4. Criterio de comparación . . . 122
20.5. Aplicaciones . . . 123
20.6. Síntesis y cierre del Módulo III . . . 124
Ejercicios propuestos . . . 124

21. Sucesiones y convergencia **126**
21.1. Un cambio de escenario . . . 126
21.2. Sucesión . . . 126
21.3. Convergencia . . . 127
21.4. Monotonía y acotación . . . 127
21.5. Aplicaciones . . . 128
21.6. Síntesis . . . 129
Ejercicios propuestos . . . 130

22. Series infinitas: geométrica y telescópica **131**
22.1. Sumar infinitos términos . . . 131
22.2. La serie geométrica . . . 131
22.3. El criterio del término general . . . 132
22.4. Series telescópicas . . . 133
22.5. Aplicaciones . . . 133
22.6. Síntesis . . . 135
Ejercicios propuestos . . . 135

23. Criterios de convergencia I: integral, p-series y comparación **137**
23.1. Un cambio de pregunta . . . 137
23.2. Criterio de la integral . . . 137
23.2.1. La serie armónica, por fin . . . 138
23.3. Las p-series . . . 139
23.4. Criterios de comparación . . . 139
23.4.1. Comparación por límite . . . 140
23.5. Aplicaciones . . . 141
23.6. Síntesis . . . 142
Ejercicios propuestos . . . 142

24. Criterios II: razón, raíz y series alternantes **144**
24.1. Cuando la comparación no basta . . . 144
24.2. Criterio de la razón . . . 144
24.3. Criterio de la raíz . . . 145
24.4. Series alternantes . . . 146
24.5. Convergencia absoluta y condicional . . . 147
24.6. Aplicaciones . . . 147
24.7. Síntesis . . . 148
Ejercicios propuestos . . . 148

25. Series de potencias y radio de convergencia **150**
25.1. Series que dependen de una variable . . . 150
25.2. Radio de convergencia . . . 150
25.3. La serie geométrica como función . . . 152
25.4. Derivación e integración término a término . . . 152
25.5. Aplicaciones . . . 153
25.6. Síntesis . . . 155
Ejercicios propuestos . . . 155

26. Series de Taylor y Maclaurin. Síntesis **156**
26.1. La pregunta inversa de la sesión anterior . . . 156
26.2. Construcción: el caso de e^x . . . 156
26.3. Los desarrollos fundamentales . . . 157
26.4. Polinomios de Taylor y error . . . 157
26.5. Integrar lo que no tiene antiderivada . . . 158
26.6. Aplicaciones . . . 159
26.7. Síntesis del curso . . . 160
Ejercicios propuestos . . . 161

A. Métodos numéricos de integración **162**
A.1. Cuando la antiderivada no sirve . . . 162
A.2. La regla del trapecio . . . 163
A.3. La regla de Simpson . . . 164
A.4. Ceros de una función . . . 165
A.4.1. Bisección . . . 165
A.4.2. Newton–Raphson . . . 165
A.5. Síntesis . . . 166
Ejercicios propuestos . . . 167

B. Aplicaciones avanzadas: medio ambiente **168**
B.1. Una advertencia sobre unidades . . . 168
B.2. Hidrogramas: del caudal al volumen escurrido . . . 168
B.3. Volumen de madera de un fuste . . . 169
B.4. Carga contaminante acumulada . . . 170
B.5. Topografía: áreas de predio y volúmenes de embalse . . . 171
B.5.1. Área de un predio a partir de ordenadas . . . 171
B.5.2. Volumen de un embalse por la curva área–elevación . . . 172
B.6. Síntesis . . . 173
Ejercicios propuestos . . . 173

C. Aplicaciones avanzadas: gestión y economía **175**
C.1. Una advertencia sobre el objeto que se integra . . . 175
C.2. Excedente del consumidor y del productor . . . 175
C.3. Valor presente de un flujo continuo . . . 176
C.4. Curva de Lorenz y coeficiente de Gini . . . 178
C.5. Síntesis . . . 179
Ejercicios propuestos . . . 180

D. La función zeta y la hipótesis de Riemann **181**
D.1. Cómo leer este apéndice . . . 181
D.2. De las p-series a una función . . . 181
D.3. Donde entran los primos . . . 182
D.4. Contar primos: una integral sin antiderivada . . . 183
D.5. La hipótesis . . . 184
D.6. Qué se lleva de aquí . . . 185
Ejercicios propuestos . . . 185

Bibliografía **187**

SESIÓN 1

El problema inverso: de la derivada a la antiderivada

Objetivo de la sesión

Reconocer la antiderivada como la solución del problema inverso de la derivación, comprender por qué la respuesta es una *familia* de funciones y no una sola, y reconstruir una cantidad a partir de su razón de cambio usando una condición inicial.

1.1 La pregunta que abre el curso

El cálculo diferencial respondió una pregunta: dada una cantidad, ¿a qué ritmo cambia? La respuesta fue la derivada.

Este curso plantea la pregunta al revés, y conviene notar que es la que aparece con más frecuencia en el trabajo profesional. Rara vez se conoce la función completa; lo que se mide es el *ritmo*.

Un caudalímetro no mide el volumen acumulado en un embalse: mide el caudal, es decir, litros por segundo. Un sistema de taquilla no registra el ingreso total del año: registra las ventas de cada día. Un dendrómetro no da el volumen de madera de un rodal: da el incremento anual.
En los tres casos se conoce f' y se busca f. Ese es el problema inverso, y resolverlo es integrar.

1.2 Antiderivada

Antiderivada o primitiva

Una función F es una **antiderivada** de f en un intervalo I si

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Una antiderivada de $f(x) = 2x$

1. Busco una función cuya derivada sea $2x$. La regla de la potencia sugiere subir el exponente.
   $F(x) = x^2$
2. Verifico derivando.
   $F'(x) = 2x = f(x)$ ✓

Pero $F(x) = x^2$ no es la única. También sirven $x^2 + 7$, $x^2 - 3$ y $x^2 + \sqrt{2}$: todas tienen la misma derivada, porque la derivada de una constante es cero. Esa observación, que en el volumen I fue una nota al margen, aquí se convierte en el hecho central.

Estructura de las antiderivadas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces *toda* antiderivada de f en I tiene la forma

$$G(x) = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La intuición, antes del rigor

Si dos funciones tienen la misma derivada, tienen la misma pendiente en cada abscisa: sus gráficas son **paralelas** y una es un desplazamiento vertical de la otra. La demostración que sigue convierte esa imagen en un argumento riguroso, y el instrumento es el teorema del valor medio.

Demostración

Sea G otra antiderivada, de modo que $G' = f = F'$ en I. Considere $H = G - F$. Entonces

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I.$$

Por el **teorema del valor medio** —sesión 26 del volumen I— una función con derivada nula en un intervalo es constante: si existieran $a < b$ en I con $H(a) \neq H(b)$, el TVM daría un c con

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a} \neq 0,$$

lo que contradice $H' \equiv 0$. Luego H es constante y $G = F + C$.

El error más caro del semestre

Olvidar la constante C. No es un descuido de notación: cambia la respuesta. La familia $x^2 + C$ contiene infinitas funciones, y solo un dato adicional —una **condición inicial**— selecciona la correcta.
Escribir $\int 2x\,dx = x^2$ es **incorrecto**; lo correcto es $x^2 + C$.

Obsérvese la hipótesis *en un intervalo*: es esencial. En un dominio partido, como $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la constante puede ser distinta en cada rama.

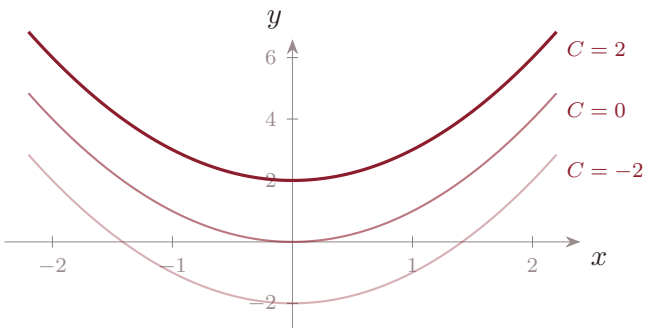


Figura 1.1. Tres miembros de la familia $y = x^2 + C$. Todas tienen la misma pendiente en cada abscisa: son la misma curva desplazada verticalmente. La condición inicial elige cuál.

1.3 Del ritmo a la cantidad: condiciones iniciales

Resolver el problema inverso completo tiene dos etapas: hallar la familia de antiderivadas y después fijar C con un dato conocido.

Reconstruir una cantidad a partir de su ritmo

Se sabe que $f'(x) = 3x^2 - 4x$ y que $f(1) = 5$. Halle f.

1. Busco la familia de antiderivadas término a término.
   $f(x) = x^3 - 2x^2 + C$
2. Impongo la condición inicial $f(1) = 5$.
   $1 - 2 + C = 5$
3. Despejo la constante.
   $C = 6$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 2x^2 + 6}$$

Verificación

Derivando: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ✓. Evaluando: $f(1) = 1 - 2 + 6 = 5$ ✓.
Las dos comprobaciones son necesarias: la primera valida la antiderivada, la segunda valida la constante.

La verificación universal del cálculo integral

Todo resultado de integración se comprueba **derivando**. Si la derivada del resultado devuelve el integrando, el resultado es correcto; si no, hay un error. Es una ventaja que el cálculo diferencial no tenía: allí verificar exigía tabular o graficar. Aquí basta con derivar, y es una cuenta que usted ya sabe hacer. Úsela *siempre*.

1.4 Aplicaciones

Aplicación: gestión deportiva

El ingreso mensual de un club crece a un ritmo

$$I'(t) = 2t + 4 \quad \text{(millones por mes)},$$

y en el mes cero el ingreso acumulado era nulo. ¿Cuánto se habrá acumulado al cabo de seis meses?

Ejemplo

1. Antiderivo término a término.
   $I(t) = t^2 + 4t + C$
2. Impongo $I(0) = 0$.
   $C = 0$

3. Evalúo en $t = 6$.
   $I(6) = 36 + 24 = 60$

60 millones acumulados

Aplicación: ingeniería ambiental

Un rodal forestal incrementa su volumen de madera a razón de

$$V'(t) = 0{,}8\,t \quad (\text{m}^3/\text{ha por año}),$$

y el inventario inicial es de 12 m^3/ha. ¿Qué volumen habrá a los diez años?

Ejemplo

1. Antiderivo.
   $V(t) = 0{,}4\,t^2 + C$
2. Impongo el inventario inicial $V(0) = 12$.
   $C = 12$
3. Evalúo en $t = 10$.
   $V(10) = 0{,}4(100) + 12 = 52$

52 m^3/ha

Los dos problemas son **el mismo problema**. Cambian las unidades, el contexto y el nombre de las variables; la matemática es idéntica.
Vale la pena que lo note desde la primera sesión: cuando más adelante aparezcan caudales, cargas contaminantes o excedentes del consumidor, no serán técnicas nuevas sino la misma antiderivada con otro vestido.

1.5 Síntesis

1. F es antiderivada de f si $F' = f$.
2. Las antiderivadas de f forman una **familia** $F + C$, y el resultado se apoya en el teorema del valor medio.
3. La hipótesis **en un intervalo** es esencial.
4. **Nunca omita la constante** de integración.
5. Una **condición inicial** selecciona un miembro de la familia.
6. Todo resultado se verifica **derivando**.

Ejercicios propuestos

1.1 Halle una antiderivada y verifíquela derivando: (a) $f(x) = 5$; (b) $f(x) = 4x^3$; (c) $f(x) = \cos x$; (d) $f(x) = e^x$.

1.2 Escriba la familia completa de antiderivadas de $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$.

1.3 Halle f sabiendo que $f'(x) = 4x - 3$ y $f(2) = 7$.

1.4 Halle f sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 2$ y $f(0) = -1$. ¿Cuántas condiciones hicieron falta y por qué?

1.5 Explique por qué $F(x) = x^2$ y $G(x) = x^2 + 1$ tienen la misma derivada, y qué significa eso gráficamente.

1.6 La asistencia a un escenario crece a razón de $A'(t) = 150 - 6t$ personas por semana, con $A(0) = 800$. Halle $A(t)$ y la asistencia en la semana 10.

1.7 El caudal de entrada a un embalse es $Q(t) = 40 + 12t$ (m^3/s con t en horas). Si el volumen inicial es 5 000 m^3, exprese el volumen acumulado $V(t)$.

1.8 La concentración de un contaminante disminuye a razón de $C'(t) = -0{,}6$ mg/L por día, partiendo de $C(0) = 9$ mg/L. ¿En qué día alcanza el límite normativo de 3 mg/L?

1.9 Un estudiante escribe $\int 3x^2 dx = x^3$. Señale el error y explique por qué importa.

Respuestas

1.1 (a) $5x$; (b) x^4; (c) $\operatorname{sen} x$; (d) e^x. En todos los casos, derivar devuelve el integrando.

1.2 $2x^3 - x^2 + x + C$.

1.3 $f(x) = 2x^2 - 3x + C$ con $8 - 6 + C = 7$, luego $C = 5$: $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

1.4 $f'(x) = 3x^2 + 2$ y $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Hicieron falta *dos* condiciones porque hubo que antiderivar dos veces, y cada antiderivación introduce una constante.

1.5 Difieren en una constante y la derivada de una constante es cero. Gráficamente son la misma curva desplazada verticalmente, con idénticas pendientes en cada abscisa.

1.6 $A(t) = 800 + 150t - 3t^2$; $A(10) = 800 + 1500 - 300 = 2\,000$ personas.

1.7 $V(t) = 5\,000 + 40t + 6t^2$ (con t en segundos habría que convertir unidades; aquí se mantiene la escala del enunciado).

1.8 $C(t) = 9 - 0{,}6t$; $9 - 0{,}6t = 3$ da $t = 10$ días.

1.9 Falta la constante: lo correcto es $x^3 + C$. Importa porque la respuesta no es una función sino una familia infinita, y sin un dato adicional no puede escogerse un miembro.

SESIÓN 2

La integral indefinida: reglas básicas

Objetivo de la sesión

Manejar la notación de integral indefinida, aplicar la regla de la potencia y la linealidad, reconocer el caso excepcional $n = -1$ y construir la tabla de integrales inmediatas a partir de las derivadas ya conocidas.

2.1 Notación

Integral indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

El símbolo $\int$ es una *ese* alargada, de *summa*. La función f es el **integrando** y dx indica la **variable de integración**.

El dx no es decorativo

Indica **respecto de qué** se integra, igual que el dx de $\frac{d}{dx}$ indica respecto de qué se deriva. Compare:

$$\int 2at\,dt = at^2 + C \qquad \text{pero} \qquad \int 2at\,da = a^2t + C.$$

En la primera a es constante; en la segunda lo es t. Omitir el dx vuelve ambigua la expresión.

2.2 La regla de la potencia

Regla de la potencia para integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

Demostración

Basta derivar el resultado propuesto:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n. \ \checkmark$$

La condición $n \neq -1$ es lo que impide dividir entre cero.

La receta, y su simetría con derivar

Al **derivar**, el exponente baja multiplicando y se reduce en uno. Al **integrar** ocurre lo inverso: el exponente *sube* en uno y pasa a dividir. Son operaciones espejo, como debe ser.

2.2.1 El caso excepcional $n = -1$

La regla anterior falla exactamente en un punto, y ese hueco lo llena un resultado del volumen I.

Teorema

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Verificación

En la sesión 23 del volumen I se demostró, por casos, que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Derivar el resultado devuelve el integrando. ✓

El valor absoluto no es opcional

Escribir $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ restringe la respuesta a $x > 0$ sin necesidad. Con $|x|$ la fórmula vale en las dos ramas del dominio.
Y recuerde la advertencia de la sesión 1: en un dominio partido la constante puede ser distinta a cada lado de la discontinuidad.

2.3 Linealidad

Teorema

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx, \qquad \int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

La integral se reparte sobre sumas y restas, y las constantes multiplicativas salen fuera. Igual que la derivada, y con la misma advertencia:

Error frecuente

$$\int f(x)\,g(x)\,dx \neq \left(\int f\,dx\right)\left(\int g\,dx\right)$$

No existe una "regla del producto" para integrar de manera directa. Lo que existe es la integración por partes, y es el tema de la sesión 12. Comprobémoslo: $\int x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3}$, mientras que $\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$. Distintos.

2.4 Tabla de integrales inmediatas

Cada línea de esta tabla es una derivada del volumen I leída al revés. No hay nada nuevo que memorizar: hay que reconocer.

Integral	Resultado	Integral	Resultado
$\int k\,dx$	$kx + C$	$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x + C$
$\int x^n dx$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sec x \tan x\,dx$	$\sec x + C$
$\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \csc^2 x\,dx$	$-\cot x + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x + C$
$\int \cos x\,dx$	$\operatorname{sen} x + C$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$-\cos x + C$	$\int a^x dx$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \csc x \cot x\,dx$	$-\csc x + C$		

Los signos del seno y el coseno

$$\int \cos x\,dx = +\operatorname{sen} x + C, \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

El signo negativo aparece en la integral del *seno*, no del coseno. Es el reflejo de que $[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$. Verifique derivando cada vez que dude.

2.5 Estrategia: reescribir antes de integrar

Igual que para derivar, el primer paso es dejar el integrando en forma de **potencias**. Raíces y fracciones no se integran tal como se ven.

$$\int \left(3x^2 - \frac{4}{x^3} + \sqrt{x}\right) dx$$

1. Reescribo cada término como potencia (sesión 2 del volumen I).
$$\int \left(3x^2 - 4x^{-3} + x^{1/2}\right) dx$$
2. Aplico linealidad y la regla de la potencia a cada término.
$$3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{3/2}}{3/2}$$
3. Simplifico los coeficientes.
$$x^3 + 2x^{-2} + \tfrac{2}{3}x^{3/2} + C$$
4. Devuelvo la forma con radicales y fracciones.
$$x^3 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Verificación

$$\frac{d}{dx}\left[x^3 + 2x^{-2} + \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right] = 3x^2 - 4x^{-3} + x^{1/2}\ \checkmark$$

Coincide con el integrando. Note que el signo de $-4x^{-3}$ salió correcto: el -2 del denominador y el exponente negativo se combinaron bien.

Un cociente que hay que separar

$$\int \frac{x^3 + 2x - 5}{x}\, dx$$

1. **No** existe regla del cociente para integrar: separo término a término.
   $$\int \left(x^2 + 2 - \frac{5}{x}\right) dx$$
2. Integro cada término, con el caso $n = -1$ en el último.
   $$\frac{x^3}{3} + 2x - 5\ln|x| + C$$

2.6 Aplicaciones

Aplicación: gestión deportiva

El costo marginal de organizar eventos es $CMg(q) = q + 20$ (millones por evento) y los costos fijos ascienden a 300 millones. Reconstruya la función de costo total.

Ejemplo

1. El costo total es la antiderivada del costo marginal.
   $$CT(q) = \int (q + 20)\, dq = \frac{q^2}{2} + 20q + C$$
2. Los costos fijos son el costo con producción nula: $CT(0) = 300$.
   $$C = 300$$

$$\boxed{CT(q) = 0{,}5q^2 + 20q + 300}$$

Es exactamente la función que apareció en la sesión 18 del volumen I, donde se derivó para obtener el costo marginal. Aquí se recorre el camino inverso: la constante de integración *es* el costo fijo.
Esa identificación —la constante tiene significado— es la que convierte el ejercicio algebraico en una lectura administrativa.

Aplicación: ingeniería ambiental

La tasa de infiltración de agua en un suelo sigue

$$i(t) = \frac{6}{\sqrt{t}} \quad (\text{mm/h},\ t > 0 \text{ en horas}).$$

Halle la lámina infiltrada acumulada $I(t)$ si $I(1) = 12$ mm.

Ejemplo

1. Reescribo como potencia antes de integrar.
   $$i(t) = 6\, t^{-1/2}$$

2 Aplico la regla de la potencia: el exponente sube a $\frac{1}{2}$.

$$I(t) = 6 \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 12\sqrt{t} + C$$

3 Impongo la condición $I(1) = 12$.

$$12(1) + C = 12 \;\Rightarrow\; C = 0$$

$$\boxed{I(t) = 12\sqrt{t} \ \text{ mm}}$$

Verificación

$\frac{d}{dt}\left[12\sqrt{t}\right] = \frac{6}{\sqrt{t}}$ ✓

La forma $\sqrt{t}$ del resultado es característica de los modelos de infiltración: la lámina acumulada crece, pero cada vez más despacio, y la tasa tiende a cero. Es la ley de Philip en su forma más simple.

2.7 Síntesis

1. $\int f\,dx = F + C$ significa $F' = f$. El dx indica la variable.
2. Regla de la potencia: el exponente **sube** en uno y pasa a dividir, con $n \neq -1$.
3. El caso $n = -1$ da $\ln|x| + C$, con **valor absoluto**.
4. La integral se reparte en sumas y restas, **no** en productos ni cocientes.
5. Antes de integrar, reescriba todo como **potencias**.
6. Verifique **derivando**: es la comprobación universal.

Ejercicios propuestos

2.1 Integre: (a) $\int 7\,dx$; (b) $\int x^5 dx$; (c) $\int \frac{dx}{x^4}$; (d) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$.

2.2 Integre: (a) $\int (4x^3 - 6x + 2)\,dx$; (b) $\int \left(\frac{3}{x} - 2e^x\right) dx$; (c) $\int (\operatorname{sen} x + \sec^2 x)\,dx$.

2.3 Separe y luego integre: (a) $\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{x} dx$; (b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

2.4 Verifique derivando que $\int (x^2+1)^2\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$. ¿Por qué hubo que expandir el binomio primero?

2.5 Explique por qué la regla de la potencia excluye $n = -1$ y qué fórmula ocupa ese lugar.

2.6 Refute con un ejemplo que $\int f\,g\,dx = \left(\int f\,dx\right)\left(\int g\,dx\right)$.

2.7 El costo marginal de un vivero es $CMg(q) = 0{,}6q + 18$ y los costos fijos son 450. Halle $CT(q)$ y el costo de producir 50 plantas.

2.8 La tasa de erosión de una ladera es $e(t) = \dfrac{20}{t^2}$ (t/ha por año, $t \geq 1$). Halle la pérdida acumulada $E(t)$ si $E(1) = 0$, e interprete el comportamiento cuando t crece.

2.9 Halle f si $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f(e) = 3$.

Respuestas

2.1 (a) $7x + C$; (b) $\frac{x^6}{6} + C$; (c) $-\frac{1}{3x^3} + C$; (d) $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$.

2.2 (a) $x^4 - 3x^2 + 2x + C$; (b) $3\ln|x| - 2e^x + C$; (c) $-\cos x + \tan x + C$.

2.3 (a) $x^2 - 5x + 3\ln|x| + C$; (b) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$.

2.4 Derivando se obtiene $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ ✓. Hubo que expandir porque no existe regla directa para integrar una potencia de una suma.

2.5 Porque $n+1 = 0$ obligaría a dividir entre cero. Ese caso lo cubre $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

2.6 Con $f = g = x$: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, mientras que $\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$.

2.7 $CT(q) = 0{,}3q^2 + 18q + 450$; $CT(50) = 750 + 900 + 450 = 2\,100$.

2.8 $E(t) = -\dfrac{20}{t} + 20$. Cuando $t \to \infty$ la pérdida acumulada tiende a 20 t/ha: el modelo predice una erosión total finita.

2.9 $f(x) = \ln|x| + C$ con $\ln e + C = 3$, luego $C = 2$: $f(x) = \ln|x| + 2$.

SESIÓN 3

Sumas de Riemann y la integral definida

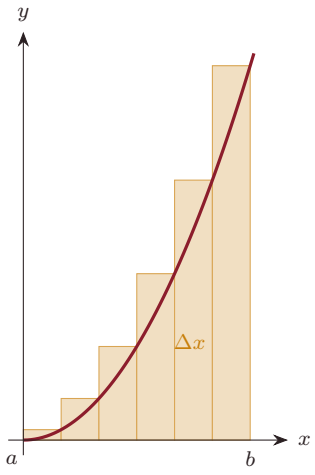
Objetivo de la sesión

Construir la integral definida como límite de sumas de áreas de rectángulos, calcular una integral por definición usando fórmulas de sumatoria, y comprender por qué este procedimiento —correcto pero impracticable— hace necesario el teorema fundamental.

3.1 Un problema viejo

Área de un rectángulo, de un triángulo, de un círculo: la geometría resuelve el problema del área para figuras de contorno regular. Pero ¿cuál es el área bajo una parábola? ¿Y la de un lote cuyo lindero es una quebrada?

La idea que resuelve el caso general tiene más de dos mil años y es sorprendentemente simple: **aproximar con rectángulos y afinar la aproximación sin límite**.



3.2 La construcción

Partición regular y suma de Riemann

Divida $[a, b]$ en n subintervalos iguales de ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\,\Delta x.$$

Eligiendo en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un **punto muestra** x_i^* —cualquier punto de ese subintervalo: el extremo izquierdo x_{i-1}, el extremo derecho x_i o

el punto medio $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$—, la **suma de Riemann** es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$

Cada sumando $f(x_i^*)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo: altura por base. La suma total aproxima el área buscada, y la aproximación mejora al crecer n.

Integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que el límite exista y no dependa de la elección de los puntos muestra. En tal caso se dice que f es **integrable** en $[a,b]$.

Condición suficiente de integrabilidad

Toda función **continua** en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$. También lo es toda función acotada con un número finito de discontinuidades.

Es un teorema fuerte y su demostración excede el curso. Lo que importa reconocer es la hipótesis: continuidad en un intervalo *cerrado*.

3.3 Fórmulas de sumatoria

Para calcular el límite hacen falta tres identidades. Se demuestran por inducción y aquí se usan como herramienta.

Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.4 Una integral calculada por definición

$\int_0^1 x^2\,dx$ por sumas de Riemann

1. Construyo la partición con $a=0$, $b=1$ y tomo el extremo derecho.
   $$\Delta x = \frac{1}{n}, \qquad x_i^* = \frac{i}{n}$$
2. Escribo la suma de Riemann.
   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
3. Sustituyo la fórmula de la suma de cuadrados.
   $$S_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
4. Expando y divido entre n^2 para tomar el límite.
   $$S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$$

5 Hago $n \to \infty$: los términos con n en el denominador se anulan.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

La aproximación en marcha

n	S_n	error
4	0,46875	0,1354
10	0,38500	0,0517
100	0,33835	0,0050
1 000	0,33383	0,0005

Los valores convergen a $\frac{1}{3}$, y el error se divide aproximadamente entre diez cada vez que n se multiplica por diez. ✓

Por qué este método no puede ser el definitivo

El cálculo anterior es correcto y riguroso, pero fue laborioso para el caso más simple imaginable. Para $\int_0^1 x^3 dx$ haría falta la fórmula de $\sum i^3$; para $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ no hay fórmula de sumatoria elemental que sirva.
La definición establece *qué es* la integral. Calcularla exige otra herramienta, y esa herramienta es el **teorema fundamental del cálculo**, que veremos en la próxima sesión.

3.5 Signo y significado del área

Error frecuente

La integral definida **no siempre** es el área. Cuando $f(x) < 0$ los rectángulos tienen altura negativa y contribuyen restando.

$$\int_a^b f\, dx = (\text{área sobre el eje}) - (\text{área bajo el eje})$$

Por eso $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0$ aunque la curva encierre región en ambos lados. Para obtener el área geométrica hay que integrar $|f|$, tema de la sesión 6.

3.6 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería topográfica

Un lote tiene un lindero recto de 40 m y el opuesto sigue el curso de una quebrada. Se miden las distancias entre ambos cada 10 metros:

x (m)	0	10	20	30	40
y (m)	18	23	25	21	16

Área por sumas de Riemann

1. Con extremos izquierdos y $\Delta x = 10$.
   $S = 10(18 + 23 + 25 + 21) = 870 \text{ m}^2$
2. Con extremos derechos.
   $S = 10(23 + 25 + 21 + 16) = 850 \text{ m}^2$
3. Promedio las dos, que equivale a la regla del trapecio.
   $A \approx \dfrac{870 + 850}{2} = 860 \text{ m}^2$

$$A \approx 860 \text{ m}^2$$

Esta es la situación real del levantamiento topográfico: no se conoce la función del lindero, solo mediciones discretas. La suma de Riemann **no** es aquí una etapa hacia algo mejor: es el método definitivo, porque no hay fórmula que integrar.
El Apéndice A desarrolla las versiones refinadas —trapecio y Simpson— que se usan en la práctica profesional.

Aplicación: gestión deportiva

La afluencia a un evento, medida cada media hora, fue de 120, 310, 480, 520, 390 y 150 personas por hora. Estime la asistencia total.

Ejemplo

Con $\Delta t = 0{,}5$ h y extremos izquierdos:

$$S = 0{,}5\,(120 + 310 + 480 + 520 + 390 + 150) = 0{,}5(1\,970) = 985 \text{ personas.}$$

El producto “personas por hora” $\times$ “horas” da personas: las unidades del integrando y del diferencial **se multiplican**. Comprobar la coherencia de unidades es una verificación gratuita y detecta errores de planteamiento antes de calcular nada.

3.7 Síntesis

1. La integral definida es el **límite** de sumas de áreas de rectángulos.
2. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $S_n = \sum f(x_i^*)\Delta x$.
3. Toda función **continua** en $[a, b]$ es integrable.
4. Calcular por definición exige fórmulas de sumatoria y es impracticable en general.
5. La integral **no** es el área cuando f toma valores negativos.
6. Las unidades del resultado son las del integrando **por** las de la variable.

Ejercicios propuestos

3.1 Escriba la suma de Riemann con extremos derechos para $\int_0^2 x\,dx$ con $n = 4$ y calcule su valor. Compare con el área exacta del triángulo.

3.2 Calcule $\int_0^1 x\,dx$ por definición usando $\sum i = \frac{n(n+1)}{2}$.

3.3 Calcule $\int_0^2 x^2\,dx$ por definición.

3.4 Verifique numéricamente, con $n = 4$ y $n = 8$, que las sumas de $\int_0^1 x^2 dx$ se acercan a $\frac{1}{3}$.

3.5 Explique por qué $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ sin calcular nada.

3.6 Un tramo de río tiene anchos de 12, 15, 19, 17 y 11 metros medidos cada 25 m. Estime el área de la lámina de agua por extremos izquierdos, derechos y su promedio.

3.7 Los caudales horarios de una creciente fueron 8, 22, 45, 38 y 17 m^3/s. Estime el volumen total escurrido en m^3, cuidando las unidades.

3.8 ¿Por qué la elección del punto muestra (izquierdo, derecho o medio) deja de importar cuando $n \to \infty$ para una función continua?

Respuestas

3.1 $\Delta x = 0{,}5$; $S_4 = 0{,}5(0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2) = 2{,}5$. El área exacta es 2: la suma con extremos derechos *sobreestima* en una función creciente.

3.2 $S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

3.3 $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = \frac{2i}{n}$; $S_n = \frac{8}{n^3}\sum i^2 \to \frac{8}{3}$.

3.4 $S_4 = 0{,}46875$ y $S_8 = 0{,}39844$: se acercan a $0{,}3333$.

3.5 Porque la región bajo el eje en $[-1, 0]$ tiene la misma magnitud que la región sobre el eje en $[0, 1]$, y entran con signos opuestos.

3.6 Izquierdos: $25(12 + 15 + 19 + 17) = 1\,575$; derechos: $25(15 + 19 + 17 + 11) = 1\,550$; promedio $1\,562{,}5$ m^2.

3.7 $\Delta t = 1$ h $= 3\,600$ s, luego $V \approx 3\,600(8 + 22 + 45 + 38) = 406\,800$ m^3 con extremos izquierdos.

3.8 Porque al crecer n el ancho Δx tiende a cero, y la continuidad garantiza que los valores de f dentro de cada subintervalo difieren cada vez menos entre sí.

SESIÓN 4

El teorema fundamental del cálculo

Objetivo de la sesión

Enunciar y demostrar las dos partes del teorema fundamental, comprender que establecen la derivación y la integración como operaciones inversas, y usarlo para evaluar integrales definidas sin recurrir a sumas de Riemann.

4.1 Dos historias que confluyen

Hasta aquí el curso ha desarrollado dos ideas aparentemente ajenas:

- la **antiderivada**, que resuelve el problema inverso de la derivación (sesiones 1 y 2);
- la **integral definida**, que mide el área acumulada bajo una curva mediante un límite de sumas (sesión 3).

Nada obliga a que tengan relación. Una es un problema de álgebra inversa; la otra, un problema de área. El teorema fundamental afirma que son **la misma cosa**, y es uno de los resultados más importantes de la matemática.

4.2 Primera parte: la función acumulada

Función acumulada

Dada f continua en $[a, b]$, se define

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b].$$

$A(x)$ mide lo acumulado desde a hasta x.

TFC, primera parte

Si f es continua en $[a, b]$, entonces A es derivable y

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Note el cambio de letra: t es la variable de integración y desaparece al evaluar; x es el límite superior y sobrevive. Usar la misma letra para ambas cosas es un error de notación frecuente.

Idea de la demostración

Por definición de derivada,

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

La última integral acumula sobre un intervalo de ancho h. Como f es continua, en ese intervalo diminuto sus valores difieren muy poco de $f(x)$, de modo que

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt \approx f(x) \cdot h.$$

Dividiendo entre h y tomando el límite queda $f(x)$.
El argumento se hace riguroso con el teorema del valor medio para integrales (sesión 18), que garantiza un c entre x y $x+h$ con $\int_x^{x+h} f = f(c)\, h$; al hacer $h \to 0$, la continuidad fuerza $f(c) \to f(x)$.

Lo que dice de verdad

Derivar una acumulación devuelve el ritmo al que se acumula. Es la formulación matemática de algo que ya sabe: si $A(x)$ es el agua acumulada en un tanque, $A'(x)$ es el caudal que entra en ese instante.

Con límite superior compuesto

Halle $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^3)\, dt.$

1. Llamo $u = x^2$ y reconozco una composición: la acumulada evaluada en u.
   $$G(x) = A(u), \qquad A(u) = \int_1^{u} \operatorname{sen}(t^3)\, dt$$
2. Aplico la regla de la cadena (sesión 20 del volumen I).
   $$G'(x) = A'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$
3. Por el TFC primera parte, $A'(u) = \operatorname{sen}(u^3)$; y $\frac{du}{dx} = 2x$.
   $$G'(x) = \operatorname{sen}\left(x^6\right) \cdot 2x$$

$$\boxed{G'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(x^6\right)}$$

Detenerse un paso antes de tiempo

El error dominante en este tipo de ejercicio es sustituir el límite superior en el integrando y parar ahí, escribiendo $\operatorname{sen}(x^6)$ sin multiplicar por la derivada $\frac{du}{dx} = 2x$:

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^3)\, dt = 2x \operatorname{sen}\left(x^6\right) \qquad \text{y } \textbf{no} \qquad \operatorname{sen}\left(x^6\right).$$

Si el límite superior no es x a secas, **hay cadena**.

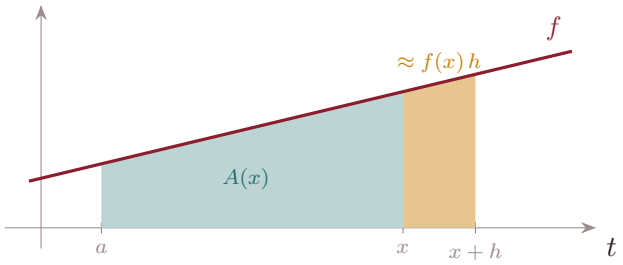


Figura 4.1. La función acumulada $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ mide el área sombreada. Al desplazar x hacia la derecha, el área crece a un ritmo igual a la *altura* de la curva en ese punto: esa es la primera parte del teorema fundamental.

4.3 Segunda parte: la regla de evaluación

TFC, segunda parte

Si f es continua en $[a, b]$ y F es *cualquier* antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración

Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por la primera parte, $A' = f$, luego A es una antiderivada de f. Si F es otra, el teorema de la sesión 1 garantiza que difieren en una constante:

$$F(x) = A(x) + C.$$

Evaluando en los extremos y restando:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a).$$

Pero $A(a) = \int_a^a f = 0$ y $A(b) = \int_a^b f$. Por tanto $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. ■

Por qué la constante no importa aquí

La demostración lo muestra: C aparece dos veces con signos opuestos y se cancela. Por eso en una integral **definida** no se escribe $+C$.
Es la única situación del curso en que omitir la constante es correcto, y conviene entender *por qué* lo es en vez de memorizarlo como excepción.

Notación de evaluación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

4.4 El método en acción

$\int_0^1 x^2\,dx$, ahora en dos renglones

1. Hallo una antiderivada.

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

2 Evalúo entre los límites.

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

Verificación

Coincide con el resultado que en la sesión 3 costó cinco pasos, dos fórmulas de sumatoria y un límite. ✓
Esa comparación es el mejor argumento sobre la potencia del teorema.

$$\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

1 Reescribo como potencias.

$$\int_1^4 \left(x + x^{-1/2}\right) dx$$

2 Antiderivo término a término.

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}\right]_1^4$$

3 Evalúo en el límite superior.

$$\frac{16}{2} + 2(2) = 8 + 4 = 12$$

4 Evalúo en el inferior y resto.

$$\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{2}; \qquad 12 - \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\frac{19}{2} = 9{,}5}$$

Los tres errores de evaluación

1. Restar al revés: es $F(b) - F(a)$, **superior menos inferior**.
2. Escribir $+C$ en una integral definida.
3. Aplicar el teorema cuando f **no es continua** en $[a, b]$. Por ejemplo, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ *no* vale $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$: el integrando explota en $x = 0$ y el resultado negativo para una función positiva delata el disparate. Ese caso es una integral impropia (sesión 20).

4.5 Aplicaciones

Aplicación: gestión deportiva

El ritmo de venta de abonos durante una campaña de ocho semanas fue

$$v(t) = 60t - 6t^2 \quad \text{(abonos por semana)}.$$

¿Cuántos abonos se vendieron en total?

Ejemplo

1. El total acumulado es la integral del ritmo sobre el periodo.
$$N = \int_0^8 \left(60t - 6t^2\right) dt$$
2. Antiderivo.
$$\left[30t^2 - 2t^3\right]_0^8$$
3. Evalúo.
$$30(64) - 2(512) = 1\,920 - 1\,024$$

896 abonos

El ritmo $v(t)$ se anula en $t = 10$, fuera del periodo, de modo que la venta fue siempre positiva pero desacelerando. La integral captura ambas cosas: el volumen total y, al graficarla, la forma en que se distribuyó.

