PROPUESTA PARA EL ABORDAJE DEL CURSO UNIVERSITARIO DE OSCILACIONES Y ONDAS

Jeisson David Cely Hernández

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN FÍSICA
BOGOTÁ
2016

PROPUESTA PARA EL ABORDAJE DEL CURSO UNIVERSITARIO DE OSCILACIONES Y ONDAS

Jeisson David Cely Hernández

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Física

Director
John Hernán Díaz Forero
Licenciado en Física
Codirector
Edison Francisco Cudris García
Licenciado en Física

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN FÍSICA
BOGOTÁ
2016

Nota de aceptación

_____

_____

_____

_____

_____

Firma

Nombre:

_____

Firma

Nombre:

Jurado

_____

Firma

Nombre:

Jurado

Bogotá, Abril 18 de 2016

AGRADECIMIENTOS

Quiero elevar mis mas profundos agradecimientos a todas las personas que han participado directa e indirectamente durante los años de mi formación académica; por su apoyo, el cual me ha permitido culminar exitosamente este trabajo de grado.

En especial quiero agradecer a aquellas personas que me acompañaron constantemernte en este proyecto: Claudia Marcela Orozco Gómez Licenciada en Pedagogía Infantil por sus aportes en la redacción, Katherine Julieth Parrado Carrillo estudiante de Licenciatura en Física por su colaboración en el desarrollo de las practicas de laboratorio pero sobre todo a mi director Jhon Hernan Díaz Forrero Licenciado en Física por su permanente compromiso, dedicación y rigurosidad en cada fase de la elaboración de este trabajo de grado lo que me permitió enriquecerme personal, intelectual y profesionalmente.

CONTENIDO

Pág.

1. INTRODUCCIÓN 7

2. PLANTEAMIENTO DE LA PROPUESTA DE LA ESTRUCTURA MENTAL 10

3. EL PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL 14

3.1. Periodo del péndulo matemático No Lineal 15

3.2. Solución general de péndulo matemático No Lineal 19

3.3. Energía del péndulo matemático No Lineal 25

3.4. Solución del péndulo No lineal por medio del método de Runge Kutta de cuarto orden 27

3.5. Análisis del péndulo No lineal por medio de tracker 30

4. EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO SOLUCIONADO POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE 32

4.1. Solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado por medio de la transformada de Laplace 34

4.2. Energía del oscilador armónico amortiguado 39

4.3. Solución del oscilador armónico amortiguado por medio del método de Runge Kutta de cuarto orden 40

4.4. Análisis del oscilador armónico amortiguado por medio de tracker 41

5. EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO CON FORZAMIENTO PERIÓDICO ARBITRARIO 44

5.1. Solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado con forzamiento arbitrario por medio de la serie de Fourier 46

5.2. Oscilador armónico amortiguado para una función de forzamiento cosenoidal 51

5.3. Oscilador armónico amortiguado para una función de forzamiento cuadrada 54

5.4. Oscilador armónico amortiguado para una función de forzamiento triangular 56

5.5. La resonancia en forzamientos arbitrarios 58

5.6. Análisis del oscilador armónico amortiguado con forzamiento arbitrario por medio de tracker 61

6. INTRODUCCIÓN A LOS OSCILADORES ACOPLADOS 63

6.1. Análisis del los péndulos acoplados por medio de Tracker 66

7. INTRODUCCIÓN AL MOVIMIENTO ONDULATORIO 68

7.1. La ecuación de onda unidimensional 68

7.2. Solución de la ecuación de onda unidimensional 70

7.3. Cuerda atada en sus extremos 71

8. CONCLUSIONES 75

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 76

10. ANEXOS 79

10.1. Código Cabecera para el Método de Runge Kutta Cuarto Orden 79

10.2. Código para el el Péndulo Matemático No Lineal por Medio del Método de Runge Kutta Cuarto Orden 80

10.3. Código para el el Oscilador Armónico Amortiguado por Medio del Método de Runge Kutta Cuarto Orden 80

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de *Ciencias* es una invención del ser humano, la cual se ha venido desarrollando a través de los siglos con el fin de generar y acumular conocimiento científico de las diferentes estructuras de los fenómenos naturales, por medio del estudio sistemático y organización de este conocimiento y sus resultados en principios generales.

El estudio del fenómeno natural de interés, en este caso especifico los sistemas oscilatorios, hace referencia al estudio de una porción del universo (Ψ) en el cual nos encontramos, y que posee una serie de características *(color, olor, forma,etc)* y propiedades *(masa, carga, etc)*. Este estudio se debe realizar por un observador ubicado en un sistema de referencia externo a esta porción del universo. Es de destacar que la totalidad del universo (U) no hace referencia, únicamente a lo que se encuentra en el exterior del fenómeno de interés, sino también a las interacciones que tiene esta porción del universo con el resto del mismo. Cómo se esquematiza en la Figura 1.

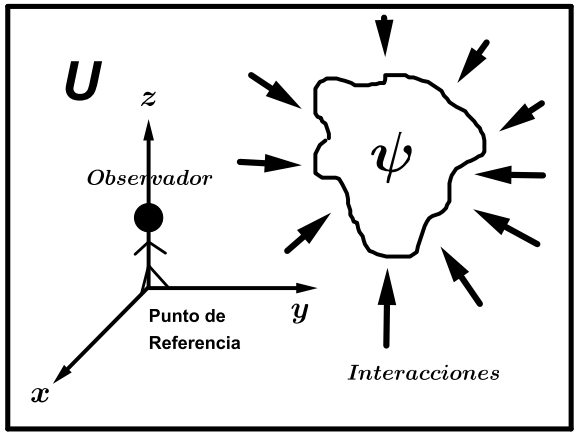


Figura 1: Esquema de estudio de fenómeno natural de interés

En las ciencias, uno de sus principales objetivos se basa en realizar un *modelo* del fenómeno de interés, el cual lo representa en una versión simplificada, dado que la reali-

dad es tan compleja y existen tantos fenómenos involucrados. Por lo tanto es oportuno definir un modelo como un sistema simplificado y esquemático que representa la realidad, conectando a las cantidades fundamentales por medio de leyes específicas, que toman la forma de ecuaciones matemáticas determinadas por la interacción de la porción de universo de interés con el resto del mismo.

La construcción de un modelo que esté asociado a un sistema real, conlleva varios elementos tales como: la identificación de las *interacciones* del fenómeno con el resto del universo, el realizar las *aproximaciones* necesarias en donde se descartan diferentes interacciones de menor interés y establecer una serie de *suposiciones* que permitan la formulación de un modelo "fácil" y factible de aplicar, y cuya validación se determina por medio de la evaluación dada por las practicas experimentales del mismo.

En los sistemas estudiados por la *Mecánica Clásica*, denominada así en la actualidad para diferenciarla de teorías modernas, se ha constituido como una de las primeras ramas de la física, cuyo estudio de los movimientos de los cuerpos materiales ha sido la base para el progresivo desarrollo de otras teorías planteadas a través de los siglos. La modelización de estos sistemas mecánicos se basa en la suposición de que están conformados por *partículas* o cuerpos *rígidos* (para el interés específico de este trabajo por partículas), y en la "creencia" que éstos cumplen ciertos conceptos básicos tales como las leyes de la dinámica, la conservación de la energía, la concertación del momentum lineal y anular, etc.

El mundo está lleno de cuerpos que se mueven, estos movimientos se pueden clasificar en dos grupos en general; aquellos objetos que se mueven de un lugar a otro, como por ejemplo un balón de fútbol, y aquellos objetos que se encuentran restringidos al rededor de un punto de equilibrio estable, como por ejemplo los péndulo. Este segundo tipo de movimiento se conoce como *movimiento oscilatorio*.

El estudio de los *movimientos oscilatorios de los sistemas mecánicos* se ha convertido en la física, en uno de los campos de mayor interés además de un pilar fundamental en el estudio de los fenómenos naturales, dado que en la naturaleza todo sistema posee cierta capacidad de oscilación.

Ahora bien, dada la importancia del movimiento oscilatorio en el estudio de los fenómenos naturales y considerando que su contextualización y profundización es de relevancia para la óptima comprensión de los mismos y para los interesados en estos tipos de estudios, tales como físicos e ingenieros, en el presente trabajo de grado se pretende establecer algunas consideraciones a tener en cuenta en el estudio de los sistemas oscilatorios. Entre estas consideraciones a tener en cuenta se propondrá una estructura mental que permita facilitar la conceptualización de los sistemas oscilatorios, además de resolver en detalle algunos sistemas oscilatorios de interés, determinados bajo la estructura mental propuesta.

2. PLANTEAMIENTO DE LA PROPUESTA DE LA ESTRUCTURA MENTAL

Desde hace ya algunas décadas, varios educadores se han preocupado por saber si los estudiantes realmente disfrutan y comprende de lo que realizan en sus diferentes clases de ciencias naturales, y a pesar de que las respuestas obtenidas no han sido muy satisfactorias, en la actualidad surge un enfoque determinado como *enseñanza contextualizada*, la cual se basa en el concepto que si se enseña una determinada temática bajo un cierto contexto la enseñanza es mucho más significativa. Por estas razones, en los últimos tiempos a crecido la divulgación de artículos que intentan embarcar en cierto contexto especifico las ciencias naturales, haciendo uso de elementos tales como: el arte, clubes de ciencias, actividades de verano rurales, lo cotidiano, la prensa y la historia, errores conceptuales frecuentes, por medio de los alimentos, haciendo uso de los museos, etc. como se compila por Pinto & Sánchez (2012).

Ahora bien, dada la trasversalidad que tienen *los sistemas oscilatorios* en el estudio de diferentes fenómenos naturales, la contextualización del estudio de los mismos es de vital importancia para optimizar su comprensión, y ya que se puede designar como un problema de lo cognitivo, el cual se puede plantear hoy en día desde la filosofía del lenguaje, la lingüistica y algunas ciencias experimentales según Martínez (2001). Por tal razón, en el presente trabajo de grado se propone una *estructura mental* que facilite la conceptualización del estudio de los sistemas oscilatorios (ver figura 2), el cual estará establecido a lo largo y ancho de sus posibles configuraciones, delimitadas por las dimensiones de: restricciones espaciales (número de dimensiones), complejidad del sistema oscilatorio (idealizado, efectos de amortiguamiento, efectos de forzamiento) y la configuración de modos normales (grados de libertad).

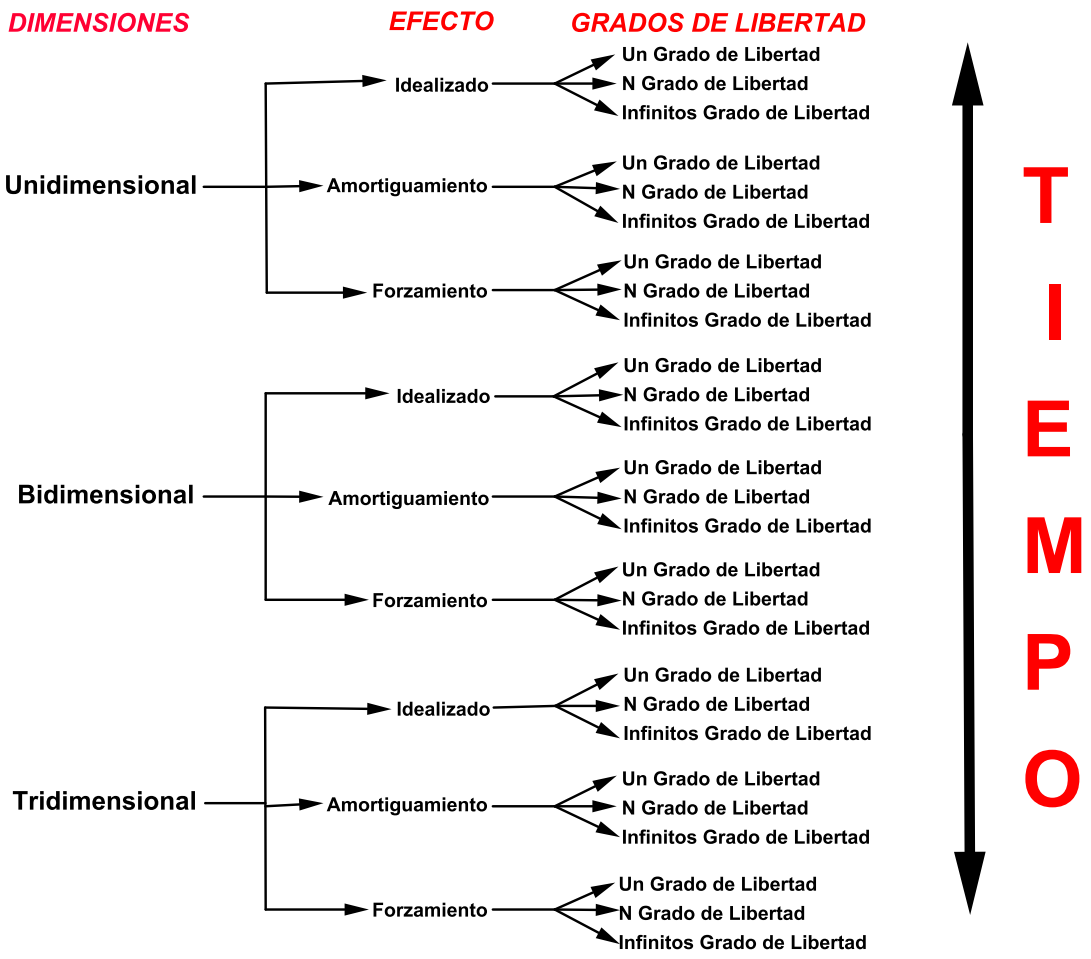


Figura 2: Esquema de las variaciones entre *Dimensiones, Efectos y Grados de Libertad,* de los sistemas físicos bajo el estudio de su desarrollo temporal.

Nótese que el anterior esquema mental permite abordar, de una manera general, los diferentes sistemas oscilatorios dada la intercepción entre las tres dimensiones especificadas anteriormente (ver fisura 3). Se puede observar, a manera de ejemplo, que al ver la intercepción conformada por $Unidimensional \rightarrow Idealizado \rightarrow Un\ grado\ de\ libertad$, se llega al estudio del *Movimiento Armónico Simple*, tema donde se estudian sistemas oscilatorios tales como el *Péndulo* y *el sistema Masa-Resorte*. Si la intercepción es $Bidimensional \rightarrow Idealizado \rightarrow Un\ grado\ de\ libertad$, se llega al estudio de los *osciladores armónicos acoplados de manera perpendicular*, donde se estudian las populares *Lineas de Lissajous*. Por ultimo y siendo esta la intercepción mas general de la propuesta es $Tridimensional \rightarrow Forzamiento \rightarrow Infinitos.\ grados\ de\ libertad$, lo cual representa las ondas electromagnéticas forzadas en materiales.

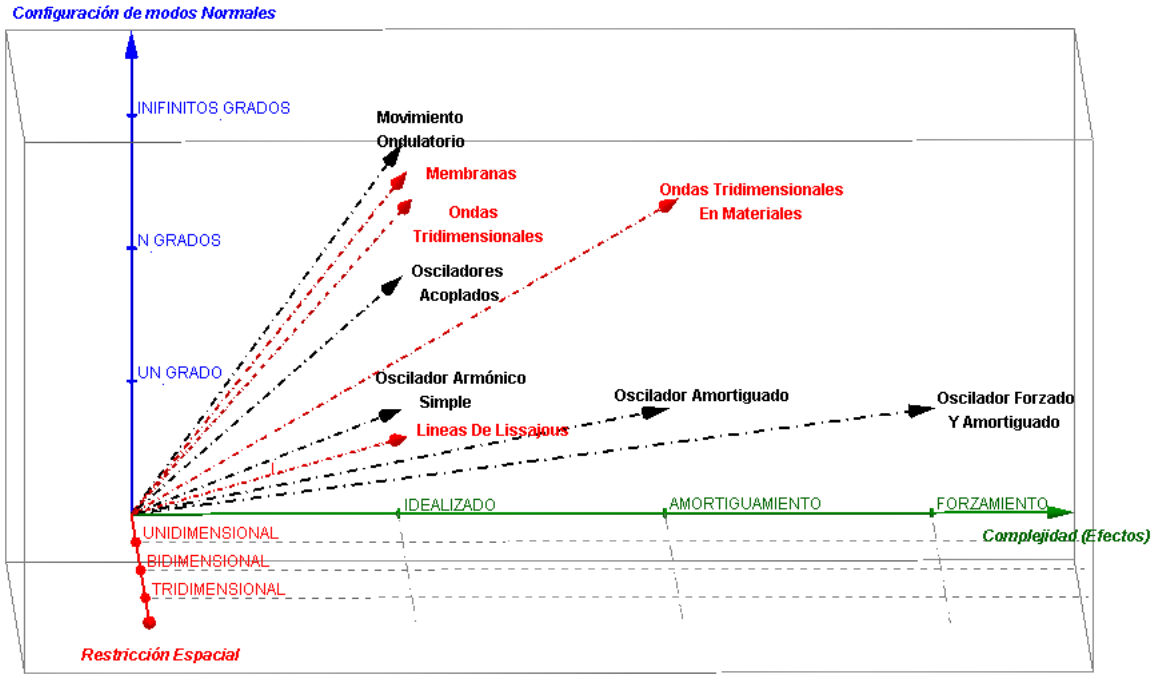


Figura 3: Esquema de las intercepciones entre *restricciones espaciales, complejidad del sistema oscilatorio y la configuración de modos normales.*

Ahora bien, dado que se considera en el presente trabajo, que además de la contextualización de los sistemas oscilatorios, es necesario la profundización de los mismos, por tal razón, en las posteriores secciones se profundizaran en algunos sistemas oscilatorios que se muestran en el esquema de la figura 3, y que se consideran de especial interés para abordar adecuadamente sistemas oscilatorios más complejos. Sin embargo, para una adecuada profundización y comprensión de los sistemas que se proponen abordar, es necesario tener en cuenta una serie de elementos (ver tabla 1), que permitan el desarrollo adecuado de los sistemas oscilatorios que se presentaran posteriormente.

ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SIMULACIONES	PRACTICAS DE LABORATORIO
Ecuaciones Diferenciales Serie de Taylor Transformada de Laplace Métodos Numéricos	Programación para el desarrollo de los métodos Numéricos Animaciones y simulaciones que permitan apreciar caracteristicas de los sistemas oscilatorios estudiados	Practicas que permitan, por medio de sistemas de sistemas de adquisición de datos libres, profundizar en el estudio de los sistemas oscilatorios propuestos.

Tabla 1: Algunos de los aspectos que se proponen como herramienta para abordar *Los Sistemas Oscilatorios.*

También es pertinente destacar que dados los sistemas mecánicos que se aborden durante el desarrollo de este trabajo de grado, son susceptibles a desarrollar analogamente con *Circuitos Eléctricos* cuyo comportamiento corresponda a los sistemas oscilatorios desarrollados.

3. EL PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL

El péndulo es un objeto muy familiar para el común de las personas. Su apariencia más común es en los relojes antiguos que siguen siendo muy populares hoy en día, incluso en esta era de relojes de cuarzo y atómicos. Una gran parte de la fascinación por el péndulo se basa en la conocida regularidad de su periodo y en su relación con la fundamental fuerza natural de la gravedad.

La historia de la física del péndulo se remonta a los mismos inicios de la ciencia moderna. Se podría iniciar con las observaciones de Galileo de las lámparas oscilantes en la catedral de Pisa. Mediante su pulso cardíaco, como reloj, presumiblemente, Galileo logra determinar el hecho cuantitativo que el periodo de oscilación de un péndulo es independiente de su amplitud de desplazamiento.

Existen muchos tipos de péndulos, en este apartado se estudiará el péndulo matemático No lineal, el cual se encuentra en la intersección dimensional del esquema de la Figura 3 en $UNIDIMENSIONAL \rightarrow IDEALIZADO \rightarrow UN\ GRADO\ DE\ LIBERTAD$. Este sistema físico estará compuesto por una partícula de masa m sujeta de una cuerda ideal (inextensible y con masa mucho menor que la de la partícula, $m_{cuerda} \ll m$) de longitud L.No se supondrán amplitudes iniciales de ángulos pequeños, como se hace convencionalmente, por lo cual este péndulo se considera como un sistema No lineal. Tampoco se tendrán en cuenta fuerzas disipadoras como la viscosidad provocada por la interacción de la partícula con el aire.Esto implica que las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso de la misma ($m\boldsymbol{g}$) y la fuerza de tensión ($\boldsymbol{F_T}$) ejercida por la cuerda.