Aplicación: ingeniería ambiental

Durante una creciente, el caudal de una quebrada siguió

$$Q(t) = 5 + 18t - 3t^2 \quad (\text{m}^3/\text{s},\ t \text{ en horas}),$$

desde $t = 0$ hasta $t = 6$. ¿Qué volumen total escurrió?

Ejemplo

1. Integro el caudal sobre el periodo.
$$V = \int_0^6 \left(5 + 18t - 3t^2\right) dt$$
2. Antiderivo.
$$\left[5t + 9t^2 - t^3\right]_0^6$$
3. Evalúo.
$$30 + 324 - 216 = 138 \text{ m}^3 \cdot \text{h/s}$$
4. Convierto: una hora tiene 3 600 segundos.
$$V = 138 \times 3\,600$$

$$V = 496\,800 \text{ m}^3$$

Las unidades avisan

El resultado intermedio tenía unidades absurdas: $\text{m}^3/\text{s} \times \text{h}$. Eso indica que falta convertir, no que el cálculo esté mal.
Revisar unidades **antes** de reportar es obligatorio en ingeniería: un factor 3 600 omitido convierte medio millón de metros cúbicos en ciento treinta y ocho.

4.6 Síntesis

1. TFC-1: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Derivar una acumulación devuelve el ritmo.
2. Si el límite superior es $u(x)$, **hay regla de la cadena**.
3. TFC-2: $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$, con F *cualquier* antiderivada.
4. La constante **se cancela**: por eso no se escribe $+C$ en una definida.
5. Se resta **superior menos inferior**.
6. El teorema exige **continuidad** en $[a, b]$.

Ejercicios propuestos

4.1 Evalúe: (a) $\int_0^2 (3x^2 + 1)\,dx$; (b) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; (c) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$; (d) $\int_{-1}^2 (x^3 - x)\,dx$.

4.2 Halle $\dfrac{d}{dx}\int_2^x \sqrt{1 + t^4}\,dt$.

4.3 Halle $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt$.

4.4 Halle $\dfrac{d}{dx}\int_x^5 \cos(t^2)\,dt$. (Sugerencia: invierta los límites primero.)

4.5 Explique por qué $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ no puede valer -2, y qué falla en la aplicación del teorema.

4.6 El ritmo de inscripción a un programa deportivo es $r(t) = 40 - 2t$ inscritos por día, con t en días. Halle el total inscrito en los primeros 15 días.

4.7 El caudal de un vertimiento es $Q(t) = 12 + 4t$ L/s durante $t = 0$ a $t = 8$ horas. Halle el volumen total vertido en metros cúbicos.

4.8 La tasa de captura de carbono de una plantación es $c(t) = 3\sqrt{t}$ (t/ha por año). Halle el carbono acumulado entre los años 1 y 9.

4.9 Demuestre que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ usando el TFC.

Respuestas

4.1 (a) $\left[x^3+x\right]_0^2 = 10$; (b) $\left[\ln|x|\right]_1^e = 1$; (c) $\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$; (d) $\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 2 - (-\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}$.

4.2 $\sqrt{1+x^4}$.

4.3 $3x^2 e^{-x^6}$.

4.4 $-\cos(x^2)$: al invertir los límites cambia el signo.

4.5 Porque el integrando es positivo y una integral de función positiva no puede ser negativa. Falla la hipótesis de continuidad: la función no está definida en $x = 0 \in [-1, 1]$.

4.6 $\left[40t - t^2\right]_0^{15} = 600 - 225 = 375$ inscritos.

4.7 $\left[12t + 2t^2\right]_0^8 = 96 + 128 = 224$ L·h/s; convirtiendo, $224 \times 3\,600 = 806\,400$ L $= 806{,}4$ m^3.

4.8 $\left[2t^{3/2}\right]_1^9 = 54 - 2 = 52$ t/ha.

4.9 Con F antiderivada, $\int_a^a f = F(a) - F(a) = 0$.

SESIÓN 5

Propiedades de la integral definida

Objetivo de la sesión

Manejar las propiedades algebraicas y de orden de la integral definida, usarlas para descomponer intervalos y para acotar integrales que no se saben calcular, y reconocer cuándo cada una simplifica un problema.

5.1 Propiedades algebraicas

Linealidad y orientación

Sean f y g integrables en $[a,b]$ y k constante.

$$\text{(I)}\quad \int_a^b [f \pm g]\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx$$

$$\text{(II)}\quad \int_a^b k\,f\,dx = k\int_a^b f\,dx$$

$$\text{(III)}\quad \int_a^a f\,dx = 0$$

$$\text{(IV)}\quad \int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$$

Las dos primeras son la linealidad que ya conocía de la integral indefinida. Las dos últimas son nuevas y se refieren a la **orientación** del intervalo.

Por qué invertir los límites cambia el signo

En la suma de Riemann, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Al intercambiar a y b el ancho cambia de signo, y con él toda la suma. No es una convención arbitraria: es lo que hace que la propiedad (v) que sigue valga sin excepciones.

Aditividad respecto del intervalo

$$\text{(v)}\qquad \int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

para cualquier c, siempre que las tres integrales existan.

Error frecuente

La propiedad (v) vale **aunque c esté fuera de $[a,b]$**, gracias justamente a la regla del signo. Ese es el motivo técnico de la propiedad (iv), que a primera vista parece un capricho.

Comprobación de la aditividad

Con $f(x) = 2x$ en $[0, 3]$, partiendo en $c = 1$:

1. Calculo la integral completa.
$$\int_0^3 2x\,dx = \Big[x^2\Big]_0^3 = 9$$
2. Calculo los dos trozos por separado.
$$\int_0^1 2x\,dx = 1, \qquad \int_1^3 2x\,dx = 9 - 1 = 8$$
3. Verifico que suman.
$$1 + 8 = 9 \ \checkmark$$

5.2 Propiedades de orden

Estas son las que permiten *acotar* una integral sin calcularla, y en ingeniería se usan más de lo que parece: muchas veces basta con saber entre qué valores está una magnitud.

Comparación y acotación

(I) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f\,dx \geq 0$.

(II) Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.

(III) Si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$, entonces
$$m(b-a) \ \leq \ \int_a^b f\,dx \ \leq \ M(b-a).$$

(IV) $\displaystyle\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$.

La propiedad (iii) tiene una lectura geométrica inmediata: el área bajo la curva está atrapada entre el área de dos rectángulos, el de altura mínima y el de altura máxima.

Acotar $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x}$ sin integrarla

1. Localizo el mínimo y el máximo del integrando en $[1, 4]$. Como $\frac{1}{x}$ decrece, ocurren en los extremos.
$$m = \tfrac{1}{4}, \qquad M = 1$$
2. Aplico la acotación con $b - a = 3$.
$$\tfrac{1}{4}(3) \ \leq \ \int_1^4 \frac{dx}{x} \ \leq \ 1(3)$$

$$0{,}75 \;\leq\; \int_1^4 \frac{dx}{x} \;\leq\; 3$$

Verificación

El valor exacto es $[\ln|x|]_1^4 = \ln 4 = 1{,}386$, que en efecto cae dentro del intervalo estimado. ✓
La cota es amplia porque la función varía mucho en $[1, 4]$. Partiendo el intervalo en trozos se obtienen cotas mucho más finas: esa es la idea que lleva a los métodos numéricos del Apéndice A.

La desigualdad (iv), en palabras

El valor absoluto de una suma no supera la suma de los valores absolutos. Es la **desigualdad triangular** de la sesión 6 del volumen I, llevada al límite de las sumas de Riemann.
Su utilidad práctica: acota el error acumulado de un proceso a partir del error instantáneo, sin importar los signos.

5.3 Simetría: un atajo que ahorra la mitad del trabajo

Integrales sobre intervalos simétricos

Sea f integrable en $[-a, a]$.

$$\text{Si } f \text{ es } \textbf{par}\text{: } \int_{-a}^{a} f\,dx = 2\int_0^a f\,dx. \qquad \text{Si } f \text{ es } \textbf{impar}\text{: } \int_{-a}^{a} f\,dx = 0.$$

Por qué

Partiendo con la propiedad (v) en $c = 0$ y usando la simetría estudiada en la sesión 14 del volumen I: en el caso par las dos mitades aportan lo mismo; en el impar aportan lo mismo con signos opuestos y se cancelan.

Dos integrales resueltas de un vistazo

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0 \qquad \text{porque } x^3 \text{ es impar.}$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_0^2 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3} \qquad \text{porque } x^2 \text{ es par.}$$

Error frecuente

Antes de usar el atajo, compruebe la paridad **y** que el intervalo sea simétrico. En $\int_{-1}^{3} x^3 dx$ la función es impar pero el intervalo no es simétrico, y la integral *no* vale cero.

5.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un tramo de río se monitorea en dos jornadas: de 0 a 4 horas y de 4 a 10 horas. Los volúmenes escurridos fueron 1 800 y 4 200 m^3. ¿Cuál fue el volumen total?

Por la aditividad respecto del intervalo,

$$\int_0^{10} Q\,dt = \int_0^{4} Q\,dt + \int_4^{10} Q\,dt = 1\,800 + 4\,200 = 6\,000 \text{ m}^3.$$

Parece trivial, y lo es. Pero justifica algo que se hace todo el tiempo en campo: **sumar mediciones parciales**. La propiedad (v) es el permiso formal para hacerlo, y garantiza que no importa dónde se corte la jornada.

Aplicación: gestión deportiva

La afluencia a un complejo deportivo, medida en personas por hora, se mantuvo entre 180 y 340 durante las diez horas de apertura. Acote la asistencia total del día.

Ejemplo

1. Aplico la propiedad de acotación con $m = 180$, $M = 340$ y $b - a = 10$.

$$180(10) \;\le\; \int_0^{10} A(t)\,dt \;\le\; 340(10)$$

$$1\,800 \;\le\; \text{asistencia} \;\le\; 3\,400 \text{ personas}$$

No se conoce la función de afluencia —nadie la mide de forma continua— y sin embargo se obtiene un rango defendible con dos datos. Para dimensionar personal, baños o salidas de emergencia, la cota superior es exactamente lo que se necesita.

5.5 Síntesis

1. La integral es **lineal**: se reparte en sumas y las constantes salen.
2. $\int_a^a f = 0$ y $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
3. **Aditividad**: el intervalo se puede partir donde convenga.
4. Si $m \le f \le M$, entonces $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$: se puede **acotar sin calcular**.
5. $\left|\int f\right| \le \int |f|$.
6. En intervalo simétrico: par $\Rightarrow$ el doble de la mitad; impar $\Rightarrow$ cero.

Ejercicios propuestos

5.1 Sabiendo que $\int_0^5 f = 12$ y $\int_0^2 f = 5$, halle $\int_2^5 f$.

5.2 Sabiendo que $\int_1^4 f = 7$ y $\int_1^4 g = -2$, halle $\int_1^4 (3f - 2g)\,dx$.

5.3 Calcule usando simetría: (a) $\int_{-3}^{3} x^5 dx$; (b) $\int_{-1}^{1} (x^4 + 1)\,dx$; (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

5.4 Acote $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ sin calcularla, usando que $e^{-4} \le e^{-x^2} \le 1$ en $[0, 2]$.

5.5 Acote $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx$ y compare con el valor exacto.

5.6 Explique por qué $\int_{-2}^{2} (x^3 + x^2)\,dx$ *no* vale cero, aunque uno de los términos sea impar.

5.7 Sin calcular, decida cuál es mayor: $\int_0^1 x^2 dx$ o $\int_0^1 x^3 dx$. Justifique con la propiedad de comparación.

5.8 Tres jornadas de aforo dieron volúmenes de 2 400, 3 150 y 1 980 m^3. ¿Qué propiedad justifica sumarlos y cuál es el total?

5.9 La concentración de un contaminante se mantuvo entre 2 y 7 mg/L durante 12 horas. Acote la carga acumulada si el caudal es constante de 50 L/s. (Cuide las unidades.)

Respuestas

5.1 $\int_2^5 f = 12 - 5 = 7$.

5.2 $3(7) - 2(-2) = 21 + 4 = 25$.

5.3 (a) 0, impar; (b) $2\int_0^1 (x^4+1) = 2\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{12}{5}$; (c) 0, impar.

5.4 $e^{-4}(2) \le \int \le 1(2)$, es decir $0{,}0366 \le \int \le 2$.

5.5 $\sqrt{1}(2) \le \int \le \sqrt{3}(2)$, o sea $2 \le \int \le 3{,}46$; el valor exacto es $\frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1\right) = 2{,}797$.

5.6 Porque solo el término impar se cancela; el par aporta $2\int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3}$.

5.7 En $[0,1]$ se cumple $x^3 \le x^2$, luego $\int_0^1 x^3 dx \le \int_0^1 x^2 dx$. En efecto $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

5.8 La aditividad respecto del intervalo; total 7 530 m^3.

5.9 Caudal $= 0{,}05$ m^3/s y 12 h $= 43\,200$ s. Carga entre $2(0{,}05)(43\,200) = 4\,320$ g y $7(0{,}05)(43\,200) = 15\,120$ g, es decir entre 4,3 y 15,1 kg.

SESIÓN 6

Funciones por tramos y con valor absoluto

Objetivo de la sesión

Integrar funciones definidas por tramos y funciones con valor absoluto partiendo el intervalo en los puntos donde cambia la regla o el signo, y distinguir con precisión entre la integral definida y el área geométrica.

6.1 El principio único de esta sesión

Todo lo que sigue se apoya en una sola idea, ya demostrada en la sesión 5:

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Si la función **cambia de regla** o **cambia de signo** en un punto c, se parte el intervalo ahí y se integra cada trozo con su propia expresión.
No hay técnica nueva. Lo único que hay que aprender es a *localizar* los puntos de corte.

6.2 Funciones definidas por tramos

Integrar una función por tramos

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Calcule $\int_0^4 f(x)\,dx$.

1. Parto el intervalo en el punto donde cambia la regla.
$$\int_0^4 f = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (8 - 2x)\,dx$$
2. Integro el primer trozo con su propia expresión.
$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$
3. Integro el segundo.
$$\left[8x - x^2\right]_2^4 = (32 - 16) - (16 - 4) = 4$$

4 Sumo los dos aportes.

$$\frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

$$\int_0^4 f\,dx = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$$

Dos errores que cuestan el ejercicio

1. Integrar **una sola** de las dos expresiones sobre todo $[0, 4]$.
2. Usar límites equivocados en cada trozo: el primero va de 0 a 2, no a 4.

Escriba siempre la partición antes de integrar nada.

6.3 Funciones con valor absoluto

El valor absoluto es una función por tramos disfrazada. Recordando la sesión 6 del volumen I:

$$|u| = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ -u, & u < 0 \end{cases}$$

Procedimiento en tres pasos

1. Hallar dónde se anula lo que está dentro de las barras.
2. Determinar el signo del interior en cada subintervalo.
3. Reescribir sin barras en cada trozo e integrar.

$$\int_0^5 |x - 2|\,dx$$

1 El interior se anula en $x = 2$: ese es el punto de corte.

$$x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

2 Determino el signo en cada trozo: negativo antes de 2, positivo después.

$$|x - 2| = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

3 Integro el primer trozo.

$$\int_0^2 (2 - x)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4 - 2 = 2$$

4 Integro el segundo.

$$\int_2^5 (x - 2)dx = \left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^5 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

5 Sumo.

$$2 + 4{,}5 = 6{,}5$$

$$\int_0^5 |x-2|\,dx = 6{,}5$$

Comprobación geométrica

La gráfica de $|x-2|$ en $[0,5]$ son dos triángulos rectángulos: uno de base 2 y altura 2, otro de base 3 y altura 3.

$$A = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{3\cdot 3}{2} = 2 + 4{,}5 = 6{,}5 \ \checkmark$$

Cuando la región es poligonal, la geometría elemental verifica el cálculo en diez segundos. Aprovéchelo.

Error frecuente

Integrar $|x-2|$ como si fuera $x-2$ da $\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_0^5 = \frac{9}{2} - 2 = 2{,}5$, un resultado **menor** que el correcto. La diferencia es exactamente el doble del trozo negativo, que se restó en vez de sumarse.

6.4 Integral definida frente a área geométrica

Esta es la distinción más importante de la sesión, y conviene fijarla con un ejemplo donde ambas cantidades difieren.

Teorema

$$\int_a^b f\,dx = \underbrace{A_+}_{\text{sobre el eje}} - \underbrace{A_-}_{\text{bajo el eje}}, \qquad \text{Área} = \int_a^b |f|\,dx = A_+ + A_-$$

$f(x) = x^2 - 2x$ en $[0,3]$: integral y área

1. Localizo los cortes con el eje.
   $x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0,\ x = 2$
2. Determino el signo: negativo en $(0,2)$, positivo en $(2,3)$.
   $f < 0$ en $(0,2)$; $\qquad f > 0$ en $(2,3)$
3. Calculo la integral en cada trozo.
   $$\int_0^2 f = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$
4. Y en el segundo.
   $$\int_2^3 f = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$
5. La integral definida es la suma con signo.
   $$\int_0^3 f = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

6 El área es la suma de magnitudes.

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^3 f\,dx = 0 \qquad \text{pero} \qquad A = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

Una pregunta que hay que leer con cuidado

"Calcule la integral" y "calcule el área" **no piden lo mismo**. Aquí la integral vale cero y el área vale $\frac{8}{3}$.
Si la respuesta a un problema de área sale negativa o cero, hay un error de planteamiento: un área nunca es negativa.

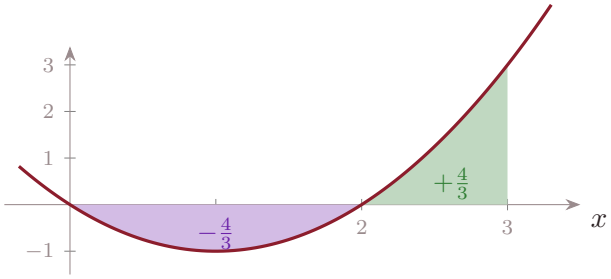


Figura 6.1. La función $f(x) = x^2 - 2x$ en $[0, 3]$. La región bajo el eje (izquierda) aporta *negativamente* a la integral y positivamente al área. Aquí ambas regiones miden 4/3: la integral vale cero y el área, 8/3.

6.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Durante una jornada de ocho horas, el caudal de entrada a un tanque de regulación fue

$$Q(t) = \begin{cases} 20, & 0 \le t < 4 \\ 20 + 15(t-4), & 4 \le t \le 8 \end{cases} \quad (\mathrm{m}^3/\mathrm{h}).$$

Halle el volumen total ingresado.

Ejemplo

1 Parto en $t = 4$, donde cambia el régimen.

$$V = \int_0^4 20\,dt + \int_4^8 [20 + 15(t-4)]\,dt$$

2 Primer tramo: caudal constante.

$$20(4) = 80$$

3. Segundo tramo.
$$\left[20t + \frac{15(t-4)^2}{2}\right]_4^8 = (160 + 120) - (80 + 0) = 200$$

4. Sumo.
$80 + 200 = 280$

$$V = 280 \text{ m}^3$$

Los regímenes por tramos son la norma en hidrología, no la excepción: caudal base y caudal de creciente, temporada seca y temporada de lluvias, operación diurna y nocturna. Saber partir la integral es lo que permite tratar el día completo con una sola cuenta.

Aplicación: gestión deportiva

La diferencia entre ingresos y costos diarios de un torneo fue

$$d(t) = t^2 - 6t + 8 \quad \text{(millones por día)}, \qquad 0 \le t \le 5.$$

¿Cuál fue el resultado neto y cuánto sumó, por separado, lo ganado y lo perdido?

Ejemplo

1. Localizo los cambios de signo factorizando.
$$t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4) = 0 \;\Rightarrow\; t = 2,\; t = 4$$

2. Signo: positivo en $[0, 2)$, negativo en $(2, 4)$, positivo en $(4, 5]$.
tres tramos

3. Integro cada tramo con $F(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$.
$$\int_0^2 = \frac{20}{3}; \qquad \int_2^4 = -\frac{4}{3}; \qquad \int_4^5 = \frac{4}{3}$$

4. El neto es la suma con signo.
$$\frac{20}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{neto} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67 \quad \text{millones}$$

Lo ganado fue $\frac{20}{3} + \frac{4}{3} = 8$ millones y lo perdido $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$. El neto de 6,67 es la diferencia.
Un informe que reporte solo el neto oculta que hubo dos días en rojo. La integral con signo da el resultado contable; la integral del valor absoluto da la magnitud del movimiento. Un gestor necesita las dos.

6.6 Síntesis

1. Si la función cambia de regla o de signo, **parta el intervalo**.
2. El valor absoluto es una función por tramos: localice dónde se anula el interior.
3. $\int_a^b f = A_+ - A_-$, mientras que el área es $\int_a^b |f| = A_+ + A_-$.
4. "Integral" y "área" **no son sinónimos**.
5. Un área negativa siempre indica un error.
6. Cuando la región es poligonal, verifique con geometría elemental.

Ejercicios propuestos

6.1 Calcule $\int_0^4 f$ con $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x < 2 \\ x+1, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

6.2 Calcule: (a) $\int_0^4 |x-3|\,dx$; (b) $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$; (c) $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$.

6.3 Verifique el resultado de 2(b) por geometría elemental.

6.4 Para $f(x) = x^2 - 4$ en $[0,3]$: calcule la integral definida y el área. Explique la diferencia.

6.5 Para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$: calcule la integral y el área.

6.6 Calcule $\int_{-1}^{3} |2x - 4|\,dx$.

6.7 El caudal de una quebrada es 30 L/s durante las primeras 6 horas y luego $30 + 8(t-6)$ L/s hasta la hora 12. Halle el volumen total en metros cúbicos.

6.8 El balance diario de un evento fue $b(t) = 2t - 6$ millones por día durante $t \in [0, 5]$. Halle el resultado neto, lo perdido y lo ganado por separado.

6.9 Explique por qué $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$ no significa que la curva no encierre región alguna.

Respuestas

6.1 $3(2) + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^4 = 6 + (12 - 4) = 14$.

6.2 (a) $\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$; (b) 4; (c) 4.

6.3 Son dos triángulos de base 2 y altura 2: $2 + 2 = 4$ ✓.

6.4 Integral: $\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^3 = -3$. Área: $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$. La integral resta la región bajo el eje; el área la suma.

6.5 Integral $= 0$; área $= 4$.

6.6 Corte en $x = 2$: $\int_{-1}^{2}(4 - 2x) + \int_2^3 (2x - 4) = 9 + 1 = 10$.

6.7 $30(6) = 180$ y $\left[30t + 4(t-6)^2\right]_6^{12} = (360 + 144) - 180 = 324$; total 504 L·h/s $= 504 \times 3\,600 = 1\,814\,400$ L $= 1\,814{,}4$ m^3.

6.8 Corte en $t = 3$. Perdido: $\left|\int_0^3\right| = 9$; ganado: $\int_3^5 = 4$; neto $= -5$ millones.

6.9 Porque las dos regiones tienen la misma magnitud y entran con signos opuestos: se cancelan en la integral, pero el área total es 4.

SESIÓN 7

Primer corte evaluativo

Objetivo de la sesión

Evaluar la comprensión del problema inverso, el manejo de la integral indefinida, la construcción de la integral definida como límite de sumas y la aplicación del teorema fundamental, sobre contextos propios de la gestión deportiva y de la ingeniería ambiental.

7.1 Estructura de la evaluación

El primer corte vale el 35 % del curso.

Componente	Peso	Condiciones
Prueba escrita individual	60 %	con calculadora, sin apuntes
Taller aplicado sustentado	40 %	con computador, en parejas

El temario cubre las sesiones 1 a 6: antiderivada y familia de primitivas, integral indefinida y tabla básica, sumas de Riemann, teorema fundamental en sus dos partes, propiedades de la integral definida, funciones por tramos y con valor absoluto.

Ítem obligatorio

Uno de los puntos exige calcular una integral **por definición**, es decir, mediante sumas de Riemann y fórmulas de sumatoria. Resolverlo con el teorema fundamental **no puntúa** en ese ítem: lo que se evalúa ahí es la comprensión de qué *es* una integral, no la destreza para calcularla.

7.2 Rúbrica de calificación

Criterio	Peso	Qué se evalúa
Planteamiento	25 %	Identifica qué se acumula, sobre qué variable y entre qué límites.
Procedimiento	40 %	Cada paso justificado; partición correcta del intervalo cuando corresponde.
Resultado	15 %	Valor correcto, simplificado y **con unidades**.
Verificación e interpretación	20 %	Comprueba derivando o por geometría, y explica qué significa el número.

Por qué la verificación pesa aquí más que en el volumen I

En cálculo integral existe una comprobación universal y barata: **derivar el resultado**. No aprovecharla es desperdiciar la ventaja estructural de la materia.

Y en los problemas aplicados hay una segunda verificación igual de barata: las **unidades**. Un volumen que sale en $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{h/s}$ avisa de que falta una conversión antes de que nadie revise la cuenta.

7.3 Los nueve errores que más cuestan

En integral indefinida:

1. Omitir la constante C.
2. Aplicar la regla de la potencia con $n=-1$ en vez de $\ln|x|$.
3. Escribir $\ln x$ sin valor absoluto.
4. Intentar integrar un producto o un cociente término a término, como si hubiera regla directa.

En integral definida:

5. Escribir $+C$ en una integral definida.
6. Restar al revés: es $F(b)-F(a)$.
7. Aplicar el teorema fundamental donde el integrando **no es continuo**.
8. No partir el intervalo ante un valor absoluto o una función por tramos.
9. Confundir **integral** con **área** cuando la función cambia de signo.

Protocolo de autocontrol

Antes de entregar cada ítem:

1. Si es indefinida, **derive** el resultado.
2. Si es definida, revise el signo: ¿es razonable? Un área negativa siempre es error.
3. Si es aplicada, revise las **unidades**.
4. Si la región es poligonal, compárela con la geometría elemental.

7.4 Ítem tipo resuelto

Un problema completo, con los cuatro criterios visibles

El caudal de descarga de una planta de tratamiento sigue

$$Q(t)=|\,t-3\,|+2 \quad (\mathrm{m}^3/\mathrm{h}), \qquad 0\le t\le 6.$$

Halle el volumen total descargado e interprete el resultado.

1. **Planteamiento.** El volumen es la acumulación del caudal sobre el tiempo.
$$V=\int_0^6 (|t-3|+2)\,dt$$
2. **Procedimiento.** Separo el término constante y parto el otro en $t=3$.
$$V=\int_0^6 |t-3|\,dt+\int_0^6 2\,dt$$

3. Resuelvo el valor absoluto por tramos.
$$\int_0^3 (3-t)dt + \int_3^6 (t-3)dt = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$$

4. Resuelvo el término constante.
$$\int_0^6 2\,dt = 12$$

5. **Resultado.** Sumo, con unidades.
$V = 9 + 12 = 21\ \text{m}^3$

Verificación

Geométrica. La gráfica es una "V" de vértice $(3, 2)$ sobre una franja de altura 2. La franja aporta $2 \times 6 = 12$; los dos triángulos, de base 3 y altura 3 cada uno, aportan $\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$. Total 21 ✓
Unidades. $\text{m}^3/\text{h} \times \text{h} = \text{m}^3$. ✓

La interpretación: el 20 % que casi nadie escribe

El caudal mínimo es 2 m^3/h y ocurre en $t = 3$; en los extremos sube a 5. La planta descarga 21 m^3 en la jornada, con un régimen que **decrece hasta la mitad del periodo y luego se recupera**.
Sin este párrafo el ítem está incompleto. Un volumen sin lectura es un número huérfano, y quien dimensione el tanque de almacenamiento necesita saber no solo cuánto llega sino *cuándo*.

7.5 Cómo prepararse

1. Rehaga al menos una integral **por definición** completa, con fórmulas de sumatoria.
2. Para cada uno de los nueve errores, escriba un contraejemplo propio.
3. Practique el reconocimiento: ante cada integral, pregúntese primero *¿hay que partir el intervalo?*
4. Verifique todas sus respuestas derivando.
5. Redacte la interpretación de cada problema aplicado en una frase, con unidades.

Ejercicios propuestos

7.1 Halle f si $f'(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x}$ y $f(1) = 4$.

7.2 Integre: (a) $\displaystyle\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x}\right) dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x}{x^2}\, dx$.

7.3 Calcule $\int_0^3 x^2\, dx$ *por definición*, con sumas de Riemann y extremos derechos.

7.4 Evalúe: (a) $\int_1^8 \dfrac{dx}{x}$; (b) $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$; (c) $\int_{-2}^{2} (x^5 + 3x^2)\, dx$.

7.5 Halle $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2} \ln(1+t^2)\,dt$.

7.6 Calcule $\int_0^6 |2t-5|\,dt$ y verifique por geometría.

7.7 Para $f(x)=x^2-9$ en $[0,4]$, calcule la integral definida y el área. Explique la diferencia en una frase.

7.8 Acote $\int_1^5 \dfrac{dx}{1+x^2}$ sin calcularla.

7.9 **Aplicado (ambiental).** El caudal de una quebrada es $Q(t)=15+6t-t^2$ m^3/h para $0\le t\le 8$. Halle el volumen escurrido e interprete el comportamiento del caudal.

7.10 **Aplicado (deportivo).** La tasa de venta de boletas es $v(t)=80-4t$ boletas por hora durante $t\in[0,24]$. Halle el total vendido, el instante en que la venta se detiene y explique qué ocurre después de ese instante.

Respuestas

7.1 $f(x)=2x^3-2\ln|x|+C$ con $2+C=4$, luego $C=2$.

7.2 (a) $x^5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{4}x^{4/3}+C$; (b) $x^2-\ln|x|+C$.

7.3 $\Delta x=\frac{3}{n}$, $x_i=\frac{3i}{n}$; $S_n=\frac{27}{n^3}\sum i^2\to 9$.

7.4 (a) $\ln 8=2{,}079$; (b) 1; (c) $[3x^2]$ par y x^5 impar: $2\int_0^2 3x^2dx=16$.

7.5 $\dfrac{2x\ln\left(1+x^4\right)}{1}=2x\ln\left(1+x^4\right)$.

7.6 Corte en $t=2{,}5$: $\int_0^{2,5}(5-2t)+\int_{2,5}^6(2t-5)=6{,}25+12{,}25=18{,}5$. Geométricamente, dos triángulos de base 2,5 y altura 5, y base 3,5 y altura 7.

7.7 Integral: $\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_0^4=\frac{64}{3}-36=-\frac{44}{3}$. Área: corte en $x=3$; $\int_0^3(9-x^2)=18$ y $\int_3^4(x^2-9)=\frac{10}{3}$; área $=\frac{64}{3}$. La integral resta la región bajo el eje.

7.8 En $[1,5]$ el integrando decrece de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{26}$, luego $\frac{4}{26}\le\int\le 2$, es decir $0{,}154\le\int\le 2$.

7.9 $V=\left[15t+3t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^8=120+192-\frac{512}{3}=141{,}33$ m^3. El caudal crece hasta $t=3$ (donde $Q'=6-2t=0$) y luego decrece; se anula en $t=3+2\sqrt{6}\approx 7{,}90$.

7.10 $\int_0^{20}(80-4t)dt=1\,600-800=800$ boletas. La venta se detiene en $t=20$. Después de ese instante el modelo da valores **negativos**, que carecen de sentido: el modelo deja de ser válido y hay que truncarlo en $t=20$.

SESIÓN 8

Integración por sustitución

Objetivo de la sesión

Reconocer integrales que provienen de una regla de la cadena, resolverlas mediante cambio de variable, y aplicar el método a integrales definidas transformando también los límites.

8.1 La regla de la cadena, leída al revés

Todas las técnicas de este módulo nacen de la misma idea: cada regla de derivación del volumen I, leída en sentido inverso, produce una técnica de integración. La primera y más importante viene de la regla de la cadena.

Integración por sustitución

Si $u = g(x)$ es derivable y f es continua, entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Demostración

Sea F una antiderivada de f. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x).$$

Luego $F(g(x))$ es antiderivada del integrando de la izquierda, y coincide con $F(u)$, que es el resultado de la derecha. ■

Qué hay que reconocer

La sustitución funciona cuando en el integrando aparecen **una función interna y su derivada**, aunque sea salvo constante.
Señal práctica: hay algo "dentro" —de un paréntesis, un radical, un exponente, un seno— y por fuera aparece algo parecido a su derivada.

La igualdad del teorema es una igualdad entre *familias de antiderivadas*, no una identidad numérica entre dos integrales de la misma variable: ambos miembros tienen la misma derivada respecto de x una vez que se escribe $u = g(x)$. Por eso el paso 5 —deshacer el cambio— no es opcional.

8.2 El método en cinco pasos

Procedimiento

1. Elegir u: casi siempre la función **interna**.
2. Calcular $du = g'(x)\, dx$.
3. Sustituir **todo**: no puede quedar ninguna x.

4. Integrar en la variable u.
5. Deshacer el cambio, volviendo a x.

$\int 2x\,(x^2+1)^5\,dx$

1. Elijo la función interna como u.
   $u = x^2 + 1$
2. Derivo para obtener du.
   $du = 2x\,dx$
3. Sustituyo: el factor $2x\,dx$ es exactamente du.
   $\int u^5\,du$
4. Integro con la regla de la potencia.
   $\frac{u^6}{6} + C$
5. Deshago el cambio.
   $\frac{(x^2+1)^6}{6} + C$

Verificación

Derivando con la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+1)^6}{6}\right] = (x^2+1)^5 \cdot 2x \;\checkmark$$

El 6 del denominador se cancela con el exponente que baja, y aparece el $2x$ de la derivada interna. Todo cuadra.

8.2.1 Cuando falta una constante

Rara vez el du aparece exacto. Casi siempre falta un factor numérico, y eso se arregla sin dificultad porque las constantes salen de la integral.

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

1. Elijo lo que está dentro del radical.
   $u = x^2 + 4$
2. Derivo: aparece $2x$, pero en el integrando solo hay x.
   $du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{1}{2}\,du$
3. Sustituyo, con el $\frac{1}{2}$ fuera de la integral.
   $\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$

4. Integro con la regla de la potencia: al exponente $-\frac{1}{2}$ le sumo 1 y divido entre $\frac{1}{2}$.
$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} = u^{1/2}$$

5. Deshago el cambio.
$$\sqrt{x^2+4}+C$$

Solo se ajustan constantes

Multiplicar y dividir por una *constante* es lícito. Hacerlo con una **variable** no lo es:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \text{ funciona;} \qquad \int \sqrt{x^3+1}\,dx \textbf{ no} \text{ sale por sustitución.}$$

En el segundo caso falta el x^2 y no se puede "sacar" un x^2 de la integral. Si el du no aparece salvo constante, la sustitución no es el camino.

8.3 Sustitución en integrales definidas

Hay dos formas de proceder, y conviene dominar la primera.

Cambiar los límites: lo recomendable

Al sustituir $u = g(x)$, los límites de integración también cambian:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Así no hay que deshacer el cambio: se evalúa directamente en u.

$$\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$$

1. Elijo el exponente como u.
$$u = x^2, \qquad x\,dx = \tfrac{1}{2}du$$

2. Transformo los límites: cuando $x = 0$, $u = 0$; cuando $x = 1$, $u = 1$.
$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du$$

3. Integro y evalúo.
$$\frac{1}{2}\,[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\frac{e-1}{2} \approx 0{,}859$$

El error de los límites olvidados

Escribir $\frac{1}{2}\,[e^u]_0^1$ *sin* haber transformado los límites es correcto por casualidad en este ejemplo, porque 0 y 1 se transforman en sí mismos.

En $\int_1^3 2x(x^2+1)^4 dx$ los límites pasan a ser 2 y 10. Evaluar en 1 y 3 da un resultado **completamente distinto**. Si no transforma los límites, deshaga el cambio antes de evaluar; lo que no puede hacer es mezclar.

8.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

La carga contaminante que sale de un vertimiento es el producto del caudal por la concentración. Si

$$Q(t) = 2t \text{ L/s} \qquad \text{y} \qquad C(t) = \frac{50}{\sqrt{t^2+9}} \text{ mg/L},$$

halle la carga total vertida entre $t = 0$ y $t = 4$ segundos.

Ejemplo

1. La carga acumulada es la integral del producto caudal por concentración.
$$M = \int_0^4 \frac{100\,t}{\sqrt{t^2+9}}\,dt$$
2. Sustituyo lo que está dentro del radical.
$$u = t^2 + 9, \qquad t\,dt = \tfrac{1}{2}du$$
3. Transformo los límites: $t = 0 \Rightarrow u = 9$; $t = 4 \Rightarrow u = 25$.
$$M = 50 \int_9^{25} u^{-1/2}\,du$$
4. Integro y evalúo.
$$50\left[2\sqrt{u}\right]_9^{25} = 100(5-3)$$

$$\boxed{M = 200 \text{ mg}}$$

La estructura "caudal por concentración" aparece en todo balance de masas, y casi siempre produce una integral por sustitución: la concentración suele depender de una expresión que también aparece derivada en el caudal. Reconocer ese patrón ahorra tanteo.

Aplicación: gestión deportiva

La tasa de nuevas afiliaciones a un club sigue

$$r(t) = \frac{300\,t}{(t^2+4)^2} \quad \text{(afiliados por mes)}.$$

¿Cuántos se afiliaron durante el primer semestre?

Ejemplo

1. Sustituyo el paréntesis.
   $u = t^2 + 4, \qquad t\,dt = \tfrac{1}{2}du$
2. Transformo los límites: $t = 0 \Rightarrow u = 4$; $t = 6 \Rightarrow u = 40$.
   $N = 150 \displaystyle\int_4^{40} u^{-2}\,du$
3. Integro.
   $150\left[-\dfrac{1}{u}\right]_4^{40} = 150\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{40}\right)$
4. Opero.
   $150 \cdot \dfrac{9}{40}$

$N = 33{,}75 \approx 34$ afiliados

8.5 Síntesis

1. La sustitución es la **regla de la cadena invertida**.
2. Elija como u la función **interna**.
3. Sustituya **todo**: no puede quedar ninguna x mezclada con u.
4. Solo se pueden ajustar **constantes**, nunca variables.
5. En una definida, **transforme los límites** y evalúe en u.
6. Verifique derivando: debe reaparecer el factor interno.

Ejercicios propuestos

8.1 Integre: (a) $\int 3x^2\,(x^3-5)^4\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x+1)^3}$; (c) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$.

8.2 Integre: (a) $\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$; (c) $\int \cos(5x)\,dx$.

8.3 Evalúe transformando los límites: (a) $\int_1^3 2x\,(x^2+1)^4\,dx$; (b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.

8.4 Explique por qué $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$ no se resuelve por sustitución, mientras que $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ sí.

8.5 Verifique derivando que $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

8.6 Un vertimiento tiene $Q(t) = 3t^2$ L/s y $C(t) = \dfrac{80}{t^3+8}$ mg/L. Halle la carga total entre $t = 0$ y $t = 2$ s.

8.7 La tasa de asistencia a un escenario es $a(t) = \dfrac{500t}{\sqrt{t^2+1}}$ personas por hora. Halle la asistencia total entre $t = 0$ y $t = 4$ h.

8.8 La velocidad de infiltración en un suelo es $i(t) = \dfrac{12}{(1+2t)^2}$ mm/h. Halle la lámina infiltrada en las primeras 5 horas.

Respuestas

8.1 (a) $\dfrac{(x^3-5)^5}{5} + C$; (b) $-\dfrac{1}{8(4x+1)^2} + C$; (c) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$.

8.2 (a) $\dfrac{(x^2-7)^{3/2}}{3} + C$; (b) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$; (c) $\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C$.

8.3 (a) u va de 2 a 10: $\left[\frac{u^5}{5}\right]_2^{10} = \frac{100\,000-32}{5} = 19\,993{,}6$; (b) u va de 0 a 1: $\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

8.4 Porque la derivada de x^3+1 es $3x^2$, y ese factor solo está presente en el segundo integrando. En el primero habría que "inventar" un x^2, y las variables no salen de la integral.

8.5 Derivando: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ ✓

8.6 $M = 80\int_0^2 \frac{3t^2}{t^3+8}dt = 80\left[\ln|t^3+8|\right]_0^2 = 80\ln 2 \approx 55{,}5$ mg.

8.7 $500\left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^4 = 500\left(\sqrt{17}-1\right) \approx 1\,562$ personas.

8.8 $12\left[-\frac{1}{2(1+2t)}\right]_0^5 = 6\left(1-\frac{1}{11}\right) \approx 5{,}45$ mm.

SESIÓN 9

Integrales con logaritmo y exponencial

Objetivo de la sesión

Reconocer el patrón u'/u que produce logaritmo natural, integrar exponenciales compuestas, y aplicar ambos resultados a los modelos de crecimiento y decaimiento que aparecen en gestión y en ingeniería ambiental.

9.1 El patrón u'/u

Teorema

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

Demostración

Es la sustitución $u = u(x)$, $du = u'\,dx$, aplicada a $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. Derivando el resultado con la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{u'}{u}\ \checkmark$$

Cómo reconocerlo

Busque un **cociente** en el que el numerador sea la derivada del denominador, aunque sea salvo constante. Es el mismo criterio de la sesión 8, aplicado al caso $n = -1$ que la regla de la potencia no cubre.

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$$

1. Identifico denominador y su derivada.
   $u = x^2 + 3, \qquad u' = 2x$
2. El numerador es exactamente u': aplico el teorema.
   $\ln\left|x^2+3\right| + C$

Aquí el valor absoluto es innecesario porque $x^2 + 3 > 0$ siempre, pero escribirlo nunca está mal. Si el denominador puede anularse, es obligatorio.

$\displaystyle\int \frac{3}{2x-5}\,dx$: ajuste de constante

1. El denominador tiene derivada 2, pero arriba hay un 3.
   $u = 2x - 5, \qquad du = 2\,dx$
2. Escribo $dx = \frac{1}{2}du$ y saco las constantes.
   $3 \cdot \frac{1}{2} \displaystyle\int \frac{du}{u}$
3. Integro.
   $\frac{3}{2} \ln|2x-5| + C$

Un error que produce disparates

$$\int \frac{dx}{x^2+1} \neq \ln\left|x^2+1\right| + C$$

El numerador es 1, no $2x$: no hay patrón u'/u. Esa integral vale $\tan^{-1} x + C$, y está en la tabla de la sesión 2.
Antes de escribir un logaritmo, **compruebe que el numerador sea la derivada del denominador**.

9.1.1 Dos integrales que conviene tener

$\displaystyle\int \tan x\,dx$

1. Escribo la tangente como cociente.
   $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$
2. El numerador es, salvo signo, la derivada del denominador.
   $u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x\,dx$
3. Sustituyo.
   $\displaystyle -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|$
4. Deshago el cambio.
   $-\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

Análogamente, $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$.

9.2 Exponenciales

Teorema

$$\int e^u\,u'\,dx = e^u + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$\int e^{-3x}\,dx$

1. Sustituyo el exponente.
   $u = -3x, \qquad dx = -\tfrac{1}{3}du$
2. Integro.
   $-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int e^{u}du = -\dfrac{1}{3}e^{u}$
3. Deshago.
   $-\dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$

Error frecuente

$$\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C, \qquad \textbf{no} \quad e^{-3x} + C.$$

La propiedad "se integra a sí misma" vale para e^{x} *a secas*. En cuanto hay algo dentro del exponente aparece el factor $\frac{1}{u'}$, que es el recíproco del que apareció al derivar.

$\int x\,e^{-x^2}\,dx$

1. Sustituyo el exponente; su derivada es $-2x$ y arriba hay x.
   $u = -x^2, \qquad x\,dx = -\tfrac{1}{2}du$
2. Integro.
   $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{u}du = -\dfrac{1}{2}e^{u}$
3. Deshago.
   $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Compare con $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$, sin el factor x. Esa integral **no tiene antiderivada elemental**: no existe ninguna combinación finita de funciones conocidas cuya derivada sea e^{-x^2}.
No es que sea difícil: está demostrado que no existe. Es la función de Gauss, base de la distribución normal, y se evalúa numéricamente (Apéndice A). Que un factor x marque toda la diferencia muestra lo delicado que es el reconocimiento de patrones.

9.3 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un contaminante se degrada según una cinética de primer orden: su concentración decae a razón de

$$C'(t) = -0{,}23\,C(t).$$

Si la concentración inicial es $C_0 = 40$ mg/L, halle $C(t)$ y la vida media.

Ejemplo

1. Separo variables y reconozco el patrón u'/u a la izquierda.
$$\frac{C'(t)}{C(t)} = -0{,}23$$
2. Integro ambos lados respecto de t.
$$\ln|C| = -0{,}23\,t + K$$
3. Despejo aplicando exponencial.
$$C(t) = e^{K} e^{-0{,}23t} = C_0\, e^{-0{,}23t}$$
4. Impongo la condición inicial.
$$C(t) = 40\, e^{-0{,}23t} \text{ mg/L}$$

Vida media

1. Busco t tal que la concentración sea la mitad.
$$40e^{-0{,}23t} = 20 \;\Rightarrow\; e^{-0{,}23t} = \tfrac{1}{2}$$
2. Aplico logaritmo.
$$t = \frac{\ln 2}{0{,}23}$$

$$t_{1/2} \approx 3{,}01 \text{ días}$$

Este es el primer contacto del curso con una **ecuación diferencial**: una ecuación donde la incógnita es una función y aparece su derivada. Se resolvió integrando, que es lo único que sabemos hacer, y funcionó porque la ecuación era separable.
La vida media no depende de C_0: sale igual con 40 o con 4 000 mg/L. Es la misma independencia que en el volumen I tenía el tiempo de duplicación.

Aplicación: gestión deportiva

El valor presente de un flujo continuo de ingresos R (constante, en millones por año) durante T años, con tasa de descuento r, es

$$VP = \int_0^T R\, e^{-rt}\, dt.$$

Calcúlelo para $R = 50$, $r = 0{,}08$ y $T = 10$.

Ejemplo

1. Integro la exponencial.
$$VP = R\left[-\frac{e^{-rt}}{r}\right]_0^T = \frac{R}{r}\left(1 - e^{-rT}\right)$$
2. Sustituyo los datos.
$$VP = \frac{50}{0{,}08}\left(1 - e^{-0{,}8}\right)$$
3. Evalúo.
$$625\,(1 - 0{,}4493)$$

$$VP \approx 344{,}2 \text{ millones}$$

Verificación

Sin descontar, diez años a 50 millones darían 500. El descuento reduce el valor a 344,2: el flujo lejano vale menos hoy.
Compare con el tópico de valor presente del volumen I: allí se descontaba un pago *único*; aquí, un flujo *continuo*. La integral es precisamente lo que permite pasar de uno a otro.

9.4 Síntesis

1. $\displaystyle\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$: el numerador debe ser la derivada del denominador.
2. **Compruebe el patrón** antes de escribir un logaritmo.
3. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.
4. $\displaystyle\int e^u u'\,dx = e^u + C$; con algo dentro, aparece $1/u'$.
5. $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ **no tiene antiderivada elemental**.
6. $\displaystyle\int_0^T Re^{-rt}dt = \frac{R}{r}\left(1 - e^{-rT}\right)$: valor presente de un flujo continuo.

Ejercicios propuestos

9.1 Integre: (a) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-7}$; (c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}dx$.

9.2 Integre: (a) $\displaystyle\int e^{5x}dx$; (b) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$.

9.3 Distinga y resuelva: (a) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{x^2+9}$; (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$.

9.4 Evalúe $\int_0^{\ln 3} e^{-2x}dx$.

9.5 Explique por qué $\int e^{-x^2}dx$ no se resuelve con las técnicas del curso, mientras que $\int xe^{-x^2}dx$ sí.

9.6 Un contaminante decae con $C' = -0{,}15\,C$ y $C_0 = 90$ mg/L. Halle $C(t)$, la vida media y el tiempo hasta llegar a 10 mg/L.

9.7 La biomasa de un cultivo crece con $B' = 0{,}09\,B$ y $B_0 = 2$ t/ha. Halle $B(t)$ y el tiempo de duplicación.

9.8 Calcule el valor presente de un flujo continuo de $R = 80$ millones al año durante 15 años con $r = 0{,}06$. Compárelo con el total sin descontar.

9.9 Halle $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ mediante una sustitución adecuada.

Respuestas

9.1 (a) $\ln\left|x^4+1\right| + C$; (b) $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$; (c) $\ln|2+\operatorname{sen} x| + C$.

9.2 (a) $\frac{1}{5}e^{5x} + C$; (b) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$; (c) $\ln\left(e^x+4\right) + C$.

9.3 (a) $\ln\left(x^2+9\right) + C$; (b) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$. El numerador decide cuál de los dos patrones aplica.

9.4 $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{4}{9}$.

9.5 Porque en el segundo aparece el factor x, que es la derivada del exponente salvo constante. Sin él no hay sustitución posible, y está demostrado que no existe antiderivada elemental.

9.6 $C(t) = 90e^{-0{,}15t}$; $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0{,}15} = 4{,}62$ días; $t = \frac{\ln 9}{0{,}15} = 14{,}65$ días.

9.7 $B(t) = 2e^{0{,}09t}$; duplicación en $\frac{\ln 2}{0{,}09} = 7{,}70$ años.

9.8 $VP = \frac{80}{0{,}06}\left(1-e^{-0{,}9}\right) = 1\,333{,}3(0{,}5934) \approx 791{,}2$ millones, frente a 1 200 sin descontar.

9.9 Con $u = \ln x$: $\int u\,du = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$.

SESIÓN 10

Integrales de funciones trigonométricas

Objetivo de la sesión

Resolver integrales de potencias de seno y coseno según la paridad de los exponentes, usar las identidades de reducción cuando ambas potencias son pares, e integrar potencias de tangente y secante.

10.1 Tres identidades y una estrategia

Todo este capítulo se apoya en identidades de la sesión 14 del volumen I. No hay fórmulas nuevas que memorizar: hay que *reconocer* cuál aplicar.

Identidades de trabajo

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Las dos últimas se llaman **identidades de reducción de potencia** y son la herramienta central cuando los exponentes son pares.

10.2 Potencias de seno y coseno

La estrategia, decidida por la paridad

Para $\int \operatorname{sen}^m x \, \cos^n x \, dx$:

Situación	Qué hacer
n impar	separar un $\cos x$; sustituir $u = \operatorname{sen} x$
m impar	separar un $\operatorname{sen} x$; sustituir $u = \cos x$
ambos pares	usar identidades de **reducción**

La lógica: el factor separado actúa como du, y el resto se convierte con la identidad pitagórica.

$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$ (potencia impar en el coseno)

1. Separo un factor $\cos x$, que será el du.
$$\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^2 x\, \cos x\, dx$$
2. Convierto el $\cos^2$ restante con la identidad pitagórica.
$$\int \operatorname{sen}^2 x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x\, dx$$
3. Sustituyo $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$.
$$\int \left(u^2 - u^4\right) du$$
4. Integro y deshago el cambio.
$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

Error frecuente

La identidad se usa **después** de separar el factor, no antes. Si convierte todo a senos desde el principio queda un $\cos x$ suelto sin su pareja, y la sustitución no cierra.

10.2.1 Cuando ambos exponentes son pares

$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

1. No hay potencia impar: aplico la identidad de reducción.
$$\int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$$
2. Separo la integral en dos términos.
$$\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$
3. Integro; en el segundo término la sustitución $u = 2x$ aporta un $\frac{1}{2}$.
$$\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Verificación

Derivando: $\frac{1}{2} - \frac{2\cos 2x}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1-\cos 2x}{2} = \operatorname{sen}^2 x$ ✓

Un atajo que conviene conocer

Sobre un periodo completo, seno y coseno al cuadrado promedian $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi.$$

Basta notar que ambas integrales suman $\int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi$ y que por simetría valen lo mismo.

Este resultado es la base del cálculo de valores eficaces en señales periódicas, y reaparecerá en la sesión 18.

10.3 Potencias de tangente y secante

$\int \tan^2 x\,dx$

1. No hay fórmula directa; uso $\tan^2 = \sec^2 - 1$.
$$\int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$
2. Integro cada término con la tabla de la sesión 2.
$$\tan x - x + C$$

$\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

1. Separo $\sec^2 x$, cuya integral es la tangente: será el du.
$$\int \tan^3 x\, \sec^2 x\, \sec^2 x\,dx$$
2. Convierto el $\sec^2$ restante con $\sec^2 = 1 + \tan^2$.
$$\int \tan^3 x \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^2 x\,dx$$
3. Sustituyo $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$.
$$\int \left(u^3 + u^5\right) du$$
4. Integro y deshago.
$$\frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

El patrón es el mismo de siempre: separar el factor que hace de du —$\cos x$, $\operatorname{sen} x$ o $\sec^2 x$— y convertir el resto con una identidad. Cambian los nombres, no el método.

10.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

La radiación solar incidente sobre un panel a lo largo del día se modela por

$$I(t) = 900 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \text{ W/m}^2, \qquad 0 \le t \le 12 \text{ horas}.$$

Halle la energía total recibida por metro cuadrado.

Ejemplo

1. La energía es la acumulación de la potencia sobre el tiempo.
$$E = \int_0^{12} 900 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt$$
2. Sustituyo $u = \frac{\pi t}{12}$, de donde $dt = \frac{12}{\pi} du$; los límites pasan a 0 y π.
$$E = 900 \cdot \frac{12}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \, du$$
3. Integro.
$$\frac{10\,800}{\pi} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{10\,800}{\pi}(2)$$

$$E \approx 6\,875 \text{ Wh/m}^2 \approx 6{,}88 \text{ kWh/m}^2$$

Verificación

Comprobación por orden de magnitud: la irradiación diaria típica en Colombia ronda los 4 a 6 kWh/m^2. El modelo, que supone cielo despejado y pico de 900 W/m^2, da algo por encima. Coherente. ✓
Note también que el resultado equivale a la potencia media multiplicada por la duración: la media del seno sobre medio periodo es $2/\pi \approx 0{,}637$, y en efecto $900(0{,}637)(12) = 6\,875$.

Aplicación: gestión deportiva

La asistencia mensual a un complejo oscila según

$$A(t) = 8\,000 + 2\,000 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) \quad \text{(personas por mes)}.$$

Halle la asistencia acumulada en un año.

Ejemplo

1. Separo la integral en sus dos términos.
$$N = \int_0^{12} 8\,000 \, dt + 2\,000 \int_0^{12} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) dt$$
2. El primer término es inmediato.
$$8\,000(12) = 96\,000$$
3. El segundo se anula: el seno recorre un periodo completo y sus mitades se cancelan.
$$2\,000 \cdot 0 = 0$$

$$N = 96\,000 \text{ personas al año}$$

La oscilación estacional **no aporta nada** al total anual: lo que sube en un semestre baja en el otro. Solo el nivel medio determina el acumulado.
La consecuencia de gestión es importante: la estacionalidad no cambia los ingresos del año, pero sí determina la *capacidad instalada* que hay que sostener,

porque el complejo debe atender el mes pico, no el promedio.

10.5 Síntesis

1. Potencia **impar**: separe un factor y sustituya.
2. Ambas **pares**: use identidades de reducción.
3. Aplique la identidad **después** de separar el factor.
4. $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$, vía $\tan^2 = \sec^2 - 1$.
5. Con tangente y secante, el du suele ser $\sec^2 x\,dx$.
6. Sobre un periodo completo, una oscilación pura **integra cero**.

Ejercicios propuestos

10.1 Integre: (a) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$; (b) $\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\,dx$; (c) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$.

10.2 Integre usando reducción: (a) $\int \cos^2 x\,dx$; (b) $\int \operatorname{sen}^2(3x)\,dx$.

10.3 Integre: (a) $\int \sec^2 x \tan x\,dx$; (b) $\int \tan^4 x \sec^2 x\,dx$; (c) $\int \cot^2 x\,dx$.

10.4 Evalúe $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y explique por qué el resultado es la mitad del intervalo.

10.5 Evalúe $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ de dos maneras: por sustitución y por simetría.

10.6 Un panel recibe $I(t) = 750\,\operatorname{sen}(\pi t/10)$ W/m^2 durante 10 horas. Halle la energía total y la potencia media.

10.7 La temperatura de un embalse oscila según $T(t) = 18 + 5\cos\!\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ °C con t en horas. Halle la temperatura media en las primeras 24 horas.

10.8 Explique, sin calcular, por qué $\int_0^{12} \cos\!\left(\frac{\pi t}{6}\right) dt = 0$.

Respuestas

10.1 (a) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$; (b) $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$; (c) $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$.

10.2 (a) $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$; (b) $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + C$.

10.3 (a) $\frac{\tan^2 x}{2} + C$; (b) $\frac{\tan^5 x}{5} + C$; (c) $-\cot x - x + C$.

10.4 $\frac{\pi}{2}$. Porque sen^2 promedia $\frac{1}{2}$ sobre un semiperiodo, y $\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}$.

10.5 Por sustitución $u = \operatorname{sen} x$ da $\left[\frac{u^2}{2}\right]$ entre 0 y 0, es decir 0. Por simetría, el integrando es $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$, que recorre un número entero de periodos.

10.6 $E = \frac{750\cdot 10}{\pi}(2) = 4\,775$ Wh/m^2; potencia media 477,5 W/m^2.

10.7 El término oscilante integra cero sobre dos periodos completos, luego la media es 18 °C.

10.8 Porque el argumento recorre exactamente dos periodos completos del coseno, y sobre cada periodo las mitades positiva y negativa se cancelan.

SESIÓN 11

Sustitución trigonométrica

Objetivo de la sesión

Reconocer los tres radicales cuadráticos que se simplifican con un cambio trigonométrico, ejecutar la sustitución y el retorno a la variable original mediante un triángulo de referencia, y aplicar la técnica al cálculo de áreas de secciones circulares.

11.1 El problema

La sustitución de la sesión 8 exige que la derivada de la función interna aparezca en el integrando. Pero

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

no tiene ningún factor x que sirva de du. Hace falta otra idea.

La idea

Las identidades pitagóricas convierten sumas y restas de cuadrados en un solo cuadrado:

$$1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta,\qquad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\qquad \sec^2\theta-1=\tan^2\theta.$$

Al elegir x como un múltiplo de seno, tangente o secante, el radical **desaparece**: la raíz de un cuadrado perfecto se extrae sin más.

11.2 Los tres casos

Radical	Sustitución	dx	Queda
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\operatorname{sen}\theta$	$a\cos\theta\,d\theta$	$a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$a\sec^2\theta\,d\theta$	$a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$	$a\tan\theta$

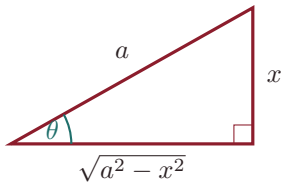
Cómo recordar cuál es cuál

Mire el **signo** y quién va primero:

- constante *menos* variable $\Rightarrow$ seno (porque sen está acotado entre -1 y 1, como debe estarlo x/a);
- *suma* $\Rightarrow$ tangente;
- variable *menos* constante $\Rightarrow$ secante.

11.2.1 El triángulo de referencia

Cuando el resultado en θ contiene senos o cosenos, deshacer el cambio exige un dibujo. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$, se construye un triángulo rectángulo con cateto opuesto x e hipotenusa a; el cateto adyacente sale por Pitágoras.



De ahí se leen todas las razones que hagan falta:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \qquad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dibújelo antes de integrar

El triángulo se construye al elegir la sustitución, no al final. Tenerlo a la vista desde el principio evita el único error verdaderamente caro de esta técnica: dejar la respuesta en θ.

11.3 El método, paso a paso

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

1. Reconozco el caso: constante menos variable, con $a = 3$.
   $x = 3\operatorname{sen}\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta$
2. Simplifico el radical con la identidad pitagórica.
   $\sqrt{9 - 9\operatorname{sen}^2\theta} = 3\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = 3\cos\theta$
3. Sustituyo todo en la integral.
   $$\int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$$
4. Deshago el cambio: de $x = 3\operatorname{sen}\theta$ se despeja θ.
   $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Verificación

Derivando con la regla de la cadena y la fórmula de la sesión 22 del volumen I:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1/3}{\sqrt{1 - x^2/9}} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \checkmark$$

$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

1. Sustituyo con $a = 2$.
$$x = 2\operatorname{sen}\theta, \qquad dx = 2\cos\theta\,d\theta, \qquad \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$
2. La integral queda en potencias pares de coseno.
$$\int 4\cos^2\theta\,d\theta$$
3. Aplico la identidad de reducción de la sesión 10.
$$4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta + C$$
4. Uso $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y leo las razones en el triángulo.
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$
5. Deshago el cambio.
$$2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

Error frecuente

El error más común no es la sustitución sino **el regreso**. Dejar la respuesta en θ es dejar el ejercicio a medias: la función original dependía de x. Dibuje el triángulo *antes* de empezar a integrar; así tendrá las razones listas cuando las necesite.

11.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental y topográfica

Una alcantarilla circular de radio $R = 1{,}2$ m transporta agua hasta una altura h. El área de la sección mojada, tomando el centro como origen, es

$$A(h) = 2\int_{-R}^{h-R} \sqrt{R^2 - y^2}\,dy.$$

Calcule el área cuando la tubería va llena a la mitad, es decir $h = R$.

Ejemplo

1. Con $h = R$ el límite superior es cero.
$$A = 2\int_{-R}^{0} \sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$
2. Uso el resultado del ejemplo anterior, con $a = R$.
$$\int \sqrt{R^2 - y^2}\,dy = \frac{R^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{y\sqrt{R^2-y^2}}{2}$$
3. Evalúo entre $-R$ y 0.
$$[0] - \left[\frac{R^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0\right] = \frac{\pi R^2}{4}$$

4 Multiplico por 2.

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A = \frac{\pi(1{,}2)^2}{2} \approx 2{,}26 \text{ m}^2$$

Verificación

Media tubería es medio círculo, y el área del círculo completo es $\pi R^2 = 4{,}52$ m^2. La mitad es 2,26. ✓
La geometría elemental verifica el caso particular; la integral resuelve el caso general, con h cualquiera, que es el que hace falta para diseñar la tubería.

Esta integral es exactamente la que usan las tablas de hidráulica para alcantarillados: relacionan la altura de lámina con el área mojada y, de ahí, con el caudal. Antes se consultaban en tablas impresas; hoy las calcula el software con esta misma fórmula.

Aplicación: gestión deportiva

La zona de calentamiento de una pista tiene forma de semicírculo de radio 20 m. Se quiere sembrar grama en la franja comprendida entre el borde y una cuerda paralela al diámetro, situada a 12 m del centro. ¿Qué área tiene esa franja?

Ejemplo

1 El área buscada va desde $y = 12$ hasta el borde $y = 20$.

$$A = 2\int_{12}^{20} \sqrt{400 - y^2}\, dy$$

2 Aplico la antiderivada conocida con $a = 20$.

$$2\left[200\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{y}{20}\right) + \frac{y\sqrt{400 - y^2}}{2}\right]_{12}^{20}$$

3 Evalúo en $y = 20$: el radical se anula y el arcoseno vale $\frac{\pi}{2}$.

$$2\left[200 \cdot \frac{\pi}{2}\right] = 200\pi$$

4 Resto el valor en $y = 12$, donde el radical vale 16.

$$2\,[200(0{,}6435) + 96] = 2(224{,}7) = 449{,}4$$

$$A = 628{,}3 - 449{,}4 \approx 179 \text{ m}^2$$

11.5 Síntesis

1. $\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\,\operatorname{sen}\theta$.
2. $\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\tan\theta$.
3. $\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\sec\theta$.
4. Tras sustituir, el radical **desaparece** por identidad pitagórica.
5. Dibuje el **triángulo de referencia** para deshacer el cambio.
6. **Nunca deje la respuesta en θ.**

Ejercicios propuestos

11.1 Indique qué sustitución corresponde, sin resolver: (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; (b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$; (c) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$.

11.2 Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

11.3 Resuelva $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

11.4 Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$ con la sustitución $x = 2\tan\theta$ y compare con la tabla de la sesión 2.

11.5 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ e interprete el resultado geométricamente.

11.6 Halle el área de un círculo de radio a integrando $2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

11.7 Una alcantarilla de radio 0,9 m lleva lámina de agua de 0,45 m. Halle el área mojada.

11.8 Halle el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ integrando, y compruebe que se reduce a πa^2 cuando $b=a$.

Respuestas

11.1 (a) $x = 5\,\operatorname{sen}\theta$; (b) $x = 4\sec\theta$; (c) $x = 2\tan\theta$.

11.2 $\operatorname{sen}^{-1}\!\left(\frac{x}{4}\right)+C$.

11.3 $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\!\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C$.

11.4 Queda $\frac{1}{2}\int d\theta = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\!\left(\frac{x}{2}\right)+C$, que coincide con la fórmula de tabla.

11.5 $\frac{9\pi}{4} \approx 7{,}07$: es un cuarto del círculo de radio 3.

11.6 $2\left[\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\!\left(\frac{y}{a}\right)+\frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{2}\right]_{-a}^{a} = 2\left(\frac{a^2\pi}{2}\right) = \pi a^2$.

11.7 Media tubería: $A = \frac{\pi(0{,}9)^2}{2} \approx 1{,}27\ \text{m}^2$.

11.8 Despejando $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, el área es $\frac{b}{a}\cdot\pi a^2 = \pi ab$. Con $b=a$ da πa^2. ✓

SESIÓN 12

Integración por partes

Objetivo de la sesión

Deducir la fórmula de integración por partes a partir de la regla del producto, elegir correctamente u y dv, y reconocer los casos de aplicación repetida y de integrales cíclicas.

12.1 La regla del producto, invertida

En la sesión 2 quedó dicho que no existe una regla directa para integrar un producto. Existe algo mejor: una fórmula que *transforma* la integral en otra, con la esperanza de que la nueva sea más fácil.

Integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Demostración

Parta de la regla del producto (sesión 20 del volumen I):

$$\frac{d}{dx}\,[u\,v] = u'v + uv'.$$

Integre ambos lados respecto de x:

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx.$$

Despeje la segunda integral y escriba $du = u'dx$, $dv = v'dx$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \;\blacksquare$$

Qué hace realmente

No resuelve la integral: la **cambia por otra**. El método sirve cuando la nueva integral, $\int v\,du$, es más sencilla que la original.
Si resulta más complicada, la elección de u y dv fue la equivocada. Vuelva atrás e intercambie.

12.2 Cómo elegir u

Regla LIATE

El orden de la lista no es arbitrario —la razón se explica enseguida—: encabeza lo que se **simplifica al derivar** y cierra lo que se **integra sin complicarse**. Elija como u la función que aparezca **primero** en esta lista:

L	Logarítmicas	$\ln x$
I	Inversas trigonométricas	$\tan^{-1} x$
A	Algebraicas	x, x^2
T	Trigonométricas	$\operatorname{sen} x$, $\cos x$
E	Exponenciales	e^x

Lo que quede será dv.

La lógica detrás de LIATE

El orden no es arbitrario: va de lo que **se simplifica al derivar** a lo que **se integra fácilmente**.
$\ln x$ se deriva y desaparece el logaritmo; x^2 se deriva y baja de grado; e^x se integra sin cambiar. Elegir u arriba de la lista y dv abajo garantiza que la nueva integral sea más simple.

12.3 Los tres casos típicos

12.3.1 Caso 1: aplicación directa

$$\int x\,e^x\,dx$$

1. Por LIATE, algebraica antes que exponencial.
   $u = x, \qquad dv = e^x dx$
2. Derivo u e integro dv.
   $du = dx, \qquad v = e^x$
3. Aplico la fórmula.
   $$\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx$$
4. La nueva integral es inmediata.
   $$x\,e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

Verificación

Derivando con la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left[(x-1)e^x\right] = e^x + (x-1)e^x = x\,e^x \;\checkmark$$

La elección equivocada

Si hubiera tomado $u = e^x$ y $dv = x\,dx$, la fórmula daría

$$\frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx,$$

con una integral **peor** que la original: el exponente de x subió en vez de bajar. Que la nueva integral empeore es la señal inequívoca de que hay que intercambiar u y dv.

12.3.2 Caso 2: el integrando aparentemente solo

$\int \ln x\,dx$

1. No hay producto visible, pero se puede inventar uno con el factor 1.
   $u = \ln x, \qquad dv = dx$
2. Derivo e integro.
   $du = \dfrac{dx}{x}, \qquad v = x$
3. Aplico la fórmula.
   $x\ln x - \displaystyle\int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx$
4. Integro.
   $x\ln x - x + C$

El truco de tomar $dv = dx$ resuelve también $\int \tan^{-1} x\,dx$ y $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$: todas las funciones de las letras L e I de LIATE, que no tienen antiderivada evidente pero se *derivan* bien.

12.3.3 Caso 3: aplicación repetida

$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

1. Primera aplicación: $u = x^2$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$.
   $-x^2\cos x + \displaystyle\int 2x\cos x\,dx$
2. La nueva integral sigue siendo un producto, pero el grado bajó. Aplico partes otra vez con $u = 2x$, $dv = \cos x\,dx$.
   $\displaystyle\int 2x\cos x\,dx = 2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,dx$
3. Integro el último término.
   $2x\operatorname{sen} x + 2\cos x$
4. Reúno todo.
   $-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$

Con x^n multiplicando a un seno, coseno o exponencial, hacen falta n **aplicaciones**: cada una baja el grado en uno hasta agotarlo.

12.3.4 Caso 4: la integral cíclica

$$I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

1. Aplico partes con $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^x dx$.
$$I = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$
2. Aplico partes de nuevo a la integral restante, con el mismo criterio.
$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cos x + I$$
3. Sustituyo: reaparece I en el lado derecho.
$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$$
4. Despejo I como si fuera una incógnita algebraica.
$$2I = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$I = \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$$

Error frecuente

Al aplicar partes por segunda vez hay que **mantener el mismo criterio** de elección. Si en la primera se toma u trigonométrica y en la segunda exponencial, todo se deshace y se llega a la identidad $I = I$, que es cierta y completamente inútil.

12.4 Aplicaciones

Aplicación: gestión deportiva

Un contrato genera un flujo de ingresos que crece linealmente, $R(t) = 10t$ millones por año, durante 8 años. Con una tasa de descuento continua $r = 0{,}10$, halle el valor presente

$$VP = \int_0^8 10t \, e^{-0{,}10t} \, dt.$$

Ejemplo

1. Aplico partes con $u = t$ y $dv = e^{-0{,}1t} dt$.
$$du = dt, \qquad v = -10 \, e^{-0{,}1t}$$
2. Sustituyo en la fórmula, con el factor 10 afuera.
$$10 \left[-10t \, e^{-0{,}1t} \Big|_0^8 + 10 \int_0^8 e^{-0{,}1t} dt \right]$$

3. Evalúo el primer término.
$$-80\,e^{-0{,}8} = -80(0{,}4493) = -35{,}95$$

4. Resuelvo la integral restante.
$$10\left[-10e^{-0{,}1t}\right]_0^8 = 100\,(1-0{,}4493) = 55{,}07$$

5. Reúno y multiplico por 10.
$$VP = 10\,(-35{,}95 + 55{,}07)$$

$$\boxed{VP \approx 191{,}2 \text{ millones}}$$

Verificación

Sin descontar, el flujo total sería $\int_0^8 10t\,dt = 320$ millones. El descuento lo reduce a 191,2, una merma del 40 %: coherente con un horizonte de ocho años al 10 %. ✓

Aplicación: ingeniería ambiental

La tasa de emisión de un gas desde un relleno sanitario decae según

$$E(t) = 50\,t\,e^{-0{,}2t} \quad \text{(kg/año)}.$$

Halle la emisión acumulada durante los primeros 10 años.

Ejemplo

1. Aplico partes con $u = t$, $dv = e^{-0{,}2t}dt$, luego $v = -5e^{-0{,}2t}$.
$$50\left[-5t\,e^{-0{,}2t}\Big|_0^{10} + 5\int_0^{10} e^{-0{,}2t}dt\right]$$

2. Primer término, con $e^{-2} = 0{,}1353$.
$$-50\,e^{-2} = -6{,}77$$

3. Segundo término.
$$5\left[-5e^{-0{,}2t}\right]_0^{10} = 25\,(1-0{,}1353) = 21{,}62$$

4. Reúno y multiplico por 50.
$$M = 50\,(-6{,}77 + 21{,}62)$$

$$\boxed{M \approx 742{,}4 \text{ kg}}$$

La forma $t\,e^{-kt}$ aparece en todo proceso que **arranca en cero, sube a un máximo y decae**: emisiones de un relleno, respuesta de un fármaco, descarga de un acuífero tras la lluvia.
Su integral *siempre* exige partes, de modo que reconocer el patrón ahorra tanteo. El máximo, dicho sea de paso, está en $t = 1/k$: en este caso a los cinco años.

12.5 Síntesis

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, deducida de la regla del producto.
2. El método **transforma** la integral: sirve si la nueva es más simple.
3. **LIATE** ordena la elección de u.
4. Si la nueva integral empeora, **intercambie** u y dv.
5. Con x^n hacen falta n aplicaciones.
6. En las cíclicas, **despeje** la integral como una incógnita.

Ejercicios propuestos

12.1 Integre: (a) $\int x\cos x\,dx$; (b) $\int x\,e^{-x}dx$; (c) $\int x\ln x\,dx$.

12.2 Integre: (a) $\int \tan^{-1} x\,dx$; (b) $\int \ln(2x)\,dx$.

12.3 Integre con aplicación repetida: (a) $\int x^2 e^x dx$; (b) $\int x^2\cos x\,dx$.

12.4 Resuelva la cíclica $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

12.5 Evalúe $\int_0^1 x\,e^x dx$.

12.6 Explique por qué elegir $u = e^x$ en $\int xe^x dx$ conduce a una integral peor, y qué principio general se deduce de ello.

12.7 Halle el valor presente de un flujo $R(t) = 6t$ millones por año durante 12 años con $r = 0{,}08$.

12.8 La emisión de un relleno es $E(t) = 80te^{-0{,}25t}$ kg/año. Halle la emisión acumulada en 15 años y el año de emisión máxima.

Respuestas

12.1 (a) $x\operatorname{sen}x + \cos x + C$; (b) $-(x+1)e^{-x} + C$; (c) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

12.2 (a) $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$; (b) $x\ln(2x) - x + C$.

12.3 (a) $\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$; (b) $x^2\operatorname{sen}x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen}x + C$.

12.4 $\dfrac{e^{2x}\left(2\cos x + \operatorname{sen}x\right)}{5} + C$.

12.5 $[(x-1)e^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1$.

12.6 Porque al integrar $dv = x\,dx$ el grado *sube* a x^2, mientras que al derivar $u = e^x$ no se simplifica nada. El principio: elija como u lo que **se simplifique al derivar**.

12.7 $VP = 6\left[\frac{1-e^{-0{,}96}(1+0{,}96)}{0{,}08^2}\right] \approx 233{,}9$ millones.

12.8 $M = 80\left[\frac{1-e^{-3{,}75}(1+3{,}75)}{0{,}25^2}\right] \approx 1\,137$ kg; el máximo de emisión está en $t = 1/0{,}25 = 4$ años.

SESIÓN 13

Fracciones parciales

Objetivo de la sesión

Descomponer una función racional en suma de fracciones simples según el tipo de factores del denominador, e integrar cada pieza con las técnicas ya conocidas.

13.1 La idea

Ninguna técnica vista sirve para

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx.$$

El numerador no es la derivada del denominador, no hay radical y no hay producto que separar por partes.

Pero el denominador **factoriza**: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. Y si se lograra escribir la fracción como

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1},$$

cada pieza sería una integral de tipo $\ln|u|$, que ya sabemos resolver.
Ese es todo el método: **deshacer la suma de fracciones**. Es el procedimiento inverso del que se aprende en la sesión 3 del volumen I, cuando se suman fracciones heterogéneas.

Requisito previo

El método exige que la fracción sea **propia**: grado del numerador *menor* que el del denominador.
Si no lo es, hay que dividir primero. Así,

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1},$$

y solo la segunda parte se descompone.

13.2 Caso I: factores lineales distintos

Definición

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$

1. Factorizo el denominador.
   $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$
2. Planteo la descomposición y multiplico por el denominador común.
   $5x-3=A(x+1)+B(x-3)$
3. Evalúo en las raíces, que anulan un término cada vez. Con $x=3$: $12=4A$.
   $A=3$
4. Con $x=-1$: $-8=-4B$.
   $B=2$
5. Integro cada pieza.
   $$\int \frac{3\,dx}{x-3}+\int \frac{2\,dx}{x+1}=3\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C$$

Verificación

Reconstruyendo la suma:

$$\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{5x-3}{x^2-2x-3}\ \checkmark$$

Sumar de vuelta las fracciones es la verificación natural del método, y no requiere derivar nada.