Es de resaltar que el estudio de sistemas No lineales, ha tomado una vital importancia en la actualidad, ya que este campo ha permitido hallar soluciones más acordes a la realidad, a diferencia de los sistemas lineales, debido a que la base de este estudio es afinar las aproximaciones.

3.1. PERIODO DEL PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL

Para el estudio del periodo del péndulo matemático No Lineal, se analizará el cambio de energía mecánica en los dos puntos de su trayectoria que se muestra en la Figura 4.

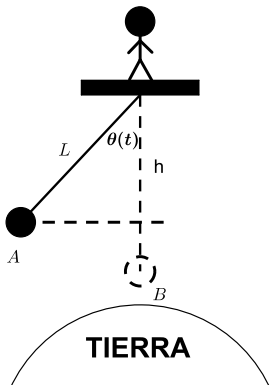


Figura 4: Péndulo matemático en dos instantes de tiempo dados para un ángulo inicial (θ_0) arbitrario

Del cambio de energía mecánica se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 \\ E_A &= E_B \end{aligned} \tag{1}$$

Es de resaltar que en el punto A de la trayectoria del péndulo solo existe energía potencial gravitacional, mientras que en el punto B, al ser un punto cualquiera de la trayectoria, hay presencia tanto de energía cinética como de potencial gravitacional. Reescribiendo la expresión anterior en términos de estos tipos de energía y despejando de esta $\frac{d\theta(t)}{dt}$, entonces

$$\begin{aligned} -mgL\cos(\theta_0) &= \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 - mgL\cos(\theta(t)) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \sqrt{2\frac{g}{L}}\sqrt{\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)} \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora bien, recordando que $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, y despejando dt ya que el objetivo es determinar el periodo de tiempo

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\cos\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta_0\right)}} \tag{3}$$

Planteando la integración de la anterior expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{T/4} dt &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\cos\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta_0\right)}} \\ T &= \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\cos\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta_0\right)}} \end{aligned} \tag{4}$$

Es de resaltar que los límites de integración fueron determinados debido a los puntos que se están analizando, mostrados en la Figura 4. También es importante notar que esta no es una expresión fácilmente integrable, por lo cual, para que sea integrable se iniciará usando la identidad $\cos\left(\beta\right) = 1 - 2\sin^2\left(\beta/2\right)$ de lo cual, y por analogía, se obtiene

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\sin^2\left(\theta_0/2\right) - \sin^2\left(\theta(t)/2\right)}} \tag{5}$$

Ahora bien, realizando el cambio de variable $\sin\left(\dfrac{\theta(t)}{2}\right) = k\sin\left(\alpha\right)$ con $k = \sin\left(\theta_0/2\right)$, y por medio de su correspondiente derivada se determina que

$$\frac{1}{2} d\theta(t) \cos\left(\theta(t)/2\right) = k\cos\left(\alpha\right) d\alpha \quad \rightarrow \quad d\theta(t) = \frac{2k\cos\left(\alpha\right) d\alpha}{\cos\left(\theta(t)/2\right)} \tag{6}$$

Antes de hacer la sustitución correspondiente, es necesario observar que en la expresión anterior, existen dos variables diferentes (α y $\theta(t)$), por lo tanto, y para dejar la expresión anterior en términos de α, se hará uso de la geometría, como se muestra en la Figura 5, de donde se obtiene

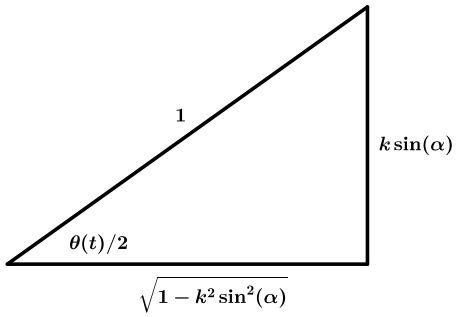


Figura 5: Representación geométrica de $\sin(\theta(t)/2)$

$$\cos(\theta(t)/2) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)} \tag{7}$$

Sustituyendo 7 en 6

$$d\theta(t) = \frac{2k\cos(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \tag{8}$$

Por lo tanto, ya determinada $d\theta(t)$, la expresión 5 se reescribe como

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\alpha) \quad d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \tag{9}$$

Recordando que $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ entonces

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \tag{10}$$

La integral en la expresión anterior es conocida como una *integral elíptica de primera especie*, que en primera instancia se puede determinar como una función que depende de k, es decir $\mathrm{F}(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}}$, por lo tanto

$$T = \frac{4}{\omega_0} \mathrm{F}(k) \tag{11}$$

Ahora bien, para dar solución a $\mathrm{F}(k)$, se hará uso de la *serie de Maclaurin*, donde hay que tener en cuenta que se esta derivando una integral, y se obtiene

$$\mathrm{F}(k) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{F}^n(0)k^n}{n!} = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\pi k^2 + \frac{9}{128}\pi k^4 + \frac{25}{256}\pi k^6 + \cdots \tag{12}$$

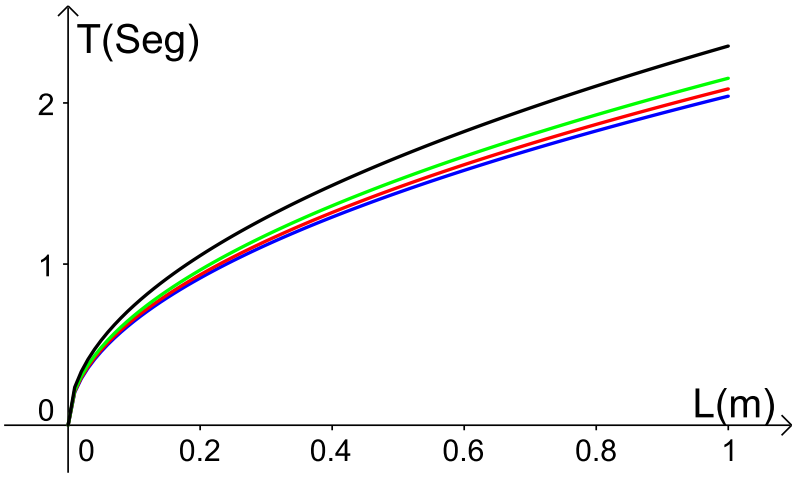
Factorizando y recordando que $k = \sin(\theta_0/2)$

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2(\theta_0/2) + \frac{9}{64}\sin^4(\theta_0/2) + \frac{25}{256}\sin^6(\theta_0/2) + \cdots\right) \tag{13}$$

Ya determinada $\mathrm{F}(k)$ y con $\dfrac{1}{\omega_0} = \sqrt{\dfrac{L}{g}}$ entonces, el periodo del péndulo matemático No Lineal esta dado por la expresión

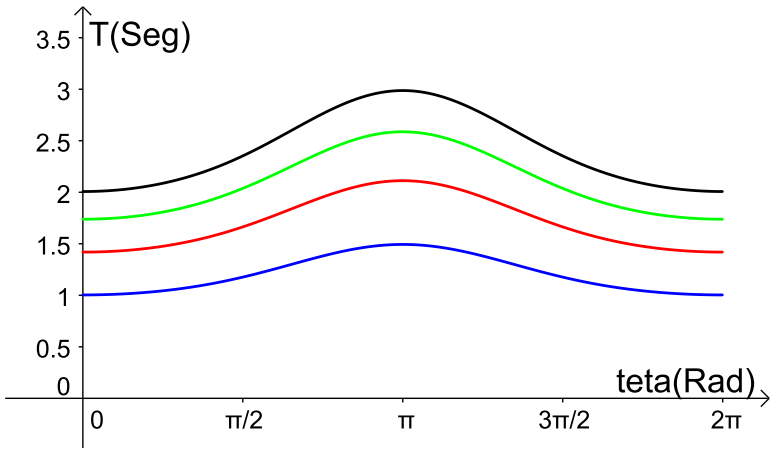
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2(\theta_0/2) + \frac{9}{64}\sin^4(\theta_0/2) + \frac{25}{256}\sin^6(\theta_0/2) + \cdots\right) \tag{14}$$

Se pude apreciar que técnicamente el periodo depende de la longitud de la cuerda ideal ya que θ_0 es una constante al ser la amplitud inicial. También es importante notar que a medida que aumentan los términos de $\mathrm{F}(k)$ se hacen más pequeños por lo tanto despreciables.



Gráfica 1: Periodo del péndulo matemático No Lineal con respecto a la longitud de la cuerda ideal para amplitudes iniciales de $\pi/6, \pi/4, \pi/3$ *y* $\pi/2$, de la curva inferior a la superior respectivamente

En la anterior gráfica se muestra el periodo en función de la longitud de la cuerda ideal para amplitudes iniciales de $\pi/6, \pi/4, \pi/3 \quad y \quad \pi/2$. Nótese que la diferencia entre los periodos para las diferentes amplitudes no son apreciables, corroborando nuevamente, en cierta manera, la observación realizada por Galileo, de que el periodo del péndulo es independiente de su amplitud inicial.



Gráfica 2: Periodo del péndulo matemático No Lineal con respecto a la amplitud inicial para longitudes de una cuerda ideal de 25 $cm, 50\ cm, 75\ cm \quad y \quad 100\ cm$, de la curva inferior a la superior respectivamente

La anterior gráfica muestra el periodo en función de la amplitud inicial para longitudes de la cuerda ideal de 25 $cm, 50\ cm, 75\ cm \quad y \quad 100\ cm$. Es de destacar que la diferencia entre las gráficas, que es apreciable, se debe a la longitud de la cuerda, también que en cada caso el periodo aumenta, pero disminuye de nuevo debido a la geometría circular de la trayectoria del péndulo.

3.2. SOLUCIÓN GENERAL DE PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL

Para dar la solución general del péndulo matemático No Lineal, se hará uso del cambio de energía mecánica del sistema, al igual que se hizo para el periodo, con los mismos parámetros y marco de referencia mostrado en la Figura 4. Se partirá de lo obtenido

anteriormente en la expresión 2, obteniendo

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)}}$$

Con la identidad $\cos(\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$ se obtiene

$$dt = \frac{1}{2\omega_0} \frac{d\theta(t)}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta(t)/2)}} \tag{15}$$

Realizando nuevamente el cambio de variable $\sin(\theta(t)/2) = k\sin(\alpha)$ con $k = sin(\theta_0/2)$, y también recordando su correspondiente derivada y la expresión 8, se reescribe la anterior expresión como

$$dt = \frac{1}{\omega_0} \frac{\cos(\alpha) \quad d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} \tag{16}$$

Recordando nuevamente que $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ entonces

$$dt = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} \tag{17}$$

Ya que lo que se desea es determinar la solución de la ecuación de movimiento, es necesario recordar que cuando un tiempo τ varia desde $0 \to t$, la posición angular varia desde $\theta_0 \to \theta(t)$ y por lo tanto α varia desde $\alpha_{MAX} \to \alpha(t)$.Integrando la expresión anterior con los parámetros dados

$$\begin{gathered} \int_0^t d\tau = \frac{1}{\omega_0} \int_{\alpha_{MAX}}^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} \\ t = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\alpha_{MAX}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} + \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} \end{gathered} \tag{18}$$

Recordando los desarrollos realizados para el periodo del péndulo matemático No Lineal se puede deducir que

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\alpha_{MAX}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}} \quad \to \quad \frac{T}{4} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\alpha_{MAX}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\alpha)}}$$

Sustituyendo en 18

$$t = -\frac{T}{4} + \frac{1}{\omega_0}\int_0^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \quad \rightarrow \quad \int_0^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} = \omega_0 \left(t + \frac{T}{4}\right) \quad (19)$$

Donde $\int_0^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} = \mathrm{F}(k, \alpha)$.Esta es conocida como una *función elíptica de primera especie.* de esto se obtiene

$$\mathrm{F}(k, \alpha) = \omega_0 \left(t + \frac{T}{4}\right) \quad (20)$$

Nótese que para encontrar la solución de la ecuación de movimiento del péndulo matemático No Lineal, es necesario determinar la función inversa de $\mathrm{F}(k, \alpha)$, la cual en la literatura se encuentra determinada como la *función elíptica* $sn\,(k, \mathrm{U})$ *de Jacobi* donde

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(k, \mathrm{U}) \quad \leftrightarrow \quad sn\,(k, \mathrm{U}) = \sin(\mathrm{U})$$

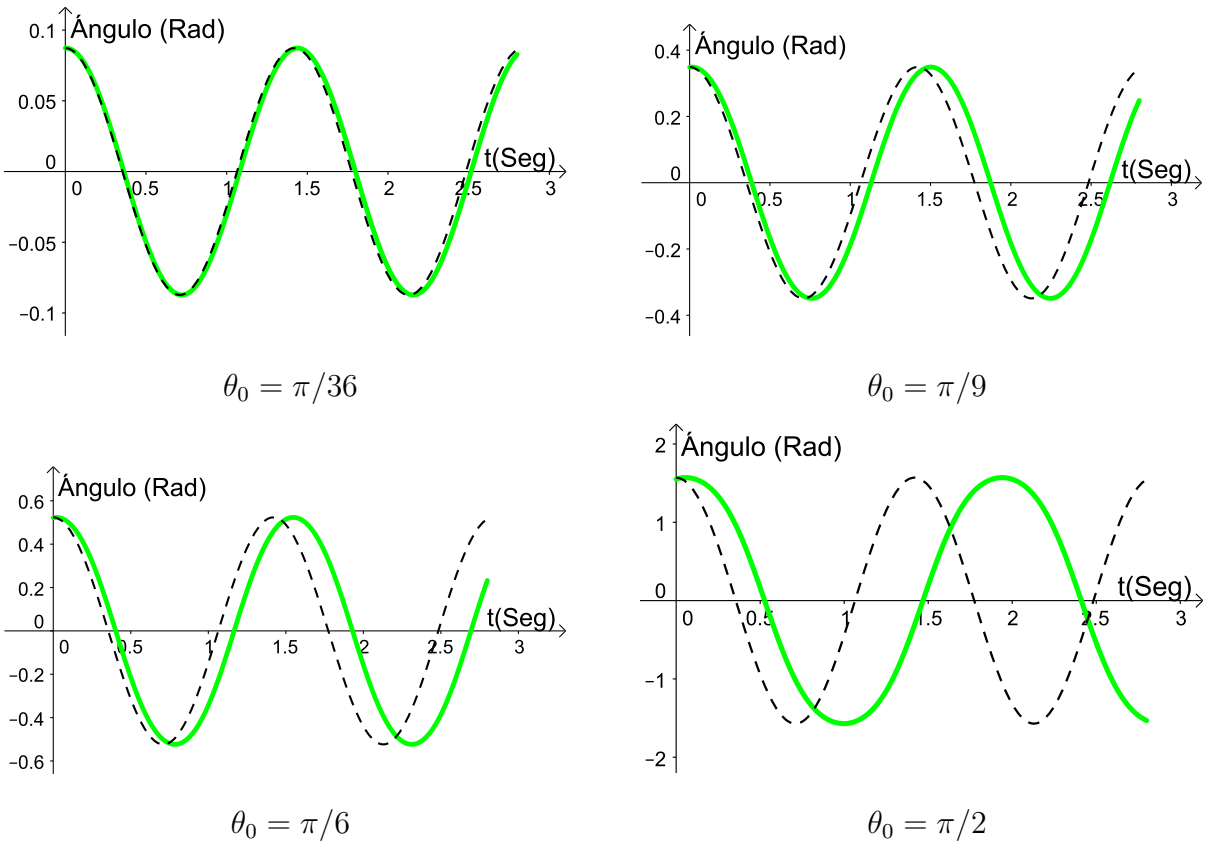
Con base en la propiedad anterior y por analogía, 20 se reescribe como

$$k\ sn\left[k, \omega_0 \left(t + \frac{T}{4}\right)\right] = \sin(\alpha) \quad (21)$$

Recordando que $\sin(\alpha) = \sin(\theta(t)/2)$ y despejando $\theta(t)$ se obtiene

$$\theta(t) = 2 \arcsin\left\{k\ sn\left[k, \omega_0 \left(t + \frac{T}{4}\right)\right]\right\} \quad (22)$$

La expresión 22 representa la posición angular general para el péndulo matemático No Lineal (para cualquier amplitud inicial), con $k = \sin(\theta_0/2)$ y T como el periodo determinado anteriormente.



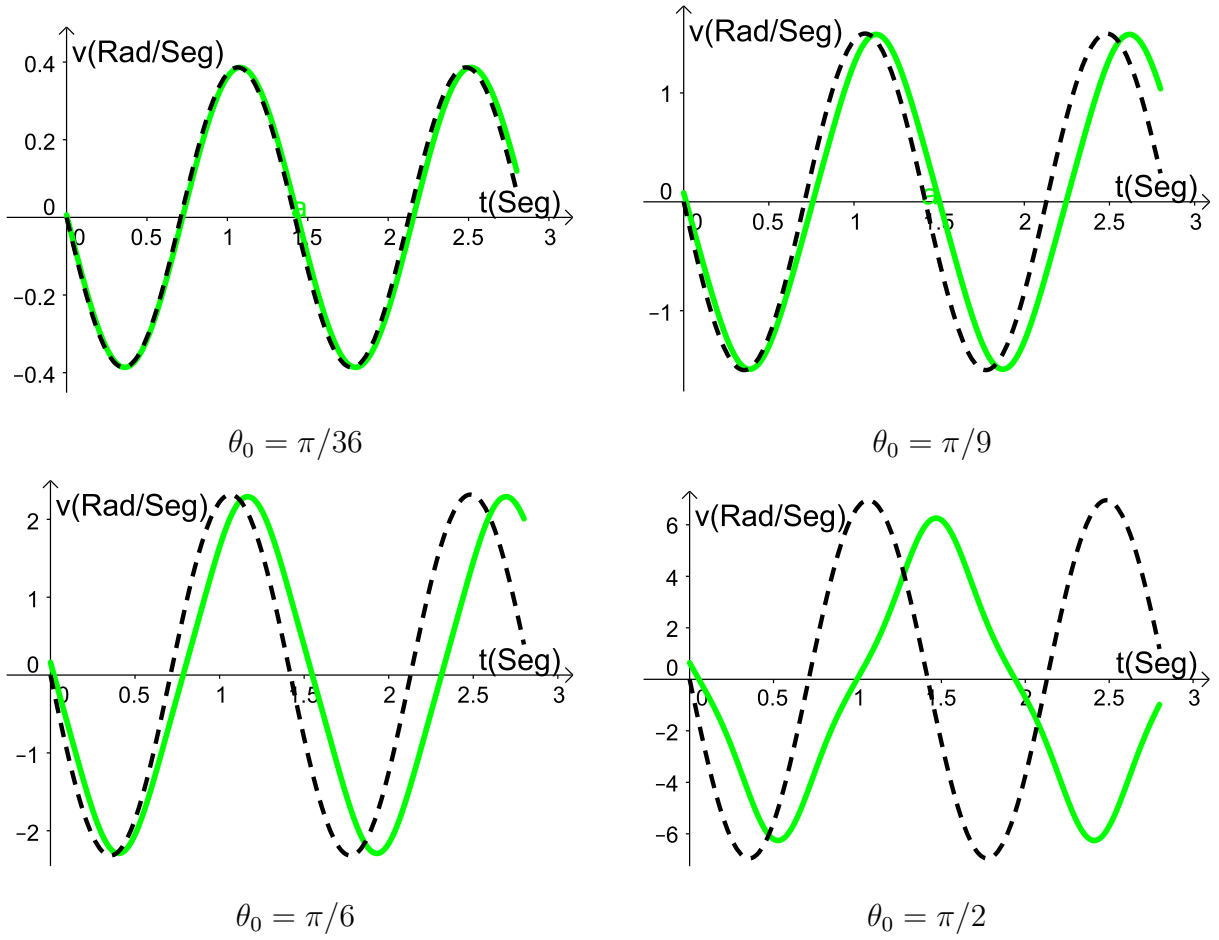
Gráfica 3: Se muestra la posición angular con respecto al tiempo del péndulo matemático No Lineal (línea continua) y lo que se esperaría del péndulo linealizado (línea punteada) para diferentes amplitudes iniciales

En las anteriores gráficas se muestra en línea continua la posición angular para la solución general del péndulo matemático No Lineal, contrastada con las gráficas obtenidas con la posición para el péndulo linealizado, para cuatro diferentes amplitudes iniciales. Es de apreciar que para la gráfica de $\theta_0 = \pi/36 = 5°$ existe una buena proximidad entre las soluciones, tanto la No Lineal como la linealizada, lo cual valida la solución general al coincidir con lo que se esperaría de la solución linealizada.También es de apreciar que con las siguientes amplitudes iniciales, al no ser pequeñas, existen variaciones en la solución general como era de esperarse.

Derivando con respecto al tiempo la expresión 22, haciendo uso de métodos computacionáles debido a la complejidad de la función, se obtiene que la velocidad general del péndulo matemático No Lineal esta dada por

$$v(t) = \frac{2k\omega_0 \; cn\left[k, \omega_0\left(t + \frac{T}{4}\right)\right] \; Dn\left[k, \omega_0\left(t + \frac{T}{4}\right)\right]}{\sqrt{1 - k^2 \; sn^2\left[k, \omega_0\left(t + \frac{T}{4}\right)\right]}} \tag{23}$$

Nótese, que la anterior expresión, que representa la velocidad del péndulo matemático No Lineal, contiene otros tipos de *funciones elípticas de Jacobi*, como lo son cn y Dn. Las gráficas correspondientes a la anterior expresión son



$\theta_0 = \pi/36$ $\theta_0 = \pi/9$

$\theta_0 = \pi/6$ $\theta_0 = \pi/2$

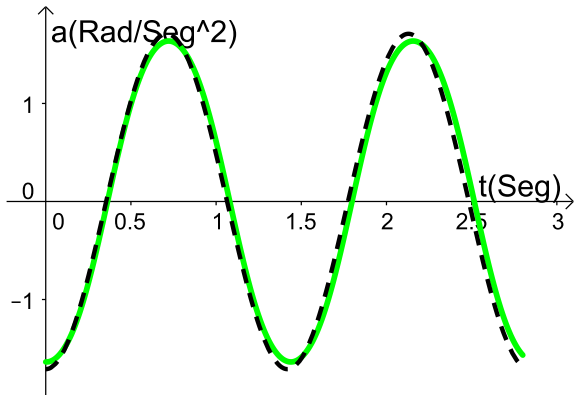
Gráfica 4: Se muestra la velocidad con respecto al tiempo del péndulo matemático No Lineal (línea continua) y lo que se esperaría del péndulo linealizado (línea punteada oscura) para diferentes amplitudes iniciales

En las anteriores gráficas muestran la velocidad con respecto al tiempo para el péndulo matemático No Lineal (línea continua) y el linealizado (línea punteada) para diferentes amplitudes iniciales. Derivando nuevamente respecto al tiempo se obtiene

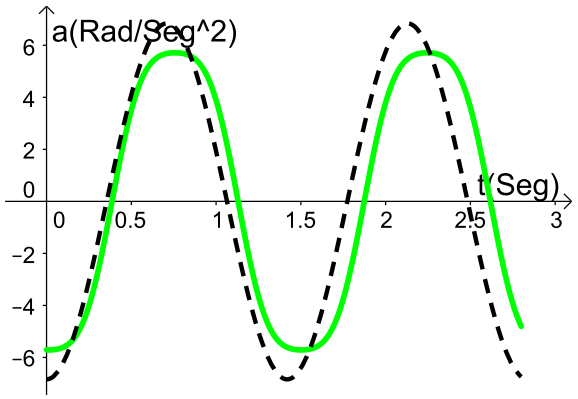
$$a(t) = \frac{\left\{2k^3\omega_0^2\ cn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\ Dn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\ sn\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right\}}{\left(1-k^2\ sn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right)^{3/2}}\ \ldots$$

$$\ldots - \frac{\left\{2k^2\omega_0^2\ cn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\ sn\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right\}}{\left(1-k^2\ sn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right)^{1/2}}\ \ldots$$

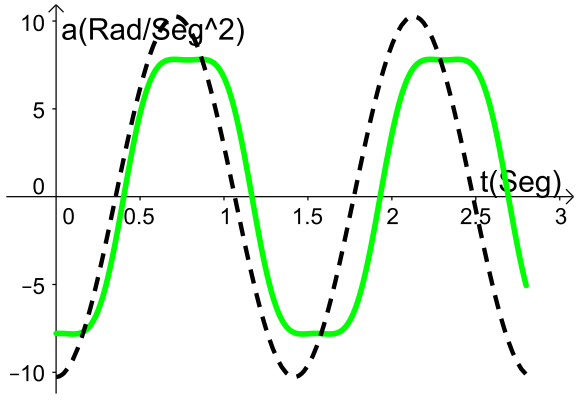
$$\ldots - \frac{\left\{2k^2\omega_0^2\ Dn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\ sn\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right\}}{\left(1-k^2\ sn^2\left[k,\omega_0\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\right)^{1/2}} \tag{24}$$



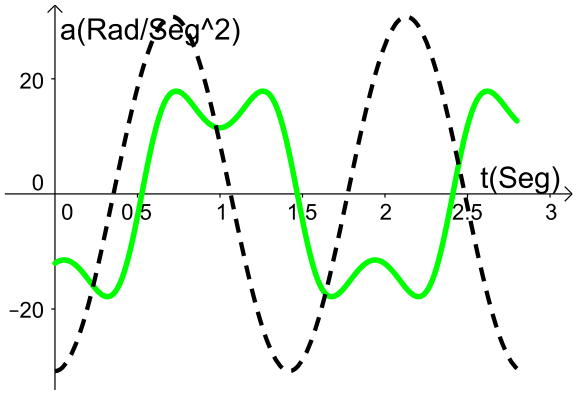
$\theta_0 = \pi/36$



$\theta_0 = \pi/9$



$\theta_0 = \pi/6$



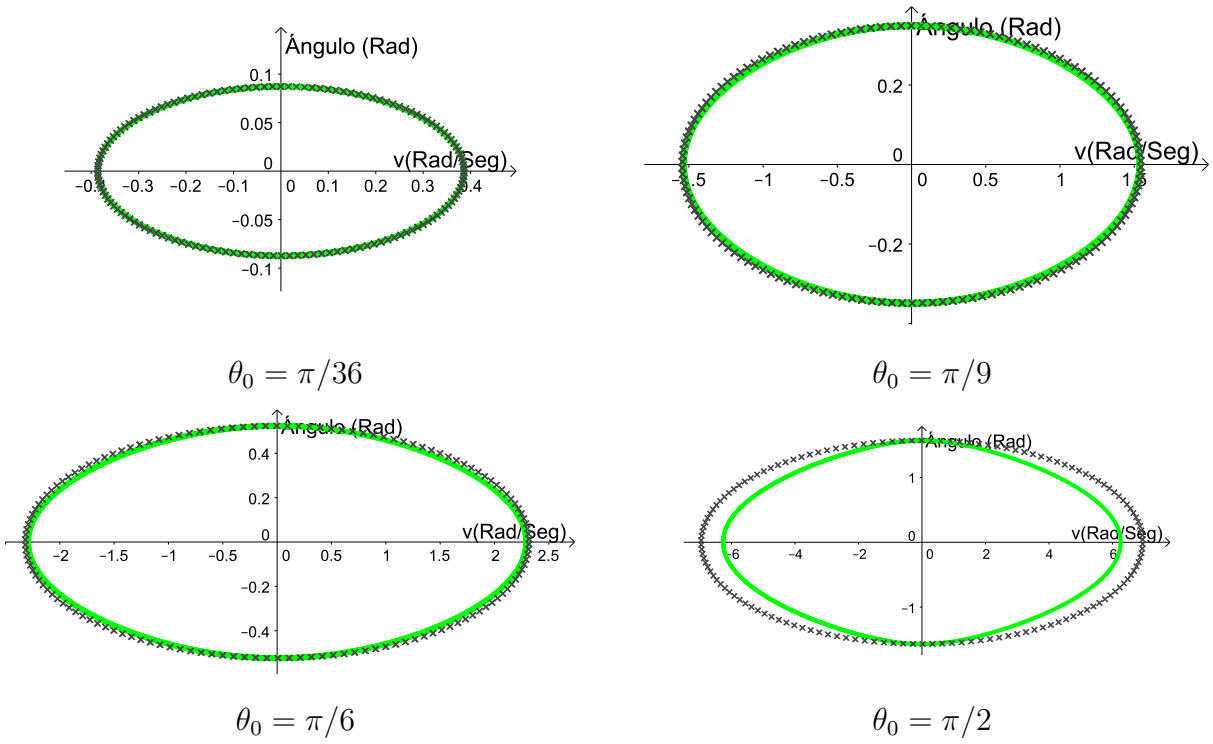
$\theta_0 = \pi/2$

Gráfica 5: Se muestra la aceleración con respecto al tiempo del péndulo matemático No Lineal (línea continua) y lo que se esperaría del péndulo linealizado (línea punteada oscura) para diferentes amplitudes iniciales

Es de destacar, como en las gráficas de velocidad y aceleración para el péndulo matemático No Lineal, se nota una variación apreciable de lo esperado con el péndulo linealizado, excepto con la amplitud inicial de $\pi/36$ para el cual hay una gran proximidad, al igual que en la posición angular, ratificando como solución general para el péndulo matemático la expresión 22.

3.3. ENERGÍA DEL PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL

Para el estudio energético del péndulo matemático No lineal, se hará uso de de la dependencia de sus variables posición $\theta(t)$ y velocidad $\dfrac{d\theta(t)}{dt} = v(t)$, es decir de su diagrama de fase, para de esta manera mostrará la energía mecánica del sistema. Al realizar las correspondientes gráficas del diagrama de fase se obtiene



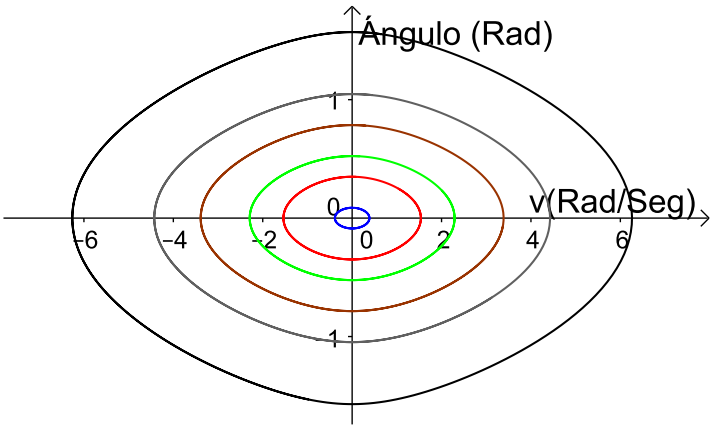
Gráfica 6: Se muestra el diagrama de fase para el péndulo matemático No Lineal (línea continua) y lo que se esperaría del péndulo linealizado (línea punteada oscura) para diferentes amplitudes iniciales

En las anteriores gráficas se muestra el diagrama de fase para el péndulo matemático No Lineal (en línea continua) con respecto a lo que se esperaría con el péndulo linealizado

(en línea punteada) para diferentes amplitudes iniciales. Se destaca la proximidad de las soluciones para ángulos pequeños mostrando nuevamente la validez de la expresión 22.

También es de notar que empiezan a existir variaciones entre los diagramas de fase desde la amplitud de $\pi/9$, pero es más notoria a partir de $\pi/4$. Estas variaciones se le pueden atribuir a que la aproximación para el péndulo matemático linealizado deja de ser valida para amplitudes iniciales grandes y se esperaría, como se observa en las gráficas anteriores, variaciones en la energía mecánica del sistema.

Para hacer un mejor análisis de la variación de la energía mecánica dependiendo de sus amplitud inicial, se compararán los diagramas de fase para el péndulo matemático No Lineal, como se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica 7: Se muestra los diagramas de fase del péndulo matemático No Lineal para diferentes amplitudes iniciales

Nótse que aparte de las variaciones de la elipse al aumentar la amplitud inicial, también aumenta su tamaño, por lo cual se puede concluir que su energía mecánica también va en aumento a medida que se aumenta la amplitud inicial del péndulo. Esto es razonable desde un punto de vista físico ya que a mayor amplitud inicial mayor sera el recorrido que debe realizar el péndulo, por lo cual requiere de mayor energía mecánica el sistema para hacer este movimiento oscilatorio.

3.4. SOLUCIÓN DEL PÉNDULO NO LINEAL POR MEDIO DEL MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Dado que no es factible siempre encontrar la solución de una ecuación diferencial, y aun exista dicha solución no es siempre posible encontrar una solución explicita o implícita. En muchos casos, sobre todo en el caso de sistemas NO lineales, es necesario conformarse con solo una aproximación de la solución. Sin embargo, si se supone que dicha ecuación diferencial tiene una solución, esta solución debe poderse representar en un espacio geométrico, el cual es una serie de puntos unidos por medio de una curva a partir del conocimiento de las condiciones iniciales del sistema que representa la ecuación diferencial. Esta afirmación es la base del estudio de los *métodos numéricos.*

Estos métodos numéricos constituyen una serie de técnicas que permiten la solución de ecuaciones diferenciales por medio de procedimientos aritméticos. Aunque existen muchos tipos de métodos numéricos, todos estos comparten la característica de requerir un sin número de tediosos cálculos aritméticos, por lo cual, y debido al gran desarrollo computacional de las ultimas décadas, estos métodos se desarrollan bajo la implementación de programas de computadora con los cuales es posible crear códigos que permitan realizar los cálculos aritméticos e interaciones con mayor eficiencia y precisión.

El *método de Runge Kutta* de cuarto orden, es probablemente el método numérico más popular. El objetivo de este método se basa en dar solución a ecuaciones diferenciales del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, por medio de interacciones cuya solución general tiene la forma

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{25}$$

Donde h es el tamaño del paso y esta determinado por $h = \frac{x_f - x_i}{n}$, siendo n el número de interaciones, nótese que a mayor numero de interaciones más pequeño el paso y por lo tanto más exacta la solución aproximada de la ecuación diferencial. También es necesario definir $\phi(x_i, y_i, h)$ como una pendiente estimada entre los puntos consecutivos de la solución aproximada, conocida también como función de incremento y que se encuentra definida para el método de Runge Kutta de cuarto orden como

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{26}$$

Donde

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

Ahora bien, haciendo uso de 26 y 25 se puede determinar que la solución aproximada de la ecuación diferencial por medio de este método esta dada por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h \tag{27}$$

En el caso de la solución de EDOs por medio del método de Runge Kutta de cuarto orden, donde se hará énfasis en las ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que es el caso específico de los osciladores armónicos. Ahora bien, suponiendo una ecuación diferencial de la forma $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es necesario realizar un cambio de variable de la forma $z = \frac{dy}{dx}$ de lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z(x, y) \\ \dfrac{dz}{dx} = f(x, z) - z(x, y) \end{cases}$$

Cuyas soluciones aproximadas por medio del método de Runge Kutta de cuarto orden están dadas por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h \quad y \quad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right)h \tag{28}$$

Nótese como los cálculos aritméticos para la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden se extienden aun más y por consiguiente se hacen mucho mas tediosos de realizar a mano, razón por la cual se ha desarrollado un código dirigido a la solución de los osciladores armónicos (ver anexos).

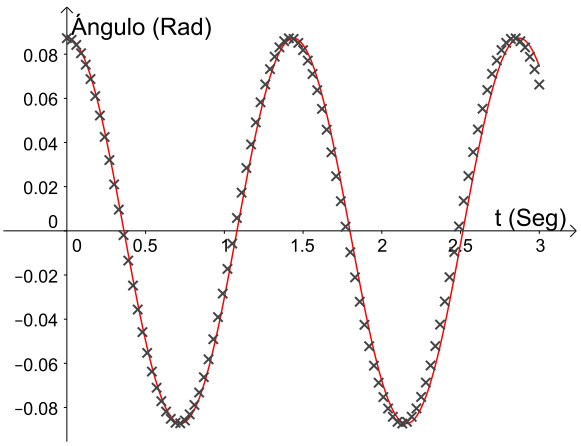
Ahora bien, para dar solución al péndulo No lineal por medio de esté método es necesario recordar en primea instancia que la ecuación diferencial representativa de este sistema físico está dado por

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\left(\theta(t)\right) = 0 \tag{29}$$

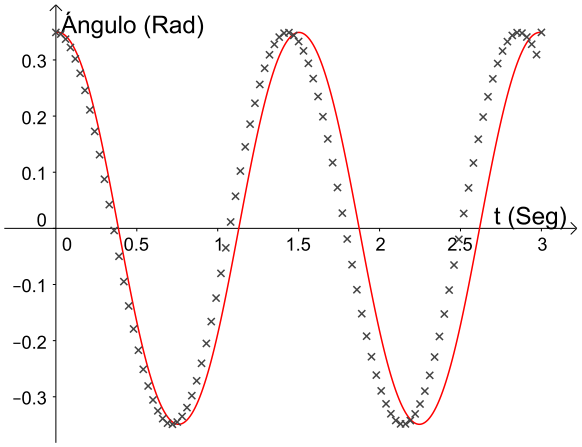
Ahora bien, realizando en cambio de variable $v = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta(t)}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \sin\left(\theta(t)\right) \end{cases}$$

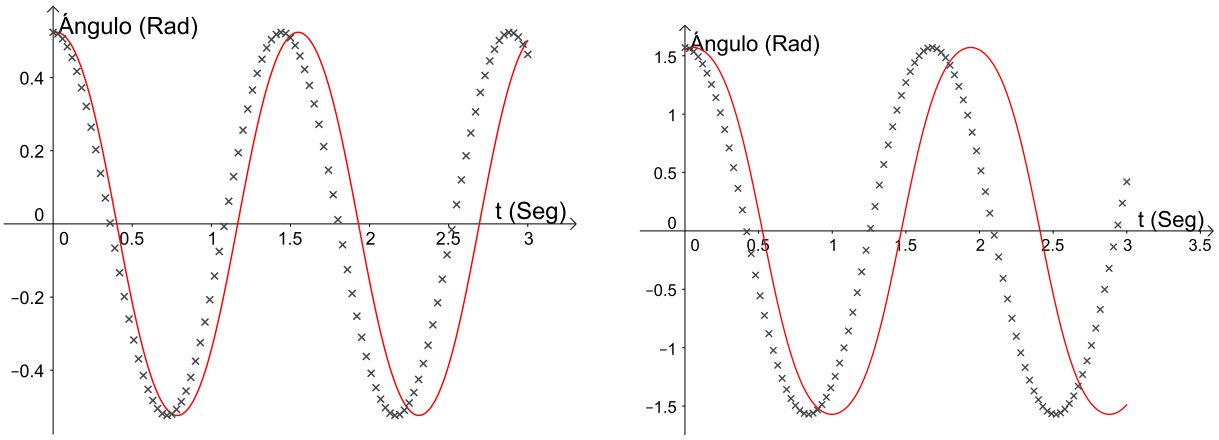
Manteniendo la condición inicial $v(0) = 0\ Rad/s$ y variando la amplitud inicial del péndulo No lineal se obtiene



$\theta_0 = \pi/36$



$\theta_0 = \pi/9$



$\theta_0 = \pi/6$ $\theta_0 = \pi/2$

Gráfica 8: Se muestra la posición angular con respecto al tiempo del péndulo matemático No Lineal por medio de la expresión 22 (linea continua) y la solución por medio del método de Runge Kutta cuarto orden (linea punteada) para diferentes amplitudes iniciales

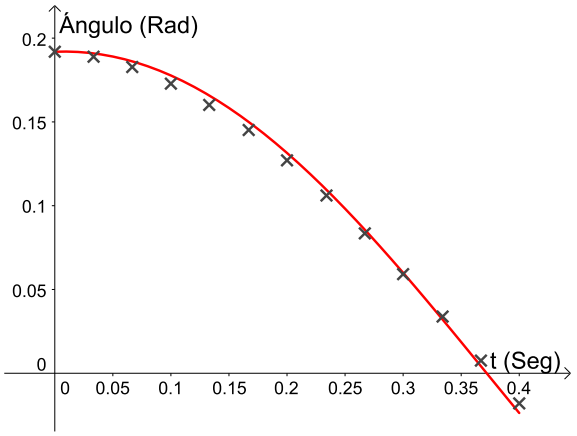
Es necesario destacar como este método tiene una gran proximidad a la solución general encontrada en 22. Sin embargo, por el carácter de No linealidad del péndulo se hace menos preciso al aumentar la amplitud inicial, pero hay que resaltar que este método es mucho más exacto que las soluciones para el péndulo linealizado, como se puede observar al comparar las gráficas 8 y 3, donde el método de Runge Kutta de cuarto orden posee una mayor cercanía.