El atajo de las raíces

Evaluar en las raíces del denominador anula todos los términos menos uno, y da cada constante de inmediato. Es muchísimo más rápido que expandir y resolver un sistema.
Solo funciona con factores lineales distintos; en los otros casos hay que igualar coeficientes.

13.3 Caso II: factores lineales repetidos

Definición

Un factor $(x-a)^k$ aporta k **términos**, uno por cada potencia:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$\displaystyle\int \frac{x+4}{x(x-2)^2}\,dx$

1. Planteo con tres términos: uno por x y dos por el factor repetido.
   $$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

2. Multiplico por el denominador común.
$$x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$
3. Evalúo en las raíces: $x=0$ da $4=4A$; $x=2$ da $6=2C$.
$$A=1, \qquad C=3$$
4. Para B comparo coeficientes de x^2: $0 = A + B$.
$$B=-1$$
5. Integro cada pieza.
$$\ln|x| - \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Error frecuente

Olvidar alguno de los k términos del factor repetido es el error más frecuente. Con $(x-2)^2$ hacen falta **dos** términos, no uno: si se omite el de primer grado, el sistema resulta incompatible.

13.4 Caso III: factor cuadrático irreducible

Definición

Un factor x^2+px+q sin raíces reales aporta un término con numerador **lineal**:
$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{2x^2+3}{x\,(x^2+1)}\,dx$$

1. Planteo: numerador constante sobre el lineal, lineal sobre el cuadrático.
$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
2. Multiplico y comparo.
$$2x^2+3 = A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)x$$
3. Con $x=0$: $3=A$. Comparando coeficientes de x^2: $2=A+B$.
$$A=3, \qquad B=-1, \qquad C=0$$
4. Integro: la primera pieza da logaritmo; la segunda también, por el patrón u'/u.
$$3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

Si el numerador del término cuadrático hubiera quedado con parte constante ($C \neq 0$), esa parte produciría un **arcotangente** en vez de un logaritmo. Conviene separar mentalmente las dos contribuciones:
$$\frac{Ax}{x^2+q} \longrightarrow \ln; \qquad \frac{B}{x^2+q} \longrightarrow \tan^{-1}.$$

13.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Una población de una especie forestal crece según el **modelo logístico**: la tasa es proporcional tanto a los individuos presentes como al espacio disponible,

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

con M la capacidad de carga. Separando variables aparece la integral

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{M}\right)} = \int k\,dt.$$

Resolución por fracciones parciales

1. Escribo el integrando de forma más cómoda.
$$\frac{M}{P(M-P)}$$

2. Descompongo: dos factores lineales distintos.
$$\frac{M}{P(M-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{M-P}$$

3. Con $P = 0$ resulta $A = 1$; con $P = M$ resulta $B = 1$.
$$\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$$

4. Integro cada pieza; la segunda lleva signo por la cadena.
$$\ln|P| - \ln|M-P| = kt + K$$

5. Agrupo con propiedades del logaritmo.
$$\ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kt + K$$

6. Aplico la exponencial a ambos lados y llamo $C = e^{K}$.
$$\frac{P}{M-P} = C\,e^{kt}$$

7. Despejo P: paso $M-P$ al otro lado y agrupo.
$$P\left(1 + C\,e^{kt}\right) = M\,C\,e^{kt} \implies P = \frac{M\,C\,e^{kt}}{1 + C\,e^{kt}}$$

8. Escribo la constante como $C = e^{-kt_0}$, con t_0 el instante en que la población alcanza $M/2$.
$$P(t) = \frac{M\,e^{k(t-t_0)}}{1 + e^{k(t-t_0)}} = \frac{M}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + e^{-k(t-t_0)}}}$$

El parámetro t_0 no es un artificio de notación: hacer $t = t_0$ en la fórmula da $P = M/2$, de modo que t_0 es exactamente el instante del **punto de inflexión**, donde el crecimiento es más rápido.
Aquí aparece, deducida en vez de postulada, la **curva logística** que en el volumen I se usó como modelo de fatiga. Su forma en ese, su punto de inflexión en $P = M/2$ y su asíntota en M salen todos de esta integral.
Es el modelo estándar de crecimiento poblacional con recursos limitados: rodales forestales, plagas, colonización de un hábitat. Y también, con otro nombre, de la adopción de un producto en un mercado saturable.

Aplicación: gestión deportiva

La tasa de nuevas afiliaciones a un club con mercado limitado sigue

$$r(t) = \frac{600}{(t+2)(t+5)} \quad \text{(afiliados por mes)}.$$

Halle el total afiliado durante el primer año.

Ejemplo

1. Descompongo con el atajo de las raíces: para el factor $t+2$ tapo ese factor y evalúo el resto en $t = -2$, y análogamente en $t = -5$.
$$A = \frac{600}{-2+5} = 200, \qquad B = \frac{600}{-5+2} = -200$$
2. Escribo la descomposición.
$$\frac{600}{(t+2)(t+5)} = \frac{200}{t+2} - \frac{200}{t+5}$$
3. Integro entre 0 y 12.
$$200\left[\ln\left|\frac{t+2}{t+5}\right|\right]_0^{12}$$
4. Evalúo en los extremos.
$$200\left[\ln\frac{14}{17} - \ln\frac{2}{5}\right]$$
5. Opero.
$$200\ln\left(\frac{14}{17}\cdot\frac{5}{2}\right) = 200\ln(2{,}0588)$$

$$N \approx 144 \text{ afiliados}$$

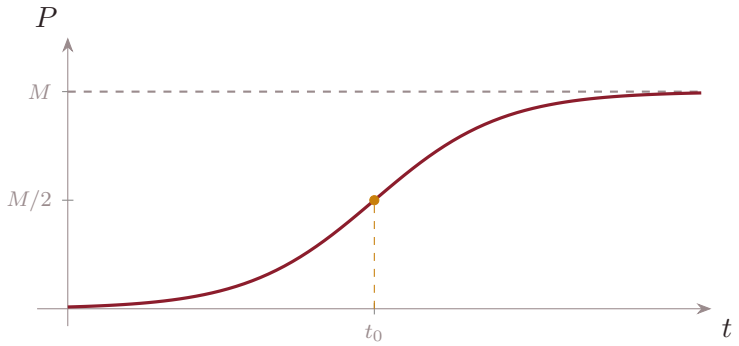


Figura 13.1. Curva logística $P(t) = M/\left(1 + e^{-k(t-t_0)}\right)$. El crecimiento es casi exponencial al principio, alcanza su ritmo máximo en el punto de inflexión $P = M/2$ —marcado en ámbar— y se frena al acercarse a la capacidad de carga M.

13.6 Síntesis

1. Exige fracción **propia**: si no lo es, divida primero.
2. Lineales distintos: un término con numerador constante cada uno.
3. Repetidos: k **términos** para un factor de multiplicidad k.
4. Cuadrático irreducible: numerador **lineal**, $Ax + B$.
5. Con lineales distintos, evalúe en las **raíces**: es el atajo.
6. Verifique **sumando de vuelta** las fracciones.

Ejercicios propuestos

13.1 Descomponga sin integrar: (a) $\dfrac{1}{x^2-9}$; (b) $\dfrac{x}{(x+1)^3}$; (c) $\dfrac{2}{x\,(x^2+4)}$.

13.2 Integre: (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$; (b) $\displaystyle\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx$.

13.3 Integre: (a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-4)^2}$.

13.4 Integre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2-1}dx$ dividiendo primero.

13.5 Verifique el resultado del ejemplo del Caso I sumando de vuelta las fracciones.

13.6 Deduzca la solución logística para $M = 500$, $k = 0{,}3$ y $P(0) = 50$. ¿En qué año la población alcanza 250 individuos?

13.7 La tasa de afiliación es $r(t) = \dfrac{800}{(t+1)(t+4)}$ por mes. Halle el total en 18 meses.

13.8 Explique por qué $\dfrac{1}{x^2+1}$ *no* se descompone en fracciones parciales con coeficientes reales.

Respuestas

13.1 (a) $\frac{1/6}{x-3} - \frac{1/6}{x+3}$; (b) $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$; (c) $\frac{1/2}{x} - \frac{x/2}{x^2+4}$.

13.2 (a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; (b) $4\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$.

13.3 (a) $2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| + C$; (b) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| - \frac{1}{4(x-4)} + C$.

13.4 $\frac{x^2}{2} + \ln\left|x^2-1\right| + C$.

13.5 $\frac{3(x+1)+2(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$ ✓

13.6 $P(t) = \dfrac{500}{1+9e^{-0{,}3t}}$; alcanza 250 cuando $9e^{-0{,}3t} = 1$, es decir $t = \frac{\ln 9}{0{,}3} \approx 7{,}3$ años.

13.7 $\frac{800}{3}\left[\ln\frac{t+1}{t+4}\right]_0^{18} = \frac{800}{3}\left[\ln\frac{19}{22} - \ln\frac{1}{4}\right] \approx 331$ afiliados.

13.8 Porque x^2+1 es **irreducible** sobre los reales: no tiene raíces reales y por tanto no admite factorización en lineales con coeficientes reales. Se integra directamente como arcotangente.

SESIÓN 14

Estrategia general de integración y segundo corte

Objetivo de la sesión

Reunir las técnicas del módulo en un criterio único de decisión, reconocer qué método pide cada integrando antes de intentar resolverlo, y prepararse para la evaluación del corte.

14.1 El problema real: no calcular, sino decidir

Cada técnica de este módulo, tomada por separado, es mecánica. La dificultad genuina de un examen es otra: ante una integral *sin etiqueta*, decidir cuál aplicar.

Un estudiante que domina las seis técnicas pero no sabe reconocerlas resuelve mal el examen; uno que reconoce bien y calcula con lentitud, lo aprueba. **El reconocimiento es la destreza que se evalúa.**

14.2 Tabla de decisión

Si el integrando...	Intente	Sesión
está en la tabla básica	integración inmediata	2
contiene una función *y su derivada*	integración por sustitución	8
es un cociente con numerador $= u'$	logaritmo $\ln\lvert u\rvert$	9
es e^u con u' presente	exponencial	9
tiene potencias de sen y cos	paridad o reducción	10
tiene $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$	sustitución trigonométrica	11
es un producto de tipos distintos	por partes (LIATE)	12
es una fracción racional	fracciones parciales	13

El orden en que conviene preguntarse

1. **¿Se puede simplificar antes?** Expandir un binomio, separar un cociente término a término, usar una identidad trigonométrica. Muchas integrales "difíciles" se vuelven inmediatas con álgebra elemental.
2. **¿Hay una función y su derivada?** Es la pregunta más rentable: la sustitución resuelve más casos que cualquier otra técnica.
3. **¿Qué forma tiene?** Consulte la tabla.
4. **Si nada encaja**, pruebe por partes: a veces transforma la integral en algo reconocible.

Integrales que parecen y no son

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C \qquad \text{pero} \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \qquad \text{pero} \qquad \int e^{-x^2}dx \text{ no es elemental}$$

Un solo factor cambia por completo el método y hasta la existencia de la respuesta. Lea el integrando **entero** antes de decidir.

14.3 Ejercicios de reconocimiento

Identificar sin resolver

Integral	Técnica
$\int x\,\mathrm{sen}(x^2)dx$	sustitución $(u = x^2)$
$\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$	por partes
$\int \frac{dx}{x^2-4}$	fracciones parciales
$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	sustitución trigonométrica
$\int \frac{2x\,dx}{x^2-4}$	logaritmo (u'/u)
$\int \mathrm{sen}^2 x\cos x\,dx$	sustitución $(u = \mathrm{sen}\,x)$
$\int \mathrm{sen}^2 x\,dx$	identidad de reducción

Note los pares: la diferencia entre las dos primeras es un solo exponente, y entre la tercera y la quinta, un factor $2x$.

14.4 Estructura de la evaluación

El segundo corte vale el 35 % del curso.

Componente	Peso	Condiciones
Prueba escrita individual	60 %	con calculadora, sin apuntes
Taller aplicado sustentado	40 %	con computador, en parejas

Ítem obligatorio de reconocimiento

Un punto de la prueba presenta ocho integrales y pide **solo identificar** la técnica de cada una, sin resolverlas. Se califica el criterio, no el cálculo.

14.4.1 Rúbrica

Criterio	Peso	Qué se evalúa
Reconocimiento	25 %	Identifica y justifica la técnica adecuada.
Procedimiento	40 %	Sustitución completa, límites transformados, regreso a la variable original.
Resultado	15 %	Correcto, simplificado, con constante o con unidades según el caso.
Verificación	20 %	Deriva el resultado o suma de vuelta las fracciones.

14.5 Los diez errores que más cuestan

1. Sustituir a medias: dejar una x conviviendo con u.
2. Ajustar con una **variable** en lugar de una constante.
3. No transformar los límites en una integral definida, y evaluar los de x en la expresión en u.
4. Escribir ln cuando el numerador no es la derivada del denominador.
5. Olvidar el factor $1/u'$ al integrar e^u.
6. Aplicar la identidad trigonométrica *antes* de separar el factor que hace de du.
7. Dejar la respuesta en θ tras una sustitución trigonométrica.
8. Elegir mal u y dv, y continuar aunque la integral empeore.
9. Omitir términos de un factor repetido en fracciones parciales.
10. Descomponer una fracción **impropia** sin dividir primero.

Protocolo de autocontrol

1. **Derive** el resultado: debe devolver el integrando.
2. Si hubo sustitución, compruebe que no queda ninguna variable auxiliar.
3. Si hubo fracciones parciales, **sume de vuelta**.
4. Si es definida, revise el signo y las unidades.

14.6 Ítem tipo resuelto

Reconocer y resolver $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}\,dx$

1 **Reconocimiento.** Es racional, pero antes de descomponer compruebo el patrón u'/u: la derivada del denominador es $2x+6$, que es **el doble** del numerador.

$$u = x^2+6x+5, \qquad u' = 2x+6 = 2(x+3)$$

2 **Procedimiento.** Ajusto la constante.

$$\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx$$

3 Integro.

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+5\right| + C$$

Verificación

Derivando: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+6}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$ ✓

La lección del ítem

El denominador factoriza como $(x+1)(x+5)$, de modo que las fracciones parciales también funcionan… pero en cuatro pasos más.

Compruebe siempre el patrón u'/u antes de descomponer. Es la diferencia entre tres renglones y quince.

Ejercicios propuestos

14.1 **Solo identifique** la técnica, sin resolver: (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; (b) $\int x^2 \ln x\, dx$; (c) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x}dx$; (d) $\int \cos^3 x\, dx$; (e) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$; (f) $\int \frac{dx}{x^2+25}$.

14.2 Resuelva las seis anteriores.

14.3 Resuelva, decidiendo primero la técnica: (a) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+7}dx$; (b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+7}$. ¿Por qué son distintas?

14.4 Resuelva $\int \frac{x^2}{x-1}dx$.

14.5 Resuelva $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx$.

14.6 Evalúe $\int_0^2 xe^{-x}dx$.

14.7 Evalúe $\int_1^4 \frac{dx}{x(x+1)}$.

14.8 **Aplicado (ambiental).** La carga contaminante de un vertimiento es $L(t) = \frac{40t}{t^2+1}$ kg/h. Halle la carga acumulada en las primeras 6 horas.

14.9 **Aplicado (deportivo).** El valor presente de un flujo $R(t) = 15t$ millones por año durante 6 años con $r = 0{,}09$.

Respuestas

14.1 (a) trigonométrica; (b) por partes; (c) fracciones parciales (o u'/u tras ajustar); (d) potencia impar, sustitución; (e) sustitución; (f) tabla, arcotangente.

14.2 (a) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$; (b) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+C$; (c) $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x+2|+C$; (d) $\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$; (e) $\sqrt{x^2+5}+C$; (f) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)+C$.

14.3 (a) $\ln\left(x^2+2x+7\right)+C$, por u'/u; (b) completando cuadrados, $(x+1)^2+6$, da $\frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C$. Difieren en el numerador: con $2x+2$ hay patrón u'/u; sin él, no.

14.4 Dividiendo: $\int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$.

14.5 Con $u=\cos x$: $-\tan^{-1}(\cos x)+C$.

14.6 Por partes: $\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^2 = 1-3e^{-2} \approx 0{,}594$.

14.7 Fracciones parciales: $\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^4 = \ln\frac{4}{5} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{8}{5} \approx 0{,}470$.

14.8 $20\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^6 = 20\ln 37 \approx 72{,}2$ kg.

14.9 $VP = 15\left[\frac{1-e^{-0{,}54}(1+0{,}54)}{0{,}09^2}\right] \approx 189{,}9$ millones.

SESIÓN 15

Área entre curvas

Objetivo de la sesión

Calcular el área de una región limitada por dos curvas determinando los puntos de corte y cuál función está por encima, decidir cuándo conviene integrar respecto de y, y aplicar el resultado a diferencias acumuladas.

15.1 La idea

En la sesión 3 la integral midió el área entre una curva y el eje x. Ese eje no tiene nada de especial: es la recta $y = 0$. Reemplazándolo por otra curva se obtiene el caso general.

Área entre dos curvas

Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el área de la región comprendida entre ambas es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Por qué funciona, y por qué no importa el signo

Cada rectángulo de la suma de Riemann tiene altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ y base Δx. Al ser f la superior, esa altura es positiva y el área sale positiva.
Y aquí hay una ventaja: **no importa si las curvas están bajo el eje**. La diferencia sigue siendo la altura correcta. Con el eje x había que partir por signos; entre dos curvas, solo por cortes.

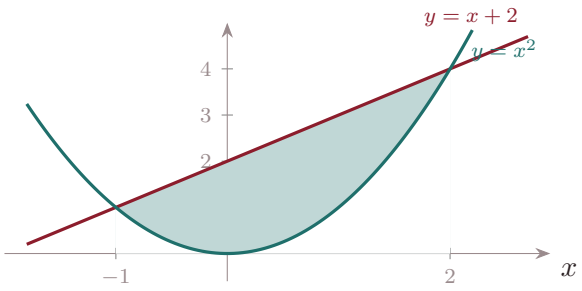


Figura 15.1. Región entre $y = x + 2$ y $y = x^2$. Los cortes en $x = -1$ y $x = 2$ fijan los límites, y en todo el intervalo la recta va *arriba*: por eso se integra $(x + 2) - x^2$.

15.2 El procedimiento

Cuatro pasos

1. Hallar los **puntos de corte**, igualando $f = g$.
2. Determinar **cuál está arriba**, evaluando en un punto interior.
3. Integrar la diferencia *superior menos inferior*.
4. Verificar que el resultado sea **positivo**.

Área entre $y = x + 2$ y $y = x^2$

1. Igualo para hallar los cortes.
$$x^2 = x + 2 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$
2. Los límites son $x = -1$ y $x = 2$. Evalúo en $x = 0$ para ver cuál está arriba.
recta : 2; parábola : 0 $\Rightarrow$ la recta va arriba
3. Planteo la integral de la diferencia.
$$A = \int_{-1}^{2} \Big[(x+2) - x^2\Big]\, dx$$
4. Antiderivo.
$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$
5. Evalúo: en $x = 2$ da $\frac{10}{3}$; en $x = -1$ da $-\frac{7}{6}$.
$$\frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6}$$

$$A = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Los dos errores de siempre

1. Restar al revés. Si el resultado sale **negativo**, invirtió el orden: el área es su valor absoluto, pero conviene rehacer el planteamiento en vez de corregir el signo a mano.
2. No hallar los cortes y usar límites inventados. Los límites *salen* del problema; no se eligen.

15.2.1 Cuando las curvas se cruzan

Área entre $y = x^3$ y $y = x$ en $[-1, 1]$

1. Hallo los cortes.
$$x^3 = x \;\Rightarrow\; x\left(x^2 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ 0,\ 1$$
2. Compruebo el orden en cada tramo: en $x = -0{,}5$ manda x^3; en $x = 0{,}5$ manda x.
las curvas se cruzan en $x = 0$

3. Parto la integral en los dos tramos, cada uno con su orden.
$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx$$

4. Cada trozo vale lo mismo por simetría.
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Si no se hubiera partido, la integral $\int_{-1}^{1}(x - x^3)dx$ daría **cero**: los dos trozos se cancelan por simetría. Sería la respuesta correcta a una pregunta distinta —la integral de la diferencia— pero no al área.
Es el mismo fenómeno de la sesión 6, ahora entre dos curvas.

15.3 Integrar respecto de y

A veces la región está naturalmente descrita por curvas de la forma $x = h(y)$. Integrar en y evita partir en varios tramos.

Teorema

Si $h_{\text{der}}(y) \geq h_{\text{izq}}(y)$ en $[c, d]$,

$$A = \int_{c}^{d} \left[h_{\text{der}}(y) - h_{\text{izq}}(y)\right] dy.$$

Área entre $x = y^2$ y $x = y + 2$

1. Igualo en y.
$$y^2 = y + 2 \;\Rightarrow\; y = -1,\; y = 2$$

2. Evalúo en $y = 0$: la recta da $x = 2$, la parábola $x = 0$. La recta está a la derecha.
$$A = \int_{-1}^{2} \left[(y + 2) - y^2\right] dy$$

3. Es la misma integral del primer ejemplo, con otra letra.
$$A = \frac{9}{2}$$

Cómo decidir la variable

Pregunte: ¿en qué dirección los rectángulos van de una sola curva a una sola curva, sin cambiar de dueño?
Si los rectángulos **verticales** tocan siempre las mismas dos curvas, integre en x. Si son los **horizontales** los que cumplen eso, integre en y. Elegir bien puede ahorrar partir la región en tres pedazos.

15.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un embalse regula el caudal de un río. Durante una creciente, el caudal natural de entrada fue $Q_e(t) = 20 + 18t - 2t^2$ y el caudal de salida regulado $Q_s(t) = 20 + 4t$, ambos en m^3/s con t en horas. ¿Qué volumen retuvo el embalse?

Ejemplo

1. El volumen retenido es el área entre las dos curvas mientras la entrada supere a la salida. Hallo el corte.

$$20 + 18t - 2t^2 = 20 + 4t \;\Rightarrow\; 2t(7 - t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 0,\; t = 7$$

2. Planteo la integral de la diferencia.

$$V = \int_0^7 \left[\left(20 + 18t - 2t^2\right) - (20 + 4t)\right] dt$$

3. Simplifico el integrando.

$$V = \int_0^7 \left(14t - 2t^2\right) dt$$

4. Antiderivo y evalúo.

$$\left[7t^2 - \frac{2t^3}{3}\right]_0^7 = 343 - \frac{686}{3} = \frac{343}{3}$$

5. Convierto horas a segundos.

$$V = 114{,}33 \times 3\,600$$

$$\boxed{V \approx 411\,600 \text{ m}^3}$$

El área entre las dos curvas *es* el volumen almacenado: es lo que entró menos lo que salió. Dimensionar esa área es exactamente el problema de diseño de un embalse de laminación de crecientes.
Note que después de $t = 7$ la salida supera a la entrada y el embalse empieza a vaciarse: el área de esa segunda región sería el volumen liberado.

Aplicación: gestión deportiva

Durante una temporada de 10 meses, los ingresos y costos mensuales de un club fueron

$$I(t) = 60 + 8t \quad \text{y} \quad C(t) = 40 + 2t^2 \quad \text{(millones por mes)}.$$

Halle la utilidad acumulada mientras el club fue rentable.

Ejemplo

1. Hallo cuándo los ingresos igualan a los costos.

$$60 + 8t = 40 + 2t^2 \;\Rightarrow\; 2t^2 - 8t - 20 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 4t - 10 = 0$$

2 Resuelvo: $t = 2 \pm \sqrt{14}$; solo la raíz positiva tiene sentido.
$t^* = 2 + \sqrt{14} \approx 5{,}74$ meses

3 Integro la diferencia hasta ese instante.
$$U = \int_0^{5{,}74} \left(20 + 8t - 2t^2\right) dt$$

4 Antiderivo y evalúo.
$$\left[20t + 4t^2 - \frac{2t^3}{3}\right]_0^{5{,}74}$$

$U \approx 120{,}5$ millones

A partir del mes 5,74 los costos superan a los ingresos y la utilidad acumulada empieza a erosionarse. El área entre las curvas identifica no solo *cuánto* se ganó sino **hasta cuándo** convenía sostener la operación.

15.5 Síntesis

1. $A = \int_a^b [\text{superior} - \text{inferior}]\, dx$.
2. Los límites **salen** de igualar las curvas.
3. Compruebe cuál está arriba **evaluando** en un punto interior.
4. Si las curvas se cruzan, **parta** la integral.
5. A veces conviene integrar respecto de y.
6. Un área **nunca** es negativa.

Ejercicios propuestos

15.1 Halle el área entre $y = x^2$ y $y = 4$.

15.2 Halle el área entre $y = x^2$ y $y = 2x$.

15.3 Halle el área entre $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ en el primer cuadrante.

15.4 Halle el área entre $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ en $[0, \pi/4]$.

15.5 Halle el área entre $y = x^3 - x$ y el eje x en $[-1, 1]$, partiendo donde corresponda.

15.6 Halle el área entre $x = y^2 - 2$ y $x = y$ integrando respecto de y.

15.7 Un embalse recibe $Q_e(t) = 15 + 12t - t^2$ y libera $Q_s(t) = 15 + 3t$ m^3/s. Halle el volumen retenido, en m^3.

15.8 Los ingresos de un evento son $I(t) = 100 + 5t$ y los costos $C(t) = 60 + t^2$ millones por día. Halle el día de equilibrio y la utilidad acumulada hasta él.

Respuestas

15.1 Cortes en $x = \pm 2$: $\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{32}{3}$.

15.2 Cortes en $x = 0, 2$: $\int_{0}^{2}(2x - x^2)dx = \frac{4}{3}$.

15.3 Cortes en $x = 0, 1$: $\int_{0}^{1}(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

15.4 $\int_{0}^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x)dx = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414$.

15.5 Corte en $x = 0$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

15.6 Cortes en $y = -1, 2$: $\int_{-1}^{2}\left[y - (y^2 - 2)\right]dy = \frac{9}{2}$.

15.7 Corte en $t = 9$: $\int_{0}^{9}(9t - t^2)dt = \frac{243}{2} = 121{,}5\ \mathrm{m^3{\cdot}h/s} = 437\,400\ \mathrm{m^3}$.

15.8 $t^2 - 5t - 40 = 0$ da $t = \frac{5+\sqrt{185}}{2} \approx 9{,}30$ días; $U = \int_{0}^{9{,}30}(40 + 5t - t^2)dt \approx 320{,}1$ millones.

SESIÓN 16

Volúmenes de revolución: discos y arandelas

Objetivo de la sesión

Calcular el volumen de un sólido generado al girar una región alrededor de un eje, distinguiendo cuándo el corte transversal es un disco y cuándo una arandela, y aplicar el método al diseño de depósitos.

16.1 De rebanar a integrar

Un sólido de revolución se obtiene girando una región plana alrededor de un eje. Si se rebana perpendicularmente al eje de giro, cada rebanada es un **disco** circular.

La construcción

Una rebanada de espesor Δx situada en x tiene radio $R(x)$ —la distancia de la curva al eje— y por tanto volumen

$$\Delta V = \pi \, [R(x)]^2 \, \Delta x.$$

Sumando y pasando al límite, exactamente como en la sesión 3, se obtiene una integral.

Método de discos

Al girar alrededor del eje x la región bajo $y = f(x)$ entre a y b:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Error frecuente

El integrando lleva el radio **al cuadrado**, y ese cuadrado va *dentro* de la integral:

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \;\neq\; \pi \left[\int_a^b f(x) \, dx \right]^2 .$$

Elevar al cuadrado el área es el error más común de esta sesión.

16.2 Discos

Girar $y = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$ alrededor del eje x

1. El radio de cada disco es la propia función.
   $R(x) = \sqrt{x}$
2. Planteo la integral, con el radio al cuadrado.
   $$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx$$
3. Antiderivo y evalúo.
   $$\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi(8)$$

$$V = 8\pi \approx 25{,}13$$

Comprobación por acotación

El sólido está contenido en un cilindro de radio 2 y altura 4, cuyo volumen es $\pi(4)(4) = 16\pi$. El resultado 8π es exactamente la mitad, lo que es razonable para un perfil que crece como raíz. ✓

Deducción del volumen del cono

Girando la recta $y = \dfrac{r}{h}x$ en $[0, h]$ alrededor del eje x:

1. Planteo con el radio variable.
   $$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx$$
2. Saco constantes e integro.
   $$\frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ahí está, deducida, la fórmula del cono que en el colegio se acepta sin demostración. El mismo procedimiento con $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ produce $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para la esfera.
El cálculo integral no solo resuelve casos nuevos: **explica** las fórmulas viejas.

16.3 Arandelas

Cuando la región que gira *no toca* el eje, cada rebanada tiene un agujero: es una arandela.

Método de arandelas

$$V = \pi \int_a^b \left([R_{\text{ext}}]^2 - [R_{\text{int}}]^2 \right) dx$$

Error frecuente

Se restan los **cuadrados de los radios**, no los radios:

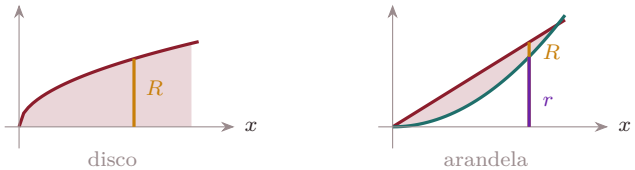
$$R^2 - r^2 \;\neq\; (R - r)^2.$$

Es el mismo error de la sesión 8 del volumen I con $(a-b)^2$, en otro disfraz. Verifíquelo con números: $5^2 - 3^2 = 16$, mientras que $(5-3)^2 = 4$.

Región entre $y = x$ y $y = x^2$, girada sobre el eje x

1. Hallo los cortes y decido cuál queda más lejos del eje.
   $x = x^2 \;\Rightarrow\; x = 0,\ 1; \qquad \text{en } (0,1):\ x > x^2$
2. La recta genera el radio externo; la parábola, el interno.
   $R_{\text{ext}} = x, \qquad R_{\text{int}} = x^2$
3. Planteo la integral de la diferencia de cuadrados.
   $V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4 \right) dx$
4. Antiderivo y evalúo.
   $\pi \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} \right)$

$$V = \frac{2\pi}{15} \approx 0{,}419$$



disco arandela

Figura 16.1. Izquierda: la región toca el eje y la sección es un **disco** de radio R. Derecha: la región no lo toca y queda una **arandela**, cuya área es $\pi\left(R^2 - r^2\right)$ y **no** $\pi(R-r)^2$.

16.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un tanque de almacenamiento tiene forma de paraboloide: se genera girando $y = \dfrac{x^2}{2}$ alrededor del eje y, desde $y = 0$ hasta $y = 8$ metros. Halle su capacidad.

Ejemplo

1. Al girar sobre el eje y, las rebanadas son horizontales: hay que expresar el radio en función de y.
$$x^2 = 2y \;\Rightarrow\; R(y) = \sqrt{2y}$$
2. Planteo la integral en y, con el radio al cuadrado.
$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt{2y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 2y\, dy$$
3. Antiderivo y evalúo.
$$\pi \left[y^2\right]_0^8 = 64\pi$$

$$V = 64\pi \approx 201{,}1 \text{ m}^3$$

Verificación

El radio en la boca es $\sqrt{16} = 4$ m. Un cilindro de ese radio y 8 m de altura tendría 128π. El paraboloide resulta ser exactamente la **mitad** del cilindro que lo circunscribe, resultado conocido y buena comprobación. ✓

La forma del tanque determina cuánto sube el nivel por cada metro cúbico ingresado. En un cilindro la relación es lineal; en este paraboloide no. Esa diferencia importa al calibrar un sensor de nivel: la misma lectura de altura corresponde a volúmenes distintos según la geometría.

Aplicación: gestión deportiva

Un balón reglamentario tiene 22 cm de diámetro. Deduzca su volumen integrando, y calcule cuánto aire contiene.

Ejemplo

1. La esfera se genera girando la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ sobre el eje x.
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$
2. Uso simetría: el integrando es par.
$$2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx$$
3. Antiderivo y evalúo.
$$2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$
4. Simplifico y sustituyo $r = 11$ cm.
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1\,331)$$

$$V \approx 5\,575 \text{ cm}^3 = 5{,}58 \text{ L}$$

16.5 Síntesis

1. Discos: $V = \pi \int R^2\,dx$, con R la distancia al eje.
2. El cuadrado va **dentro** de la integral.
3. Arandelas: $V = \pi \int \left(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2\right) dx$.
4. Se restan los **cuadrados**, no los radios.
5. Al girar sobre el eje y, integre **respecto de y**.
6. El método **deduce** las fórmulas de cono y esfera.

Ejercicios propuestos

16.1 Halle el volumen al girar $y = x^2$ en $[0, 2]$ sobre el eje x.

16.2 Halle el volumen al girar $y = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 3]$ sobre el eje x.

16.3 Deduzca el volumen de la esfera de radio r integrando.

16.4 Halle el volumen al girar la región entre $y = \sqrt{x}$ y $y = x$ sobre el eje x.

16.5 Halle el volumen al girar $y = x^2$ en $[0, 2]$ sobre el eje y.

16.6 Refute con números que $R^2 - r^2 = (R - r)^2$.

16.7 Un tanque se genera girando $y = x^2$ alrededor del eje y hasta $y = 9$ m. Halle su capacidad en m^3 y en litros.

16.8 Un balón de 24 cm de diámetro se infla al 80 % de su volumen. ¿Cuántos litros de aire contiene?

Respuestas

16.1 $\pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{32\pi}{5} \approx 20{,}1$.

16.2 $\pi \int_1^3 x^{-2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{2\pi}{3}$.

16.3 $2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi r^3$.

16.4 Cortes en 0 y 1; $\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}$.

16.5 En y: $R = \sqrt{y}$, $\pi \int_0^4 y\,dy = 8\pi$.

16.6 Con $R = 5$, $r = 3$: $25 - 9 = 16$, mientras que $(5 - 3)^2 = 4$.

16.7 $\pi \int_0^9 y\,dy = \frac{81\pi}{2} \approx 127{,}2\ \text{m}^3 = 127\,235$ L.

16.8 $r = 12$ cm; $V = \frac{4}{3}\pi(1\,728) = 7\,238\ \text{cm}^3$; el 80 % son $5\,790\ \text{cm}^3 = 5{,}79$ L.

SESIÓN 17

Cascarones cilíndricos y longitud de arco

Objetivo de la sesión

Calcular volúmenes de revolución mediante cascarones cilíndricos cuando el método de discos resulta incómodo, y determinar la longitud de una curva mediante la fórmula de longitud de arco.

17.1 Por qué hace falta otro método

Para girar $y = x^2$ en $[0, 1]$ alrededor del eje y, el método de discos exige despejar $x = \sqrt{y}$ y cambiar de variable. A veces ese despeje es incómodo; a veces es imposible, como en $y = x^3 + x$.

La idea del cascarón

En lugar de rebanar *perpendicularmente* al eje, se rebana **paralelamente**. Cada rebanada vertical, al girar, genera un tubo cilíndrico delgado. Desenrollado, ese cascarón es una lámina rectangular de largo $2\pi x$ —la circunferencia—, alto $f(x)$ y espesor Δx:

$$\Delta V = 2\pi x\, f(x)\, \Delta x.$$

Método de cascarones

Al girar alrededor del eje y la región bajo $y = f(x)$ entre a y b, con $0 \le a < b$:

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

$y = x^2$ en $[0, 1]$, girada sobre el eje y

1. Aplico la fórmula: radio x, altura $f(x)$.
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2\, dx$$
2. Integro.
$$2\pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4}$$

$$V = \frac{\pi}{2}$$

Con el otro método

Por arandelas en y: el radio externo es 1 y el interno $\sqrt{y}$.

$$V = \pi \int_0^1 (1 - y)\, dy = \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \checkmark$$

Los dos métodos coinciden, como deben. Cuando ambos son viables, el más rápido es el que evita despejar.

Cómo elegir método

Eje de giro	Discos/arandelas	Cascarones
eje x	integre en x	integre en y
eje y	integre en y	integre en x

Regla práctica: use el método que le permita integrar en la variable en que la función ya está escrita, sin despejar.

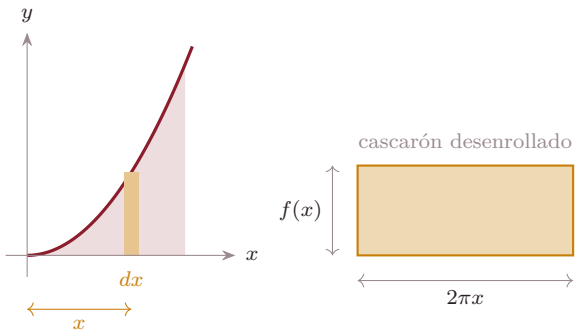


Figura 17.1. El método de cascarones rebana **paralelamente** al eje de giro. Al girar, la rebanada vertical de ancho dx y altura $f(x)$ genera un tubo que, desenrollado, es un rectángulo de largo $2\pi x$: de ahí el factor x de la fórmula.

17.2 Longitud de arco

La construcción

Aproxime la curva por una poligonal. Cada segmento tiene longitud

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2},$$

que es Pitágoras, como en la sesión 9 del volumen I. Al refinar la partición, el cociente tiende a la derivada.

Longitud de arco

Si f tiene derivada continua en $[a, b]$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Error frecuente

El radical hace que estas integrales sean, casi siempre, imposibles de resolver de forma exacta. Los ejercicios de clase usan funciones **escogidas** para que $1 + (f')^2$ resulte un cuadrado perfecto.
En la práctica profesional la longitud de arco se calcula **de forma numérica** (Apéndice A). Que un caso salga limpio es la excepción.

Longitud de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ en $[0, 3]$

1. Derivo.
   $f'(x) = x^{1/2}$
2. Formo el radicando: aquí sí sale limpio.
   $1 + \left(x^{1/2}\right)^2 = 1 + x$
3. Planteo la integral.
   $L = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx$
4. Antiderivo con la regla de la potencia.
   $\left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(8 - 1)$

$$L = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$$

Verificación

La cuerda entre los extremos $(0, 0)$ y $(3, 2\sqrt{3}) \approx (3;\ 3{,}46)$ mide $\sqrt{9 + 12} = 4{,}58$. La curva debe ser algo más larga que la cuerda, y 4,67 lo es por poco: coherente con una curva de poca flexión. ✓
Esta comparación con la cuerda es la verificación natural de toda longitud de arco: el resultado **siempre** debe superarla.