3.5. ANÁLISIS DEL PÉNDULO NO LINEAL POR MEDIO DE TRACKER

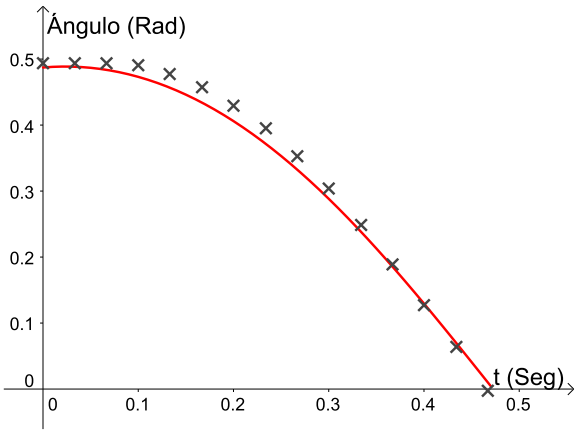
En este apartado, se mostraran los resultados de la práctica de laboratorio propuestas para el péndulo matemático No lineal. Es de anotar que estas práctica de laboratorio es de fácil realización para los estudiantes, ya que se basa en uso del programa *Tracker*, el cual es un programa gratuito de análisis de vídeos basado en programación *Java* y que esta diseñado para el uso de la enseñanza de la física lo cual permitirá estudiar el comportamiento de los osciladores armónicos.

Ahora bien, para esta práctica de laboratorio se hará uso de un péndulo de longitud $l = 0.5\ m$, el cual se estudiara a diferentes amplitudes iniciales y un periodo de $\frac{T}{4}$ con el fin de evitar en lo posible la interferencias de fuerzas disipadoras, como la del aire. Este

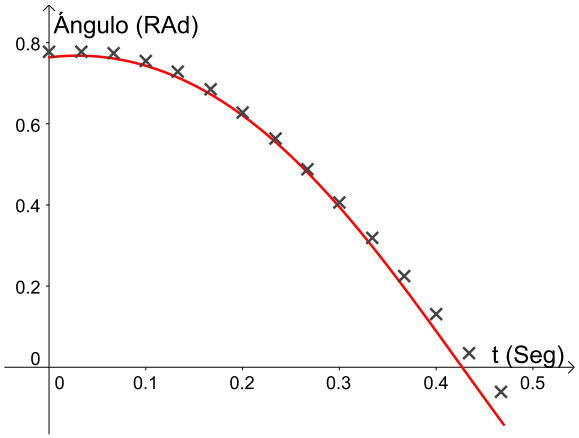
péndulo se analizara por medio del programa tracker, de lo cual se obtiene las siguientes gráficas



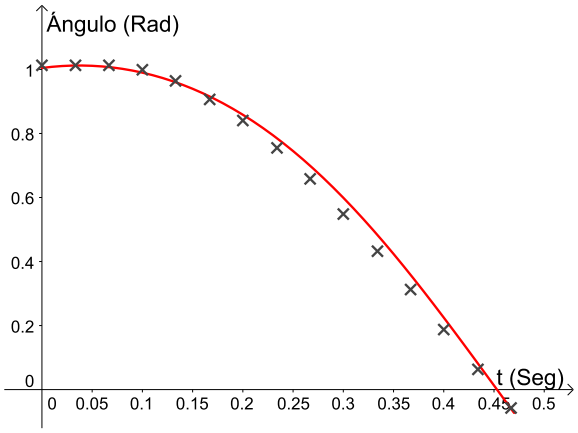
$\theta_0 = 11\pi/180$



$\theta_0 = 7\pi/45$



$\theta_0 = 11\pi/45$



$\theta_0 = 29\pi/90$

Gráfica 9: Se muestra la posición angular con respecto al tiempo del péndulo matemático No Lineal por medio de la expresión 22 (línea continua) y la simulación dada por el programa Tracker (línea punteada) para diferentes amplitudes iniciales

Es de destacar como la simulación determinada por tracker, tiene una aproximación considerable a lo determinado por la solución general del péndulo No lineal, a pesar de unas leves diferencias que se podrían atribuir a la interacción del aire con el sistema del péndulo. Sin embargo, esta práctica de laboratorio reafirma la validez de la expresión 22.

También es de destacar en esta sección que la solución del péndulo matemático no lineal, permite profundizar en el estudio de este sistema, no solo para aproximaciones a pequeños ángulos, sino la generalización de las características del mismo.

4. EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO SOLUCIONADO POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En la naturaleza se puede observar que las oscilaciones de los sistemas físicos reales desaparecen al transcurrir el tiempo. Estos sistemas poseen características disipadoras que inevitablemente hacen perder la energía mecánica de la oscilación.A estos sistemas físicos se les conocen como *osciladores armónicos amortiguados*, este sistema oscilatorio se encuentra en la intersección dimensional del esquema de la figura 3 en $UNIDIMENSIONAL \rightarrow AMORTIGUAMIENTO \rightarrow UN\ GRADO\ DE\ LIBERTAD$.

Para el estudio del oscilador armónico amortiguado, se tomará en este caso como sistema físico el sistema masa-resorte el cual está compuesto por un cuerpo de masa m y un resorte de constante κ como se muestra en la Figura 6.

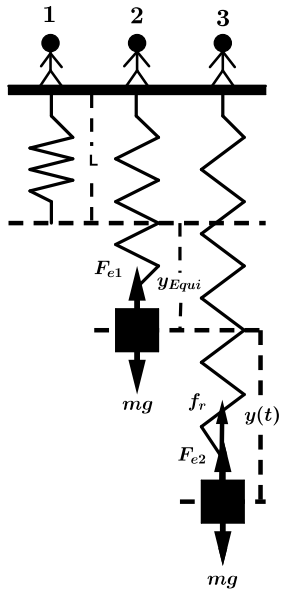


Figura 6: Sistema masa-resorte amortiguado donde se muestran tres diferentes instantes de tiempos, y las correspondientes fuerzas que actúan sobre éste

La figura anterior muestra el sistema masa-resorte en tres diferentes instantes de tiempo. En su estado natural, donde **L** es la longitud natural del resorte, en su estado de equilibrio, donde y_{Equ} es la posición de equilibrio del sistema, y en su estado de oscilación, donde $y(t)$ es la posición de la masa en un instante de tiempo t.También se muestran las fuerzas que actúan sobre el sistema en estos instantes de tiempo, siendo $\boldsymbol{F_e}$ la fuerza elástica del resorte, $m\boldsymbol{g}$ el peso de la masa y f_r es una *fuerza resistiva* causante de la disipación de la energía mecánica del sistema. Del instante de tiempo 2 para el sistema, donde el sistema se encuentra en equilibrio y haciendo uso de las leyes de la dinámica se obtiene

$$F_{e1} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{e1} = mg \tag{30}$$

Ahora bien, del instante de tiempo 3, donde el sistema ya se encuentra en movimiento oscilatorio, se obtiene, de igual manera por la aplicación de las leyes de la dinámica

$$F_{e2} - mg - f_r = m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} \tag{31}$$

Sustituyendo la expresión 30 en 31

$$F_{e2} - F_{e1} - f_r = m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} \tag{32}$$

Ya que en general las fuerzas resistivas se pueden escribir como $F_r = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^i$, la cual es dependiente de una constante y la velocidad del sistema y las fuerzas elásticas se generalizan como $F_e = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i x(t)^i$, igualmente dependientes de una constate y la posición del sistema. De esta manera la expresión 32 se reescribe como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i y(t)^i - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i y_{(Equi)}^i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^i &= m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \\
-\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \underbrace{\left(y_{(Equi)} - y(t)\right)^i}_{Y(t)} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^i &= m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \\
m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\frac{dY(t)}{dt}\right)^i + \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i Y(t)^i &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

La expresión 33 en la ecuación de movimiento general para el oscilador armónico amortiguado. Sin embargo, en este caso especifico y por cuestiones de simplicidad, se tomara una fuerza resistiva tipo Stoke $\left(F_r = b\frac{dx(t)}{dt)}\right)$, y una fuerza elástica tipo Hooke ($F_e = \kappa x(t)$). Por lo tanto

$$m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + b\frac{dY(t)}{dt)} + \kappa Y(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dY(t)}{dt)} + \omega_0^2 Y(t) = 0 \tag{34}$$

La expresión anterior, con $\Gamma = \frac{b}{m}$ y $\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}$, es la ecuación de movimiento a solucionar para el oscilador armónico amortiguado.

4.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En este apartado se mostrará la solución alternativa a la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado, la cual se hará por medio de *la transformada de Laplace*. Es importante recordar que esta transformada se especifica su interés en una integral impropia que transforma una función $F(t)$ en una función de parámetro s, y que se simboliza como

$$\mathrm{L} \quad \{F(t)\} = \int_0^\infty F(t)e^{-\omega t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b F(t)e^{-\omega t}dt = f(\omega)$$

Aplicando el laplaciano a la expresión 34 se obtiene

$$\mathrm{L} \quad \left\{\frac{d^2Y(t)}{dt^2}\right\} + \Gamma\mathrm{L} \quad \left\{\frac{dY(t)}{dt}\right\} + \omega_0^2\mathrm{L} \quad \{Y(t)\} = 0 \tag{35}$$

Ahora bien, tomando de los desarrollos encontrados en la literatura de la transformada de Laplace que

$$\mathrm{L} \quad \left\{\frac{d^nF(t)}{dt^n}\right\} = \left[\omega^n f(\omega) - \omega^{n-1}F(0) - \cdots - F^{n-1}(0)\right]$$

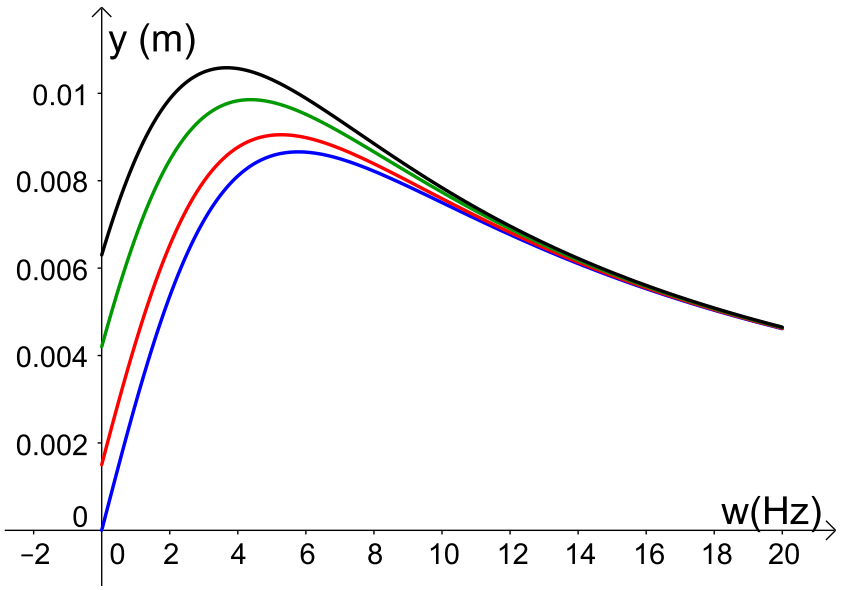
Se obtiene que el laplaciano de la expresión 35 esta determinado por

$$\omega^2 y(\omega) - \omega Y(0) - \frac{dY(0)}{dt} + \Gamma\left[\omega y(\omega) - Y(0)\right] + \omega_0^2 y(\omega) = 0 \tag{36}$$

Despejando de la expresión anterior $y(\omega)$ y con las condiciones iniciales de $Y(0) = A_0$ y $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ se obtiene

$$y(\omega) = A_0\left[\frac{\omega + \Gamma}{\omega^2 + \Gamma\omega + \omega_0^2}\right] \tag{37}$$

La anterior expresión representa la función inversa de la posición del oscilador armónico amortiguado, en otras palabras, nos representa la posición del sistema oscilatorio en el espacio de las frecuencias (dependiendo de la frecuencia), de donde se obtiene.



Gráfica 10: Posición del oscilador armónico amortiguado en el espacio de frecuencias.

Nótese que la anterior gráfica muestra como evoluciona la posición del sistema oscilatorio con respecto a la su frecuencia, se puede observar que se tendrá una posición máxima dada la frecuencia, pero también que para frecuencias altas el sistema busca un punto de equilibrio, al igual que en las frecuencias bajas, las cuales corresponden a grandes tiempos transcurridos, lo cual se espera dado el amortiguamiento del sistema oscilatorio.

Ahora bien, dado que la propuesta del esquema mental se desarrolla bajo la trasversalidad del tiempo (como se muestra en la figura 2),es necesario hacer uso del laplaciano inverso (L^{-1}), para poder regresar la función posición. Ahora bien, antes de aplicar el lapaciano inverso, se reescribirá la expresión 37 iniciando por factorizar su denominador, de tal manera que

$$y(\omega) = A_0 \left[\frac{\omega + \Gamma}{\left(\omega + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \omega_v^2} \right] \tag{38}$$

Donde $\omega_v^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$. Ahora bien, con $\Gamma = \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2}$ la expresión 38 se reescribe como

$$y(\omega) = A_0 \left[\frac{\omega + \frac{\Gamma}{2}}{\left(\omega + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \omega_v^2} + \frac{\Gamma}{2\omega_v} \frac{\omega_v}{\left(\omega + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \omega_v^2} \right] \tag{39}$$

Aplicando el lapaciano inverso a la anterior expresión

$$\mathrm{L}^{-1}\{y(\omega)\} = A_0 \left[\mathrm{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega + \frac{\Gamma}{2}}{\left(\omega + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \omega_v^2} \right\} + \frac{\Gamma}{2\omega_v} \mathrm{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_v}{\left(\omega + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \omega_v^2} \right\} \right] \tag{40}$$

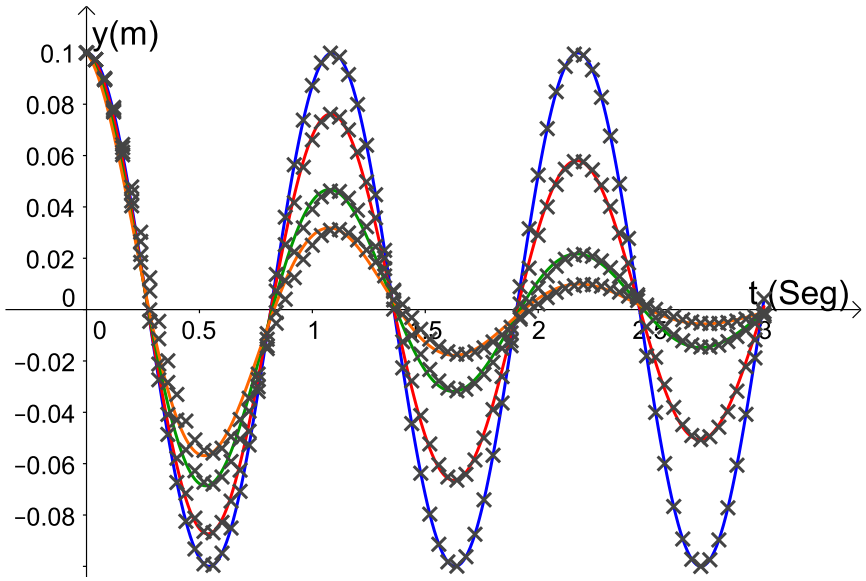
Ahora bien, tomando de los desarrollos de la transformada inversa de Laplace, de los cuales existen tablas, las siguientes propiedades

$$Propiedades = \begin{cases} \mathrm{L}^{-1}\{f(\omega)\} = F(t) \\ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{\omega + a}{(\omega + a)^2 + k^2} \right\} = e^{-at}\cos(kt) \\ \mathrm{L}^{-1}\left\{ \frac{k}{(\omega + a)^2 + k^2} \right\} = e^{-at}\sin(kt) \end{cases}$$

Aplicando las anteriores propiedades a 40 se obtiene

$$Y(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[C_1 \cos(\omega_v t) + C_2 \sin(\omega_v t)\right] \tag{41}$$

Con $C_1 = 1$ y $C_2 = \dfrac{\Gamma}{2\omega_v}$, para este caso. La anterior expresión representa la posición con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado solucionado por medio de la transformada de Laplace. Realizando una comparación con las gráficas obtenidas por medio de 41 y las obtenidas con los métodos convencionales se obtiene

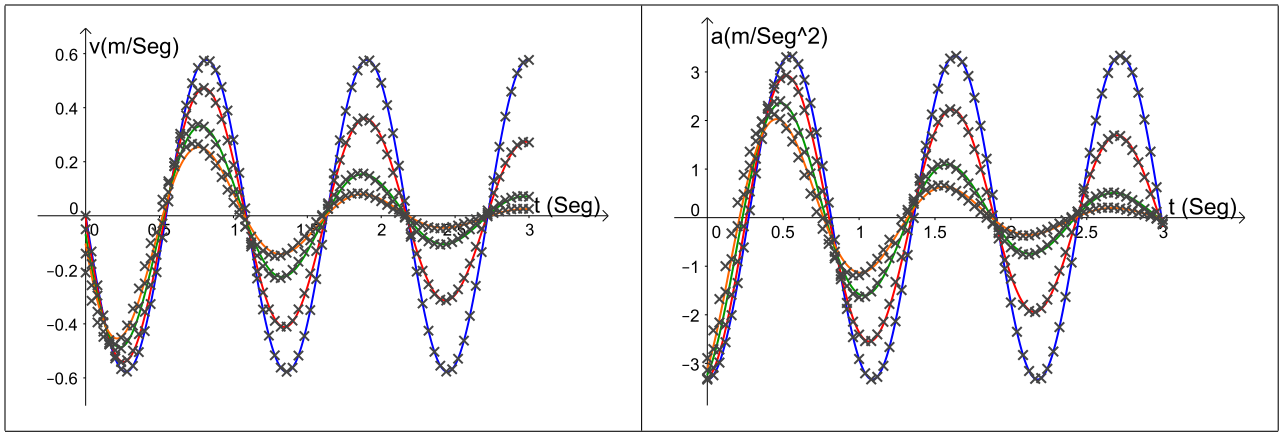


Gráfica 11: Comparación de la posición con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

En la anterior gráfica se muestra en linea punteada la solución convencional y en línea continua la solución 41 para diferentes coeficientes de amortiguamiento. Es de destacar la congruencia entre las gráficas, lo cual valida la solución determinada por medio de la transformada de Laplace. Derivando la expresión 41

$$\begin{aligned} v(t) &= -A_0 C_3 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin(\omega_v t) \\ a(t) &= A_0 C_3 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\frac{\Gamma}{2}\sin(\omega_v t) - \omega_v \cos(\omega_v t)\right] \end{aligned} \tag{42}$$

Las expresiones 42 representan la velocidad y aceleración con respecto al tiempo, respectivamente, obtenidas por medio de la transformada de Laplace. Donde $C_3 = \dfrac{\Gamma^2}{4\omega_v} + \omega_v$ y sus correspondientes gráficas son



Gráfica 12: Comparación de la velocidad y aceleración con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

Al igual que en la posición del oscilador armónico amortiguado, la velocidad y aceleración de éste muestra nuevamente la congruencia con las soluciones convencionales. Sin embargo, para el lector puede presentar dudas respecto a la diferencia, en cuanto la forma, de las soluciones mostrada en los libros tradicionales de oscilaciones y ondas y 41. pero esto esto se puede justificar recordando la identidad trigonométrica

$$\cos(\omega_v t - \varphi) = \cos(\omega_v t)\overbrace{\cos(\varphi)}^{C_1} + \sin(\omega_v t)\underbrace{\sin(\varphi)}_{C_2}$$

$$\cos(\omega_v t - \varphi) = C_1 \cos(\omega_v t) + C_2 \sin(\omega_v t)$$

Por lo que la expresión 41 se reescribe como

$$Y(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_v t - \varphi)$$

Ahora bien, ya que φ es un desfase y la función cosenoidal es periódica, no existe variación entre $-\varphi$ y $+\varphi$, por lo que

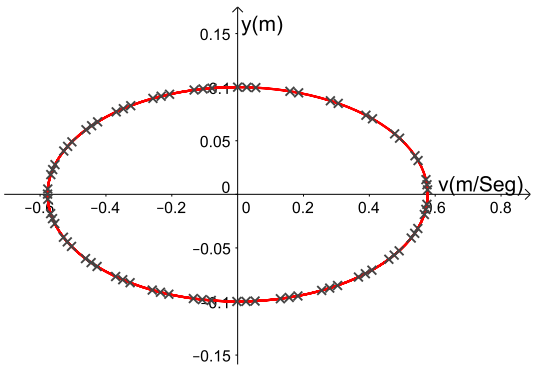
$$Y(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_v t + \varphi)$$

Nótese que esta es la expresión convencional utilizada, lo cual puede llegar a satisfacer las dudas del lector con respecto a la solución determinada por medio de la transformada de Laplace, y valida nuevamente esta solución.

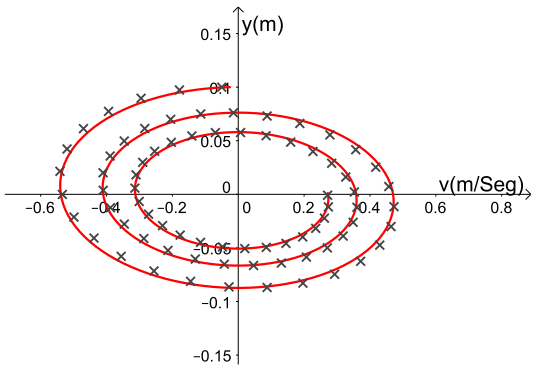
4.2. ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

En este apartado se hará el estudio energético del oscilador armónico amortiguado, para lo cual es necesario recordar que debido a la fuerza resistiva que actúa sobre el sistema la energía mecánica no se conserva, es decir no es constante, si no que se disipa al transcurrir el tiempo.

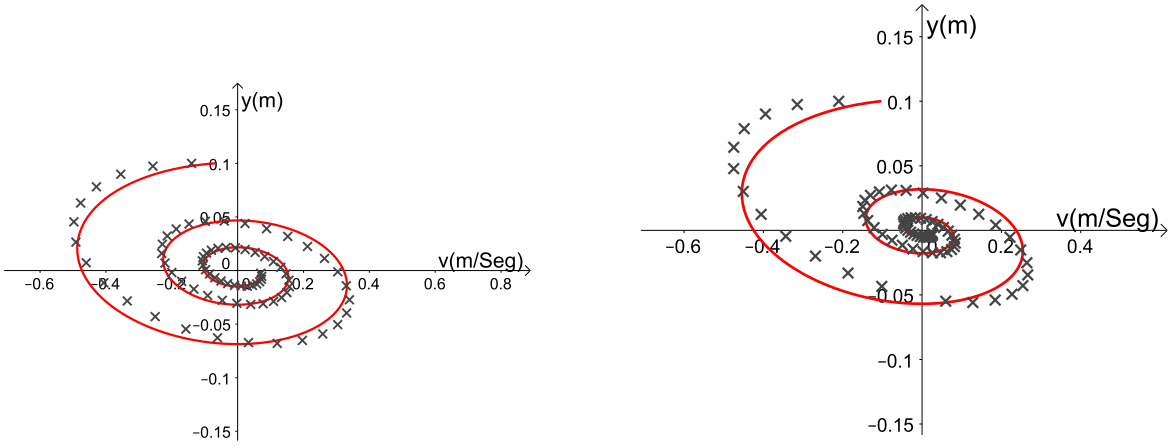
Al realizar la comparación gráfica entre las variables de la energía cinética y potencial elástica, es decir la velocidad y posición del sistema respectivamente, para obtener su respectivo diagrama de fase, se obtiene.



$\Gamma = 0$



$\Gamma = 0.7$



$\Gamma = 1.4$ $\Gamma = 2.1$

Gráfica 13: Se muestra el diagrama de fase del oscilador armónico amortiguado para diferentes coeficientes de amortiguamiento

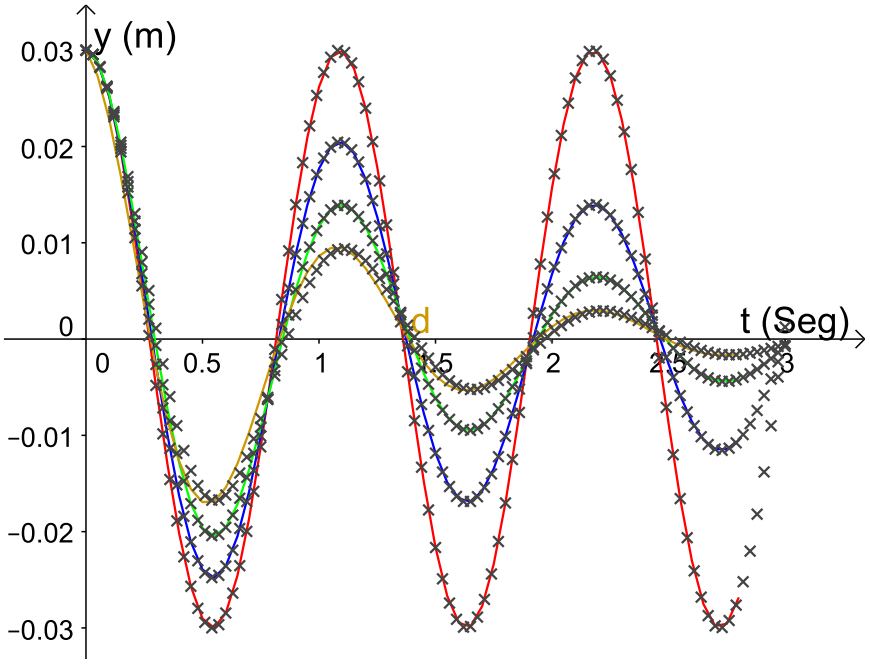
Es de destacar nuevamente que cuando el coeficiente de amortiguamiento es cero, la energía mecánica del sistema se conserva, por lo que se obtiene en su diagrama de fase la elipse que se ha estudiado anteriormente. Sin embargo, a medida que aumenta este coeficiente, se forma en el diagrama de fase una espiral que cada vez se cierra mas rápido, al aumentar Γ, lo cual muestra claramente la disipación de la energía mecánica por causa de la fuerza resistiva que actúa sobre el sistema.

4.3. SOLUCIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO POR MEDIO DEL MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Para esta solución de oscilador armónico amortiguado, con base en las explicaciones dadas en la sección 3.4, es necesario recordar que la ecuación diferencial a resolver el la dada por la expresión 34, donde al realizar nuevamente el cambio de variable $v = \dfrac{dY}{dt}$ de donde se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\Gamma v - \omega_0^2 Y(t) \end{cases}$$

Ahora bien, manteniendo la condición inicial $v(0) = 0\ m/s$ y variando el amortiguamiento del sistema se obtiene

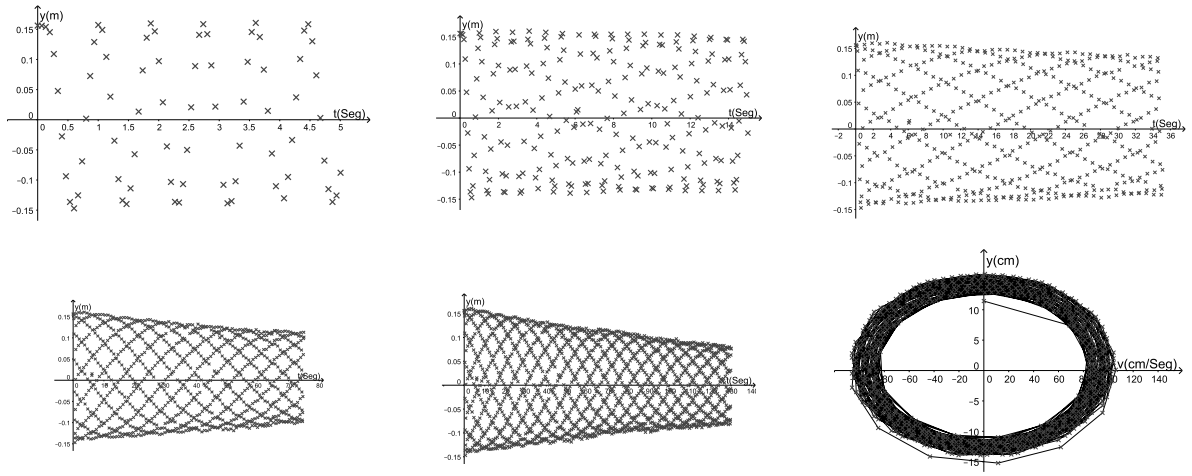


Gráfica 14: Comparación de la posición con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado para diferentes coeficientes de amortiguamiento con la solución del método de Runge Kutta de cuarto orden (linea punteada) y la solución dada por la expresión 41 (linea continua).

Como se puede observar, este método tiene una muy buena proximidad con lo determinado en la gráfica 11, lo cual se debe a su linealidad a diferencia del caso anterior del péndulo No lineal.

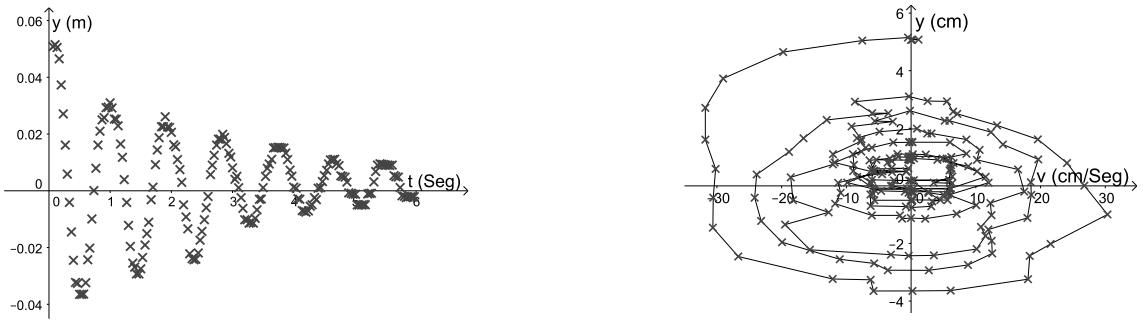
4.4. ANÁLISIS DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO POR MEDIO DE TRACKER

Para esta practica de laboratorio, se hará uso de un sistema masa-resorte compuesto por una mas masa de $m = 50\ g$ y un resorte de constante $\kappa \approx 2.5\ N/m$, la cual fue determinada por medio de la *ley de Hooke* midiendo su elongación al colgar la masa de 50 g y manteniendo el sistema en equilibrio. El comportamiento de este sistema oscilatorio se graba en dos diferentes fluidos (aire y agua), y se analizará por medio del software Tracker obteniendo



Gráfica 15: Se muestra la evolución temporal del sistema masa-resorte amortiguado en el aire para su posición con respecto al tiempo y su diagramas de fase del por medio de la simulación dada por el programa Tracker

Nótese, que el amortiguamiento en el aire del sistema masa-resorte es tan pequeño que en los primeros segundos de su evolución temporal se comporta como un Oscilador Armónico Simple, y es necesario que pase un tiempo relativamente grande para que su amortiguamiento en la posición sea apreciable. Este amortiguamiento leve también se ve representado en su diagrama de fase, donde se ve una leve disipación de su energía.



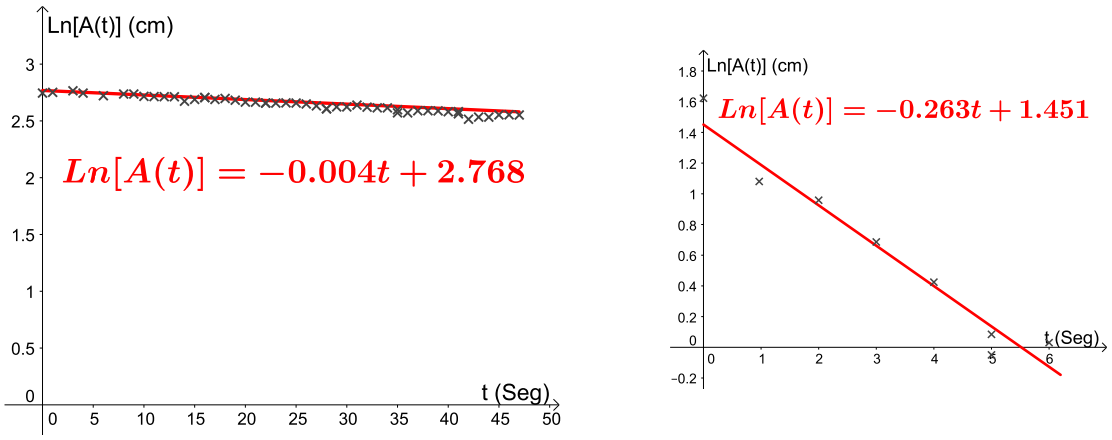
Gráfica 16: Se muestra la posición con respecto al tiempo y los diagramas de fase del sistema masa-resorte amortiguado en agua por medio de la simulación dada por el programa Tracker

Es de destacar, como es de esperarse, que el sistema se amortigua con mayor rapidez en el agua que en aire debido a su coeficiente de amortiguamiento Γ y la energía se disipa más rápidamente como se puede observar en los diagramas de fase. Sin embargo, debido a que no se puede calcular este, por un medio externo a esta práctica de laboratorio, no es

factible la comparación con la expresión 41, pero esta práctica si nos permite determinar estos coeficientes al linealizarla por medio de la expresión para la amplitud del oscilador armónico amortiguado

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad \rightarrow \quad Ln[A(t)] = Ln(A_0) - \frac{\Gamma}{2}t \tag{43}$$

Nótese que la expresión 43 es una función lineal cuya pendiente es $m = \frac{\Gamma}{2}$. Si determinamos los datos de las amplitudes y tiempos en los máximos por medio de Tracker y haciendo el ajuste correspondiente se obtiene



Aire Agua

Gráfica 17: Linealización de las amplitudes máximas para el oscilador armónico amortiguado en el aire y el agua

Por medio de esta linealización de las amplitudes, se puede determinar que los coeficientes de amortiguamientos, en esta practica de laboratorio, para el aire y el agua aproximadamente $\Gamma_{Aire} = 0.008$ y $\Gamma_{Agua} = 0.526$. Como era de esperarse, el coeficiente de amortiguamiento del agua tiene una diferencia considerable con respecto al del aire, razón por la cual este se amortigua con menos rapidez y es posible considerarlo como un oscilador armónico simple en sus primeros segundos de movimiento.

Es de destacar en esta sección que la solución del oscilador armónico amortiguado por medio de la transformada de Laplace, muestra un método alterno para dar solución a estos sistemas dinámicos, mostrando otros tipos de parámetros como el de el comportamiento de mismo en el espacio de frecuencias, lo cual no solo es importante mostrar en el estudio de los sistemas oscilatorios, sino que es recomendable también en cursos afines como el de ecuaciones diferenciales.

5. EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO CON FORZAMIENTO PERIÓDICO ARBITRARIO

En el presente apartado se estudiara un sistema oscilatorio de especial importancia. Se indagara en el comportamiento de un oscilador libre, como el *Oscilador Armónico Amortiguado* estudiado en la sección anterior, cuando se somete a una a una fuerza externa dependiente del tiempo y periódica $F(t+T)$.

Cuando esta fuerza periódica externa actúa sobre el sistema oscilatorio, este tipo de movimiento es conocido como *El Oscilador Armónico Amortiguado y Forzado*,este sistema oscilatorio se encuentra en la intersección dimensional del esquema de la figura 3 en $UNIDIMENSIONAL \rightarrow FORZAMIENTO \rightarrow UN\ GRADO\ DE\ LIBERTAD$.

Es típico de este tipo de movimiento que el sistema impulsado por $F(t+T)$ acepte cualquier frecuencia que proporcione dicha fuerza, aunque al inicio del movimiento el sistema tienda a oscilar con su frecuencia natural propia *(conocida como parte transitoria del movimiento)*, a cabo de un tiempo dado por las características del sistema, como por ejemplo el coeficiente de amortiguamiento o la frecuencia de forzamiento, éste sede a la influencia externa *(conocida como la parte estacionaria del movimiento)*.

Para el estudio del oscilador armónico amortiguado y forzado, se hará de nuevo el sistema masa-resorte como se muestra en la figura

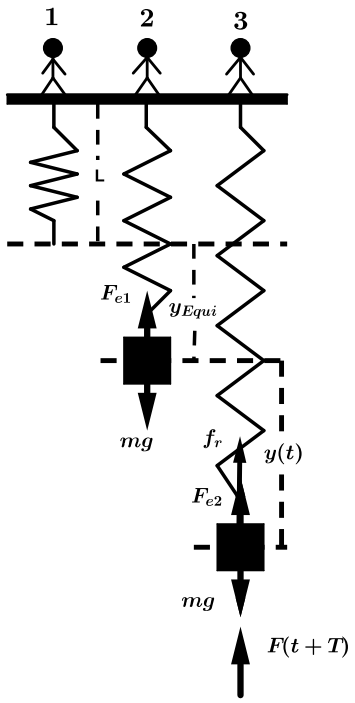


Figura 7: Sistema masa-resorte amortiguado y forzado donde se muestran tres diferentes instantes de tiempos, y las correspondientes fuerzas que actúan sobre éste

En la anterior figura, se muestra el sistema masa-resorte amortiguado y forzado, donde $F(t+T)$ es la fuerza de forzamiento. Haciendo uso de las leyes de dinámica se obtiene

$$F(t+T) - f_r - F_e = m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} \tag{44}$$

Ahora bien, realizando las mismas aproximaciones de una fuerza resistiva tipo Stoke y una elástica tipo Hooke, que se hicieron en el oscilador armónico amortiguado, la expresión 44 se reescribe como

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dY(t)}{dt} + \omega_0^2 Y(t) = \frac{1}{m}F(t+T) \tag{45}$$

La expresión 45, con $\Gamma = \dfrac{b}{m}$ y $\omega_0^2 = \dfrac{\kappa}{m}$, es la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado y forzado.