17.3 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería topográfica

Un cable de conducción cuelga entre dos torres separadas 40 m, adoptando la forma de catenaria

$$y = 25\left(\cosh\frac{x}{25} - 1\right), \qquad -20 \le x \le 20,$$

medida desde el punto más bajo. ¿Qué longitud de cable se necesita?

Ejemplo

1. Derivo la catenaria.
$$y' = \operatorname{senh}\frac{x}{25}$$
2. Formo el radicando, usando $1 + \operatorname{senh}^2 u = \cosh^2 u$.
$$\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\frac{x}{25}} = \cosh\frac{x}{25}$$
3. Planteo la integral, que ahora es inmediata.
$$L = \int_{-20}^{20} \cosh\frac{x}{25}\,dx = 2\int_{0}^{20} \cosh\frac{x}{25}\,dx$$
4. Antiderivo y evalúo.
$$2\left[25\operatorname{senh}\frac{x}{25}\right]_0^{20} = 50\operatorname{senh}(0{,}8)$$

$$L = 50(0{,}8881) \approx 44{,}4 \text{ m}$$

La catenaria es la única curva para la que la longitud de arco sale inmediata, gracias a la identidad hiperbólica. No es coincidencia: es la forma que adopta un cable homogéneo bajo su propio peso, y la matemática de ese equilibrio produce justamente esa identidad.
Con 40 m de separación hacen falta 44,4 m de cable: un 11 % de holgura. Subestimar esa diferencia es un error caro en obra.

Aplicación: gestión deportiva

Un tanque de hidroterapia se genera girando $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1{,}5$ m alrededor del eje y. Halle su capacidad por cascarones.

Ejemplo

1. El sólido se forma entre la curva y la altura de la boca, $y = 2{,}25$.
$$\text{altura del cascarón} = 2{,}25 - x^2$$
2. Aplico la fórmula de cascarones.
$$V = 2\pi\int_0^{1{,}5} x\left(2{,}25 - x^2\right)dx$$
3. Expando e integro.
$$2\pi\left[\frac{2{,}25x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{1{,}5}$$
4. Evalúo.
$$2\pi\,(2{,}531 - 1{,}266)$$

$$V \approx 7{,}95 \text{ m}^3 = 7\,950 \text{ L}$$

17.4 Síntesis

1. Cascarones: $V = 2\pi \int x\, f(x)\, dx$, con x el radio del tubo.
2. Elija el método que **evite despejar**.
3. Ambos métodos, cuando son viables, dan lo mismo.
4. $L = \int \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$, con el radical de Pitágoras.
5. Casi todas estas integrales exigen **métodos numéricos**.
6. Verifique que L **supere la cuerda** entre los extremos.

Ejercicios propuestos

17.1 Halle por cascarones el volumen al girar $y = x$ en $[0, 2]$ sobre el eje y, y verifíquelo con la fórmula del cono.

17.2 Halle por cascarones el volumen al girar $y = x^3$ en $[0, 1]$ sobre el eje y.

17.3 Halle el volumen al girar la región entre $y = x$ y $y = x^2$ sobre el eje y, por cascarones.

17.4 Halle la longitud de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ en $[0, 8]$.

17.5 Halle la longitud de $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$ en $[1, 3]$. (El radicando resulta un cuadrado perfecto.)

17.6 Verifique que la longitud del ejercicio 4 supera la cuerda entre los extremos.

17.7 Un cable cuelga como $y = 30\,(\cosh \frac{x}{30} - 1)$ entre torres separadas 50 m. Halle la longitud necesaria y el porcentaje de holgura.

17.8 Un depósito se genera girando $y = x^2$ hasta $x = 2$ m sobre el eje y, con boca en $y = 4$. Halle su capacidad por cascarones y verifíquela por arandelas.

Respuestas

17.1 $2\pi \int_0^2 x \cdot x\, dx = \frac{16\pi}{3}$. El cono tiene $r = 2$, $h = 2$: $\frac{\pi(4)(2)}{3} = \frac{8\pi}{3}$. Ojo: el sólido de cascarones es el *complemento*; la suma de ambos es el cilindro 8π. ✓

17.2 $2\pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{2\pi}{5}$.

17.3 $2\pi \int_0^1 x\,(x - x^2)\, dx = 2\pi\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$.

17.4 $\int_0^8 \sqrt{1 + x}\, dx = \frac{2}{3}\,(27 - 1) = \frac{52}{3} \approx 17{,}33$.

17.5 $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$; el radicando es $(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x})^2$, luego $L = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2}\right]_1^3 = 2 + \frac{\ln 3}{2} \approx 2{,}55$.

17.6 La cuerda entre $(0, 0)$ y $(8;\ 15{,}08)$ mide 17,07, menor que 17,33. ✓

17.7 $L = 60\,\operatorname{senh}(\frac{25}{30}) = 60(0{,}9332) \approx 56{,}0$ m; holgura del 12,0 %.

17.8 Cascarones: $2\pi \int_0^2 x\,(4 - x^2)\, dx = 8\pi$. Arandelas: $\pi \int_0^4 y\, dy = 8\pi$. ✓

SESIÓN 18

Valor medio de una función

Objetivo de la sesión

Definir el valor medio de una función sobre un intervalo, demostrar el teorema del valor medio para integrales y aplicarlo al cálculo de promedios y valores eficaces en contextos ambientales y de gestión.

18.1 Promediar infinitos valores

Promediar n números es sumarlos y dividir entre n. Pero ¿cómo se promedia una función, que toma *infinitos* valores?

La construcción

Tome n muestras equiespaciadas y promédielas:

$$\bar{f} \approx \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, se tiene $\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$, luego

$$\bar{f} \approx \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Al pasar al límite, la suma se convierte en integral.

Valor medio

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Lectura geométrica

Despejando, $f_{\text{prom}}(b-a) = \int_a^b f$: el valor medio es la altura del **rectángulo** que tiene la misma área que la región bajo la curva.
Es la altura a la que se nivelaría el agua si la región fuera un recipiente.

18.2 El teorema del valor medio para integrales

Teorema

Si f es continua en $[a,b]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración

Sea $F(x) = \int_a^x f$. Por el TFC-1, $F' = f$, y F es derivable. Aplicando el teorema del valor medio para derivadas —sesión 26 del volumen I— en $[a,b]$:

$$\exists\, c \in (a,b): \quad F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

Pero $F'(c) = f(c)$, $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f$. Sustituyendo se obtiene el enunciado. ■

La demostración es notable por lo económica: el teorema integral no es un resultado nuevo, sino el del volumen I visto a través del TFC.
Su contenido: una función continua **alcanza efectivamente su propio promedio** en algún punto. Si la temperatura media del día fue de 18°, hubo un instante en que el termómetro marcaba exactamente 18°.

Valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0,3]$

1. Aplico la definición.
$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2 dx$$
2. Integro y evalúo.
$$\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}(9) = 3$$
3. Busco el punto donde se alcanza, igualando $f(c) = 3$.
$$c^2 = 3 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

$$f_{\text{prom}} = 3 \text{ alcanzado en } c = \sqrt{3}$$

Error frecuente

El valor medio **no** es el promedio de los extremos. Aquí $\frac{f(0)+f(3)}{2} = 4{,}5$, muy distinto de 3.
Tampoco es f evaluada en el punto medio: $f(1{,}5) = 2{,}25$. Solo la integral pondera correctamente *todos* los valores.

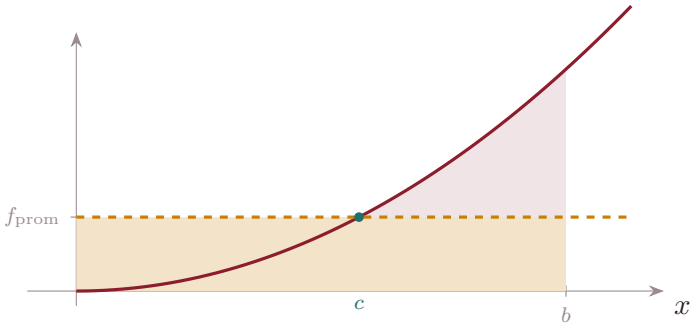


Figura 18.1. El valor medio es la altura del **rectángulo** que tiene la misma área que la región bajo la curva. Lo que sobresale por encima de la línea compensa exactamente lo que falta por debajo, y el teorema garantiza que la función pasa por ese valor en algún c.

18.3 Valor eficaz

En señales que oscilan alrededor de cero, el promedio simple no informa: se anula. Lo que interesa es el **valor cuadrático medio**.

Valor eficaz o RMS

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

Valor eficaz de $\operatorname{sen} x$ sobre un periodo

1. El promedio simple se anula, como vimos en la sesión 10.
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$$
2. Calculo en cambio el promedio del cuadrado, usando $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi$.
$$\frac{1}{2\pi}(\pi) = \frac{1}{2}$$
3. Extraigo la raíz.
$$f_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_{\text{rms}} \approx 0{,}707$$

Ese 0,707 es el origen del factor $\sqrt{2}$ que aparece en toda la ingeniería eléctrica: los 120 V de una toma domiciliaria son el valor *eficaz*, y el pico real llega a 170 V.
El mismo concepto se usa para caracterizar rugosidad de superficies, vibraciones estructurales y variabilidad de caudales.

18.4 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

El caudal de una quebrada durante una creciente de 8 horas fue

$$Q(t) = 12 + 15t - 1{,}5t^2 \quad (\text{m}^3/\text{s}).$$

Halle el caudal medio y el instante en que se alcanzó.

Ejemplo

1. Aplico la definición de valor medio.
$$Q_{\text{prom}} = \frac{1}{8}\int_0^8 \left(12 + 15t - 1{,}5t^2\right) dt$$
2. Antiderivo.
$$\frac{1}{8}\left[12t + 7{,}5t^2 - 0{,}5t^3\right]_0^8$$
3. Evalúo: $96 + 480 - 256 = 320$.
$$Q_{\text{prom}} = \frac{320}{8} = 40 \text{ m}^3/\text{s}$$
4. Busco c resolviendo $Q(c) = 40$.
$$1{,}5c^2 - 15c + 28 = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{15 \pm \sqrt{57}}{3}$$

$$Q_{\text{prom}} = 40 \text{ m}^3/\text{s}, \quad c \approx 2{,}48 \text{ h y } 7{,}52 \text{ h}$$

El teorema garantizaba *al menos* un instante; aquí hay dos, uno en la rama ascendente y otro en la descendente. Coherente: una creciente pasa dos veces por cada nivel intermedio.
El caudal medio de 40 m^3/s es el dato que se usa para dimensionar una obra de conducción; el caudal *pico* —que ocurre en $t = 5$ y vale 49,5— es el que se usa para dimensionar el aliviadero. Son decisiones distintas y exigen números distintos.

Aplicación: gestión deportiva

La asistencia diaria a un complejo durante un mes de 30 días sigue

$$A(t) = 500 + 200\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{7}\right) \quad (\text{personas}).$$

Halle la asistencia media diaria.

Ejemplo

1. Separo la integral en sus dos términos.
$$A_{\text{prom}} = \frac{1}{30}\left[\int_0^{30} 500\,dt + 200\int_0^{30} \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{7}\right) dt\right]$$

2 El primer término es inmediato.

$$\frac{15\,000}{30} = 500$$

3 El segundo casi se anula: 30 días son cuatro semanas y dos días, de modo que quedan dos días sin compensar.

$$200\left[-\frac{7}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{7}\right]_0^{30} \approx 272{,}4$$

4 Divido entre 30 y sumo.

$$A_{\text{prom}} \approx 500 + 9{,}1$$

$$A_{\text{prom}} \approx 509 \text{ personas por día}$$

Si el mes tuviera un número entero de semanas, la oscilación aportaría exactamente cero y el promedio sería 500. El desfase de dos días introduce un sesgo pequeño pero real.
Es un recordatorio útil al analizar series estacionales: **el periodo de medición debe ser múltiplo del periodo del fenómeno**, o el promedio queda contaminado.

18.5 Síntesis

1. $f_{\text{prom}} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f\,dx$.
2. Es la altura del **rectángulo de igual área**.
3. El TVM integral se deduce del TVM del volumen I vía el TFC.
4. Una función continua **alcanza** su promedio.
5. El valor medio **no** es el promedio de los extremos.
6. Para señales oscilantes se usa el **valor eficaz**.

Ejercicios propuestos

18.1 Halle el valor medio de $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$ y el punto donde se alcanza.

18.2 Halle el valor medio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$.

18.3 Halle el valor medio de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, e]$.

18.4 Compare, para $f(x) = x^2$ en $[0, 4]$: el valor medio, el promedio de los extremos y f en el punto medio. Comente.

18.5 Halle el valor eficaz de $f(t) = \cos t$ sobre $[0, 2\pi]$.

18.6 Demuestre que si f es constante, su valor medio es esa constante.

18.7 El caudal de un río fue $Q(t) = 20 + 9t - t^2$ m^3/s durante 9 horas. Halle el caudal medio, el pico y los instantes en que se alcanzó el medio.

18.8 La temperatura de un embalse fue $T(t) = 16 + 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ °C durante 24 horas. Halle la temperatura media y explíquela sin calcular.

Respuestas

18.1 $\frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = 2$; se alcanza en $c = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

18.2 $\frac{1}{\pi}(2) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

18.3 $\frac{1}{e-1}\left[\ln x\right]_1^e = \frac{1}{e-1} \approx 0{,}582$.

18.4 Valor medio $\frac{16}{3} = 5{,}33$; promedio de extremos 8; punto medio 4. Los tres diferen; solo el primero pondera todos los valores.

18.5 $\sqrt{\frac{1}{2\pi}(\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, igual que el seno.

18.6 $\frac{1}{b-a}\int_a^b k\,dx = \frac{k(b-a)}{b-a} = k$.

18.7 $Q_{\text{prom}} = \frac{1}{9}\left[20t + 4{,}5t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^9 = \frac{301{,}5}{9} = 33{,}5$; el pico es $Q(4{,}5) = 40{,}25$; c resuelve $c^2 - 9c + 13{,}5 = 0$, es decir $c \approx 1{,}90$ y $c \approx 7{,}10$ h.

18.8 16 °C. El término oscilante recorre un periodo completo en 24 horas y su aporte se anula.

SESIÓN 19

Trabajo, centroides y momentos

Objetivo de la sesión

Calcular el trabajo de una fuerza variable y el trabajo de bombeo de un líquido, y localizar el centroide de una región plana, reconociendo en todos los casos la misma estructura: acumular el producto de una magnitud por una distancia.

19.1 Una sola idea, tres nombres

Los tres conceptos de esta sesión comparten estructura. En cada uno se acumula el producto de **una cantidad** por **una distancia**:

Concepto	Cantidad	Distancia
Trabajo	fuerza	desplazamiento
Trabajo de bombeo	peso de una rebanada	altura de elevación
Momento	área (o masa)	distancia al eje

Cuando la cantidad es constante, basta multiplicar: trabajo igual a fuerza por distancia. Cuando **varía**, hay que rebanar, multiplicar en cada rebanada y sumar. Eso es integrar.
Reconocer esta estructura común permite plantear los tres problemas con el mismo razonamiento, en vez de memorizar tres fórmulas.

19.2 Trabajo de una fuerza variable

Definición

Si una fuerza $F(x)$ actúa en la dirección del movimiento a lo largo de $[a, b]$:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

El trabajo se mide en *joules* cuando la fuerza está en newtons y la distancia en metros.

Trabajo al estirar un resorte

La ley de Hooke establece $F(x) = kx$, con x la elongación desde la posición natural. Un resorte de constante $k = 200$ N/m se estira 30 cm.

1. Planteo la integral con x en metros.

$$W = \int_0^{0{,}3} 200x\,dx$$

2 Antiderivo y evalúo.

$$\left[100x^2\right]_0^{0,3} = 100(0{,}09)$$

$$\boxed{W = 9 \text{ J}}$$

Error frecuente

Multiplicar la fuerza *final* por la distancia daría $200(0{,}3)(0{,}3) = 18$ J, el **doble** del valor correcto.
El error consiste en tratar como constante una fuerza que crece desde cero. La integral promedia correctamente: el resultado es la fuerza *media*, $\frac{0+60}{2} = 30$ N, por la distancia 0,3 m.

19.3 Trabajo de bombeo

Este es el problema que más aparece en ingeniería ambiental, y merece un planteamiento cuidadoso porque cada rebanada del líquido recorre una **distancia distinta**.

Planteamiento general

Rebane el líquido horizontalmente. Una rebanada a altura y, de espesor dy, tiene:

$$\text{volumen } A(y)\,dy, \qquad \text{peso } \rho\, g\, A(y)\,dy, \qquad \text{elevación } d(y).$$

Por tanto

$$W = \rho\, g \int_c^d A(y)\, d(y)\, dy.$$

Vaciar un tanque cilíndrico

Un tanque cilíndrico de radio 2 m y altura 5 m está lleno de agua ($\rho = 1\,000$ kg/m^3). Halle el trabajo necesario para bombear toda el agua hasta el borde superior.

1 El área de cada rebanada es constante: la sección del cilindro.

$$A(y) = \pi r^2 = 4\pi \text{ m}^2$$

2 Una rebanada a altura y debe subir hasta 5 m.

$$d(y) = 5 - y$$

3 Planteo la integral.

$$W = 1\,000(9{,}8)(4\pi) \int_0^5 (5 - y)\, dy$$

4 Resuelvo la integral.

$$\left[5y - \frac{y^2}{2}\right]_0^5 = 25 - 12{,}5 = 12{,}5$$

5 Multiplico.

$$W = 123\,150 \times 12{,}5$$

$$W \approx 1{,}54 \times 10^6 \text{ J} = 1{,}54 \text{ MJ}$$

Verificación

Comprobación por centro de masa: el agua pesa $\rho g V = 1\,000(9{,}8)(4\pi)(5) = 615\,752$ N, y su centro de masa está a 2,5 m del borde. El trabajo es peso por elevación del centro de masa:

$$615\,752 \times 2{,}5 = 1{,}54 \times 10^6 \text{ J} \checkmark$$

Las dos vías coinciden. Este atajo solo funciona con sección constante; si $A(y)$ varía, hay que integrar.

El origen importa

Si el origen se coloca **arriba** en vez de abajo, la distancia de elevación pasa a ser $d(y) = y$ y los límites cambian. El resultado debe ser el mismo; si no lo es, el planteamiento tiene un error de signo o de referencia.
Dibuje siempre el tanque con el eje marcado antes de escribir nada.

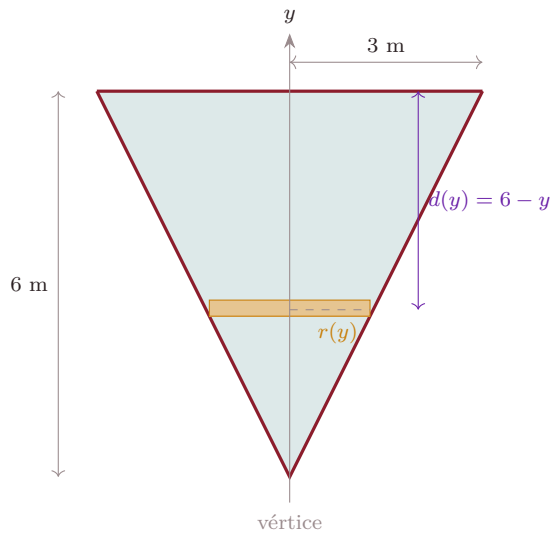


Figura 19.1. Tanque cónico **invertido**. La altura y se mide desde el vértice, de modo que el radio *crece* con y según $r(y) = y/2$ y la rebanada situada a esa altura debe subir $d(y) = 6 - y$ para alcanzar el borde. Radio y distancia deben medirse **desde el mismo origen**.

19.4 Centroide de una región plana

Definición

Para una región de área A limitada arriba por f y abajo por g:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\,[f-g]\,dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{f^2-g^2}{2}\,dx$$

El centroide es el **promedio ponderado** de las posiciones, con el área como peso. Es exactamente el punto de equilibrio de una lámina homogénea.

Centroide de la región bajo $y = x^2$ en $[0, 3]$

1. Calculo el área.
$$A = \int_0^3 x^2 dx = 9$$
2. Calculo el momento respecto del eje y.
$$\int_0^3 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$
3. Divido por el área.
$$\bar{x} = \frac{81/4}{9} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$
4. Calculo el momento respecto del eje x y divido.
$$\bar{y} = \frac{1}{9}\int_0^3 \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{243}{10} = 2{,}7$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (2{,}25;\ 2{,}7)$$

El centroide queda desplazado hacia la derecha respecto del punto medio $x = 1{,}5$, porque la región es mucho más ancha en su parte derecha. El resultado es coherente con la forma de la parábola.
Esa comprobación cualitativa —¿cae el centroide donde diría la intuición?— detecta la mayoría de los errores de planteamiento.

19.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un tanque cónico invertido de 3 m de radio superior y 6 m de profundidad está lleno de agua. Halle el trabajo de bombeo hasta el borde.

Dónde se pone el origen

El cono está **invertido**: la base de 3 m de radio arriba y el vértice abajo. Mido y desde el vértice hacia arriba, de modo que $y = 0$ es el vértice e $y = 6$ el borde superior. Con esa elección el radio *crece* con y —de 0 a 3— y una rebanada situada a altura y debe subir lo que le falta para llegar al borde, es decir $d(y) = 6 - y$.
Otra elección del origen es igual de válida, pero cambia las dos expresiones a la vez: **el radio y la distancia deben medirse desde el mismo origen**. Mezclarlos es el error habitual.

Ejemplo

1. Por semejanza de triángulos, el radio a altura y es proporcional.
$$r(y) = \frac{3y}{6} = \frac{y}{2} \ \Rightarrow\ A(y) = \frac{\pi y^2}{4}$$

2 La rebanada a altura y sube hasta 6 m.

$$d(y) = 6 - y$$

3 Planteo la integral.

$$W = 9\,800 \int_0^6 \frac{\pi y^2}{4}(6 - y)\, dy$$

4 Desarrollo el integrando y antiderivo.

$$\frac{9\,800\pi}{4}\left[2y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^6 = \frac{9\,800\pi}{4}(432 - 324)$$

5 Evalúo.

$$\frac{9\,800\pi}{4}(108)$$

$$W \approx 8{,}31 \times 10^5 \text{ J} = 0{,}83 \text{ MJ}$$

Compare con el cilindro anterior: el cono contiene 56,5 m^3 frente a 62,8, apenas un 10 % menos de agua, y sin embargo el trabajo cae casi a la mitad.
La razón es geométrica: en el cono invertido la mayor parte del agua está **cerca del borde**, de modo que recorre poca distancia. Ese es el tipo de conclusión que la integral entrega y una estimación gruesa no.

Aplicación: gestión deportiva y topografía

Una tribuna tiene planta triangular limitada por $y = 0$, $x = 12$ y $y = \frac{x}{2}$ (metros). Para ubicar la columna central de soporte se necesita el centroide de esa planta.

Ejemplo

1 Calculo el área.

$$A = \int_0^{12} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{12} = 36$$

2 Momento respecto del eje y.

$$\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{12} = 288$$

3 Divido.

$$\bar{x} = \frac{288}{36} = 8$$

4 Momento respecto del eje x y división.

$$\bar{y} = \frac{1}{36}\int_0^{12} \frac{x^2}{8} dx = \frac{1}{36}(72) = 2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (8;\ 2) \text{ m}$$

Verificación

Para un triángulo, el centroide está a un tercio de la base desde el lado mayor: con vértices en $(0,0)$, $(12,0)$ y $(12,6)$, el promedio de las coordenadas es

$$\bar{x} = \frac{0+12+12}{3} = 8, \qquad \bar{y} = \frac{0+0+6}{3} = 2. \ \checkmark$$

La geometría elemental confirma el cálculo, como debe ser en toda figura poligonal.

19.6 Síntesis

1. Los tres conceptos acumulan **cantidad por distancia**.
2. $W = \int_a^b F(x)dx$; con fuerza variable **no** basta multiplicar.
3. Bombeo: $W = \rho g \int A(y)\, d(y)\, dy$; cada rebanada sube una distancia distinta.
4. Dibuje el tanque y fije el **origen** antes de plantear.
5. El centroide es un **promedio ponderado** por área.
6. Verifique con geometría elemental cuando la figura lo permita.

Ejercicios propuestos

19.1 Un resorte de $k = 150$ N/m se estira de 0 a 40 cm. Halle el trabajo, y compárelo con el que se obtendría usando la fuerza final.

19.2 Una fuerza $F(x) = 3x^2 + 2$ N actúa de $x = 0$ a $x = 4$ m. Halle el trabajo.

19.3 Un tanque cilíndrico de radio 1,5 m y altura 4 m, lleno de agua, se bombea hasta el borde. Halle el trabajo.

19.4 El mismo tanque, pero bombeando hasta 2 m *por encima* del borde. ¿Cuánto aumenta el trabajo y por qué?

19.5 Un tanque cónico invertido de radio 2 m y profundidad 5 m, lleno, se bombea hasta el borde. Halle el trabajo.

19.6 Halle el centroide de la región bajo $y = \sqrt{x}$ en $[0,4]$.

19.7 Halle el centroide de la región entre $y = x$ y $y = x^2$.

19.8 Explique por qué el trabajo de bombear un cono invertido es menor que el de un cilindro de volumen similar.

Respuestas

19.1 $W = \left[75x^2\right]_0^{0,4} = 12$ J. Con la fuerza final: $60(0{,}4) = 24$ J, el doble.

19.2 $\left[x^3 + 2x\right]_0^4 = 72$ J.

19.3 $A = \pi(1{,}5)^2 = 7{,}069$; $W = 9\,800(7{,}069)\int_0^4 (4-y)dy = 9\,800(7{,}069)(8) \approx 5{,}54\times10^5$ J.

19.4 Ahora $d(y) = 6 - y$ y la integral da 16 en vez de 8: el trabajo se *duplica*, porque el centro de masa debe elevarse 4 m en lugar de 2.

19.5 $r(y) = \frac{2y}{5}$, $A(y) = \frac{4\pi y^2}{25}$; $W = 9\,800 \cdot \frac{4\pi}{25} \int_0^5 y^2(5-y)dy = 9\,800 \cdot \frac{4\pi}{25}\left(\frac{625}{12}\right) \approx 2{,}57 \times 10^5$ J.

19.6 $A = \frac{16}{3}$; $\bar{x} = \frac{3}{16}\int_0^4 x^{3/2}dx = 2{,}4$; $\bar{y} = \frac{3}{16}\int_0^4 \frac{x}{2}dx = 0{,}75$.

19.7 $A = \frac{1}{6}$; $\bar{x} = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{2}$; $\bar{y} = 6\int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2}dx = \frac{2}{5}$.

19.8 Porque en el cono invertido el volumen se concentra en la parte superior, cerca del borde, y esa agua recorre una distancia pequeña. El trabajo depende de la distribución de la masa, no solo de su total.

SESIÓN 20

Integrales impropias

Objetivo de la sesión

Reconocer los dos tipos de integral impropia, evaluarlas mediante límites, decidir su convergencia con el criterio de las p-integrales y por comparación, e interpretar qué significa un área infinita frente a un área finita sobre un dominio infinito.

20.1 Dos maneras de romper la definición

La integral definida se construyó para una función **continua** sobre un intervalo **cerrado y acotado**. Cuando falla alguna de esas dos condiciones, la definición no aplica y hay que extenderla.

Tipo	Qué falla	Ejemplo
I	el intervalo es infinito	$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$
II	el integrando no es acotado	$\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Integrales impropias

$$\text{Tipo I:}\quad \int_a^{\infty} f\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f\,dx$$

$$\text{Tipo II:}\quad \int_a^{b} f\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^{t} f\,dx \quad \text{si } f \text{ explota en } b$$

Si el límite existe y es finito, la integral **converge**; en caso contrario **diverge**.

El aviso de la sesión 4, ahora explicado

Escribir directamente

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$$

es **incorrecto**. El integrando explota en $x = 0$, que está dentro del intervalo, de modo que el teorema fundamental no aplica.
El resultado negativo para una función positiva delata el disparate. Bien planteada, esa integral **diverge**.

20.2 Tipo I: intervalo infinito

Dos integrales que parecen iguales y no lo son

1. Primera: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Escribo el límite.

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$$

2. Segunda: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

$$\lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$$

la primera converge a 1; la segunda diverge

Una región infinita de área finita

El primer resultado es contraintuitivo y vale la pena detenerse en él. La región bajo $y = 1/x^2$ desde $x = 1$ se extiende **infinitamente** hacia la derecha, y sin embargo su área total es exactamente 1.
La explicación es que la función decae *lo bastante rápido*: lo que se añade al avanzar se hace despreciable. Con $1/x$ el decaimiento es demasiado lento y el área crece sin cota, aunque la curva también tienda a cero.
Que el integrando tienda a cero no garantiza convergencia.

Criterio de las p-integrales

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \quad \text{converge si } p > 1 \quad \text{y diverge si } p \le 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{converge si } p < 1 \quad \text{y diverge si } p \ge 1.$$

Demostración del primer caso

Para $p \neq 1$ la antiderivada de x^{-p} es $\dfrac{x^{1-p}}{1-p}$, luego

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}.$$

Todo depende del signo del exponente $1-p$:

- si $1-p<0$, es decir $p>1$, entonces $b^{1-p}\to 0$ y el límite vale $\dfrac{1}{p-1}$: **converge**;
- si $1-p>0$, es decir $p<1$, entonces $b^{1-p}\to\infty$: **diverge**.

El caso $p=1$ se trata aparte porque la antiderivada es $\ln x$, y $\ln b\to\infty$: también diverge. El segundo enunciado se demuestra igual, tomando $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{1-t^{1-p}}{1-p}$, y ahí el signo se invierte. ■

Error frecuente

Los dos criterios son **opuestos**, y confundirlos es frecuente. La lógica:

- *hacia el infinito* el problema es la **cola**, y conviene que la función baje rápido: p grande;
- *cerca de cero* el problema es la **explosión**, y conviene que suba despacio: p pequeño.

El caso $p = 1$ diverge en ambos.

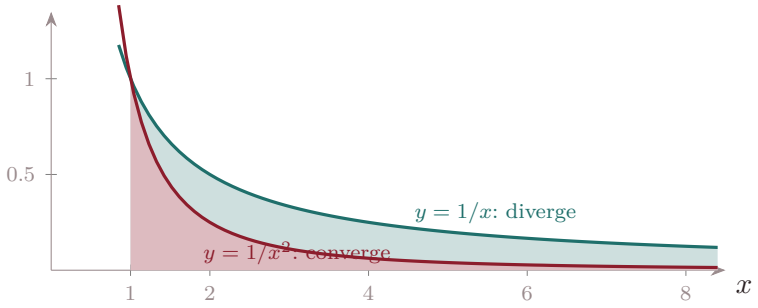


Figura 20.1. Las dos curvas tienden a cero, pero solo una encierra área finita. Bajo $y = 1/x^2$ el área desde $x = 1$ vale exactamente 1; bajo $y = 1/x$ crece sin cota. **Que el integrando tienda a cero no garantiza convergencia.**

20.3 Tipo II: integrando no acotado

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

1. El integrando explota en $x = 0$: planteo el límite por la derecha.
$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-1/2}\,dx$$
2. Antiderivo.
$$\lim_{t\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^1$$
3. Evalúo el límite.
$$\lim_{t\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$$

converge a 2

Aquí $p = \frac{1}{2} < 1$, y el criterio anticipaba la convergencia.

Discontinuidad interior: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

1. El punto problemático está **dentro**: hay que partir en él.
$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

2 Examino el segundo trozo.

$$\lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right) = \infty$$

diverge

Error frecuente

Basta con que **un** trozo diverja para que toda la integral diverja. No se compensan: no tiene sentido decir que "los infinitos se cancelan".
Y antes de aplicar el teorema fundamental, **revise siempre que el integrando sea continuo en todo el intervalo**, extremos incluidos.

20.4 Criterio de comparación

Muchas integrales impropias no se pueden evaluar, pero sí decidir.

Teorema

Sean $0 \le f(x) \le g(x)$ en $[a,\infty)$.

- Si $\int_a^\infty g$ **converge**, entonces $\int_a^\infty f$ converge.
- Si $\int_a^\infty f$ **diverge**, entonces $\int_a^\infty g$ diverge.

Decidir sin calcular

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+1}$$

1 Comparo con una p-integral conocida, acotando por arriba.

$$\frac{1}{x^3+1} < \frac{1}{x^3} \quad \text{para } x \ge 1$$

2 La mayor converge, pues $p = 3 > 1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}$$

converge, y su valor es menor que $\frac{1}{2}$

El criterio no da el valor, solo decide. En ingeniería eso suele bastar: si la carga contaminante acumulada converge, el sistema tiene un límite finito y se puede dimensionar; si diverge, el modelo predice acumulación sin cota y hay que revisarlo.

20.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un relleno sanitario clausurado sigue emitiendo lixiviados a una tasa

$$L(t) = 120\,e^{-0{,}15t} \quad (\text{m}^3/\text{año}).$$

¿Cuál es el volumen total que llegará a producir a lo largo de toda su vida?

Ejemplo

1. "Toda su vida" significa integrar hasta el infinito.
$$V = \int_0^{\infty} 120\,e^{-0{,}15t}\,dt$$
2. Escribo el límite.
$$\lim_{b\to\infty} 120\left[-\frac{e^{-0{,}15t}}{0{,}15}\right]_0^b$$
3. El término en b tiende a cero porque el exponente es negativo.
$$\frac{120}{0{,}15}\lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-0{,}15b}\right) = \frac{120}{0{,}15}$$

$$V = 800\ \text{m}^3$$

El resultado es **finito** aunque el proceso nunca termine formalmente. Esa es la utilidad práctica del concepto: permite dimensionar la piscina de lixiviados con un número, sin necesidad de fijar arbitrariamente un horizonte de cierre. Compare con una emisión que decayera como $1/t$: la integral divergiría y no habría dimensionamiento posible. La forma del decaimiento decide si el problema tiene solución.

Aplicación: gestión deportiva

Un derecho de imagen genera una renta perpetua de $R = 25$ millones al año, en flujo continuo. Con una tasa de descuento $r = 0{,}07$, halle su valor presente.

Ejemplo

1. Una perpetuidad se modela con límite superior infinito.
$$VP = \int_0^{\infty} 25\,e^{-0{,}07t}\,dt$$
2. Aplico el resultado general de la sesión 9, llevando T al infinito.
$$\lim_{T\to\infty}\frac{R}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \frac{R}{r}$$
3. Sustituyo.
$$VP = \frac{25}{0{,}07}$$

$$VP \approx 357{,}1 \text{ millones}$$

Verificación

Un flujo infinito tiene valor **finito**: 357 millones. La fórmula $VP = R/r$ es la conocida regla de la perpetuidad, y aquí queda deducida en vez de postulada. Comprobación de coherencia: 357 millones colocados al 7 % rinden exactamente 25 millones al año, indefinidamente. ✓

20.6 Síntesis y cierre del Módulo III

1. Tipo I: intervalo infinito. Tipo II: integrando no acotado.
2. Se evalúan siempre mediante un **límite**.
3. $\int_1^\infty x^{-p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 x^{-p}$ converge si $p < 1$. Criterios **opuestos**.
4. Que el integrando tienda a cero **no garantiza** convergencia.
5. Con discontinuidad interior, **parta** en ese punto; basta un trozo divergente para que todo diverja.
6. El criterio de **comparación** decide sin calcular.

Con esta sesión se cierra el Módulo III. La integral ha servido para medir áreas, volúmenes, longitudes, promedios, trabajo y centroides, y para acumular sobre dominios infinitos. El Módulo IV plantea la última pregunta del curso: qué ocurre cuando lo que se suma no es un continuo sino una **sucesión infinita de términos**.

Ejercicios propuestos

20.1 Clasifique el tipo de impropiedad, sin resolver: (a) $\int_0^\infty e^{-x}dx$; (b) $\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$; (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; (d) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

20.2 Evalúe: (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$; (b) $\int_0^\infty e^{-2x}dx$; (c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

20.3 Decida convergencia con el criterio de p: (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1{,}01}}$; (c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$.

20.4 Muestre que $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ diverge, y explique por qué no vale cero “por simetría”.

20.5 Use comparación para decidir $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+5}$ y $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

20.6 Evalúe $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ partiendo en cero.

20.7 Un relleno emite $L(t) = 200e^{-0{,}25t}$ m^3/año. Halle el volumen total y el tiempo en que se alcanza el 90 % de ese total.

20.8 Halle el valor presente de una perpetuidad de $R = 40$ millones anuales con $r = 0{,}05$, y explique qué ocurriría si r tendiera a cero.

Respuestas

20.1 (a) tipo I; (b) tipo II, explota en $x = 2$; (c) tipo I por ambos extremos; (d) tipo II, explota en $x = 3$.

20.2 (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 4.

20.3 (a) diverge, $p = \frac{1}{2} \leq 1$; (b) converge, $p > 1$ aunque por poco; (c) converge, $p = \frac{2}{3} < 1$.

20.4 Cada trozo diverge por separado, y la definición exige que *ambos* límites existan. No se pueden cancelar dos infinitos.

20.5 La primera converge, pues $\frac{1}{x^2+5} < \frac{1}{x^2}$. La segunda diverge, pues $\frac{1}{\sqrt{x}+1} > \frac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x \geq 1$ y esa diverge.

20.6 $2\lim_{b\to\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_0^b = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

20.7 $V = \frac{200}{0{,}25} = 800$ m^3; el 90 % se alcanza cuando $1 - e^{-0{,}25t} = 0{,}9$, es decir $t = \frac{\ln 10}{0{,}25} \approx 9{,}2$ años.

20.8 $VP = \frac{40}{0{,}05} = 800$ millones. Si $r \to 0$ el valor presente **diverge**: sin descuento, un flujo perpetuo vale infinito, lo que muestra que la tasa positiva es lo que hace finita la valoración.

SESIÓN 21

Sucesiones y convergencia

Objetivo de la sesión

Definir una sucesión como función de variable natural, decidir si converge o diverge mediante límites, y reconocer las sucesiones monótonas y acotadas que garantizan convergencia sin necesidad de calcular el límite.

21.1 Un cambio de escenario

Los tres módulos anteriores trabajaron con procesos **continuos**: una función definida sobre un intervalo, acumulada mediante una integral. Este módulo cambia el escenario: ahora los procesos son **discretos**, una lista infinita de valores, y la pregunta es qué ocurre al final de esa lista.