5.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO CON FORZAMIENTO ARBITRARIO POR MEDIO DE LA SERIE DE FOURIER

Para iniciar a dar solución a la ecuación de movimiento determinada por la expresión 45, es necesario observar que es una *ecuación diferencial no homogénea*, cuya solución esta dada por una solución homogénea y una particular

$$Y(t) = Y(t)_{Homogenea} + Y(t)_{Particular} \tag{46}$$

Ya que la solución homogénea esta dada por la solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado, nos concentraremos en la solución particular. Debido a que la fuerza de forzamiento debe ser periódica, es susceptible reescribirla en términos de la *serie de Fourier*, la cual es una serie infinita que converge puntualmente en funciones periódicas continuas o por partes, y cuya forma compleja esta dada por $F(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\omega_F n t)}$, donde ω_F es la frecuencia de forzamiento.Por lo tanto, reescribiendo la expresión 45 haciendo uso de la variable compleja se obtiene

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dZ(t)}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{m} e^{i(\omega_F n t)} \tag{47}$$

En donde la parte real de $Z(t)$ ($\{Re\,[Z(t)]\}$) es la solución de $Y(t)_{Particular}$. Ahora bien, proponiendo como solución

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i(\omega_F n t - \delta_n)} \tag{48}$$

Y cuyas respectivas derivadas son

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \omega_F n i e^{i(\omega_F n t - \delta_n)} \qquad \frac{d^2Z(t)}{dt^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -A_n \omega_F^2 n^2 e^{i(\omega_F n t - \delta_n)} \tag{49}$$

Sustituyendo la solución propuesta y sus receptivas derivadas en 47 se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_F n t-\delta_n)}\left[-A_n\omega_F^2 n^2+\Gamma A_n\omega_F n i+\omega_0^2 A_n\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i(\omega_F n t)}$$

$$-A_n\omega_F^2 n^2+\Gamma A_n\omega_F n i+\omega_0^2 A_n=D_n e^{i\delta_n} \tag{50}$$

Donde $D_n=\dfrac{c_n}{m}$. Recordando que $e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$, la expresión 50 se reescribe como

$$-A_n\omega_F^2 n^2+\Gamma A_n\omega_F n i+\omega_0^2 A_n=D_n\left[\cos(\delta_n)+i\sin(\delta_n)\right] \tag{51}$$

Tomando la parte real e imaginaria de la anterior expresión

$$\begin{gathered}\{Re\}:-A_n\omega_F^2 n^2+\omega_0^2 A_n=D_n\cos(\delta_n)\\ \{Im\}:\Gamma A_n\omega_F n=D_n\sin(\delta_n)\end{gathered} \tag{52}$$

Ahora bien, de las expresiones 52, se puede deducir con facilidad las siguientes expresiones

$$\begin{gathered}A_n=\frac{D_n}{\left[\left(\omega_0^2-\omega_F^2 n^2\right)^2+\left(\Gamma\omega_F n\right)^2\right]^{1/2}}\\ \delta_n=ArcoTan\left(\frac{\Gamma n\omega_F}{\omega_0^2-\omega_F^2 n^2}\right)\end{gathered} \tag{53}$$

Las expresiones 53, son respectivamente la amplitud y el ángulo de desfase para el oscilador armónico amortiguado con forzamientos periódicos arbitrarios, también es de resaltar que estos depende de la frecuencia de forzamiento externo. Ya determinadas A_n y δ_n, de la la solución propuesta en 48 se obtiene

$$\begin{gathered}Z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_F n t}e^{-i\delta_n}\\ Z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_F n t}\left(\cos(\delta_n)-i\sin(\delta_n)\right)\end{gathered} \tag{54}$$

Representando geométricamente el angulo de desfase δ_n

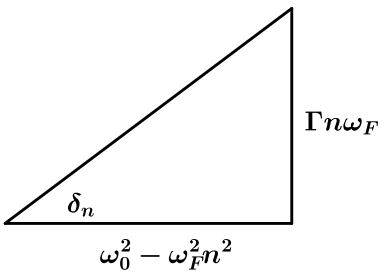


Figura 8: Representación geométrica de $\tan(\delta_n)$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned}\cos(\delta_n) &= \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2\right]^{1/2}} \\ \sin(\delta_n) &= \frac{\Gamma n\omega_F}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2\right]^{1/2}}\end{aligned} \tag{55}$$

Sustituyendo A_n, D_n y las expresiones 55 en 54

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_F nt}\cos(\delta_n) - i\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_F nt}\sin(\delta_n)$$

$$Z(t) = \frac{1}{m}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)e^{i\omega_F nt}}{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2} - i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n\left(\Gamma n\omega_F\right)e^{i\omega_F nt}}{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2}\right\}$$

$$Z(t) = \frac{1}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n E_n e^{i\omega_F nt} - \frac{i}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F_n e^{i\omega_F nt} \tag{56}$$

En donde $E_n = \dfrac{\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2}$ y $F_n = \dfrac{\Gamma n\omega_F}{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma\omega_F n\right)^2}$. Ya que lo que se requiere es la parte real de $Z(t)$, es necesario recordar por medio del *análisis de Fourier* que $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, por lo que, tomando en primera instancia, el primer termino de la expresión 56 se reescribe como

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt}$$

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt} + \sum_{n=-\infty}^{-1} E_n\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt}\right\}$$

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt} + \sum_{n=1}^{\infty} E_{-n}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt}\right\}$$

Con $E_n = E_{-n}$

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{i\omega_F nt}\right]\right\}$$

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left[a_n\left(\frac{e^{i\omega_F nt} + e^{-i\omega_F nt}}{2}\right) - (i)ib_n\left(\frac{e^{i\omega_F nt} - e^{-i\omega_F nt}}{2(i)}\right)\right]\right\}$$

Nótese que en el segundo termino de la expresión anterior fue necesario multiplicar por $\frac{(i)}{(i)}$ para de esta manera obtener

$$Re\left[Z(t)_{1Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left[a_n\cos\left(\omega_F nt\right) + b_n\sin\left(\omega_F nt\right)\right]\right\} \qquad (57)$$

Donde $E_0 = \frac{1}{\omega_0^2}$ según su definición. Ahora bien, de manera análoga para el segundo termino de la expresión 56 se obtiene

$$Re\left[Z(t)_{2Termmino}\right] = \frac{1}{m}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} F_n\left[a_n\cos\left(\omega_F nt\right) - b_n\sin\left(\omega_F nt\right)\right]\right\} \qquad (58)$$

De 57 y 58 en 56

$$Re\left[Z(t)\right] = Y(t)_{Particular} = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_na_n - F_nb_n\right)\cos\left(\omega_F nt\right) + \left(E_nb_n + F_na_n\right)\sin\left(\omega_F nt\right)\right\} \tag{59}$$

Donde c_0,a_n y b_n son los *coeficientes de Fourier* y están determinados por

$$CoeficientesdeFourier = \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\omega_F nt\right)dt \\ \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\omega_F nt\right)dt \end{cases}$$

Reescribiendo la expresión 59 se obtiene

$$Y(t)_{Particular} = \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cos\left(\omega_F nt\right) + \varrho_n\sin\left(\omega_F nt\right)\right\} \tag{60}$$

La expresión 60, con $\xi_n = E_na_n - F_nb_n$ y $\varrho_n = E_nb_n + F_na_n$ es la solución particular de la ecuación de movimiento 45. Por lo tanto de 44

$$Y(t) = A_0e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos\left(\omega_v t + \varphi\right) + \frac{1}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cos\left(\omega_F nt\right) + \varrho_n\sin\left(\omega_F nt\right)\right\} \tag{61}$$

La anterior expresión representa la posición de un oscilador armónico amortiguado con forzamientos periódicos, no solo con forzamientos coseno o senoidales como se realizan convencionalmente. Derivando dos veces la expresión 61

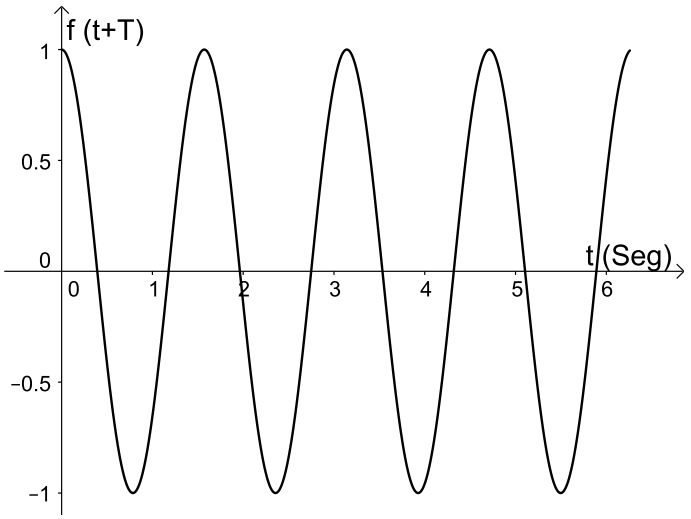
$$\begin{aligned}\frac{dY(t)}{dt} = v(t) = -A_0e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\frac{\Gamma}{2}\cos\left(\omega_v t + \varphi\right) + \omega_v\sin\left(\omega_v t + \varphi\right)\right]\cdots \\ \cdots + \frac{\omega_F n}{m}\left\{c_0E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varrho_n\cos\left(\omega_F nt\right) - \xi_n\sin\left(\omega_F nt\right)\right\}\end{aligned} \tag{62}$$

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = a(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left\{\left[\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_v^2\right]\cos(\omega_v t + \varphi) + \Gamma\omega_v \sin(\omega_v t + \varphi)\right\}\cdots$$
$$\cdots - \frac{\omega_F^2 n^2}{m}\left\{c_0 E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n \cos(\omega_F n t) + \varrho_n \sin(\omega_F n t)\right\} \tag{63}$$

las expresiones 62 y 63, representan respectivamente la velocidad ($v(t)$) y la aceleración ($a(t)$) de un oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico arbitrario.

5.2. OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO PARA UNA FUNCIÓN DE FORZAMIENTO COSENOIDAL

En este apartado se hará el estudio de un oscilador armónico amortiguado con forzamiento cosenoidal $f(t+T) = \cos(\omega_F t)$ con $T = \frac{\pi}{2}$, el cual es el tipo de forzamiento periódico que se puede encontrar en general en la literatura, con el fin de comparar las soluciones 61, 62 y 63, con lo obtenido convencionalmente.



Gráfica 18: Función de forzamiento cosenoidal

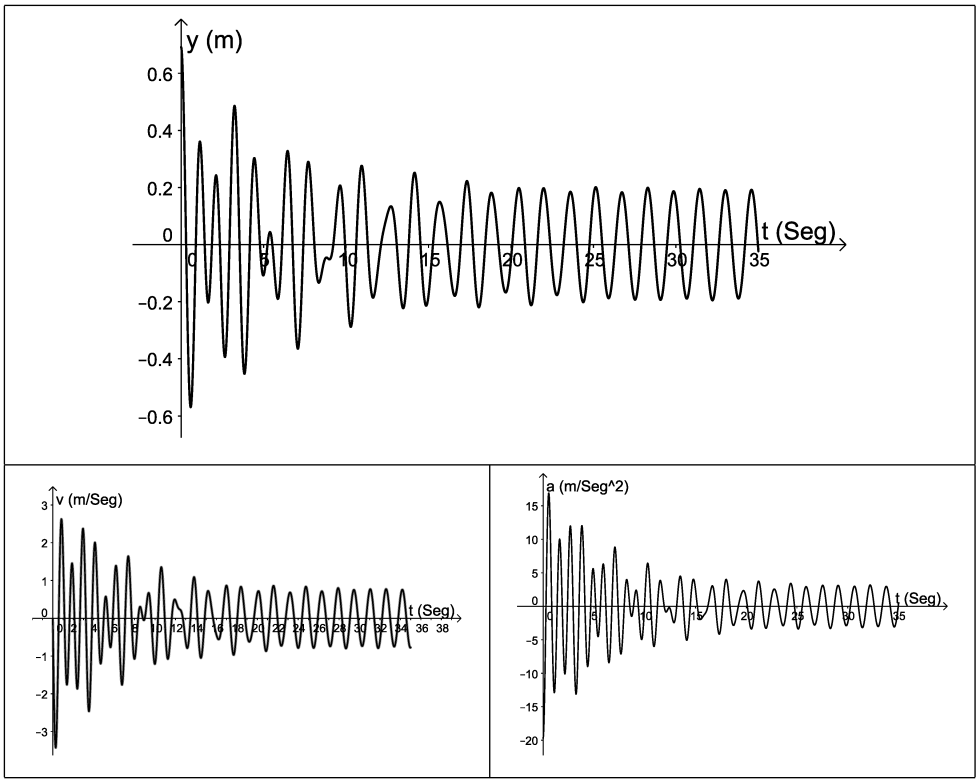
Es necesario destacar, para la obtención de los coeficientes de Forier, que en el caso de las funciones cosenoidales es oportuno recordar las soluciones de las siguientes integrales

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(m\omega_F t\right) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(m\omega_F t\right) \cos\left(n\omega_F t\right) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \\ \dfrac{T}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

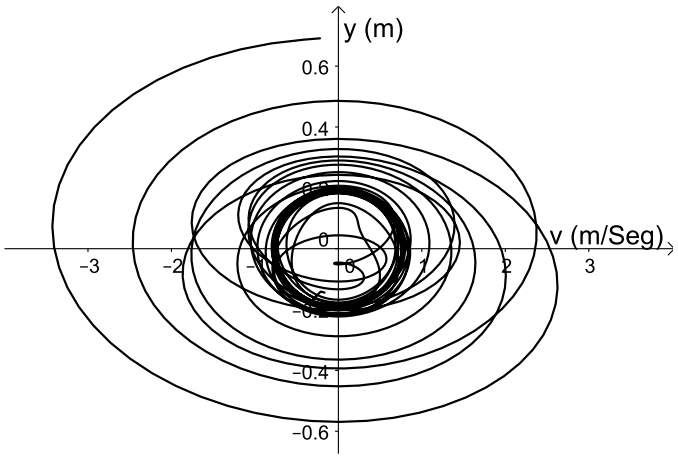
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(m\omega_F t\right) \sin\left(n\omega_F t\right) dt = 0$$

En este caso en especifico de la función de forzamiento que estamos tomando $m = n = 1$, por lo que los coeficientes de Fourier son, haciendo uso de las anteriores integrales, $c_0 = 0$, $a_n = 1$ y $b_n = 0$. Y ya que solo existe esta solución en el caso que $n = 1$, las sumatorias de las expresiones 61, 62 y 63, solo se evaluaran hasta este valor, por lo que haciendo uso de estas soluciones se obtiene.



Gráfica 19: Función de Posición, Velocidad y aceleración con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función cosenoidal

Nótese, como la parte transitoria del oscilador, debido a la influencia de las fuerzas disipadoras del sistema, se aprecia aproximadamente hasta el segundo 25, después del cual el sistema sede a la frecuencia de forzamiento y entra a la etapa estacionaria del movimiento. Ahora bien, para realizar el estudio de la energía del oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico cosenoidal, se hará uso de las dependencias de la energía cinética y potencial, velocidad y posición, realizando el correspondiente diagrama de fase.



Gráfica 20: Diagrama de fase del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función cosenoidal

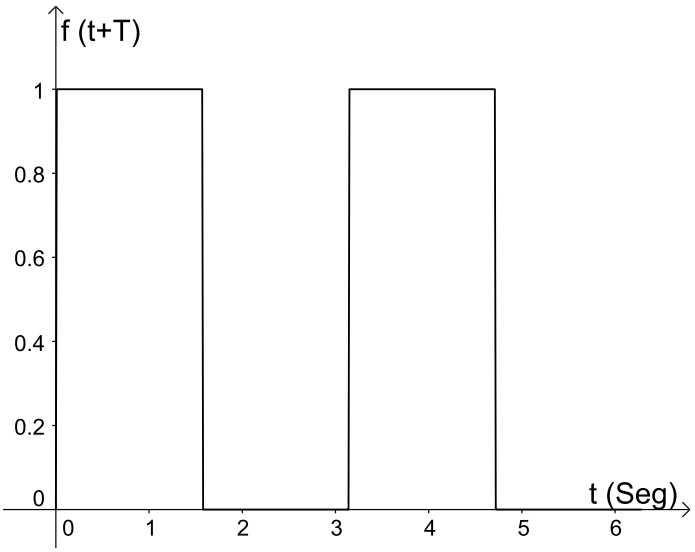
Es de destacar como la energía se disipa, como es de esperarse debido al amortiguamiento en la etapa transitoria del movimiento, pero tiempo después se estabiliza debido a la frecuencia de forzamiento, como se puede esperar en la etapa estacionaria del oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico.

5.3. OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO PARA UNA FUNCIÓN DE FORZAMIENTO CUADRADA

En este apartado se hará uso de una función bien conocida como lo es la *función cuadrada*, para que sea la función de forzamiento de entrada de nuestro oscilador armónico amortiguado. La función cuadrada que se determino para este ejemplo esta definida como

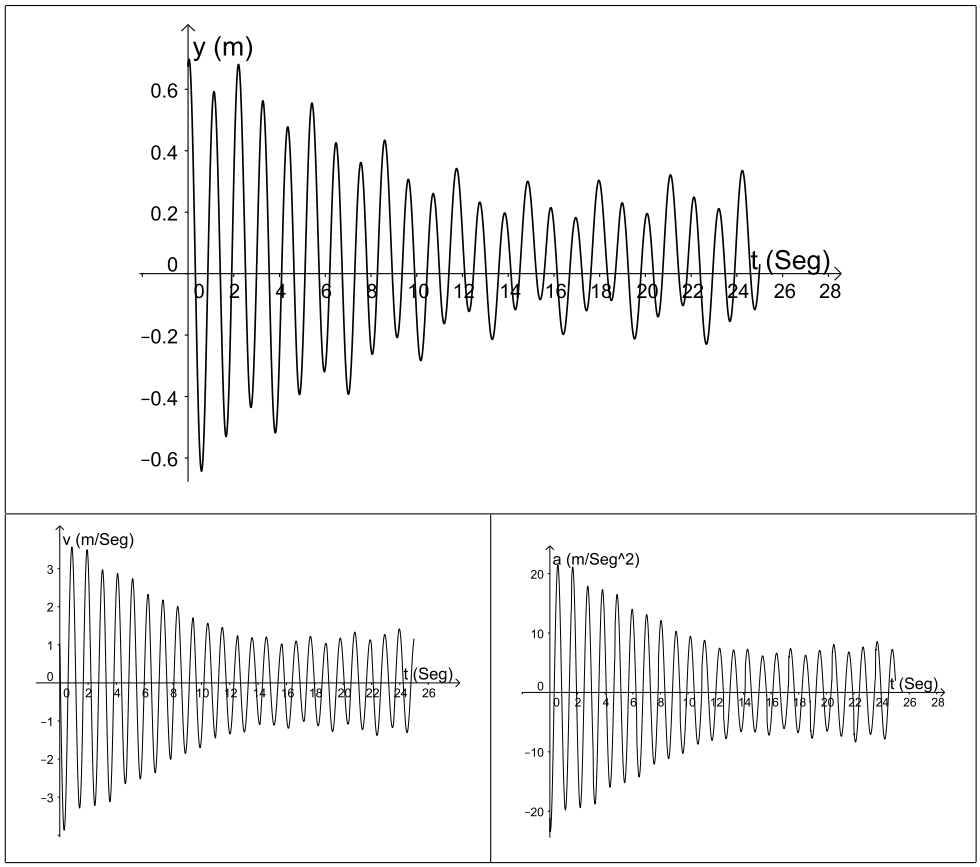
$$f(t+T) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Nótese que esta función de forzamiento tiene un periodo de $T = \pi$, y cuya gráfica es



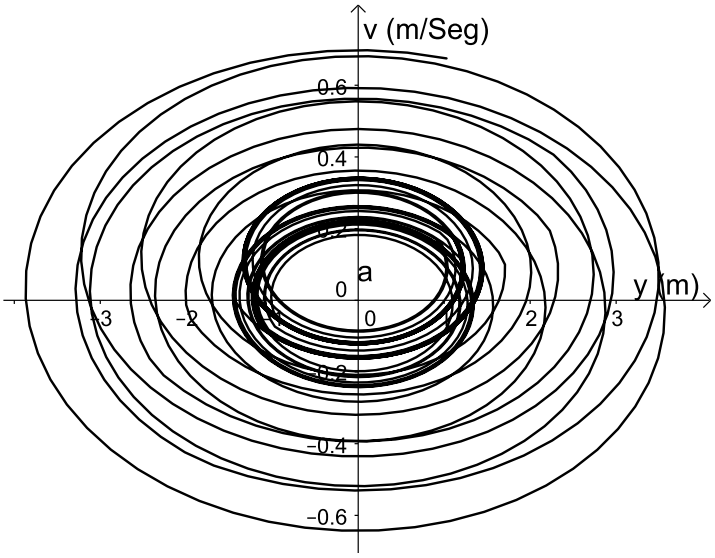
Gráfica 21: Función de forzamiento cuadrada

Ahora bien, haciendo uso de la expresiones 61, 62 y 63, para determinar la posición, velocidad y aceleración respectivamente del oscilador se obtiene



Gráfica 22: Función de Posición, Velocidad y aceleración con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función cuadrada

Es de apreciar, como se observa la parte transitoria de la oscilación debido al amortiguamiento, aproximadamente hasta el segundo 12, y después de este tiempo la parte estacionaria, y como el oscilador sede a la frecuencia del forzamiento. Al analizar la velocidad y posición del movimiento se obtiene



Gráfica 23: Diagrama de fase del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función cuadrada

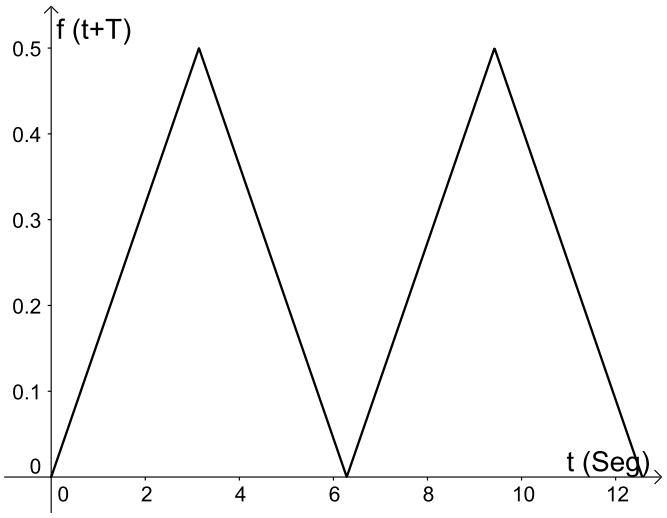
Se puede observar como, nuevamente, la energía se atenúa debido a las fuerzas de disipación que intervienen en el sistema, pero después de superar la etapa transitoria del movimiento se empieza a estabilizar debido al forzamiento.

5.4. OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO PARA UNA FUNCIÓN DE FORZAMIENTO TRIANGULAR

Con el fin de ejemplificar otro forzamiento arbitrario se hará uso de una función de *forzamiento triangular* la cual se ha definido como

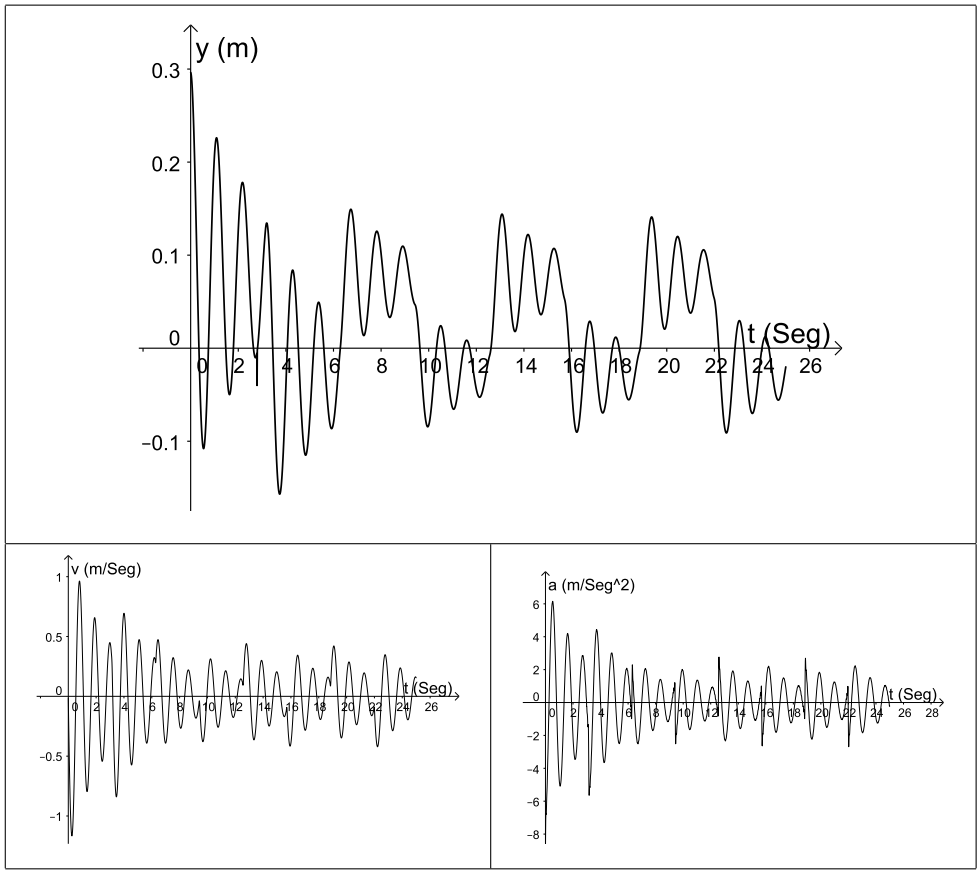
$$f(t+T) = \begin{cases} \dfrac{t}{T} & 0 < t < \pi \\ \\ -\dfrac{t}{T} + 1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Nótese que el periodo de esta función es de $T = 2\pi$ y cuya gráfica es



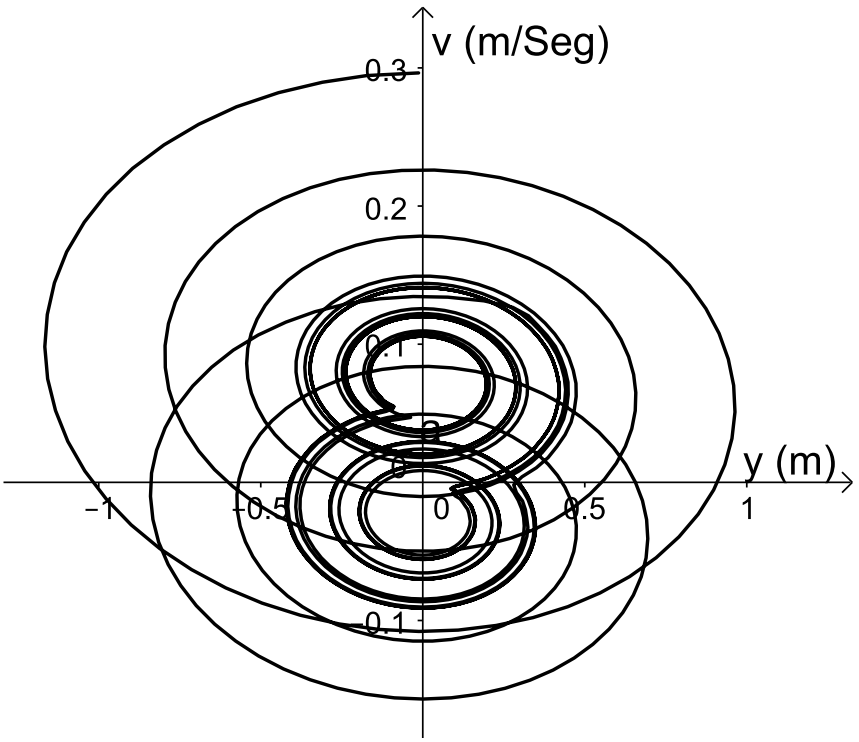
Gráfica 24: Función de forzamiento triangular

Haciendo nuevamente uso de las expresiones 61, 62, 63 se obtiene



Gráfica 25: Función de Posición, Velocidad y aceleración con respecto al tiempo del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función triangular

Nótese que en este ejemplo la parte transitoria del movimiento se aprecia aproximadamente hasta el segundo seis, después del que se observa la parte estacionaria debido a la función de forzamiento. Analizando la energía se obtiene



Gráfica 26: Diagrama de fase del oscilador armónico amortiguado con forzamiento de una función triangular

Nuevamente se puede observar la disipacion de la energia durante la parte transitoria y su estabilización debido al forzamiento

5.5. LA RESONANCIA EN FORZAMIENTOS ARBITRARIOS

Ahora se considerara la respuesta de la amplitud del oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico arbitrario, en su parte estacionaria, cuando se varia la frecuencia de forzamiento. La palabra relevante en este fenómeno es *resonancia*, la cual es, tal vez, la característica mas relevantes de los osciladores forzados, y es un fenómeno que resulta familiar para casi toda persona, al menos de manera cualitativa. La descripción de este fenómeno se basa en que cuando la frecuencia de forzamiento ω_F se aproxima a la frecuencia natural del oscilador ω_0, por lo tanto $\omega_F \simeq \omega_0$, la amplitud del oscilador

crece a su máximo mediante la constante repetición de una pequeña fuerza, este es el *fenómeno de resonancia* cuyo ejemplo mas común es el empujar un columpio. Ahora bien, cuando la frecuencia de forzamiento se encuentra muy por arriba o debajo de ω_0 produce amplitudes mucho mas pequeñas.

En este apartado se estudiará este fenómeno para forzamientos arbitrarios como los estudiados en los anteriores ejemplos. Se iniciará por retoma la expresión 51 y se escribe en esta $D_n = \frac{c_n}{m}$ además de $cn = \frac{a_n - ib_n}{2}$ se obtiene

$$-A_n\omega_F^2 n^2 + \Gamma A_n \omega_F n i + \omega_0^2 A_n = \frac{(a_n \cos(\delta_n) + b_n \sin(\delta_n))}{2m} + i\frac{(a_n \sin(\delta_n) - b_n \cos(\delta_n))}{2m} \quad (64)$$

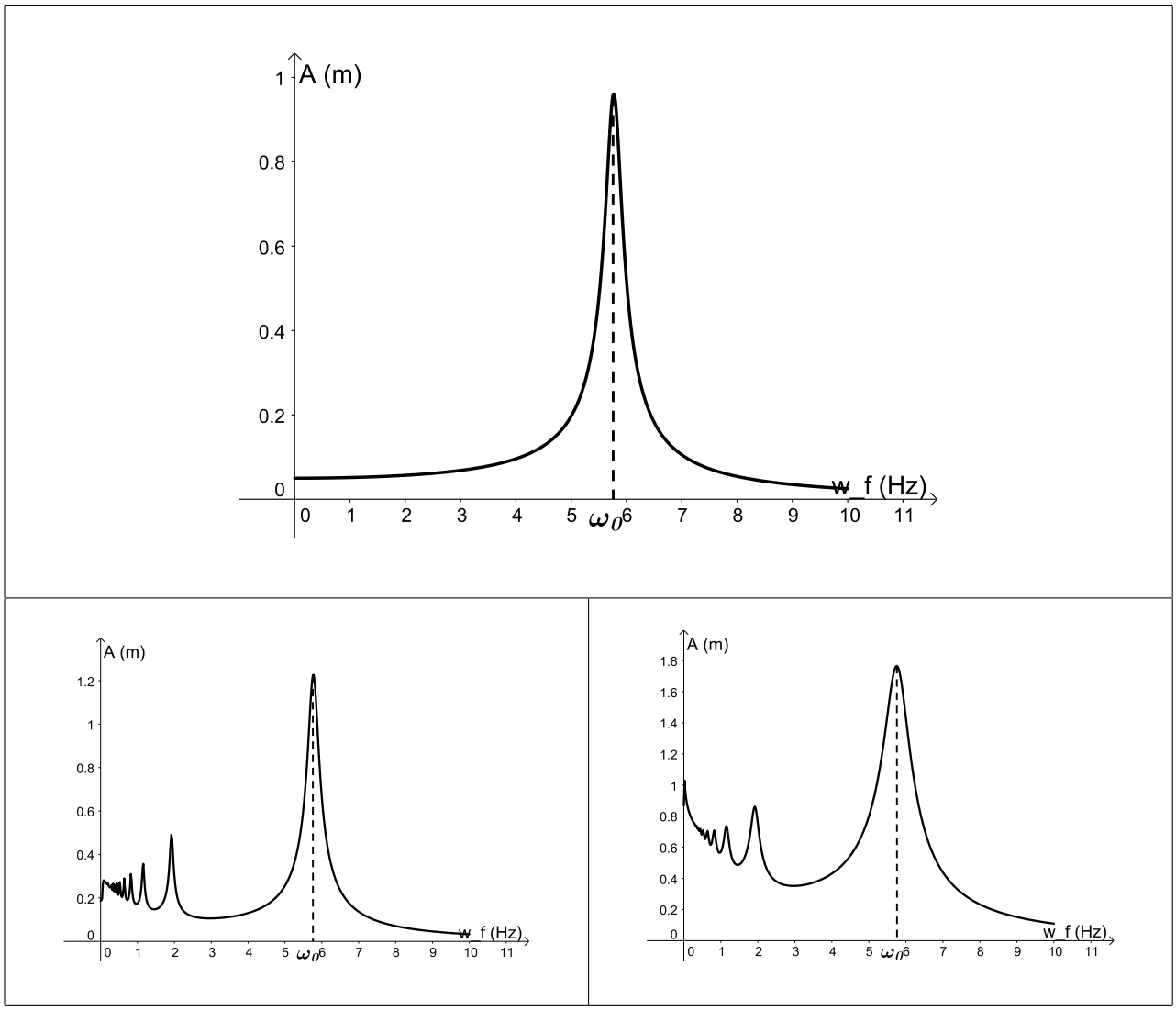
Ahora bien, tomando la parte real e imaginaria de la expresión 64

$$\begin{aligned} \{Re\} : -A_n\omega_F^2 n^2 + \omega_0^2 A_n &= \frac{(a_n \cos(\delta_n) + b_n \sin(\delta_n))}{2m} \\ \{Im\} : \Gamma A_n \omega_F n &= \frac{(a_n \sin(\delta_n) - b_n \cos(\delta_n))}{2m} \end{aligned} \quad (65)$$

Elevando al cuadrado y sumando la parte real e imaginaria obtenidas en 65, se puede obtener

$$\begin{aligned} A_n^2 \left[\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma \omega_F n\right)^2 \right] &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{4m^2} \\ A_n &= \frac{\Upsilon_n}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_F^2 n^2\right)^2 + \left(\Gamma \omega_F n\right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (66)$$

Donde $\Upsilon_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2m}$. La expresión 66 es análoga a la expresión de la amplitud del oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico determinada en 53, pero reescrito en términos de los coeficientes reales de la serie de Fourier. Ahora bien, si aplicamos esta expresión a los ejemplos anteriores de funciones de forzamiento cosenoidal, cuadrada y triangular se obtiene



Gráfica 27: Curvas de resonancia para el oscilador armónico amortiguado con forzamiento cosenoidal, cuadrada y triangular respectivamente

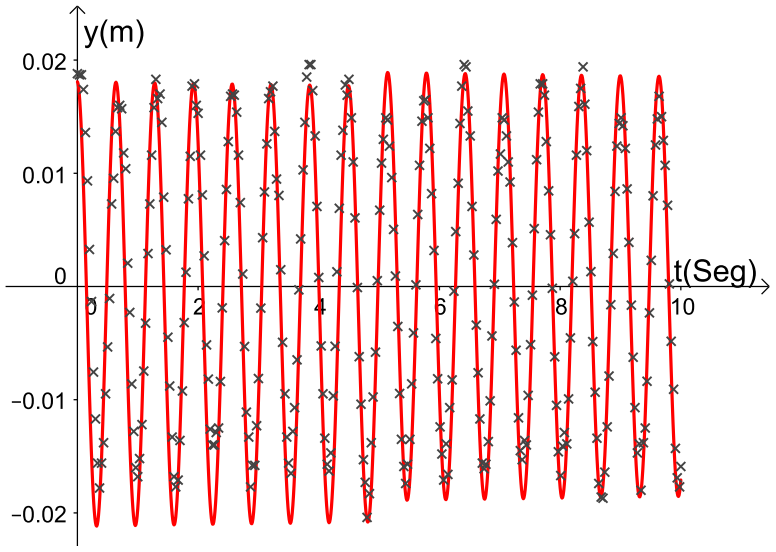
Es de destacar, como en estas curvas de resonancia, efectivamente la amplitud máxima si corresponde a ω_0 que en este caso es aproximadamente $5.77Hz$ debido a que se tomaron como parámetros $\kappa = 10N/m$ y $m = 300g$. También es necesario observar que existen picos donde aumenta la amplitud del oscilador, no en la misma magnitud que el pico de resonancia, pero que se podrían interpretar como las amplitudes máximas, dada la frecuencia de forzamineto, para la suma de los coeficientes determinados por la expresión 66 .

5.6. ANÁLISIS DEL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO CON FORZAMIENTO ARBITRARIO POR MEDIO DE TRACKER

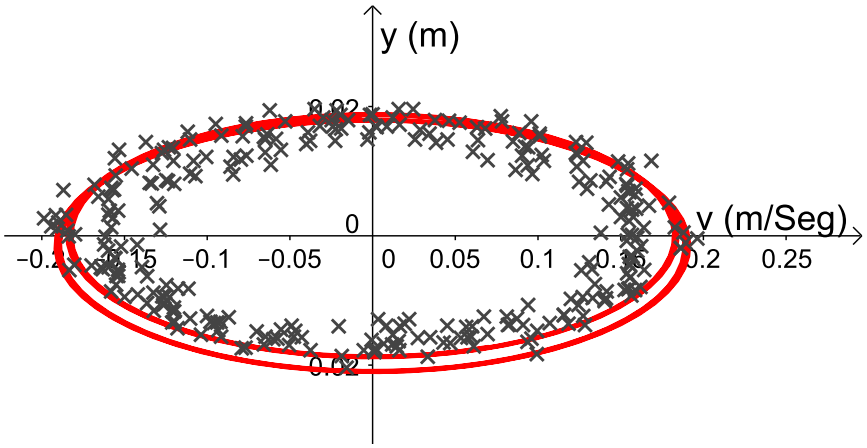
Esta practica de laboratorio se hizo uso de un sistema masa-resorte compuesto por una mas masa de $m = 42.6g$ y un resorte de constante $\kappa \approx 3.982\ N/m$, la cual fue determinada por medio de la *ley de Hooke*, el coeficiente de amortiguamiento es de $\Gamma = 0.008$ el cual es el coeficiente del aire determinado en la práctica anterior. El forzamiento se producirá por medio de un electroimán el cual ejerce una fuerza de $F = -0.0061655N$, la cual se determinó por medio de las leyes de la dinámica con el montaje de sistema masa-resorte, este electroimán es temporizado por medio de un circuito para generar la función.

$$F(t+T) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 5 \\ \\ -0.0061655 & 5 < t < 10 \end{cases}$$

Como se puede observar, el periodo de esta función de forzamiento cuadrada es de $T = 10\ s$. El comportamiento de este sistema oscilatorio se graba y se analizará por medio del software Tracker obteniendo.



Gráfica 28:Se muestra la posición con respecto al tiempo del sistema masa-resorte amortiguado con forzamiento periódico arbitrario por medio de la simulación dada por el programa Tracker (Línea punteada) y su comparación con la expresión 61 (Línea continua)



Gráfica 29:Se muestra el diagrama de fase del sistema masa-resorte amortiguado con forzamiento periódico arbitrario por medio de la simulación dada por el programa Tracker (Línea punteada) y su comparación con la expresión 61 (Línea continua)

Es de destacarse, cómo la simulación de este sistema oscilatorio tiene una aproximación aceptable con respecto a lo predicho por medio de la expresión 61, lo cual es una marea de verificar la validez de la misma, también se puede observar en el diagrama de fase, como la energía del sistema se estabiliza después de una breve disipación, mínima dado que el amortiguamiento del aire no es apreciable en periodos de tiempo cortos.Tambien se puede observar que la posición del sistema no difiere en gran escala de un M.A.S. dado que la fuerza del electroimán es bastante pequeña.

Es de notar en esta sección que el estudio de el oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico arbitrario permite desarrollar y mejorar la comprensión de las características de este sistema oscilatorio, no solo para forzamientos periódicos de tipos seno o cosenoidales como se muestran en general, sino para todo tipo de forzamiento periódico, los cuales se pueden dar en la realidad.