Por qué importa

Muchos fenómenos se miden por períodos, no de manera continua: el inventario forestal de cada año, los ingresos de cada temporada, la concentración medida cada día. Cada uno produce una **sucesión**.
Y hay una pregunta que se repite en todos: ¿esto se estabiliza en algún valor, o crece sin control?

21.2 Sucesión

Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio son los naturales:

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto a_n.$$

Se escribe $\{a_n\}$ y el valor a_n se llama **término general**.

Ya apareció esta idea en la sesión 1 del volumen I, cuando $2n$ y $2n-1$ generaban los pares y los impares. Entonces se llamó “posición en una serie”; ahora tiene nombre propio.

Término general	Primeros términos	Tipo
$a_n = \dfrac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots$	decreciente
$a_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$	creciente
$a_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$	oscilante
$a_n = \dfrac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots$	creciente

21.3 Convergencia

Definición

La sucesión $\{a_n\}$ **converge** a L si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Si el límite no existe o es infinito, la sucesión **diverge**.

Se calcula como cualquier límite

Aquí no hace falta teoría nueva: son los límites al infinito de la sesión 13 del volumen I, con la variable restringida a los naturales.
Sirven las mismas herramientas: dividir entre la potencia dominante, la jerarquía $\ln n \ll n^p \ll e^n$ y, cuando aparece una indeterminación, L'Hôpital sobre la función continua asociada.

Tres casos

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n}} = \dfrac{3}{5}$: **converge**.
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ por la jerarquía de crecimiento: **converge** a cero.
3. $a_n = (-1)^n$ oscila entre -1 y 1 sin acercarse a nada: **diverge**, aunque esté acotada.

Acotada no implica convergente

El tercer caso lo muestra: $(-1)^n$ nunca se sale del intervalo $[-1, 1]$ y sin embargo no converge.
Estar acotado impide escaparse al infinito, pero no obliga a *decidirse* por un valor.

21.4 Monotonía y acotación

Definición

$\{a_n\}$ es **creciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, y **decreciente** si $a_{n+1} \leq a_n$. En cualquiera de los dos casos se dice **monótona**.
Es **acotada** si existe M con $|a_n| \leq M$ para todo n.

Teorema de la convergencia monótona

Toda sucesión **monótona y acotada** converge.

Lo que hace valioso a este teorema

Garantiza la convergencia **sin exigir que se calcule el límite**.
Una sucesión creciente y acotada superiormente no tiene escapatoria: no puede bajar, no puede pasar de la cota, y por tanto se ve obligada a acumularse contra algo. Ese algo es el límite.
En ingeniería esto se traduce en afirmaciones útiles: si un proceso solo puede aumentar y tiene un tope físico —la capacidad de carga de un bosque, la

saturación de un mercado, la solubilidad de una sal—, entonces se estabiliza necesariamente.

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

1. Compruebo la monotonía comparando términos consecutivos.
$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$
2. Es creciente. Compruebo que está acotada.
$$a_n = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{para todo } n$$
3. Creciente y acotada superiormente: el teorema garantiza convergencia.
converge
4. Y en este caso el límite se puede calcular.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

21.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un rodal se somete a raleo anual: cada año crece un 12 % y se extraen 40 m^3. Partiendo de $V_0 = 500$ m^3, la sucesión de existencias es

$$V_{n+1} = 1{,}12\,V_n - 40.$$

¿Se estabiliza el rodal, se agota o crece sin control?

Ejemplo

1. Busco el punto de equilibrio: el volumen que se reproduce a sí mismo.
$$V^* = 1{,}12V^* - 40 \;\Rightarrow\; 0{,}12V^* = 40$$
2. Despejo.
$$V^* = 333{,}3 \text{ m}^3$$
3. Como $V_0 = 500 > V^*$ y el factor $1{,}12 > 1$, la diferencia respecto del equilibrio se amplifica cada año.
$$V_n - V^* = (1{,}12)^n\,(V_0 - V^*)$$

$$V_n = 333{,}3 + 166{,}7\,(1{,}12)^n \longrightarrow \infty$$

La sucesión **diverge**: con esa intensidad de raleo el rodal acumula existencias indefinidamente, señal de que se está extrayendo por debajo del crecimiento. El equilibrio $V^* = 333{,}3$ es **inestable**: por debajo de él el rodal se agota, por encima crece sin límite. Un plan de manejo que arranque en 300 m^3 lleva el rodal a cero. Detectar esa frontera es justamente para lo que sirve el análisis.

Aplicación: gestión deportiva

Un club retiene el 85 % de sus afiliados cada año y capta 900 nuevos. Con $A_0 = 4\,000$:

$$A_{n+1} = 0{,}85\,A_n + 900.$$

¿Hacia dónde tiende la base de afiliados?

Ejemplo

1. Punto de equilibrio.
   $A^* = 0{,}85A^* + 900 \;\Rightarrow\; 0{,}15A^* = 900$
2. Despejo.
   $A^* = 6\,000$
3. Aquí el factor es $0{,}85 < 1$: la diferencia respecto del equilibrio se **reduce** cada año.
   $A_n = 6\,000 - 2\,000\,(0{,}85)^n$

$$A_n \longrightarrow 6\,000 \text{ afiliados}$$

Verificación

$A_1 = 0{,}85(4\,000) + 900 = 4\,300$; $A_5 \approx 5\,113$; $A_{20} \approx 5\,922$. Se acerca a 6 000 sin alcanzarlo. ✓
La sucesión es creciente y acotada por 6 000: el teorema de convergencia monótona garantizaba el resultado incluso antes de calcularlo.

Compare los dos casos. La estructura es idéntica, $x_{n+1} = r\,x_n + c$, y todo depende de si r es mayor o menor que uno:

$$r < 1 \;\Rightarrow\; \text{converge al equilibrio;} \qquad r > 1 \;\Rightarrow\; \text{diverge.}$$

Un solo parámetro separa un sistema estable de uno que se descontrola.

21.6 Síntesis

1. Una sucesión es una función de dominio $\mathbb{N}$.
2. Converge si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y es finito.
3. Los límites se calculan con las técnicas del volumen I.
4. **Acotada no implica convergente**: $(-1)^n$ lo desmiente.
5. **Monótona y acotada** $\Rightarrow$ converge, aunque no se sepa el límite.
6. En $x_{n+1} = rx_n + c$, el signo de $r - 1$ decide todo.

Ejercicios propuestos

21.1 Escriba los cinco primeros términos: (a) $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$; (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; (c) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.

21.2 Determine si convergen y a qué valor: (a) $\frac{4n^3-n}{2n^3+5}$; (b) $\frac{n}{\ln n}$; (c) $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$; (d) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

21.3 Demuestre que $a_n = \frac{2n}{n+3}$ es creciente y acotada, y halle su límite.

21.4 Dé un ejemplo de sucesión acotada que no converja, y otro de sucesión monótona que no converja.

21.5 Para $x_{n+1} = 0{,}9x_n + 50$ con $x_0 = 100$, halle el equilibrio y decida si converge.

21.6 Para $x_{n+1} = 1{,}05x_n - 20$ con $x_0 = 500$, halle el equilibrio y decida el comportamiento. ¿Qué ocurriría con $x_0 = 300$?

21.7 Un rodal crece 9 % anual y se ralean 50 m^3 por año. Halle el volumen de equilibrio e interprete su estabilidad.

21.8 Un club retiene el 78 % y capta 1 100 afiliados por año. Halle la base de equilibrio y el número de años para llegar al 95 % de ese valor partiendo de 2 000.

Respuestas

21.1 (a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$; (b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$; (c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}$.

21.2 (a) converge a 2; (b) diverge, pues $n \gg \ln n$; (c) converge a 0, por acotación entre $\pm\frac{1}{n}$; (d) converge a e^2.

21.3 $a_{n+1} - a_n = \frac{6}{(n+3)(n+4)} > 0$ y $a_n < 2$; el límite es 2.

21.4 Acotada sin converger: $(-1)^n$. Monótona sin converger: $a_n = n$, creciente pero no acotada.

21.5 $x^* = 500$; como $r = 0{,}9 < 1$, converge a 500.

21.6 $x^* = 400$; con $r = 1{,}05 > 1$ diverge al infinito partiendo de 500. Con $x_0 = 300$, por debajo del equilibrio, decrece hasta agotarse.

21.7 $V^* = \frac{50}{0{,}09} = 555{,}6$ m^3, equilibrio **inestable**: por encima crece sin límite, por debajo se agota.

21.8 $A^* = \frac{1\,100}{0{,}22} = 5\,000$; se necesita $0{,}78^n \le 0{,}05$, es decir $n \ge \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}78} \approx 12$ años.

SESIÓN 22

Series infinitas: geométrica y telescópica

Objetivo de la sesión

Definir la suma de una serie como el límite de sus sumas parciales, dominar la serie geométrica y su condición de convergencia, y reconocer las series telescópicas.

22.1 Sumar infinitos términos

¿Qué significa sumar una cantidad infinita de números? La respuesta honesta es que no significa nada hasta que se defina, y la definición que funciona es la misma idea de siempre: sumar una cantidad finita y **tomar el límite**.

Serie y sumas parciales

Dada la sucesión $\{a_n\}$, la **n-ésima suma parcial** es

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La **serie** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Si el límite no existe, la serie **diverge**.

Dos sucesiones distintas

Hay que distinguir con cuidado:

- $\{a_n\}$, la sucesión de **términos**;
- $\{S_n\}$, la sucesión de **sumas parciales**.

La serie converge cuando converge la **segunda**, no la primera.

22.2 La serie geométrica

Es la única serie del curso cuya suma se conoce en forma cerrada, y por eso se convierte en la referencia contra la cual se comparan las demás.

Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n = a + ar + ar^2 + \cdots = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & \text{si } |r| < 1 \text{ (converge)} \\ \text{no existe}, & \text{si } |r| \geq 1 \text{ (diverge)} \end{cases}$$

Demostración

Escriba la suma parcial y múltipliquela por r:

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}, \qquad rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Al restar, todos los términos intermedios se cancelan:

$$S_n - rS_n = a - ar^n \quad \Longrightarrow \quad S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Si $|r| < 1$ entonces $r^n \to 0$ y queda $\frac{a}{1-r}$. Si $|r| \geq 1$, el término r^n no tiende a cero y el límite no existe. ■

Tres casos

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$: converge.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = \frac{3/4}{1 - \frac{1}{4}} = 1$: converge. *Cuidado con el primer término*: aquí la serie arranca en $n = 1$, luego $a = \frac{3}{4}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$: diverge, porque $|r| > 1$.

El error del primer término

En la fórmula $\frac{a}{1-r}$, la letra a es **el primer término que efectivamente aparece**, no el coeficiente que se ve escrito.
Si la serie empieza en $n = 1$ en vez de $n = 0$, el primer término ya viene multiplicado por r. Escriba siempre los dos o tres primeros términos antes de aplicar la fórmula.

22.3 El criterio del término general

Criterio de divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum a_n$ **diverge**.

El recíproco es falso, y es la trampa clásica

Que $a_n \to 0$ **no garantiza** que la serie converja.
El contraejemplo canónico es la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Sus términos tienden a cero y sin embargo la serie *diverge*: la suma crece sin cota, aunque lo haga muy despacio. Se demostrará en la sesión 23.

Por eso este criterio solo sirve para **descartar**, nunca para confirmar.

Cómo usarlo

Es la primera pregunta que conviene hacerse ante cualquier serie: si el término general no tiende a cero, ya terminó, diverge. Si tiende a cero, el criterio no dice nada y hay que seguir investigando.

22.4 Series telescópicas

Definición

Una serie es **telescópica** si su término general se puede escribir como una diferencia $a_n = b_n - b_{n+1}$, de modo que al sumar casi todo se cancela.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Descompongo en fracciones parciales (sesión 13).
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
2. Escribo la suma parcial y observo las cancelaciones.
$$S_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$
3. Solo sobreviven el primer y el último término.
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$
4. Tomo el límite.
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Las telescópicas son, junto con las geométricas, las únicas series cuya suma se obtiene de forma exacta con herramientas elementales. Para casi todas las demás solo podremos decidir *si* convergen, no *a qué*.
Esa distinción —convergencia frente a valor— domina el resto del módulo.

22.5 Aplicaciones

Aplicación: gestión deportiva

Un club invierte 200 millones en publicidad. Se estima que cada peso gastado genera actividad económica local, de la cual el 60 % vuelve a gastarse en el mismo circuito, y así sucesivamente. ¿Cuál es el impacto económico total?

Ejemplo

1. El impacto es la suma de todas las rondas de gasto.
$$200 + 200(0{,}6) + 200(0{,}6)^2 + \dots$$
2. Es geométrica con $a = 200$ y $r = 0{,}6 < 1$: converge.
$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{200}{1-0{,}6}$$
3. Evalúo.
$$S = \frac{200}{0{,}4} = 500$$

impacto total $= 500$ millones

El cociente $\frac{1}{1-r} = 2{,}5$ se conoce en economía como **multiplicador del gasto**: cada peso invertido genera dos pesos y medio de actividad.
Y la serie explica por qué el efecto es *finito*: aunque las rondas no terminan nunca, cada una es un 60 % de la anterior y la suma converge. Si la propensión al gasto fuera $r \geq 1$, la serie divergiría, lo que matemáticamente advierte de un modelo mal planteado.

Aplicación: ingeniería ambiental

Un contaminante persistente se aplica en dosis anuales de 12 kg/ha. Cada año se degrada el 30 % de lo acumulado, de modo que sobrevive el 70 %. ¿Hacia qué nivel tiende la acumulación en el suelo?

Ejemplo

1. Justo después de la aplicación n-ésima, lo acumulado es la suma de todas las dosis previas, cada una degradada.
$$A_n = 12 + 12(0{,}7) + 12(0{,}7)^2 + \cdots + 12(0{,}7)^{n-1}$$
2. Es geométrica con $a = 12$ y $r = 0{,}7$.
$$A_n = 12\,\frac{1-(0{,}7)^n}{0{,}3}$$
3. Tomo el límite.
$$A_\infty = \frac{12}{0{,}3}$$

$A_\infty = 40$ kg/ha

Verificación

$A_1 = 12$; $A_5 = 12\frac{1-0{,}168}{0{,}3} = 33{,}3$; $A_{10} = 12\frac{1-0{,}028}{0{,}3} = 38{,}9$. Se acerca a 40 sin superarlo. ✓

Este es el modelo estándar de acumulación de plaguicidas y metales pesados en suelos. El resultado tiene una consecuencia normativa clara: la concentración de equilibrio **no depende del tiempo sino del cociente entre dosis y tasa de degradación**.
Si el límite normativo fuera 30 kg/ha, este esquema lo superaría inevitablemente, por mucho que se espere. La única salida es bajar la dosis o aumentar la degradación.

22.6 Síntesis

1. Una serie converge si converge su sucesión de **sumas parciales**.
2. Geométrica: converge si $|r| < 1$, y entonces vale $\dfrac{a}{1-r}$.
3. En esa fórmula, a es el **primer término que aparece**.
4. Si $a_n \not\to 0$, la serie **diverge**.
5. $a_n \to 0$ **no basta**: la armónica lo desmiente.
6. Las telescópicas se resuelven por fracciones parciales.

Ejercicios propuestos

22.1 Decida convergencia y halle la suma cuando exista: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1{,}1)^n$.

22.2 Aplique el criterio del término general: (a) $\sum \frac{n}{n+1}$; (b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$; (c) $\sum (-1)^n$.

22.3 Halle la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ descomponiendo en fracciones parciales.

22.4 Halle la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$.

22.5 Escriba $0{,}\overline{27}$ como fracción usando una serie geométrica.

22.6 Explique por qué el criterio del término general nunca sirve para *confirmar* convergencia, con un ejemplo.

22.7 Una inversión de 350 millones tiene propensión al gasto local del 55 %. Halle el impacto total y el multiplicador.

22.8 Un plaguicida se aplica en dosis de 8 kg/ha con degradación anual del 45 %. Halle la acumulación de equilibrio y compare con un límite normativo de 20 kg/ha.

Respuestas

22.1 (a) $\frac{1}{1-0{,}6} = 2{,}5$; (b) primer término $\frac{2}{3}$: $\frac{2/3}{1-1/3} = 1$; (c) diverge, $r > 1$.

22.2 (a) $a_n \to 1 \neq 0$: diverge; (b) $a_n \to 0$: el criterio no decide; (c) no existe el límite: diverge.

22.3 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$; suma $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

22.4 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

22.5 $0{,}\overline{27} = \frac{27}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

22.6 Porque su hipótesis es sobre la divergencia. La armónica tiene $a_n \to 0$ y diverge; la geométrica de razón $\frac{1}{2}$ también tiene $a_n \to 0$ y converge. El mismo dato acompaña a los dos comportamientos.

22.7 $S = \frac{350}{0{,}45} = 777{,}8$ millones; multiplicador 2,22.

22.8 $A_\infty = \frac{8}{0{,}45} = 17{,}8$ kg/ha, por debajo del límite normativo: el esquema es sostenible.

SESIÓN 23

Criterios de convergencia I: integral, p-series y comparación

Objetivo de la sesión

Decidir la convergencia de series de términos positivos mediante el criterio de la integral, reconocer las p-series como familia de referencia y aplicar los dos criterios de comparación.

23.1 Un cambio de pregunta

Con la geométrica y la telescópica se obtuvo la suma exacta. Eso es excepcional. Para la inmensa mayoría de las series solo puede responderse una pregunta más modesta:

¿Converge o diverge? Sin calcular el valor.
Puede parecer poco, pero es exactamente lo que hace falta en la práctica: si una serie converge, sus sumas parciales aproximan el resultado tanto como se quiera y el cómputo se hace numéricamente. Si diverge, ninguna cantidad de cálculo sirve.

Todos los criterios de esta sesión exigen **términos positivos**. Con esa hipótesis las sumas parciales son crecientes, y por el teorema de la sesión 21 basta con probar que están acotadas.

23.2 Criterio de la integral

Aquí el módulo de series se conecta con todo lo anterior: la convergencia de una serie se decide con una **integral impropia** (sesión 20).

Criterio de la integral

Sea f continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ con $a_n = f(n)$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Por qué es cierto

Los términos de la serie son áreas de rectángulos de base 1 y altura $f(n)$. Como f decrece, esos rectángulos quedan **atrapados** entre la curva y su traslado:

$$\int_1^{\infty} f\,dx \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\le\; a_1 + \int_1^{\infty} f\,dx.$$

La desigualdad se lee en el dibujo. Sobre cada intervalo $[n, n+1]$ hay dos rectángulos de base 1: el de altura $f(n)$, tomada en el extremo **izquierdo**, queda *por encima* de la curva porque f decrece; el de altura $f(n+1)$, tomada en el extremo **derecho**, queda *por debajo*. Sumar los primeros acota la integral por arriba y sumar los segundos la acota por abajo.
Si la integral es finita, la serie queda acotada y converge. Si es infinita, la serie también. Las dos comparten destino.

Error frecuente

El criterio dice que ambas **convergen o divergen juntas**, *no* que valgan lo mismo. La integral no es la suma de la serie: solo decide su suerte.

23.2.1 La serie armónica, por fin

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge**

1. La función asociada cumple las hipótesis en $[1, \infty)$.
   $f(x) = \dfrac{1}{x}$: continua, positiva, decreciente
2. Evalúo la integral impropia.
   $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b$$
3. El límite es infinito: la integral diverge.
   $\Longrightarrow$ la serie diverge

Lo asombroso del resultado

La serie armónica diverge, pero con una lentitud desconcertante. Hacen falta más de 12 000 términos para que la suma pase de 10, y más de $2{,}7 \times 10^8$ para pasar de 20.
Sumar términos y ver que "se estabiliza" no demuestra nada. Ese es el argumento más convincente a favor de tener criterios teóricos: la evidencia numérica aquí **engaña**.

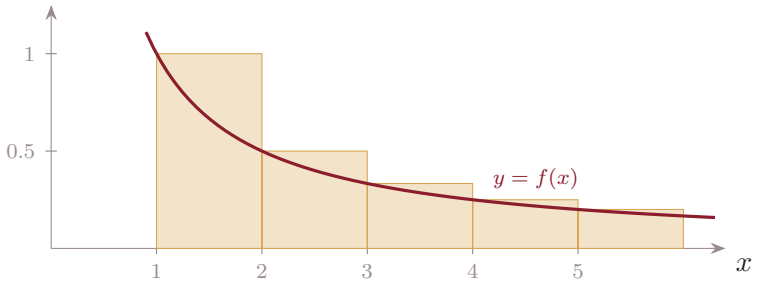


Figura 23.1. Criterio de la integral. Los rectángulos de altura $f(n)$ —extremo **izquierdo**— quedan por encima de la curva; los de altura $f(n+1)$ —extremo **derecho**— por debajo. De ahí $\int_1^\infty f \le \sum a_n \le a_1 + \int_1^\infty f$: la serie y la integral comparten destino.

23.3 Las p-series

p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge si } p > 1, \quad \text{diverge si } p \le 1.$$

Demostración

Por el criterio de la integral, con $f(x) = x^{-p}$:

$$\int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b.$$

Si $p > 1$ el exponente $1-p$ es negativo, $b^{1-p} \to 0$ y la integral vale $\frac{1}{p-1}$: converge. Si $p < 1$ el exponente es positivo y diverge. El caso $p = 1$ es la armónica, ya tratada. ■

Serie	p	Comportamiento
$\sum \frac{1}{n^2}$	2	converge
$\sum \frac{1}{n}$	1	**diverge**
$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2}$	diverge
$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$	$\frac{3}{2}$	converge

Las p-series y las geométricas son las **dos familias de referencia**. Casi todos los ejercicios de esta sesión y la siguiente se resuelven comparando con una de ellas: hay que tenerlas memorizadas.

23.4 Criterios de comparación

Comparación directa

Sean $0 \le a_n \le b_n$ para todo n.

(I) Si $\sum b_n$ **converge**, entonces $\sum a_n$ converge.

(II) Si $\sum a_n$ **diverge**, entonces $\sum b_n$ diverge.

En palabras

Lo más pequeño que algo finito, es finito. Lo más grande que algo infinito, es infinito.
Note que la implicación va en un solo sentido en cada caso: que la mayor diverja no dice nada sobre la menor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$$

1. Comparo con la p-serie de $p = 2$, aumentando el término.
$$\frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}$$
2. La mayor converge por ser p-serie con $p = 2 > 1$.
$\Longrightarrow$ la menor converge

La desigualdad debe ir en el sentido correcto

Para probar **convergencia** hay que acotar por **arriba** con algo convergente.
Para probar **divergencia**, por **abajo** con algo divergente.
Acotar $\frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n}$ es cierto pero inútil: no se deduce nada de que sea menor que algo divergente.

23.4.1 Comparación por límite

A veces la desigualdad no sale limpia. El criterio del límite evita el problema.

Comparación por límite

Si $a_n, b_n > 0$ y
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$
entonces ambas series **convergen o divergen juntas**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+5n}$$

1. Miro los grados dominantes: el término se comporta como $\frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$.
$$b_n = \frac{1}{n^2}$$
2. Calculo el límite del cociente.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+1}{n^4+5n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^2}{n^4+5n} = 2$$
3. El límite es finito y positivo, y la de referencia converge ($p = 2$).
$\Longrightarrow$ converge

Cómo elegir la serie de comparación

Quedeśe con los **términos dominantes** del numerador y del denominador, y simplifique. Lo que resulte es la p-serie con la que hay que comparar.
Es el mismo criterio de las asíntotas horizontales de la sesión 13 del volumen I: manda el grado.

23.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un monitoreo registra la carga contaminante de cada evento de lluvia. El evento n-ésimo aporta $c_n = \dfrac{50}{n^2}$ kg. ¿Es finita la carga total acumulada a lo largo de infinitos eventos?

Ejemplo

1. Reconozco una p-serie multiplicada por constante.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n^2} = 50 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
2. Con $p = 2 > 1$: converge.
$\Longrightarrow$ la carga total es finita
3. Su valor exacto es conocido: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
$$C = 50 \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$C \approx 82{,}2 \text{ kg}$$

Compare con un aporte $c_n = \frac{50}{n}$: los términos también tienden a cero, pero la serie **diverge** y la carga acumulada crecería sin límite.
La diferencia entre un sistema que se satura y otro que se contamina indefinidamente está en el exponente, no en que los aportes disminuyan. Ambos disminuyen.

Aplicación: gestión deportiva

El rendimiento marginal de la temporada n-ésima de un programa de formación aporta $r_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ puntos de índice de desempeño. ¿Está acotado el desempeño total alcanzable?

Ejemplo

1. Escribo el término como potencia.
$$r_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$
2. Es una p-serie con $p = \frac{3}{2} > 1$.
$\Longrightarrow$ converge

el desempeño total está acotado

El resultado tiene lectura directa: por muchas temporadas que se acumulen, el índice tiene un techo. Los rendimientos decrecientes del volumen I, llevados al infinito, producen aquí un límite *finito*.
Y basta cambiar el exponente a $p = 1$ para que el techo desaparezca. La frontera entre "mejora acotada" y "mejora sin límite" es sorprendentemente fina.

23.6 Síntesis

1. Todos estos criterios exigen **términos positivos**.
2. Criterio de la integral: serie e integral impropia comparten destino, **no valor**.
3. p-serie: converge si $p > 1$, diverge si $p \le 1$.
4. La **armónica diverge**, aunque muy despacio: la evidencia numérica engaña.
5. Comparación directa: acote por arriba para convergencia, por abajo para divergencia.
6. Comparación por límite: quedeśe con los **grados dominantes**.

Ejercicios propuestos

23.1 Decida por p-serie: (a) $\sum \frac{1}{n^4}$; (b) $\sum \frac{1}{n^{0,9}}$; (c) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; (d) $\sum \frac{3}{n^{5/2}}$.

23.2 Aplique el criterio de la integral: (a) $\sum \frac{1}{n \ln n}$; (b) $\sum n\, e^{-n^2}$.

23.3 Use comparación directa: (a) $\sum \frac{1}{n^3+2}$; (b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ (para $n \ge 2$); (c) $\sum \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$.

23.4 Use comparación por límite: (a) $\sum \frac{3n+2}{n^3-1}$; (b) $\sum \frac{n+4}{n^2+3n}$.

23.5 Explique por qué sumar los primeros mil términos de la armónica y ver que la suma ronda 7,5 no prueba que converja.

23.6 Los aportes de carga son $c_n = \frac{30}{n^{3/2}}$ kg. Decida si la carga total es finita.

23.7 Los aportes son ahora $c_n = \frac{30}{n \ln n}$ para $n \ge 2$. ¿Cambia la conclusión? Justifique.

23.8 Compare $\sum \frac{1}{n^{1,01}}$ y $\sum \frac{1}{n}$: ambas tienen términos casi idénticos para n moderado y sin embargo se comportan de forma distinta. Explique.

Respuestas

23.1 (a) converge ($p = 4$); (b) diverge ($p < 1$); (c) diverge ($p = \frac{1}{3}$); (d) converge ($p = \frac{5}{2}$).

23.2 (a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln x)] \to \infty$: diverge; (b) $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2e}$ finita: converge.

23.3 (a) $< \frac{1}{n^3}$, converge; (b) $> \frac{1}{\sqrt{n}}$, diverge; (c) $\leq \frac{1}{n^2}$, converge.

23.4 (a) comparar con $\frac{1}{n^2}$, límite 3: converge; (b) comparar con $\frac{1}{n}$, límite 1: diverge.

23.5 Porque la armónica diverge con lentitud logarítmica: la suma crece como $\ln n$, y para superar 10 hacen falta más de 12 000 términos. Ninguna suma parcial finita distingue convergencia de divergencia lenta.

23.6 $p = \frac{3}{2} > 1$: converge, la carga total es finita.

23.7 Sí cambia: por el ejercicio 2(a) esa serie **diverge**. La carga acumulada crecería sin límite pese a que los aportes tienden a cero.

23.8 El exponente 1,01 basta para que la integral $\int x^{-1,01}dx$ sea finita, mientras que la de x^{-1} es logarítmica y diverge. La frontera $p = 1$ es exacta, no aproximada, y ninguna comparación numérica de términos individuales la detecta.

SESIÓN 24

Criterios II: razón, raíz y series alternantes

Objetivo de la sesión

Aplicar los criterios de la razón y de la raíz a series con factoriales y potencias, estudiar las series alternantes con el criterio de Leibniz, y distinguir convergencia absoluta de condicional.

24.1 Cuando la comparación no basta

Los criterios de la sesión 23 exigen encontrar una serie de referencia. Ante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

no hay p-serie evidente con la cual comparar. Hace falta un criterio que mire la serie **por dentro**, comparando cada término con el anterior.

24.2 Criterio de la razón

Criterio de la razón o de D'Alembert

Sea $a_n > 0$ y

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

$L < 1$	la serie **converge**
$L > 1$	la serie **diverge**
$L = 1$	el criterio **no decide**

La intuición

El cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mide en qué proporción encoge cada término respecto del anterior. Si a la larga esa proporción es menor que uno, la serie se comporta como una **geométrica de razón L**, y ya sabemos que esas convergen.
De ahí que el umbral sea exactamente 1, igual que en la geométrica.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

1. Escribo el cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

2 Simplifico usando $(n+1)! = (n+1)\,n!$.

$$= \frac{2}{n+1}$$

3 Tomo el límite.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

converge

Cuándo usarlo

El criterio de la razón es el indicado cuando aparecen **factoriales** o **potencias n-ésimas**, porque ambos se simplifican de manera limpia al dividir términos consecutivos.
Es inútil, en cambio, con cocientes de polinomios: ahí el límite siempre da 1 y el criterio no decide. Para esos casos sirve la comparación de la sesión anterior.

El caso $L = 1$

No significa "converge" ni "diverge": significa **que hay que usar otro criterio**.
Compruebe: para $\sum \frac{1}{n}$ y para $\sum \frac{1}{n^2}$ el límite del cociente vale 1 en ambos casos, y sin embargo la primera diverge y la segunda converge. El criterio es genuinamente ciego ahí.

24.3 Criterio de la raíz

Criterio de la raíz o de Cauchy

Sea $a_n \geq 0$ y $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Se aplica la misma regla: $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$$

1 La potencia n-ésima invita a la raíz: se cancela de inmediato.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n+1}{4n+5}$$

2 Tomo el límite dividiendo entre n.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{5}{n}} = \frac{3}{4} < 1$$

converge

Regla práctica de elección: **factoriales** piden razón; **potencias n-ésimas completas** piden raíz. Si aparecen ambos, cualquiera de los dos funciona.

24.4 Series alternantes

Hasta aquí todos los criterios exigían términos positivos. Las series que alternan de signo tienen un criterio propio, y notablemente más generoso.

Criterio de Leibniz

La serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots, \qquad b_n > 0,$$

converge si se cumplen las dos condiciones:

(I) b_n es **decreciente**: $b_{n+1} \le b_n$;

(II) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

La serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

1. Compruebo que $b_n = \frac{1}{n}$ decrece.
   $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ✓
2. Compruebo que tiende a cero.
   $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ✓

converge (y su suma es $\ln 2$)

Un contraste que conviene fijar

$$\sum\frac{1}{n}\ \textbf{diverge}, \qquad \text{pero} \qquad \sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \textbf{converge}.$$

Los mismos términos, en la misma magnitud. Lo único que cambia es el signo alternado, y con él las cancelaciones parciales que impiden que la suma se dispare.

Estimación del error

En una serie alternante que cumple Leibniz, el error al truncar en el término n no supera el **primer término omitido**:

$$|S - S_n| \le b_{n+1}.$$

Esta cota es de una comodidad excepcional: permite saber cuántos términos hacen falta para una precisión dada, sin conocer la suma.
Para aproximar $\ln 2$ con error menor que $0{,}01$ basta con $\frac{1}{n+1} \le 0{,}01$, es decir $n \ge 99$ términos.

24.5 Convergencia absoluta y condicional

Definición

$\sum a_n$ converge **absolutamente** si $\sum |a_n|$ converge.
Converge **condicionalmente** si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

Teorema

La convergencia absoluta **implica** convergencia. El recíproco es falso.

Serie	$\sum a_n$	$\sum \lvert a_n \rvert$
$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	converge	diverge (condicional)
$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	converge	converge (absoluta)

Por qué la distinción no es académica

En una serie **absolutamente** convergente puede reordenarse los términos libremente: la suma no cambia.
En una **condicionalmente** convergente, no. Riemann demostró algo inquietante: reordenando los términos de la armónica alternante se puede obtener **cualquier** valor que se quiera.
Para el cálculo numérico esto importa: el orden de acumulación afecta al resultado.

24.6 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

Un tratamiento aplica dosis correctivas alternadas —añade y retira reactivo— con magnitudes $b_n = \dfrac{20}{n}$ mg/L. El efecto neto acumulado es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 20}{n}.$$

¿Se estabiliza el sistema? ¿Y si las dosis no alternaran?

Ejemplo

1. Verifico Leibniz: $\frac{20}{n}$ decrece y tiende a cero.
   converge
2. Su suma es $20 \ln 2$.
   $\approx 13{,}86$ mg/L
3. Sin alternancia sería la armónica multiplicada por 20.
   $\sum \dfrac{20}{n}$ **diverge**

alternando converge; sin alternar, no

La conclusión operativa es fuerte: un esquema de correcciones que **alterna signo** se estabiliza, mientras que uno que corrige siempre en la misma dirección acumula sin límite, aunque las dosis vayan disminuyendo.
Y como la convergencia es solo *condicional*, el orden de aplicación importa. No es lo mismo alternar estrictamente que agrupar varias adiciones seguidas.

Aplicación: gestión deportiva

Una campaña de captación invierte por rondas: la ronda n-ésima capta $\dfrac{5^n}{n!}$ cientos de afiliados. ¿Es finito el total captado?

Ejemplo

1. Hay factorial: aplico el criterio de la razón.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}$$
2. Tomo el límite.
$$L = 0 < 1$$
3. Converge. De hecho la suma es conocida.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = e^5$$

total finito ≈ 148 cientos

Verificación

Los primeros términos son 1; 5; 12,5; 20,8; 26,0; 26,0; 21,7; 15,5 … Crecen hasta la quinta ronda y luego caen rápido. El factorial termina imponiéndose sobre la potencia. ✓

24.7 Síntesis

1. Razón: $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$; útil con **factoriales**.
2. Raíz: $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$; útil con **potencias n-ésimas**.
3. En ambos, $L = 1$ **no decide**: hay que cambiar de criterio.
4. Leibniz: alternante con b_n decreciente y $b_n \to 0$ converge.
5. El error de truncamiento no supera el **primer término omitido**.
6. Absoluta $\Rightarrow$ convergente; la condicional **depende del orden**.

Ejercicios propuestos

24.1 Aplique el criterio de la razón: (a) $\sum \frac{3^n}{n!}$; (b) $\sum \frac{n!}{10^n}$; (c) $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

24.2 Aplique el criterio de la raíz: (a) $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (b) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ (para $n \geq 2$).

24.3 Muestre que para $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ el criterio de la razón da $L = 1$ en ambos casos, y explique qué se concluye.

24.4 Decida por Leibniz: (a) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; (b) $\sum \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$.

24.5 Clasifique como absoluta, condicional o divergente: (a) $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$; (b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; (c) $\sum (-1)^n$.

24.6 ¿Cuántos términos hacen falta para aproximar $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ con error menor que 0,001?

24.7 Un esquema de correcciones alterna con dosis $b_n = \frac{15}{\sqrt{n}}$ mg/L. ¿Converge? Compare con el caso sin alternancia.

24.8 Una campaña capta $\frac{4^n}{n!}$ afiliados por ronda. Decida la convergencia e identifique la suma.

Respuestas

24.1 (a) $L = 0$: converge; (b) $L = \infty$: diverge; (c) $L = \frac{1}{2}$: converge.

24.2 (a) $L = \frac{1}{2}$: converge; (b) $L = \lim \frac{1}{\ln n} = 0$: converge.

24.3 En ambos el cociente tiende a 1. Se concluye **nada**: hay que usar otro criterio. Con p-series se ve que la primera diverge y la segunda converge.

24.4 (a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ decrece a cero: converge; (b) $b_n \to 1 \neq 0$: **diverge** por el criterio del término general.

24.5 (a) absoluta ($p = 3$); (b) condicional (Leibniz sí, pero $p = \frac{1}{2}$ diverge); (c) divergente.

24.6 $\frac{1}{(n+1)^2} \le 0{,}001$ da $n + 1 \ge 32$, luego $n \ge 31$ términos.

24.7 Alternando converge por Leibniz. Sin alternar es una p-serie con $p = \frac{1}{2}$: **diverge**.

24.8 Por la razón, $L = 0$: converge. La suma desde $n = 0$ es $e^4 \approx 54{,}6$.

SESIÓN 25

Series de potencias y radio de convergencia

Objetivo de la sesión

Reconocer una serie de potencias como una función definida por una serie, hallar su radio e intervalo de convergencia con el criterio de la razón, y operar con ellas mediante derivación e integración término a término.

25.1 Series que dependen de una variable

Todas las series anteriores eran números: converían o no, y punto. Ahora aparece una variable, y con ella un cambio de naturaleza.

Serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Los c_n son los **coeficientes** y a es el **centro**.

Lo que cambia

Para cada valor de x se obtiene una serie numérica distinta, que puede converger o no. El conjunto de valores donde converge se llama **intervalo de convergencia**, y en él la serie *define una función*.
Es decir: una serie de potencias es una manera de construir funciones que no se podrían escribir de otro modo.

25.2 Radio de convergencia

Teorema

Para toda serie de potencias existe un $R \geq 0$, llamado **radio de convergencia**, tal que la serie:

- converge absolutamente si $|x-a| < R$;
- diverge si $|x-a| > R$;
- en los extremos $|x-a| = R$ hay que estudiar **caso por caso**.

Los casos límite son $R = 0$ (converge solo en el centro) y $R = \infty$ (converge en todo $\mathbb{R}$).

Cómo se calcula

Con el criterio de la razón de la sesión 24, aplicado a $|a_n|$, e imponiendo que el límite sea menor que uno. La desigualdad resultante, despejada, tiene la forma $|x-a|<R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

1. Aplico el criterio de la razón al valor absoluto.
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\frac{n}{n+1}$$
2. Tomo el límite.
$$L = |x|$$
3. Impongo $L<1$.
$$|x|<1 \implies R=1$$
4. Estudio los extremos por separado. En $x=1$ queda la armónica: diverge. En $x=-1$ queda la armónica alternante: converge.
$$\text{intervalo} = [-1,1)$$

Los extremos siempre se estudian aparte

El criterio de la razón da $L=1$ en los extremos, y ahí **no decide**. Cada extremo produce una serie numérica distinta que hay que analizar con los criterios de las sesiones 23 y 24.
En el ejemplo, un extremo converge y el otro no: el intervalo resulta semiabierto. Olvidar este análisis es el error más común de la sesión.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

1. Cociente de términos consecutivos.
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$
2. Límite.
$$L = 0 < 1 \text{ para todo } x$$

$$R=\infty:\ \text{converge en todo } \mathbb{R}$$

Esta serie, como se verá en la próxima sesión, *es* la función exponencial.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = (n+1)|x| \longrightarrow \infty \quad \text{salvo si } x=0.$$

$R = 0$: converge solo en $x = 0$

25.3 La serie geométrica como función

El ejemplo más importante ya lo conocemos desde la sesión 22, leído ahora al revés.

Teorema

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \qquad |x| < 1$$

Es la misma fórmula $\frac{a}{1-r}$, con $a = 1$ y $r = x$. Lo nuevo es la lectura: en vez de *sumar* una serie conocida, se *representa* una función conocida mediante una serie.
De esta única identidad se derivan muchísimas otras por sustitución, derivación e integración.

Tres series obtenidas de la anterior

1. Sustituyendo x por $-x$.
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$
2. Sustituyendo x por x^2.
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad |x| < 1$$
3. Sustituyendo x por $3x$.
$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n, \qquad |x| < \tfrac{1}{3}$$

Error frecuente

La sustitución **cambia el radio**. En el tercer caso la condición $|3x| < 1$ obliga a $|x| < \frac{1}{3}$: el intervalo se encoge.
Sustituya también en la condición, no solo en la fórmula.

25.4 Derivación e integración término a término

Teorema

Dentro del intervalo abierto de convergencia, una serie de potencias se puede derivar e integrar **término a término**, y el radio R **no cambia**:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x-a)^{n-1}, \qquad \int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Este teorema es lo que vuelve poderosas a las series de potencias: convierte operaciones de cálculo en manipulaciones algebraicas de coeficientes.
Y permite integrar funciones sin antiderivada elemental, como e^{-x^2}: no hay fórmula cerrada, pero sí serie.

Una serie para $\ln(1+x)$

1. Parto de la geométrica con $-x$.
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$
2. Integro ambos lados término a término.
$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + C$$
3. La integral de la izquierda es conocida.
$$\ln(1+x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$
4. Evalúo en $x = 0$ para hallar C: ambos lados dan cero.
$$C = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

Verificación

En $x = 1$ la serie da $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, que es la armónica alternante de la sesión 24. Y en efecto su suma es $\ln 2 \approx 0{,}693$. ✓
Note que $x = 1$ es un extremo del intervalo: ahí la convergencia es *condicional*, y el teorema de derivación ya no garantiza nada. Que funcione hay que comprobarlo aparte.

25.5 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

La fracción de contaminante removida por un tren de n unidades de tratamiento, cada una con eficiencia p, se acumula como serie geométrica. Para $p = 0{,}4$ la fracción remanente tras infinitas unidades y el costo acumulado se estudian con la misma herramienta.
Calcule la serie que representa el **factor de acumulación** $\dfrac{1}{1-p}$ y úsela para estimar con tres términos.

Ejemplo

1. Escribo la serie con $p = 0{,}4$.
$$\frac{1}{1-0{,}4} = 1 + 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \dots$$

2. Sumo los tres primeros términos.
   $S_3 = 1{,}56$
3. Comparo con el valor exacto.
   $\frac{1}{0{,}6} = 1{,}667$
4. El error es el resto, acotado por la cola geométrica.
   $\text{error} = \frac{0{,}064}{1 - 0{,}4} = 0{,}107$

La cola de una geométrica es otra geométrica, lo que da una cota de error exacta y sencilla. Es la ventaja de trabajar con la familia de referencia: no solo se sabe que converge, se sabe **cuánto falta**.

Aplicación: gestión deportiva

El valor presente de un flujo de ingresos que crece a tasa g y se descuenta a tasa r es

$$VP = \sum_{n=0}^{\infty} R \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n .$$

Determine para qué valores converge e interprete.

Ejemplo

1. Es geométrica con razón $q = \frac{1+g}{1+r}$.
   converge si $|q| < 1$
2. La condición equivale a comparar las dos tasas.
   $\frac{1+g}{1+r} < 1 \iff g < r$
3. En ese caso la suma es conocida.
   $VP = \frac{R}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{R(1+r)}{r-g}$

$$VP = \frac{R(1+r)}{r-g}, \qquad g < r$$

El resultado tiene una lectura financiera contundente: si el flujo crece **más rápido de lo que se descuenta** ($g \geq r$), el valor presente es **infinito**.
Eso no significa que el contrato valga infinito: significa que el modelo dejó de tener sentido. Ningún flujo real crece indefinidamente por encima de la tasa de descuento. La divergencia de la serie es la matemática avisando de que la hipótesis es insostenible.

25.6 Síntesis

1. Una serie de potencias **define una función** en su intervalo de convergencia.
2. El radio R se halla con el criterio de la **razón**.
3. Los **extremos** se estudian aparte, uno por uno.
4. $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ para $|x| < 1$ es la identidad madre.
5. Al sustituir, **cambia también el radio**.
6. Se puede derivar e integrar **término a término** sin cambiar R.

Ejercicios propuestos

25.1 Halle radio e intervalo de convergencia: (a) $\sum \frac{x^n}{n^2}$; (b) $\sum \frac{x^n}{2^n}$; (c) $\sum n!\,x^n$; (d) $\sum \frac{(x-3)^n}{n}$.

25.2 Halle radio e intervalo de $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

25.3 Obtenga una serie para $\frac{1}{1-2x}$ e indique su radio.

25.4 Obtenga una serie para $\frac{1}{2+x}$. (Sugerencia: factorice el 2.)

25.5 Derive término a término $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ y compruebe que obtiene la serie de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

25.6 Integre término a término la serie de $\frac{1}{1+x^2}$ para obtener una serie de $\tan^{-1} x$. Evalúela en $x = 1$ e interprete el resultado.

25.7 Un tren de tratamiento tiene factor de acumulación $\frac{1}{1-p}$ con $p = 0{,}55$. Estime con cuatro términos y acote el error.

25.8 Un contrato genera $R = 40$ millones con $g = 0{,}03$ y $r = 0{,}09$. Halle el valor presente. ¿Qué ocurriría con $g = 0{,}12$?

Respuestas

25.1 (a) $R = 1$, intervalo $[-1, 1]$ (ambos extremos convergen, $p = 2$); (b) $R = 2$, intervalo $(-2, 2)$; (c) $R = 0$; (d) $R = 1$, intervalo $[2, 4)$.

25.2 $R = \infty$: converge en todo $\mathbb{R}$. Es la serie del coseno.

25.3 $\sum 2^n x^n$, con $R = \frac{1}{2}$.

25.4 $\frac{1}{2+x} = \frac{1/2}{1+x/2} = \frac{1}{2}\sum (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n$, con $R = 2$.

25.5 Derivando: $\sum n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, mismo radio $R = 1$.

25.6 $\tan^{-1} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. En $x = 1$ da $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$, la serie de Leibniz para π. Converge, pero tan despacio que es inútil para calcular π en la práctica.

25.7 $S_4 = 1 + 0{,}55 + 0{,}3025 + 0{,}1664 = 2{,}019$; exacto $\frac{1}{0{,}45} = 2{,}222$; cota del error $\frac{0{,}0915}{0{,}45} = 0{,}203$.

25.8 $VP = \frac{40(1{,}09)}{0{,}06} = 726{,}7$ millones. Con $g = 0{,}12 > r$ la serie **diverge**: el modelo carece de sentido.

SESIÓN 26

Series de Taylor y Maclaurin. Síntesis

Objetivo de la sesión

Construir la serie de Taylor de una función, reconocer los desarrollos fundamentales, estimar el error de truncamiento, y cerrar el curso con una mirada de conjunto sobre los dos volúmenes.

26.1 La pregunta inversa de la sesión anterior

En la sesión 25 una serie de potencias definía una función. Ahora se invierte la pregunta: dada una función, ¿existe una serie de potencias que la represente? Y si existe, ¿cuáles son sus coeficientes?

La deducción de los coeficientes

Suponga que $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$. Derivando término a término y evaluando en $x = a$, en cada paso sobrevive un solo término:

$$f(a) = c_0, \qquad f'(a) = c_1, \qquad f''(a) = 2c_2, \qquad f'''(a) = 6c_3, \ldots$$

En general $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$, de donde los coeficientes quedan determinados sin ambigüedad.

Serie de Taylor y de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cuando el centro es $a = 0$ se llama **serie de Maclaurin**.

26.2 Construcción: el caso de e^x

Serie de Maclaurin de e^x

1. Calculo las derivadas sucesivas. Todas son iguales.
   $f^{(n)}(x) = e^x$
2. Evalúo en el centro $a = 0$.
   $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n

3 Sustituyo en la fórmula.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4 El radio se calculó en la sesión 25 con el criterio de la razón.

$$R = \infty$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = \infty \text{ (converge para todo } x \in \mathbb{R})$$

Verificación

Con $x = 1$: $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}71\overline{6}$, frente a $e = 2{,}71828$. Con seis términos el error es de $0{,}0016$. ✓

Aquí queda cerrado un círculo: en la sesión 15 del volumen I, e se definió como $\lim(1 + 1/n)^n$, un límite que convergía con lentitud desesperante. Esta serie lo calcula muchísimo más rápido.

26.3 Los desarrollos fundamentales

Función	Serie de Maclaurin	Radio
e^x	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞
$\operatorname{sen} x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$\cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$\dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1
$\ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	1
$\tan^{-1} x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	1

Dos observaciones que ahorran memoria

El seno solo tiene potencias **impares** y el coseno solo **pares**: es su paridad, de la sesión 14 del volumen I, escrita en los coeficientes.

Y derivando la serie del seno término a término se obtiene exactamente la del coseno. Las relaciones entre funciones se conservan en sus series.

26.4 Polinomios de Taylor y error

En la práctica no se usa la serie completa sino sus primeros términos.

Polinomio de Taylor de grado n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Resto de Lagrange

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún c entre a y x.

La estructura del resto no es casual: es el **teorema del valor medio** de la sesión 26 del volumen I, generalizado. Con $n = 0$ se reduce exactamente a $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$.
De hecho, $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ es la *recta tangente*. Los polinomios de Taylor son la continuación natural de la idea que abrió el volumen I: aproximar una curva por algo más simple.

Aproximar $\operatorname{sen}(0{,}3)$ con tres términos

1. Escribo el polinomio de grado 5.
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
2. Evalúo en $x = 0{,}3$.
$$0{,}3 - 0{,}0045 + 0{,}00002025 = 0{,}29552$$
3. Acoto el error con el primer término omitido, ya que la serie es alternante (sesión 24).
$$|R| \le \frac{0{,}3^7}{5040} = 4{,}3 \times 10^{-8}$$

$$\operatorname{sen}(0{,}3) \approx 0{,}295520$$

Verificación

El valor real es 0,2955202. El error efectivo es menor que 10^{-7}, dentro de la cota. ✓

26.5 Integrar lo que no tiene antiderivada

Aquí las series resuelven un problema que quedó abierto en la sesión 9.

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

1. Sustituyo x^2 en la serie de la exponencial.
$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

2. Integro término a término entre 0 y 1.
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots$$
3. Sumo cinco términos.
$\approx 0{,}7475$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}7468$$

La función e^{-x^2} **no tiene antiderivada elemental**: está demostrado que no existe. Y sin embargo su integral definida se calcula con la precisión que se quiera.
Esa es la respuesta definitiva a la limitación que apareció en la sesión 9. Las series de potencias no eluden el problema: lo resuelven.
Esta integral es la base de la distribución normal, y las tablas estadísticas que usted consultará en cualquier curso de probabilidad se construyeron exactamente así.

26.6 Aplicaciones

Aplicación: ingeniería ambiental

La ecuación de decaimiento $C(t) = C_0 e^{-kt}$ se linealiza para tiempos cortos. Con $C_0 = 80$ mg/L y $k = 0{,}05$, compare la aproximación lineal con el valor exacto a 1 y a 10 días.

Ejemplo

1. Desarrollo la exponencial en serie.
$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2} - \dots$$
2. La aproximación lineal conserva dos términos.
$C(t) \approx 80\,(1 - 0{,}05t)$
3. En $t = 1$: aproximado 76,00; exacto $80e^{-0{,}05} = 76{,}10$.
error $= 0{,}1\,\%$
4. En $t = 10$: aproximado 40,00; exacto $80e^{-0{,}5} = 48{,}52$.
error $= 17{,}6\,\%$

La aproximación lineal es excelente cuando $kt \ll 1$ y desastrosa cuando no. El término cuadrático $\frac{(kt)^2}{2}$ dice exactamente cuándo dejar de confiar en ella.
Es la justificación formal de una práctica común en ingeniería: linealizar. La serie no solo la permite, también **acota su validez**.

Aplicación: gestión deportiva

El factor de descuento continuo e^{-rt} suele aproximarse por $\frac{1}{1+rt}$ en cálculos rápidos. Compare ambas expresiones mediante sus series.

Ejemplo

1. Serie del factor exacto.
$$e^{-rt} = 1 - rt + \frac{(rt)^2}{2} - \dots$$
2. Serie de la aproximación, por la geométrica de la sesión 25.
$$\frac{1}{1+rt} = 1 - rt + (rt)^2 - \dots$$
3. Comparo término a término.
coinciden hasta el lineal; difieren en el cuadrático

error del orden de $\frac{(rt)^2}{2}$

Con $r = 0{,}08$ y $t = 2$ el error relativo es de un 1,3 %: aceptable. Con $t = 15$ pasa del 70 %: inaceptable.
Las series permiten **cuantificar** cuándo una simplificación de uso común deja de ser legítima, en vez de confiar en la costumbre.

26.7 Síntesis del curso

El volumen II siguió una sola línea:

$$\text{antiderivada} \longrightarrow \text{integral definida} \longrightarrow \text{aplicaciones} \longrightarrow \text{series}$$

Empezamos preguntando cómo reconstruir una cantidad a partir de su ritmo. El **teorema fundamental** conectó esa pregunta algebraica con el problema geométrico del área, y de ahí salieron las técnicas y las aplicaciones: áreas, volúmenes, trabajo, valores medios.
El último módulo llevó la idea al infinito. Y en las series de Taylor las dos mitades del cálculo se encuentran: los coeficientes son **derivadas** y el resultado se usa para **integrar**. El volumen I y el volumen II resultan ser el mismo edificio visto desde dos lados.

Lo que queda por delante

Este curso trabajó con funciones de *una* variable. La mayoría de los problemas reales de ingeniería y de gestión dependen de varias: la concentración varía con la posición y el tiempo; el rendimiento depende de múltiples insumos.
Ese es el objeto del cálculo multivariable, donde reaparecerán derivadas —ahora parciales— e integrales —ahora dobles y triples—. Y las ecuaciones diferenciales, que asomaron en la sesión 9 y en el modelo logístico de la sesión 13, tendrán curso propio.

El hábito que debe sobrevivir al curso

Verifique siempre. Derive el resultado de una integral. Sume de vuelta las fracciones parciales. Revise las unidades. Compare con la geometría elemental cuando la región sea simple. Acote el error cuando trunque una serie.
A lo largo de estos dos volúmenes la verificación detectó signos invertidos, volúmenes que no correspondían, puntos que no pertenecían a la curva y ángulos incoherentes con su pendiente. Ninguno era error de concepto; ninguno se habría notado sin comprobar.

Hasta aquí el cálculo integral.

Gracias por el semestre.

Ejercicios propuestos

26.1 Halle la serie de Maclaurin de: (a) e^{2x}; (b) $\cos(3x)$; (c) $\operatorname{sen}(x^2)$.

26.2 Halle los tres primeros términos de la serie de Taylor de $f(x)=\sqrt{x}$ centrada en $a=1$.

26.3 Aproxime $e^{0{,}5}$ con cuatro términos y acote el error.

26.4 Aproxime $\cos(0{,}2)$ con tres términos y compare con el valor real.

26.5 Use series para calcular $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con cuatro términos.

26.6 Use series para calcular $\int_0^{0{,}5} e^{-x^2}\,dx$ con cuatro términos.

26.7 Con $C_0=120$ mg/L y $k=0{,}08$, compare $C(t)$ exacto con la aproximación lineal en $t=2$ y $t=12$ días. Comente.

26.8 Compare e^{-rt} con $\frac{1}{1+rt}$ para $r=0{,}10$ en $t=1$, $t=5$ y $t=20$. ¿Hasta dónde es aceptable la aproximación?

Respuestas

26.1 (a) $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$; (b) $\sum \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$; (c) $\sum \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$.

26.2 $1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\dots$

26.3 $1+0{,}5+0{,}125+0{,}0208=1{,}6458$; exacto $1{,}64872$; error $<0{,}0026$.

26.4 $1-0{,}02+0{,}0000667=0{,}98007$; real $0{,}980067$.

26.5 $1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35\,280}\approx 0{,}946083$.

26.6 $0{,}5-\frac{0{,}125}{3}+\frac{0{,}03125}{10}-\frac{0{,}0078}{42}\approx 0{,}461272$.

26.7 En $t=2$: lineal $100{,}8$ frente a exacto $102{,}3$ (error $1{,}5\,\%$). En $t=12$: lineal $4{,}8$ frente a exacto $45{,}9$: la aproximación pierde todo sentido, e incluso predeciría valores negativos poco después.

26.8 En $t=1$: $0{,}9048$ frente a $0{,}9091$ ($0{,}5\,\%$). En $t=5$: $0{,}6065$ frente a $0{,}6667$ ($10\,\%$). En $t=20$: $0{,}1353$ frente a $0{,}3333$ ($146\,\%$). Aceptable solo mientras rt sea pequeño, digamos por debajo de $0{,}3$.

APÉNDICE A

Métodos numéricos de integración

Objetivo del apéndice

Aproximar una integral definida cuando la antiderivada no existe en términos elementales o cuando la función solo se conoce por una tabla de datos, acotar el error cometido, y localizar numéricamente los ceros de una función con los métodos de bisección y de Newton.

A.1 Cuando la antiderivada no sirve

Todo el Módulo II se dedicó a calcular antiderivadas. Conviene decir con claridad que ese programa tiene un límite, y que el límite se alcanza pronto.

Dos situaciones distintas

1. **La antiderivada existe pero no es elemental.** Integrales como

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

   tienen integrando continuo —luego, por el TFC, tienen antiderivada—, pero esa antiderivada **no se puede escribir** con las funciones del curso. No es que no la hayamos encontrado: se demuestra que no existe.

2. **No hay fórmula en absoluto.** El caudal de un río, la concentración de un contaminante o la asistencia a un escenario se conocen por **mediciones**: una tabla de pares (t_i, f_i). No hay nada que antiderivar.

En ambos casos la integral *existe*; lo que falta es una manera de calcularla. Los métodos numéricos la aproximan tan bien como se quiera.

Todos los métodos de este apéndice comparten una idea: sustituir f por una función sencilla que la aproxime en cada subintervalo, e integrar esa. La suma de Riemann de la sesión 3 ya lo hacía, con constantes. Aquí se usan rectas y parábolas, y la ganancia en precisión es enorme.

Es el mismo problema que en la sesión 26 se resolvió por otra vía: desarrollar el integrando en serie e integrar término a término. Ese camino sirve para el primer caso y no para el segundo.

A.2 La regla del trapecio

Regla del trapecio

Con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

De dónde sale el 2

En cada subintervalo se reemplaza la curva por la **recta secante** que une sus dos extremos. La región bajo esa recta es un trapecio de altura Δx y bases $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, de área $\frac{\Delta x}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$.
Al sumar los n trapecios, cada punto *interior* aparece dos veces —como extremo derecho de un trapecio y como extremo izquierdo del siguiente— mientras que $f(a)$ y $f(b)$ aparecen una sola vez. De ahí el patrón $1, 2, 2, \ldots, 2, 1$.

Cota del error del trapecio

Si $|f''(x)| \le K$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_T| = \left|\int_a^b f\,dx - T_n\right| \;\le\; \frac{K(b-a)^3}{12\,n^2}.$$

Cómo se lee esa cota

Aparece f'', que mide la **concavidad**. Es coherente: sobre una recta el trapecio es exacto, y el error crece con lo que la curva se aparta de su secante.
Y aparece n^2 en el denominador: **duplicar** el número de subintervalos divide el error entre **cuatro**.

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con $n = 4$

1. Calculo Δx y tabulo el integrando.
   $\Delta x = \frac{1}{4}$; $\quad f = 1;\ 0{,}939413;\ 0{,}778801;\ 0{,}569783;\ 0{,}367879$
2. Aplico el patrón $1, 2, 2, 2, 1$.
   $$T_4 = \frac{0{,}25}{2}\left[1 + 2(0{,}939413 + 0{,}778801 + 0{,}569783) + 0{,}367879\right]$$
3. Opero.
   $T_4 = 0{,}125 \times 5{,}943873$

$$\boxed{T_4 = 0{,}742984}$$

Verificación

El valor correcto, con siete cifras, es 0,7468241. El error real es 0,00384.
La cota lo anticipaba: $f''(x) = (4x^2 - 2)\,e^{-x^2}$ tiene módulo máximo $K = 2$ en $[0, 1]$, de modo que $|E_T| \le \frac{2\cdot 1}{12\cdot 16} = 0{,}0104$. El error real es menor que la cota,

como debe ser. ✓

A.3 La regla de Simpson

Si aproximar con rectas funciona, aproximar con **parábolas** debe funcionar mejor. Esa es toda la idea.

Regla de Simpson

Con n **par** y $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; S_n = \frac{\Delta x}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big].$$

El patrón $1, 4, 2, 4, \ldots, 4, 1$

Los subintervalos se toman **de dos en dos**: por cada terna de puntos consecutivos pasa una única parábola, y su integral vale $\frac{\Delta x}{3}\,[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}]$. Al encadenar las parábolas, los puntos de índice **impar** —los centros de cada terna— llevan siempre coeficiente 4; los de índice **par** son compartidos por dos parábolas y llevan 2; los extremos a y b pertenecen a una sola y llevan 1. Comprobación rápida: la suma de todos los coeficientes, multiplicada por $\frac{\Delta x}{3}$, debe dar $b - a$.

Tres tropiezos habituales

- Usar n **impar**. La fórmula no aplica: no se puede agrupar en ternas.
- Dividir entre 2 en vez de entre 3, por analogía con el trapecio.
- Poner 4 en los extremos. Los extremos llevan **siempre** 1.

Cota del error de Simpson

Si $\left|f^{(4)}(x)\right| \le K$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_S| \;\le\; \frac{K(b-a)^5}{180\,n^4}.$$

La misma integral, con los mismos cinco datos

1. Aplico el patrón $1, 4, 2, 4, 1$.

   $$S_4 = \frac{0{,}25}{3}\,[1 + 4(0{,}939413) + 2(0{,}778801) + 4(0{,}569783) + 0{,}367879]$$

2. Opero.

   $$S_4 = 0{,}0833333 \times 8{,}962265$$

$$\boxed{S_4 = 0{,}746855}$$

La comparación que importa

Método	Valor	Error
Trapecio T_4	0,742984	$3{,}84 \times 10^{-3}$
Simpson S_4	0,746855	$3{,}12 \times 10^{-5}$
Valor exacto	0,7468241	—

Con **los mismos cinco datos** y sin ninguna evaluación adicional, Simpson es unas cien veces más preciso. Esa es la razón de que sea el método estándar cuando se dispone de un número par de subintervalos.

Por qué la ventaja es tan grande

Compare los exponentes de n: el error del trapecio va como $1/n^2$ y el de Simpson como $1/n^4$. Duplicar los datos divide el error entre 4 en un caso y entre 16 en el otro.
Hay además un regalo. La cota de Simpson depende de $f^{(4)}$, luego el método es **exacto** para todo polinomio de grado ≤ 3, aunque se construyó con parábolas. Un grado de más, gratis, por la simetría de la construcción.

A.4 Ceros de una función

Este tema entra al apéndice por una deuda concreta. En la sesión 13, para descomponer $\frac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones parciales, hubo que **factorizar** el denominador, y siempre se eligieron ejemplos con raíces enteras. Fuera del aula eso no ocurre: las raíces son irracionales y hay que localizarlas numéricamente.

A.4.1 Bisección

Método de bisección

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)\,f(b) < 0$, el teorema del valor intermedio garantiza una raíz en el interior. Se evalúa f en el punto medio $m = \frac{a+b}{2}$ y se conserva el subintervalo donde el signo cambia. Repitiendo, el intervalo se reduce a la mitad en cada paso.

Tras k pasos la raíz está localizada con un error menor que $\dfrac{b-a}{2^k}$. Es lento —cada paso gana poco más de tres décimas de cifra decimal— pero **nunca falla**: si hay cambio de signo, converge.

A.4.2 Newton–Raphson

Método de Newton

Partiendo de x_0 razonablemente próximo a la raíz,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Es la recta tangente, del volumen I

La fórmula no se memoriza: se deduce. La recta tangente a $y = f(x)$ en x_n es $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Igualando a cero y despejando x sale exactamente x_{n+1}.
Es decir: en vez de buscar el cero de la curva, se busca el de su tangente, que se calcula de una vez. Repetido, el procedimiento converge con rapidez notable —el número de cifras correctas tiende a **duplicarse** en cada iteración.

La raíz real de $x^3 - 2x - 5 = 0$

1. Localizo el cambio de signo: $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$.
   hay raíz en $(2, 3)$; $\quad x_0 = 2$
2. Calculo la derivada.
   $f'(x) = 3x^2 - 2$
3. Primera iteración.
   $x_1 = 2 - \dfrac{-1}{10} = 2{,}1$
4. Segunda y tercera.
   $x_2 = 2{,}0945681, \qquad x_3 = 2{,}0945515$

$$x \approx 2{,}0945515$$

Verificación

Sustituyendo: $2{,}0945515^3 - 2(2{,}0945515) - 5 \approx 2 \times 10^{-9}$. ✓
Obsérvese el ritmo: x_1 acierta dos cifras, x_2 acierta cinco, x_3 acierta nueve. Tres pasos bastaron para lo que a la bisección le habría costado unos treinta.

Newton no siempre converge

La rapidez tiene contrapartida. El método **falla** si $f'(x_n)$ se aproxima a cero —la tangente es casi horizontal y x_{n+1} sale disparado— o si el punto de partida está lejos de la raíz.
La práctica sensata es **combinar**: unos pocos pasos de bisección para acercarse con seguridad, y luego Newton para refinar.

A.5 Síntesis

1. Hay integrales con antiderivada **no elemental**, y funciones que solo existen como tabla de datos. En ambos casos la integral existe.
2. Trapecio: patrón $1, 2, \ldots, 2, 1$ y factor $\frac{\Delta x}{2}$. Error $\sim 1/n^2$.
3. Simpson: patrón $1, 4, 2, \ldots, 4, 1$, factor $\frac{\Delta x}{3}$ y n **par**. Error $\sim 1/n^4$, y exacto hasta grado 3.
4. Con los mismos datos, Simpson gana por dos órdenes de magnitud.
5. **Bisección**: segura y lenta. **Newton**: rápida y exigente con el punto de partida. Combinarlas es lo razonable.

Ejercicios propuestos

A.1 Aproxime $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ con $n = 4$ por trapecio y por Simpson, y compare con el valor exacto $\ln 2 = 0{,}693147$.

A.2 Sin calcular la integral, acote el error de T_{10} para $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. ¿Cuántos subintervalos harían falta para garantizar un error menor que 10^{-4}?

A.3 Un caudal se mide cada dos horas, en $t = 0, 2, 4, 6, 8$ h, y da $Q = 12{,}0$; 18,5; 25,0; 20,5; 14,0 m^3/s.
Estime el volumen total por Simpson, en metros cúbicos.

A.4 Explique por qué Simpson da el valor *exacto* de $\int_0^2 x^3dx$ con solo $n = 2$, y verifíquelo.

A.5 Localice con bisección, hasta un error menor que 0,1, la raíz de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1, 2]$.

A.6 Refine la raíz anterior con dos pasos de Newton desde $x_0 = 1{,}5$.

A.7 El denominador $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ no tiene raíces racionales. Localice su raíz en $(0, 1)$ con dos pasos de Newton desde $x_0 = 0{,}5$, y explique para qué serviría ese dato si hubiera que integrar $\frac{1}{x^3-6x^2+9x-3}$.

A.8 ¿Por qué la cota del error del trapecio se anula cuando f es una recta? Interprete geométricamente.

Respuestas

A.1 $T_4 = 0{,}697024$ (error $3{,}9 \times 10^{-3}$); $S_4 = 0{,}693254$ (error $1{,}1 \times 10^{-4}$).

A.2 Con $K = 2$: $|E_T| \le \frac{2}{12 \cdot 100} = 1{,}7 \times 10^{-3}$. Para 10^{-4} se necesita $n^2 \ge \frac{2}{12 \cdot 10^{-4}}$, es decir $n \ge 41$; con $n = 42$ (par, por comodidad) basta.

A.3 $S_4 = \frac{2}{3}\,[12 + 4(18{,}5) + 2(25) + 4(20{,}5) + 14] = \frac{2}{3}(232) = 154{,}67$ (m^3/s)·h, es decir $154{,}67 \times 3600 \approx 556\,800$ m^3.

A.4 Porque la cota del error depende de $f^{(4)}$, y para un polinomio de grado 3 se tiene $f^{(4)} \equiv 0$. En efecto, $S_2 = \frac{1}{3}\,[0 + 4(1) + 8] = 4 = \int_0^2 x^3dx$.

A.5 $f(1) = -1$, $f(2) = 5$; los puntos medios sucesivos son 1,5 ($f > 0$), 1,25 ($f < 0$), 1,375 ($f > 0$): la raíz está en (1,25; 1,375), de amplitud 0,125. Un paso más da (1,3125; 1,375), ya con amplitud $< 0{,}1$.

A.6 $x_1 = 1{,}347826$; $x_2 = 1{,}325200$. (El valor correcto es 1,324718.)

A.7 $x_1 = 0{,}466667$; $x_2 = 0{,}467909$. Serviría para factorizar el denominador y poder aplicar fracciones parciales: sin las raíces, la técnica de la sesión 13 no arranca.

A.8 Si f es una recta, $f'' \equiv 0$ y la cota vale cero. Geométricamente la secante *coincide* con la curva, de modo que el trapecio no aproxima el área: la reproduce exactamente.

APÉNDICE B

Aplicaciones avanzadas: medio ambiente

Objetivo del apéndice

Plantear y resolver, con las técnicas de los Módulos II y III, cuatro problemas típicos de la ingeniería forestal, ambiental y topográfica: volumen escurrido a partir de un hidrograma, volumen de madera de un fuste, carga contaminante acumulada y áreas y volúmenes de movimiento de tierra.

B.1 Una advertencia sobre unidades

Los ejercicios del cuerpo del libro fueron diseñados para que las unidades salieran solas. En los problemas reales no ocurre.

El error que arruina un informe

Un caudal se mide en m^3/s y un evento de lluvia se reporta en horas. La integral $\int Q\,dt$ entrega entonces $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\cdot\mathrm{h}$, que **no** son metros cúbicos: falta multiplicar por 3 600.
La regla es simple y no admite excepciones: **la unidad del resultado es el producto de la unidad del integrando por la de la variable de integración**. Escríbala en cada paso, no al final.

Es el mismo aviso de la sesión 4, ahora con consecuencias: un factor $3\,600$ mal puesto convierte un embalse en una piscina.

B.2 Hidrogramas: del caudal al volumen escurrido

Un **hidrograma** es la curva de caudal frente al tiempo en una sección de control. Su área es el volumen total que pasó por ahí: es, otra vez, la integral como acumulación.

Aplicación: ingeniería ambiental

Tras una tormenta, el caudal en el punto de aforo de una microcuenca se ajusta a

$$Q(t) = 2 + 18\,t\,e^{-0{,}5t} \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s},\ t \text{ en horas}).$$

Halle el volumen total escurrido en las primeras 12 horas y el caudal pico.

Ejemplo

1. Separo el flujo base, que es inmediato.

$$\int_0^{12} 2\,dt = 24$$

2 La parte de crecida pide **integración por partes** (sesión 12), con $u = t$ y $dv = e^{-0{,}5t}dt$.

$$\int t\,e^{-0{,}5t}dt = -2t\,e^{-0{,}5t} - 4e^{-0{,}5t}$$

3 Evalúo entre 0 y 12.

$$18\left[-2t\,e^{-0{,}5t} - 4e^{-0{,}5t}\right]_0^{12} = 18\left(4 - 28e^{-6}\right)$$

4 Sumo ambas partes.

$$V = 24 + 70{,}75 = 94{,}75\ \text{m}^3/\text{s}\cdot\text{h}$$

5 **Convierto** a metros cúbicos.

$$V = 94{,}75 \times 3\,600$$

$$\boxed{V \approx 3{,}41 \times 10^5\ \text{m}^3}$$

Verificación

El caudal pico se obtiene con la herramienta del volumen I: derivar e igualar a cero.

$$Q'(t) = 18e^{-0{,}5t}\,(1 - 0{,}5t) = 0 \implies t = 2\ \text{h},$$

$$Q(2) = 2 + 36e^{-1} \approx 15{,}2\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Coherencia: un caudal medio de $94{,}75/12 \approx 7{,}9\ \text{m}^3/\text{s}$ frente a un pico de 15,2. El promedio está por debajo del pico y por encima del flujo base, como debe ser. ✓

Cuando no hay fórmula

En la práctica el hidrograma no es una fórmula sino una tabla de lecturas del limnígrafo. Entonces el volumen se calcula con **Simpson** (apéndice A) sobre los datos medidos, y la integral se obtiene sin que exista función alguna que integrar.

Ese es el uso más frecuente del cálculo integral en hidrología: no resolver una integral, sino *reconocer* que el volumen **es** una integral y aproximarla con los datos disponibles.

B.3 Volumen de madera de un fuste

El volumen comercial de un árbol es el de un sólido de revolución: se integra el área de la sección transversal a lo largo del fuste. Es el método de discos de la sesión 16 aplicado a un tronco.

Modelo de ahusamiento

Si el radio a la altura h satisface

$$r^2(h) = r_0^2\left(1 - \frac{h}{H}\right)^k,$$

con H la altura total y r_0 el radio en la base, entonces

$$V = \pi\int_0^H r^2(h)\,dh = \pi r_0^2 H\int_0^1 (1-u)^k du = \frac{\pi r_0^2 H}{k+1}.$$

Un solo parámetro decide la forma

El exponente k describe cómo se adelgaza el fuste, y el resultado es de una limpieza notable:

k	**Forma**	**Volumen**
0	cilindro	$\pi r_0^2 H$
1	paraboloide	$\frac{1}{2}\pi r_0^2 H$
2	cono	$\frac{1}{3}\pi r_0^2 H$
3	neiloide	$\frac{1}{4}\pi r_0^2 H$

El **coeficiente mórfico** de la dasometría —ese número entre 0 y 1 por el que se multiplica el cilindro— no es una constante empírica sacada de una tabla: es $\frac{1}{k+1}$, y sale de la integral.

Aplicación: ingeniería forestal

Un fuste tiene 50 cm de diámetro en la base y 20 m de altura comercial. Estime su volumen bajo el supuesto de paraboloide ($k = 1$), y compare con el de cono ($k = 2$) y con el del cilindro circunscrito.

Ejemplo

1. Paso el diámetro a radio y calculo el cilindro de referencia.
   $r_0 = 0{,}25$ m; $\quad \pi r_0^2 H = \pi(0{,}0625)(20) = 3{,}927$ m^3
2. Paraboloide: divido entre $k + 1 = 2$.
   $V_1 = 1{,}963$ m^3
3. Cono: divido entre 3.
   $V_2 = 1{,}309$ m^3

$$V_{\text{paraboloide}} \approx 1{,}96 \text{ m}^3; \quad V_{\text{cono}} \approx 1{,}31 \text{ m}^3$$

La diferencia no es un detalle

Entre suponer paraboloide y suponer cono hay un 50 % de volumen. Sobre un rodal de mil árboles, eso son cientos de metros cúbicos de madera —y de dinero— de diferencia.
El modelo de ahusamiento **no** es un tecnicismo: es la decisión que fija el resultado. La integral solo obedece.

B.4 Carga contaminante acumulada

Si un vertimiento tiene caudal $Q(t)$ y concentración $C(t)$, la **carga** —la masa total de contaminante— es la integral del producto.

Aplicación: ingeniería ambiental

Un vertimiento industrial se monitorea durante una jornada de 10 horas:

$$Q(t) = 0{,}8 + 0{,}05t \ \ (\text{m}^3/\text{s}), \qquad C(t) = 45\, e^{-0{,}1t} \ \ (\text{mg/L}).$$

Halle la carga total de DBO vertida en la jornada.

Ejemplo

1. Planteo la carga como integral del producto.
$$L = \int_0^{10} Q(t)\,C(t)\,dt = 45\int_0^{10} (0{,}8 + 0{,}05t)\,e^{-0{,}1t}dt$$
2. Separo en dos integrales; la segunda es por partes.
$$\int_0^{10} 0{,}8\,e^{-0{,}1t}dt = 8\left(1 - e^{-1}\right) = 5{,}0570$$
3. La segunda, con $u = t$.
$$0{,}05\left[-10t\,e^{-0{,}1t} - 100e^{-0{,}1t}\right]_0^{10} = 0{,}05\left(100 - 200e^{-1}\right) = 1{,}3212$$
4. Sumo y multiplico por 45.
$$L = 45(6{,}3782) = 287{,}0$$
5. **Reviso unidades**: $\mathrm{m^3/s \cdot mg/L = g/s}$, y t está en horas.
$$L = 287{,}0\ \mathrm{g/s \cdot h} \times 3\,600$$

$$L \approx 1{,}03 \times 10^6\ \mathrm{g} = 1{,}03\ \text{toneladas}$$

La conversión de unidades, paso a paso

Un metro cúbico son mil litros, de modo que

$$1\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}} = 1\,000\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}} = 1\,000\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}.$$

Orden de magnitud: un caudal medio de 1,05 $\mathrm{m^3/s}$ con una concentración media cercana a 28 mg/L durante 36 000 segundos da unos $1{,}06 \times 10^6$ g. Coincide con el resultado exacto. ✓

Por qué no basta el promedio

Es tentador multiplicar el caudal medio por la concentración media. Aquí funciona por poco, porque una magnitud crece mientras la otra decrece de forma suave; pero en general

$$\overline{QC} \neq \overline{Q} \cdot \overline{C}.$$

Si el pico de caudal coincide con el pico de concentración, el promedio subestima gravemente la carga. Solo la **integral del producto** pondera bien.

B.5 Topografía: áreas de predio y volúmenes de embalse

B.5.1 Área de un predio a partir de ordenadas

En un levantamiento se traza una línea base y se miden **ordenadas** perpendiculares a intervalos regulares. El área es la integral de esa función medida.

Aplicación: topografía

Sobre una línea base de 60 m se miden ordenadas cada 10 m:

$$0;\ 8{,}2;\ 12{,}5;\ 14{,}1;\ 13{,}0;\ 9{,}4;\ 0 \quad \text{(metros)}.$$

Estime el área del predio.

Ejemplo

1. Trapecio: patrón $1, 2, \ldots, 2, 1$.
$$A_T = \frac{10}{2}\,[0 + 2(8{,}2 + 12{,}5 + 14{,}1 + 13{,}0 + 9{,}4) + 0] = 572$$
2. Simpson: hay seis intervalos, número **par**, luego es aplicable.
$$A_S = \frac{10}{3}\,[0 + 4(8{,}2) + 2(12{,}5) + 4(14{,}1) + 2(13{,}0) + 4(9{,}4) + 0]$$
3. Opero.
$$A_S = \frac{10}{3}(177{,}8)$$

$$A_T = 572\ \text{m}^2; \qquad A_S \approx 592{,}7\ \text{m}^2$$

Cuál de los dos reportar

La diferencia es de un 3,6 %, y no es ruido: el trapecio **subestima** sistemáticamente cuando el contorno es cóncavo hacia abajo, porque sustituye cada arco por su cuerda, que va por dentro.
Con ordenadas en número par de intervalos y un contorno suave, se reporta Simpson. El trapecio queda como verificación rápida y como cota inferior.

B.5.2 Volumen de un embalse por la curva área–elevación

Aplicación: ingeniería ambiental

El área inundada de un embalse a la cota z (metros sobre el fondo) se ajusta a

$$A(z) = 2\,500 + 800z + 120z^2 \qquad (\text{m}^2).$$

Halle el volumen almacenado hasta la cota 15 m.

Ejemplo

1. El volumen es la acumulación de áreas horizontales: discos otra vez, pero de sección cualquiera.
$$V = \int_0^{15} A(z)\,dz$$
2. Antiderivo término a término.
$$\left[2\,500z + 400z^2 + 40z^3\right]_0^{15}$$
3. Evalúo.
$$37\,500 + 90\,000 + 135\,000$$

$$V = 262\,500 \text{ m}^3$$

Verificación

Cota de coherencia: el área a la cota máxima es $A(15) = 2\,500 + 12\,000 + 27\,000 = 41\,500$ m^2. Un prisma de esa base y 15 m de altura daría $622\,500$ m^3, y el resultado debe ser bastante menor porque el vaso se estrecha hacia el fondo. $262\,500 < 622\,500$. ✓

La curva de embalse en la operación

La función $V(z) = \int_0^z A(\zeta)\,d\zeta$ es la **curva de capacidad**, y se lee en los dos sentidos. Derivada, devuelve el área inundada —TFC, primera parte—; por eso una lectura de nivel se traduce inmediatamente en volumen almacenado, y el descenso del nivel en un caudal de salida.
Es el mismo par acumulación–ritmo de toda la sesión 4, operando en la sala de control de una represa.

B.6 Síntesis

1. El volumen escurrido es el **área del hidrograma**; con datos tabulados se calcula por Simpson.
2. El volumen de un fuste es $\frac{\pi r_0^2 H}{k+1}$: el coeficiente mórfico **se deduce**, no se consulta.
3. La carga contaminante es $\int QC\,dt$, y **no** el producto de los promedios.
4. Áreas de predio y volúmenes de embalse son integrales de datos medidos, no de fórmulas.
5. En todos los casos, **la unidad del resultado se arrastra desde el integrando**. El factor 3 600 es el error más caro de este apéndice.

Ejercicios propuestos

B.1 El caudal de una quebrada es $Q(t) = 1{,}5 + 9t\,e^{-0{,}4t}$ m^3/s con t en horas. Halle el volumen escurrido en 10 horas, en metros cúbicos, y el instante del pico.

B.2 Un fuste de 40 cm de diámetro basal y 18 m de altura se modela como neiloide ($k = 3$). Halle su volumen y compárelo con el del paraboloide.

B.3 Deduzca el coeficiente mórfico para $k = \frac{1}{2}$ e interprete qué forma de fuste representa.

B.4 Un vertimiento tiene $Q = 1{,}2$ m^3/s constante y $C(t) = 60e^{-0{,}2t}$ mg/L durante 8 horas. Halle la carga total en kilogramos.

B.5 Repita el ejercicio anterior suponiendo, en cambio, que el caudal es $Q(t) = 1{,}2\,e^{0{,}2t}$. Compare y explique el resultado.

B.6 Un predio tiene ordenadas cada 8 m: 0; 5,1; 9,3; 11,0; 8,7; 4,2; 0. Estime el área por trapecio y por Simpson.

B.7 Para el embalse del texto, halle a qué cota se almacena la *mitad* del volumen total. ¿Es la cota 7,5 m? Explique.

B.8 Un tramo de vía tiene áreas de corte $A(x) = 12 + 0{,}5x - 0{,}01x^2$ m^2 a lo largo de $x \in [0, 40]$ m. Halle el volumen de material a remover.

Respuestas

B.1 $\int_0^{10} 9te^{-0,4t}dt = 9\left[-2{,}5t\,e^{-0,4t} - 6{,}25e^{-0,4t}\right]_0^{10} = 9\left(6{,}25 - 31{,}25e^{-4}\right) = 51{,}10$; sumando el flujo base 15, resulta 66,10 m^3/s · h, es decir $\approx 2{,}38 \times 10^5$ m^3. El pico está en $t = 1/0{,}4 = 2{,}5$ h.

B.2 $\pi r_0^2 H = \pi(0{,}04)(18) = 2{,}262$ m^3; neiloide $= 2{,}262/4 = 0{,}566$ m^3; paraboloide $= 1{,}131$ m^3. El neiloide da exactamente la mitad.

B.3 El coeficiente es $\frac{1}{k+1} = \frac{2}{3}$. Representa un fuste que se adelgaza *más despacio* que un paraboloide: casi cilíndrico en la parte baja, típico de árboles muy podados o de palmas.

B.4 $L = 1{,}2 \times 60 \int_0^8 e^{-0,2t}dt = 72 \cdot \frac{1-e^{-1,6}}{0,2} = 72(3{,}9905) = 287{,}3$ g/s · h; $\times 3\,600 \approx 1{,}034 \times 10^6$ g $\approx 1\,034$ kg.

B.5 Ahora el integrando es $1{,}2 \cdot 60\, e^{0,2t}e^{-0,2t} = 72$ constante, luego $L = 72 \times 8 = 576$ g/s · h, es decir $\approx 2\,074$ kg: el doble. El caudal creciente compensa exactamente la dilución, y la carga deja de decrecer. Es el ejemplo límite de por qué no se pueden promediar por separado.

B.6 Trapecio y Simpson:

$$A_T = \tfrac{8}{2}\left[0 + 2(5{,}1 + 9{,}3 + 11{,}0 + 8{,}7 + 4{,}2) + 0\right] = 306{,}4 \text{ m}^2,$$

$$A_S = \tfrac{8}{3}\left[4(5{,}1) + 2(9{,}3) + 4(11{,}0) + 2(8{,}7) + 4(4{,}2)\right] = \tfrac{8}{3}(117{,}2) \approx 312{,}5 \text{ m}^2.$$

B.7 No. A la cota 7,5 el volumen es $2\,500(7{,}5) + 400(56{,}25) + 40(421{,}875) = 58\,125$ m^3, apenas un 22 % del total. La mitad (131 250 m^3) se alcanza cerca de $z \approx 11{,}1$ m. La razón es que el área crece con la cota: las capas altas almacenan mucho más que las bajas.

B.8 $V = \int_0^{40} \left(12 + 0{,}5x - 0{,}01x^2\right) dx = \left[12x + 0{,}25x^2 - \frac{0,01}{3}x^3\right]_0^{40} = 480 + 400 - 213{,}3 = 666{,}7$ m^3.

APÉNDICE C

Aplicaciones avanzadas: gestión y economía

Objetivo del apéndice

Calcular excedentes del consumidor y del productor, valorar flujos continuos de ingreso con y sin crecimiento, y medir la desigualdad de una distribución mediante la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini, reconociendo en los tres casos la misma integral bajo otro nombre.

C.1 Una advertencia sobre el objeto que se integra

En el apéndice anterior lo que se acumulaba era físico: agua, madera, masa. Aquí lo que se acumula es una **diferencia entre disposiciones a pagar**, o un **valor descontado**, o una **proporción**. La matemática es idéntica; lo que cambia —y lo que hay que aprender— es qué significa el número que sale.

Tres integrales, una estructura

Concepto	Integral	Qué acumula
Excedente	$\int_0^{q^*} [D(q) - p^*]\, dq$	ahorro por unidad comprada
Valor presente	$\int_0^{T} R(t)e^{-rt}dt$	ingreso futuro, ya descontado
Gini	$2\int_0^{1} [x - L(x)]\, dx$	distancia a la igualdad perfecta

En los tres casos el integrando es una **diferencia** o un **valor ajustado**, no la magnitud bruta. Ahí está toda la economía del asunto.

C.2 Excedente del consumidor y del productor

La curva de demanda $D(q)$ indica cuánto estaría dispuesto a pagar el comprador por la unidad q-ésima. Como todos pagan el mismo precio de equilibrio p^*, quienes habrían pagado más se llevan un ahorro. La suma de esos ahorros es el **excedente del consumidor**.

Excedentes

Si $p^* = D(q^*) = S(q^*)$ es el equilibrio,

$$EC = \int_0^{q^*} [D(q) - p^*]\, dq, \qquad EP = \int_0^{q^*} [p^* - S(q)]\, dq.$$

Aplicación: gestión deportiva

La demanda de abonos de temporada de un club es $D(q) = 120 - 3q$ y su oferta $S(q) = 30 + 2q$, con q en miles de abonos y los precios en miles de pesos. Halle el equilibrio y ambos excedentes.

Ejemplo

1. Igualo oferta y demanda.
$$120 - 3q = 30 + 2q \implies q^* = 18$$
2. Obtengo el precio de equilibrio.
$$p^* = 120 - 3(18) = 66$$
3. Excedente del consumidor.
$$EC = \int_0^{18} (54 - 3q)\,dq = \left[54q - \tfrac{3}{2}q^2\right]_0^{18} = 972 - 486$$
4. Excedente del productor.
$$EP = \int_0^{18} (36 - 2q)\,dq = \left[36q - q^2\right]_0^{18} = 648 - 324$$

$$EC = 486; \qquad EP = 324 \quad \text{(millones de pesos)}$$

Verificación

Con curvas lineales ambos excedentes son triángulos, y se pueden comprobar sin integrar:

$$EC = \tfrac{1}{2}(18)(120 - 66) = 486, \qquad EP = \tfrac{1}{2}(18)(66 - 30) = 324. \ \checkmark$$

La integral no era necesaria *aquí*. Lo es en cuanto la demanda deja de ser recta —que es lo habitual—, y entonces el área ya no tiene fórmula geométrica.

Las unidades del producto

q va en *miles* y p en *miles* de pesos, luego cada unidad de área vale un millón. Reportar "$EC = 486$" sin decir de qué es una cifra sin significado.
Y no confunda el excedente con el **ingreso**: el ingreso del club es $p^*q^* = 1\,188$ millones. El excedente del consumidor no lo recibe nadie; es bienestar que se queda en el bolsillo del hincha.

Para qué se usa

Un club que sube el precio del abono captura parte de ese excedente como ingreso, pero reduce la cantidad vendida. El excedente total —$EC + EP$— es la medida estándar del bienestar generado por el mercado, y la diferencia entre el excedente antes y después de una política de precios es exactamente lo que un estudio de impacto debe reportar.

C.3 Valor presente de un flujo continuo

La sesión 9 dedujo el valor presente de un flujo constante, y la sesión 20 lo llevó al infinito. Falta el caso realista intermedio: un ingreso que **crece**.

Flujo con crecimiento exponencial

Si el ingreso instantáneo es $R(t) = R_0 e^{gt}$ y la tasa de descuento es r, entonces

$$VP = \int_0^T R_0 e^{gt} e^{-rt}\,dt = R_0 \int_0^T e^{-(r-g)t}\,dt = \frac{R_0}{r-g}\left(1 - e^{-(r-g)T}\right),$$

siempre que $r \neq g$.

La resta $r - g$ lo gobierna todo

Los dos exponentes se funden en uno solo: lo único que importa es la **diferencia** entre la tasa de descuento y la de crecimiento. Un ingreso que crece al 4 % descontado al 9 % se comporta igual que uno constante descontado al 5 %.

Aplicación: gestión deportiva

Un contrato de derechos de transmisión paga 200 millones anuales en flujo continuo, con crecimiento del 4 % anual, durante 15 años. Con una tasa de descuento del 9 %, halle su valor presente.

Ejemplo

1. Identifico los parámetros y la diferencia relevante.
   $R_0 = 200, \quad g = 0{,}04, \quad r = 0{,}09 \implies r - g = 0{,}05$
2. Aplico la fórmula.
   $$VP = \frac{200}{0{,}05}\left(1 - e^{-0{,}05\times 15}\right)$$
3. Evalúo.
   $$4\,000\left(1 - e^{-0{,}75}\right) = 4\,000(0{,}527633)$$

$$VP \approx 2\,110{,}5 \text{ millones}$$

Verificación

Suma nominal de lo recibido: $\int_0^{15} 200e^{0{,}04t}dt = 5\,000\,(e^{0{,}6} - 1) \approx 4\,110$ millones. El valor presente es aproximadamente la mitad de esa cifra, lo cual es razonable para quince años al 9 %. ✓
Y el límite $T \to \infty$ da $R_0/(r-g) = 4\,000$ millones: el contrato a quince años ya captura más de la mitad del valor de uno perpetuo.

Cuando la fórmula deja de tener sentido

Si $g \geq r$, el integrando $e^{-(r-g)t}$ **no decae**, y la integral impropia **diverge**: un flujo que crece más rápido de lo que se descuenta vale infinito.
Ningún contrato vale infinito. Lo que el resultado indica es que el supuesto $g \geq r$ sostenido *para siempre* es insostenible, y que hay que acotar el horizonte o revisar g. La divergencia de la sesión 20 aparece aquí como diagnóstico de un modelo mal planteado.

C.4 Curva de Lorenz y coeficiente de Gini

Curva de Lorenz

$L(x)$ es la fracción del total que concentra el x más pobre de la población, con $0 \le x \le 1$. Cumple siempre $L(0) = 0$, $L(1) = 1$, es creciente y convexa, y satisface $L(x) \le x$.

La diagonal es la igualdad

Si todos recibieran lo mismo, el x por ciento de la población concentraría exactamente el x por ciento del total: $L(x) = x$, la diagonal. Cuanto más se hunde la curva por debajo de esa recta, más desigual es el reparto.
Medir la desigualdad es entonces medir un **área**: la que queda entre la diagonal y la curva.

Coeficiente de Gini

$$G = \frac{\text{área entre la diagonal y } L}{\text{área bajo la diagonal}} = \frac{\int_0^1 [x - L(x)]\,dx}{1/2},$$

de donde

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,dx.$$

Por qué aparece el 2

El área bajo la diagonal en el cuadrado unitario es la del triángulo rectángulo de catetos 1: vale $\frac{1}{2}$. Dividir entre $\frac{1}{2}$ es multiplicar por 2, y eso normaliza el índice para que quede entre 0 y 1:

- $G = 0$: igualdad perfecta, la curva *es* la diagonal;
- $G \to 1$: concentración total en un solo receptor.

Aplicación: gestión deportiva

El reparto de ingresos por derechos de televisión entre los clubes de una liga se ajusta a

$$L(x) = 0{,}35x + 0{,}65x^3.$$

Halle el coeficiente de Gini e interprete el resultado en términos de equilibrio competitivo.

Ejemplo

1. Verifico que es una curva de Lorenz admisible.
   $L(0) = 0, \quad L(1) = 1, \quad L''(x) = 3{,}9x \ge 0$
2. Integro la curva.
   $$\int_0^1 \left(0{,}35x + 0{,}65x^3\right) dx = \frac{0{,}35}{2} + \frac{0{,}65}{4} = 0{,}3375$$
3. Aplico la fórmula.
   $G = 1 - 2(0{,}3375)$

$$G = 0{,}325$$

Verificación

Lectura directa de la curva: $L(0{,}5) = 0{,}175 + 0{,}081 = 0{,}256$. La mitad de los clubes con menores ingresos recibe apenas el 25,6 % del total; la otra mitad se lleva el 74,4 %.
Un Gini de 0,33 es coherente con esa lectura: hay desigualdad apreciable, pero lejos del caso extremo. ✓

Lo que el Gini no dice

Dos distribuciones **muy distintas** pueden tener el mismo Gini: el índice resume un área en un número, y en ese resumen se pierde *dónde* está la desigualdad.
Si dos curvas de Lorenz se cruzan, comparar sus Gini no autoriza a decir cuál reparto es preferible. Reporte siempre el índice **junto a** la curva, no en su lugar.

Por qué le importa a un gestor deportivo

El equilibrio competitivo de una liga depende de cómo se reparta el dinero. Un Gini alto anticipa campeonatos previsibles, y la previsibilidad reduce la audiencia —de la que sale, precisamente, el dinero a repartir.
Por eso las ligas fijan reglas de reparto, y por eso el Gini calculado antes y después de una reforma es la medida natural de su efecto. Es la misma integral del ingreso acumulado, leída como política.

Una nota sobre otras medidas

El Gini no es la única forma de convertir una distribución en un número. Existen índices construidos sobre la **entropía** de la distribución —el de Theil es el más conocido— que penalizan la concentración de otra manera y que sí se pueden descomponer entre grupos: cuánta desigualdad hay *dentro* de cada división y cuánta *entre* divisiones.
Quedan fuera de este curso porque involucran $\int f \ln f$, pero conviene saber que existen: la elección del índice es una decisión técnica, no un detalle de cálculo.

C.5 Síntesis

1. El excedente integra la **diferencia** entre lo que se habría pagado y lo que se paga; no es el ingreso.
2. El valor presente descuenta *antes* de acumular. Con crecimiento g, todo depende de $r - g$.
3. Si $g \geq r$ el valor diverge: señal de que el modelo, no el contrato, está mal planteado.
4. El Gini es un área normalizada: $G = 1 - 2\int_0^1 L$.
5. Un índice resume y por tanto **pierde información**. Repórtelo con la

curva.

Ejercicios propuestos

C.1 Con $D(q) = 100 - 2q$ y $S(q) = 20 + 2q$, halle q^*, p^*, EC y EP.

C.2 Con demanda no lineal $D(q) = 90 - q^2$ y precio de equilibrio $p^* = 26$, halle q^* y el excedente del consumidor. ¿Por qué aquí no sirve la fórmula del triángulo?

C.3 Halle el valor presente de un flujo de 150 millones anuales, sin crecimiento, durante 10 años con $r = 0{,}08$.

C.4 Repita con un crecimiento del 3 % anual y compare. ¿Qué porcentaje aumenta el valor?

C.5 Un patrocinio paga 80 millones anuales creciendo al 6 %, y se descuenta al 6 %. Halle el valor presente a 12 años. (Cuidado: la fórmula del texto exige $r \neq g$.)

C.6 Para $L(x) = x^2$, halle el Gini. Para $L(x) = x$, también. Interprete ambos.

C.7 Una liga reparte según $L(x) = 0{,}2x + 0{,}8x^2$. Halle su Gini y díga si el reparto es más o menos igualitario que el del texto.

C.8 Demuestre que si $L(x) = x^n$ con $n \geq 1$, entonces $G = \dfrac{n-1}{n+1}$. Verifique con $n = 1$ y $n = 2$, y diga qué ocurre cuando $n \to \infty$.

Respuestas

C.1 $q^* = 20$, $p^* = 60$; $EC = \int_0^{20}(40 - 2q)dq = 400$; $EP = \int_0^{20}(40 - 2q)dq = 400$. Coinciden porque las pendientes son opuestas en magnitud.

C.2 $90 - q^2 = 26$ da $q^* = 8$; $EC = \int_0^8 \left(64 - q^2\right) dq = 512 - \frac{512}{3} = 341{,}3$. La fórmula del triángulo no sirve porque la frontera superior es una parábola, no una recta.

C.3 $VP = \frac{150}{0{,}08}\left(1 - e^{-0{,}8}\right) = 1\,875(0{,}550671) = 1\,032{,}5$ millones.

C.4 Ahora $r - g = 0{,}05$: $VP = \frac{150}{0{,}05}\left(1 - e^{-0{,}5}\right) = 3\,000(0{,}393469) = 1\,180{,}4$ millones, un 14,3 % más.

C.5 Con $r = g$ el integrando es la constante R_0, luego $VP = R_0 T = 80 \times 12 = 960$ millones. El descuento cancela exactamente el crecimiento.

C.6 $L(x) = x^2$: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ y $G = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $L(x) = x$: $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ y $G = 0$, igualdad perfecta.

C.7 $\int_0^1 L = 0{,}1 + \frac{0{,}8}{3} = 0{,}3667$ y $G = 0{,}2667$. Es *más* igualitario que el del texto (0,325).

C.8 $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, luego $G = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$. Con $n = 1$ da 0 y con $n = 2$ da $\frac{1}{3}$, como en el ejercicio anterior. Cuando $n \to \infty$, $G \to 1$: toda la renta se concentra en una fracción cada vez menor de la población.

APÉNDICE D

La función zeta y la hipótesis de Riemann

Objetivo del apéndice

Leer, con las herramientas del curso y sin demostraciones nuevas, por qué la serie $\sum n^{-s}$ define una función, cómo esa función codifica a los números primos, y en qué consiste el problema abierto más famoso de la matemática. Es una lectura de cierre, no un tema evaluable.

D.1 Cómo leer este apéndice

Qué es y qué no es

Lo que sigue **no** entra en ninguna evaluación y **no** contiene demostraciones completas. Está escrito para que se lea de corrido, una vez terminado el Módulo IV.

Lo que sí hará: mostrar que dos resultados que usted ya demostró —el criterio de la integral de la sesión 23 y la serie geométrica de la sesión 22— bastan para llegar hasta el umbral de un problema no resuelto. El umbral, no más. Pero llegar hasta ahí con lo aprendido en un semestre merece el rodeo.

D.2 De las p-series a una función

En la sesión 23 se demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge si } p > 1, \quad \text{diverge si } p \leq 1.$$

Ese enunciado, leído de otra manera, dice algo más interesante: para cada $p > 1$ la serie produce un **número**. Y donde hay una regla que asigna un número a cada valor de una variable, hay una función.

Función zeta, para argumento real

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1.$$

Se usa s en lugar de p por tradición: es la letra que empleó Riemann en 1859 y que se conserva desde entonces.

La restricción $s > 1$ es el criterio de la integral

No hay nada nuevo que justificar. La convergencia para $s > 1$ es exactamente el resultado de la sesión 23, comparando con $\int_1^{\infty} x^{-s} dx$, que converge si y solo si $s > 1$.

El extremo $s = 1$ es la **serie armónica**, que diverge. La función zeta tiene por tanto una asíntota vertical en $s = 1$: cuando s se acerca a 1 por la derecha, $\zeta(s) \to \infty$.

Dos valores conocidos

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934, \qquad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}082323.$$

Por qué esos valores son asombrosos

Nada en $\sum 1/n^2$ anuncia una circunferencia. Los términos son cocientes de enteros; el resultado contiene π.
Euler lo estableció en 1735 y el problema llevaba décadas abierto. Que aparezca π es la primera señal de que esta serie no es un ejercicio de convergencia más: está conectada con estructuras que no se ven desde la definición.

D.3 Donde entran los primos

Aquí ocurre lo que justifica todo el apéndice. La conexión la descubrió Euler y se apoya únicamente en la serie geométrica de la sesión 22.

Producto de Euler

Para $s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdots$$

La idea, no la demostración formal

Cada factor es la suma de una serie geométrica de razón p^{-s}, con $|p^{-s}| < 1$:

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

Multiplique ahora todos esos paréntesis, uno por cada primo. Al expandir, cada sumando se obtiene eligiendo una potencia de cada primo, y produce un término

$$\frac{1}{(2^a 3^b 5^c \cdots)^s}.$$

Por el **teorema fundamental de la aritmética**, cada entero $n \geq 1$ se escribe de *exactamente una* manera como producto de potencias de primos. Luego cada $1/n^s$ aparece en el desarrollo una sola vez, y el producto reproduce la serie completa.

Lo que acaba de pasar

A la izquierda, una suma sobre **todos** los enteros. A la derecha, un producto sobre los **primos**. La igualdad convierte la factorización única —un hecho aritmético— en una identidad analítica.
Y por eso una función definida con una serie inocente se vuelve el instrumento central de la teoría de números: **cualquier cosa que se averigüe sobre ζ**

es información sobre los primos.

Los primos son infinitos

Suponga que hubiera una cantidad finita de primos. Entonces el producto de Euler tendría finitos factores y, al hacer $s \to 1^+$, tendería a un número finito. Pero el lado izquierdo es $\zeta(s)$, que **diverge** cuando $s \to 1^+$, porque en $s = 1$ está la serie armónica.

contradicción: los primos son infinitos

Es una demostración de la infinitud de los primos que no usa el argumento clásico de Euclides, sino la **divergencia de la serie armónica**. Un resultado sobre números enteros, obtenido de un resultado sobre convergencia.
Usted demostró esa divergencia en la sesión 23, con el criterio de la integral. Es decir: la demostró con una **integral impropia**.

D.4 Contar primos: una integral sin antiderivada

Sea $\pi(x)$ la cantidad de primos menores o iguales que x. Los primos se van espaciando, pero ¿con qué ley?

Teorema de los números primos, 1896

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad \text{cuando } x \to \infty,$$

y una aproximación considerablemente mejor es el **logaritmo integral**

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Esa integral le resulta familiar

$\int \frac{dt}{\ln t}$ es una de las integrales del apéndice A: tiene integrando continuo en $(1, \infty)$, luego **tiene** antiderivada por el TFC, pero esa antiderivada **no es elemental**. No se puede escribir con las funciones del curso.
De modo que la mejor descripción conocida de cómo se distribuyen los primos es una integral que **solo se puede evaluar numéricamente** —con Simpson, por ejemplo.

Las tres cifras, para $x = 10^6$

	Valor	Error relativo
$\pi(10^6)$ (real)	78 498	—
$x/\ln x$	72 382	7,8 %
$\operatorname{Li}(10^6)$	78 627	0,16 %

Por qué la integral gana

$x/\ln x$ supone que la densidad de primos cerca de x es constante e igual a $1/\ln x$ en todo el trayecto desde 0. Pero cerca de t pequeño los primos son mucho más densos.

$\mathrm{Li}(x)$ corrige eso: **acumula** la densidad local $1/\ln t$ a lo largo del recorrido, en vez de suponerla fija. Es exactamente el paso de un promedio grueso a una integral, que es lo que este curso ha hecho veintiséis veces.

D.5 La hipótesis

Falta una pieza, y es la que no cabe en este curso. Riemann extendió $\zeta(s)$ a valores **complejos** de s, mediante un procedimiento —la continuación analítica— que produce una única función definida para casi todo el plano complejo y que coincide con la serie donde esta converge.

Qué significa *extender*

La serie $\sum n^{-s}$ solo tiene sentido para $s > 1$. La función extendida tiene sentido para todo $s \neq 1$, y en la región $s > 1$ vale lo mismo que la serie.
La analogía más cercana en este curso: $\sum_{n\geq 0} x^n$ solo converge si $|x| < 1$, pero $\frac{1}{1-x}$ tiene sentido para todo $x \neq 1$ y coincide con la serie donde esta converge. La segunda expresión *extiende* a la primera. Con ζ ocurre lo mismo, aunque el mecanismo es muchísimo más sofisticado.

Una vez extendida, ζ tiene **ceros**. Unos son fáciles —están en los enteros pares negativos $-2, -4, -6, \ldots$ y se llaman triviales—; los demás, los **no triviales**, viven en la franja donde la parte real de s está entre 0 y 1.

Hipótesis de Riemann, 1859

Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$.

Por qué le importa a alguien

Riemann obtuvo una fórmula que expresa $\pi(x)$ en términos de $\mathrm{Li}(x)$ **más una corrección**, y esa corrección es una suma sobre los ceros no triviales de ζ.
Es decir: el error que se comete al estimar los primos con $\mathrm{Li}(x)$ está controlado por la posición de esos ceros. Si todos están sobre la recta $\frac{1}{2}$, el error es del orden de $\sqrt{x}\,\ln x$ —el menor posible—. Si alguno se saliera, los primos se distribuirían de forma más irregular de lo que hoy se supone.
La hipótesis dice, en el fondo, que **los primos están tan bien repartidos como podrían estarlo**.

El estado de la cuestión

La hipótesis lleva abierta desde 1859. Se ha verificado computacionalmente para miles de millones de ceros, todos sobre la recta.
Eso **no** es una demostración, y este curso ya dio la lección correspondiente: en la sesión 23 se vio que la serie armónica diverge aunque sumar términos parezca indicar lo contrario durante millones de sumandos. **La evidencia numérica no demuestra**. Es el mismo aviso, en un escenario mucho más grande.

D.6 Qué se lleva de aquí

1. $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ converge para $s > 1$ **por el criterio de la integral**, que usted demostró.
2. El producto de Euler sale de la **serie geométrica** más la factorización única, y traduce enteros en primos.
3. De ahí se deduce que los primos son infinitos, usando la **divergencia de la armónica**.
4. La mejor estimación de $\pi(x)$ es $\mathrm{Li}(x)$: una integral **sin antiderivada elemental**, que se evalúa con los métodos del apéndice A.
5. La hipótesis de Riemann controla el error de esa estimación, y sigue **abierta**.

Este volumen empezó preguntando cómo reconstruir una cantidad a partir de su ritmo de cambio. Termina en un problema sin resolver sobre la distribución de los números primos, al que se llega —sin trampa— con el criterio de la integral, la serie geométrica y una integral que no tiene antiderivada.

Ese trayecto es el argumento del curso. Las herramientas eran modestas; el alcance, no.

Ejercicios propuestos

D.1 Calcule las diez primeras sumas parciales de $\zeta(2)$ y compare con $\pi^2/6$. ¿Cuántos términos hacen falta para acertar dos decimales?

D.2 Justifique con el criterio de la integral, sin citar el resultado de la sesión 23, que $\zeta(1{,}5)$ converge y que $\zeta(0{,}9)$ no.

D.3 Escriba los cuatro primeros factores del producto de Euler para $s = 2$, multiplíquelos y compare el resultado con $\zeta(2) = 1{,}644934$.

D.4 Explique, con el producto de Euler, por qué $\zeta(s)$ nunca vale cero para $s > 1$.

D.5 Estime $\mathrm{Li}(1\,000) = \int_2^{1\,000} \frac{dt}{\ln t}$ por Simpson con $n = 4$, y compare con $\pi(1\,000) = 168$.

D.6 ¿Por qué la sola verificación numérica de miles de millones de ceros no demuestra la hipótesis? Relacione su respuesta con la serie armónica.

Respuestas

D.1 Las sumas parciales son 1; 1,25; 1,361; 1,424; 1,464; 1,491; 1,512; 1,527; 1,540; 1,550. La convergencia es lenta: para acertar dos decimales de 1,6449 hacen falta del orden de doscientos términos, porque la cola se comporta como $\int_N^\infty x^{-2}dx = 1/N$.

D.2 Para $\zeta(1{,}5)$: $\int_1^\infty x^{-1,5}dx = 2$ converge, luego la serie converge. Para $\zeta(0{,}9)$: $\int_1^\infty x^{-0,9}dx = \lim_{b\to\infty} 10\left(b^{0,1} - 1\right) = \infty$, luego diverge.

D.3 $\frac{1}{1-1/4}\cdot\frac{1}{1-1/9}\cdot\frac{1}{1-1/25}\cdot\frac{1}{1-1/49} = 1{,}3333 \times 1{,}125 \times 1{,}0417 \times 1{,}0208 = 1{,}5952$. Va acercándose a 1,6449 por debajo; faltan infinitos factores, todos mayores que 1.

D.4 Cada factor $\frac{1}{1-p^{-s}}$ es un número *mayor que* 1 para $s > 1$, y un producto de factores mayores que 1 no puede ser cero. (El argumento riguroso exige además controlar la convergencia del producto infinito, pero la idea es esa.)

D.5 Con $\Delta t = 249{,}5$ y $f(t) = 1/\ln t$: $f(2) = 1{,}4427$; $f(251{,}5) = 0{,}1809$; $f(501) = 0{,}1609$; $f(750{,}5) = 0{,}1510$; $f(1\,000) = 0{,}1448$. Entonces

$$S_4 = \frac{249{,}5}{3}\,[1{,}4427 + 4(0{,}1809) + 2(0{,}1609) + 4(0{,}1510) + 0{,}1448] \approx 269,$$

frente al valor correcto $\mathrm{Li}(1\,000) \approx 176{,}6$ —y a $\pi(1\,000) = 168$.

El ejercicio es una **trampa deliberada**: la estimación se equivoca en más del 50 %. La causa es que $1/\ln t$ cae de 1,44 a 0,18 dentro del *primer* subintervalo, de modo que $f^{(4)}$ es enorme cerca de $t = 2$ y la cota del apéndice A no sirve de nada. Partiendo en $[2, 100]$ y $[100, 1\,000]$, con $n = 4$ en cada trozo, se obtiene $35{,}2 + 147{,}9 = 183{,}1$: mucho mejor con el mismo esfuerzo. **Dónde se ponen los nodos importa tanto como cuántos son.**

D.6 Porque una propiedad puede cumplirse en un rango enorme y fallar después. La serie armónica es el ejemplo doméstico: sus sumas parciales crecen tan despacio que cualquier cómputo razonable sugiere que se estabilizan, y sin embargo diverge. Verificar no es demostrar.

Bibliografía

Las referencias se agrupan por función, no por orden alfabético, para que sirvan de guía de lectura. Las anotaciones indican qué busca cada obra y en qué parte del curso resulta útil.

Textos de referencia del curso

[1] **Stewart, J.** *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 8ª ed. Cengage Learning, 2018.
Texto base del curso. Sus capítulos 5 a 8 cubren los Módulos I a III de este volumen y los capítulos 11 y 12, el Módulo IV. Es la referencia para el estudiante que quiera más ejercicios del mismo nivel.

[2] **Larson, R.** y **Edwards, B.** *Cálculo. Tomo I.* Cengage Learning.
Alternativa a [1], con un tratamiento algo más gradual de las técnicas de integración. Útil para quien encuentre denso el Módulo II.

[3] **Purcell, E. J.**, **Varberg, D.** y **Rigdon, S. E.** *Cálculo diferencial e integral.* Pearson.
De uso extendido en las facultades de ingeniería de Colombia. Conviene tenerlo a mano por su colección de ejercicios.

Fundamentación y profundización

[4] **Apostol, T. M.** *Calculus*, vol. I. Editorial Reverté.
Construye la integral *antes* que la derivada, al modo de Arquímedes. Lectura recomendada para quien quiera entender por qué el teorema fundamental es un teorema y no una definición.

[5] **Spivak, M.** *Calculus.* Editorial Reverté.
El tratamiento riguroso de los conceptos que aquí se presentan de forma operativa. Su capítulo sobre integrales impropias complementa la sesión 20.

[6] **Courant, R.** y **John, F.** *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Limusa.
Clásico que privilegia la motivación física sobre la formalidad. Útil para el Módulo III.

Métodos numéricos y cómputo

[7] **Chapra, S. C.** y **Canale, R. P.** *Métodos numéricos para ingenieros.* McGraw-Hill Interamericana.
Referencia del apéndice A. Sus capítulos sobre integración numérica desarrollan el trapecio, Simpson y las cuadraturas de Gauss con el detalle que aquí se omite.

[8] **Burden, R. L.** y **Faires, J. D.** *Análisis numérico.* Cengage Learning.
Complemento de [7], con el análisis de error tratado con más rigor.

[9] **The SymPy Development Team.** *SymPy: Symbolic Computing in Python.* https://www.sympy.org

Biblioteca libre de álgebra computacional. Todos los resultados numéricos y simbólicos de este volumen se contrastaron con ella.

[10] **Wolfram Research.** *WolframAlpha*. https://www.wolframalpha.com
Verificación rápida de integrales y series. Recomendado para comprobar, *nunca* para sustituir el procedimiento.

Aplicaciones

[11] **Chow, V. T.**, **Maidment, D. R.** y **Mays, L. W.** *Hidrología aplicada*. McGraw-Hill.
Fuente de los problemas de hidrogramas y volúmenes escurridos del apéndice B. El cálculo del área bajo el hidrograma es, literalmente, la sesión 15.

[12] **Metcalf & Eddy.** *Ingeniería de aguas residuales: tratamiento, vertido y reutilización*. McGraw-Hill.
Referencia estándar del sector. Sus balances de masa motivan los ejemplos de carga contaminante del apéndice B.

[13] **Prodan, R.** y **Gratton, R.** *Dasometría*. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura.
Origen del coeficiente mórfico que en el apéndice B se deduce como $\frac{1}{k+1}$ en lugar de consultarse en tabla.

[14] **Varian, H. R.** *Microeconomía intermedia*. Antoni Bosch editor.
Marco de los excedentes del consumidor y del productor del apéndice C.

Sobre el apéndice D

[15] **Derbyshire, J.** *La obsesión de los números primos: Bernhard Riemann y el principal problema no resuelto de las matemáticas*. Crítica.
Divulgación de alta calidad sobre la hipótesis de Riemann, accesible con el bagaje de este volumen.

[16] **Edwards, H. M.** *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications.
El tratamiento técnico, para quien quiera ir más allá del apéndice D. Exige variable compleja.

Volumen anterior

[17] **Rojas C., W. A.** *Fundamentos de Cálculo Diferencial para Administración Deportiva*. Notas de clase, volumen I. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Prerrequisito de este volumen. Se citan en particular sus sesiones 15 a 26, sobre la derivada y el teorema del valor medio.