6. INTRODUCCIÓN A LOS OSCILADORES ACOPLADOS

En los anteriores apartados se han estudiado osciladores que solo tienen una frecuencia natural de oscilación. Sin embargo, en la naturaleza los sistemas físicos están constituidos por un gran número de partículas, las cuales pueden oscilar a diferentes frecuencias naturales, estos osciladores son conocidos como *osciladores acoplados*,este sistema oscilatorio se encuentra en la intersección dimensional del esquema de la figura 3 en $UNIDIMENSIONAL \rightarrow IDEALIZADO \rightarrow N\ GRADO\ DE\ LIBERTAD$. Cuando todas estas partículas poseen una misma frecuencia se conoce como *modo normal de oscilación*. Para esta introducción a los osciladores acoplados se estudiará un sistema acoplado de dos partículas como el que se muestra a continuación

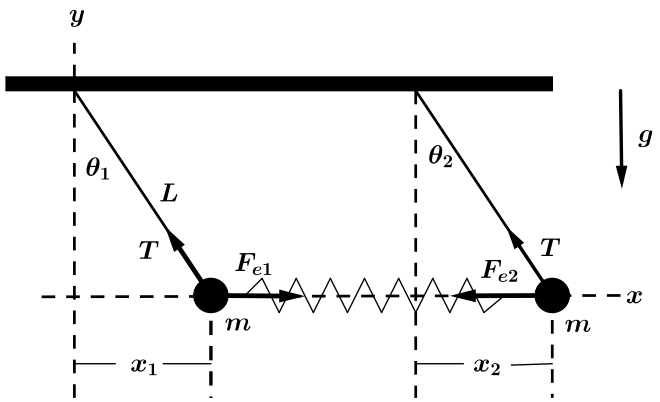


Figura 9: Sistema acoplado donde se muestran las correspondientes fuerzas que actúan sobre éste

Del anterior sistema acoplado se puede obtener fácilmente que las ecuaciones de movimiento para las partículas son

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_R^2(x_2 - x_1) = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + \omega_R^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \tag{67}$$

Donde $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$ y $\omega_R^2 = \dfrac{\kappa}{m}$. Notese que las expresiones 67 se encuentran *acopladas*, es decir una depende de la otra, por lo que para sus respectivas soluciones es necesario *desacoplaras*. Ahora bine, suponiendo que existen soluciones especiales tales de la forma

$$\begin{cases} x_1 = D_{1n}\cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \\ x_2 = D_{2n}\cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \end{cases} \tag{68}$$

Remplazando las soluciones especiales 68 y sus respectivas derivadas en el sistema de ecuaciones diferenciales 67 se obtiene

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 + \omega_R^2 - \omega_n^2\right) D_{1n} - \omega_R^2 D_{2n} = 0 \\ -\omega_R^2 D_{1n} + \left(\omega_0^2 + \omega_R^2 - \omega_n^2\right) D_{2n} = 0 \end{cases} \tag{69}$$

Para el desacoplamiento de las ecuaciones se hará uso de su forma matricial la cual es

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_R^2 - \omega_n^2 & -\omega_R^2 \\ -\omega_R^2 & \omega_0^2 + \omega_R^2 - \omega_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Ya que para que D_{1n} y D_{2n} admitan una solución no trivial es necesario que el determinante de 70 sea igual a cero, se puede obtener con facilidad las soluciones

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \omega_n^2 = \omega_1^2 \\ \omega_0^2 + 2\omega_R^2 = \omega_n^2 = \omega_2^2 \end{cases} \tag{71}$$

Cada posible valor ω_n^2 es una *frecuencia normal* que representa cada posible modo normal del oscilador. Al sustituir ω_1^2 y ω_2^2 en algunas de las expresiones de 69 se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{D_{1n}}{D_{2n}} = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad para \quad \omega_1^2 \\ \dfrac{D_{1n}}{D_{2n}} = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1n} \\ -D_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad para \quad \omega_2^2 \end{cases} \tag{72}$$

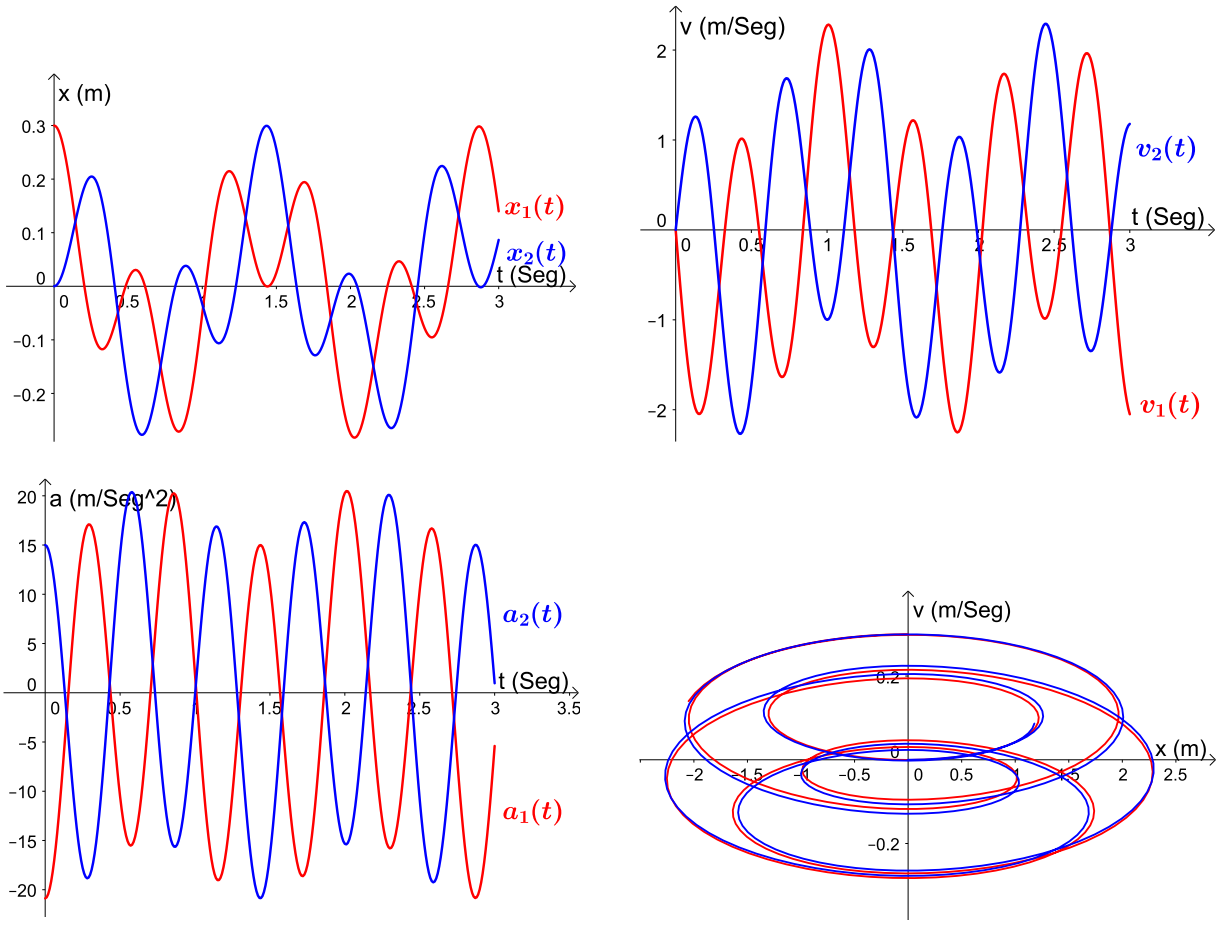
Las expresiones 72 son las relaciones que existen entre las partes del sistema oscilatorio, de tal manera que solo resta determinar una amplitud arbitraria la cual se define por medio de las condiciones iniciales del sistema. Escribiendo $D_{jn} = a_{jn}C_n$ con $j = 1, 2$

entonces $D_{1n} = a_{1n}C_n$ y $D_{2n} = a_{2n}C_n$, de tal forma que a_{1n} y a_{2n} son valores arbitrarios los cuales despues de fijados cumplen la relación

$$\begin{cases} a_{11} = a_{21} \\ a_{12} = -a_{22} \end{cases} \tag{73}$$

Dadas estas relaciones, resta determinar los valores de C_n dadas las condiciones iniciales del sistema, y ya que las soluciones especiales 68 son homogéneas y lineales, su superposiciones también es solución del sistema oscilatorio, y por lo tanto

$$x_j(t) = \sum_{n=1}^{2} a_{jn}C_n \cos\left(\omega_n^2 t + \delta_n\right) \tag{74}$$

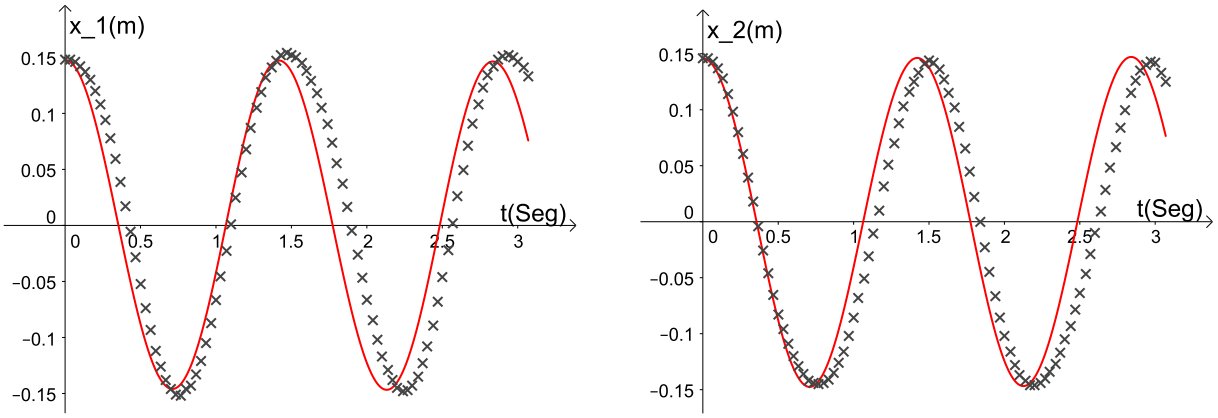


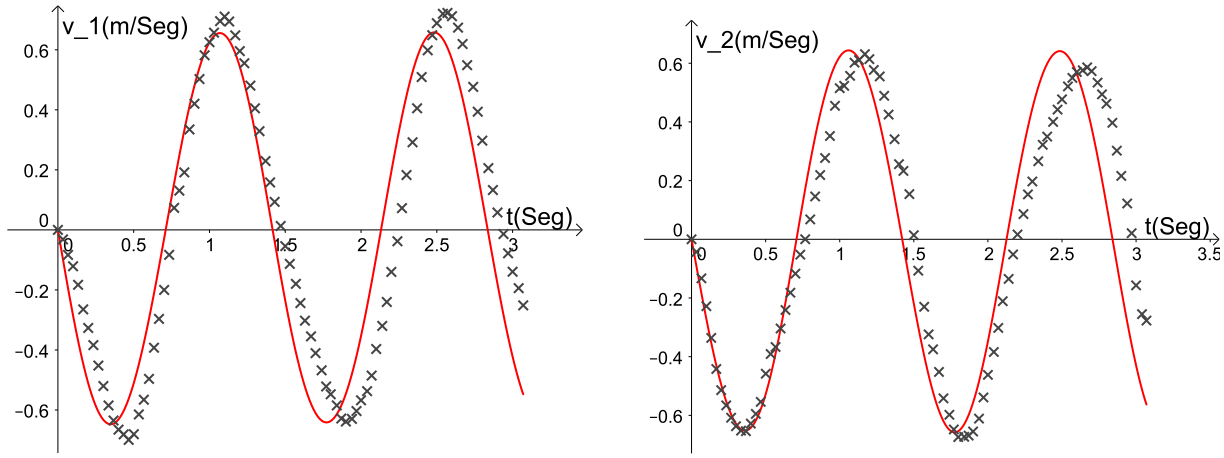
Gráfica 39: Se muestra la posición, velocidad y aceleración con respecto al tiempo, ademas del diagrama de fase para el sistema acoplado de la Figura 9

En la anterior gráfica, se muestra el desarrollo temporal y el diagrama de fase del sistema acoplado de la Figura 9, con condiciones iniciales $x_1(0) = 30cm$, $x_2(0) = 0$ y $v_1(0) = v_2(0) = 0$, condiciones que determinan un *acoplamiento asimétrico* . En las gráficas se muestra la evolución temporal de cada una de las partículas del sistema y su diagrama de fase.

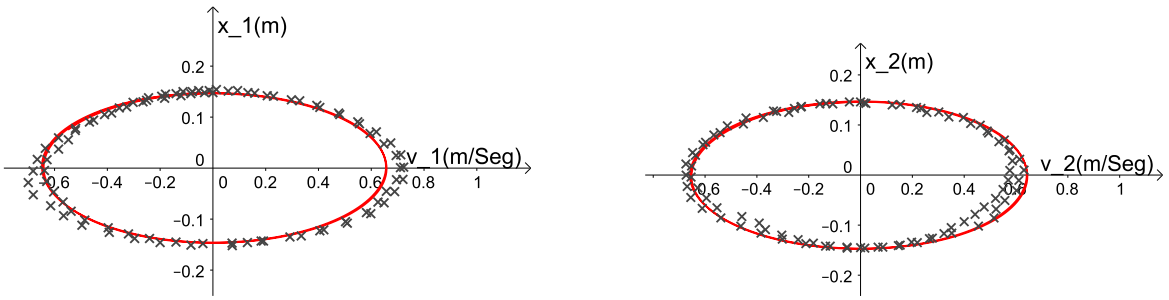
6.1. ANÁLISIS DEL LOS PÉNDULOS ACOPLADOS POR MEDIO DE TRACKER

En esta práctica de laboratorio se hará uso de un sistema de dos péndulos de masa $m = 100\ g$ y longitud $L = 50\ cm$, los cuales están acoplados por medio de un resorte de constante $\kappa \approx 3.6\ N/m$, la cual fue determinada por medio de *la ley de Hooke* al colgar de este una masa de $50\ g$ y medir su elongación. El comportamiento de este sistema se analizará por medio del programa Tracker en uno de sus modos normales al desplazar los dos péndulos una misma distancia determinada como se muestra en la Figura 9 y obteniendo





Gráfica 31:Se muestra la evolución temporal de la posición de cada uno de los péndulos comparando lo obtenido en con la expresión 74 (en línea continua)y los datos del programa Tracker (en línea punteada)



Gráfica 32:Se muestra los diagramas de fase de cada uno de los péndulos comparando lo obtenido en con la expresión 74 (en línea continua)y los datos del programa Tracker (en línea punteada)

Notese, cómo la simulación obtenida por medio del programa Tracker, posee una aproximación aceptable con la expresión 74. También es posible apreciar cómo en este modo normal los péndulos se comportan como osciladores armónicos simples, mostrando de esta manera como los osciladores acoplados se componen de la superposición de movimientos mas simples como el M.A.S.

7. INTRODUCCIÓN AL MOVIMIENTO ONDULATORIO

En este apartado se hablará brevemente del *movimiento ondulatorio*, el cual sera mostrando haciendo usos de los sistemas oscilatorios discretos estudiados en los apartados anteriores, se puede hacer un paso a los *sistemas continuos* obteniendo de esta manera la *ecuación de onda* y sus respectiva solución.

7.1. LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Para iniciar el estudio del movimiento ondulatorio se hará uso de una serie de sistemas masa-resorte de n osciladores acoplados entre si, con las condiciones que todas las partículas posean la misma masa m, los resorte idénticos con constante de elasticidad κ y no se tendrán encenta interacciones con campos gravitacionales,este sistema oscilatorio se encuentra en la intersección dimensional del esquema de la figura 3 en $UNIDIMENSIONAL \rightarrow IDEALIZADO \rightarrow INFINITOS\, GRADO\, DE\, LIBERTAD$, tal y como se muestra en la figura

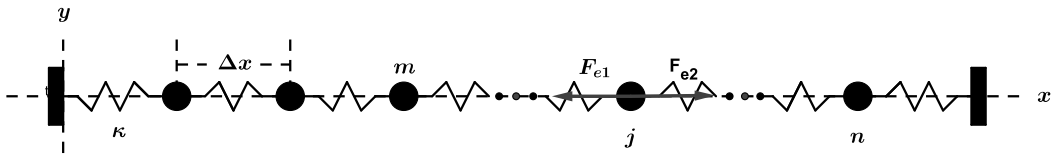


Figura 10: Sistema acoplado n osciladores donde se muestran las correspondientes fuerzas que actúan sobre éste

De la anterior figura se puede obtener con relativa facilidad que la ecuación de movimiento para la j-ecima partícula esta dada por

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega_R^2 \left(x_{j+1} - x_j - x_j + x_{j-1}\right) \tag{75}$$

La expresión 75 se puede reescribir de manera general como

$$\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} = \omega_R^2 \left[\Psi(x+\Delta x,t) - \Psi(x,t) - \Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)\right] \tag{76}$$

Donde $\omega_R^2 = \dfrac{\kappa}{m}$ y $\Psi(x,t)$ una función que depende de la posición y el tiempo. Ahora bien, para realizar el paso al continue es necesario notar que n debe tender a infinito ($n \to \infty$) y la masa m y la distancia entre estas Δx deben tender a cero ($m \to 0, \Delta x \to 0$). Por lo tanto multiplicando por $\dfrac{\Delta x^2}{\Delta x^2}$ la expresión 76 y tomando el limite se obtiene

$$\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} = \omega_R^2 \lim_{\Delta x \to 0} \left[\underbrace{\frac{\Psi(x+\Delta x,t) - \Psi(x,t)}{\Delta x}}_{d\Psi(x,t)/dx} - \underbrace{\frac{\Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}_{d\Psi(x,t)/dx} \right] \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} = \omega_R^2 \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left[\frac{\left.\dfrac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\dfrac{d\Psi(x,t)}{dx}\right|_{x}}{\Delta x} \right]}_{d^2\Psi(x,t)/dx^2} \Delta x^2$$

$$\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} = \frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} \lim_{\Delta x \to 0} \omega_R^2 \Delta x^2 \tag{77}$$

Nótese que en la expresión 77 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \omega_R \Delta x = Constante$ la cual tiene unidades de velocidad por lo cual la denotaremos como v por lo tanto

$$\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} \tag{78}$$

La anterior expresión es conocida como la *ecuación de onda unidimensional*, la cual fue obtenida por medio del paso del un sistema discreto a uno continuo haciendo uso de los sistemas anteriormente estudiados. Sin embargo, es necesario anotar que al atacar al sistema directamente desde el continuo, como se realiza en la mayoría de los textos, se llega a la misma expresión.

7.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Para dar solución a la ecuación de onda unidimensional dada por la expresión 78, se hará la suposición que esta solución consta de una función que depende de la posición del sistema ($Q(x)$) y otra que depende del tiempo ($W(t)$), de tal manera que la solución estará dada por

$$\Psi(x,t) = Q(x)W(t) \tag{79}$$

Este solución es conocida como el *método de separación de variables*. Ahora bien, dadas sus respectivas segundas derivadas con respecto al tiempo y la posición

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} &= Q(x)\frac{d^2W(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} &= W(t)\frac{d^2Q(x)}{dx^2} \end{aligned} \tag{80}$$

Al sustituir las expresiones 80 en 78 se obtiene con relativa facilidad

$$\frac{1}{W(t)}\frac{d^2W(t)}{dt^2} = \frac{v^2}{Q(x)}\frac{d^2Q(x)}{dx^2} = \Omega \tag{81}$$

Donde Ω es una constante dado la variable con respecto se realizan las derivadas, y por lo tanto hay tres diferentes casos de solución dado el valor que tome la constante

Caso	Ecuación Diferencial	Solución de la Ecuación Diferencial
$\Omega = 0$	$d^2W(t)/dt^2{=}0$ $d^2Q(x)/dx^2{=}0$	$W(t){=}It{+}J$ $Q(x){=}Kx{+}L$
$\Omega > 0 \rightarrow \Omega = \beta^2$	$d^2W(t)/dt^2{-}W(t)\beta^2{=}0$ $d^2Q(x)/dx^2{-}Q(x)\beta^2/v^2{=}0$	$W(t){=}E\cosh(\beta t){+}F\sinh(\beta t)$ $Q(x){=}G\cosh((\beta/v)x){+}H\sinh((\beta/v)x)$
$\Omega < 0 \rightarrow \Omega = -\alpha^2$	$d^2W(t)/dt^2{+}W(t)\alpha^2{=}0$ $d^2Q(x)/dx^2{+}Q(x)\alpha^2/v^2{=}0$	$W(t){=}A\cos(\alpha t){+}B\sin(\alpha t)$ $Q(x){=}C\cos((\alpha/v)x){+}D\sin((\alpha/v)x)$

Tabla 2: Soluciones de la expresión 81 dados los diferentes posible valores de la constante Ω

Se puede observar que los dos primeros casos de solución para $\Omega = 0$ y $\Omega > 0$, no poseen una coherencia desde el punto de vista físico, dado que sus soluciones están dadas por funciones lineales e hiperbólicas las cuales no concuerdan con los movimientos ondulatorios que se pueden observar en la naturaleza, razón por la cual se toma como solución el caso en que $\Omega < 0$ ya que su solución está determinada por medio de funciones coseno y senoidales. Al sustituir dichas soluciones válidas en 79 se obtiene

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\alpha_n t) + B_n \sin(\alpha_n t)\right] \left[C_n \cos\left(\frac{\alpha_n}{v}x\right) + D_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{v}x\right)\right] \tag{82}$$

Donde las constantes A_n, B_n, C_n, D_n y α_n, se determinan por medio de las *condiciones de frontera* y las *condiciones iniciales* del sistema. Nótese que la solución de la ecuación de onda unidimensional determinada por la expresión 82 se da en términos de una sumatoria, dado que esta formada por un sistema de osciladores acoplados de manera unidimensional por lo cual su movimiento más general se determina en base de la superposición de los modos normales de oscilación.

7.3. CUERDA ATADA EN SUS EXTREMOS

En este apartado se estudiará, a manera de ejemplo, las ondas mecánicas dadas en una cuerda atada en sus extremos al ser perturbada. Ahora bien, dadas las condiciones de frontera $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$ se puede obtener con relativa facilidad de la expresión 82

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\alpha_n t) + B_n \sin(\alpha_n t)\right] \left[C_n \cos\left(\frac{\alpha_n}{v}0\right) + D_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{v}0\right)\right] \rightarrow C_n = 0 \tag{83}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\alpha_n t) + B_n \sin(\alpha_n t)\right] \left[D_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{v}L\right)\right] \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi v}{L} \tag{84}$$

Al sustituir 83 y 84 en 82 se obtiene

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{85}$$

Dado el caso especifico en que sus condiciones iniciales sean $\Psi(x,0) = \chi \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ y $\frac{d\Psi(x,0)}{dt} = 0$ se obtiene de la expresión 85 y su respectiva derivada

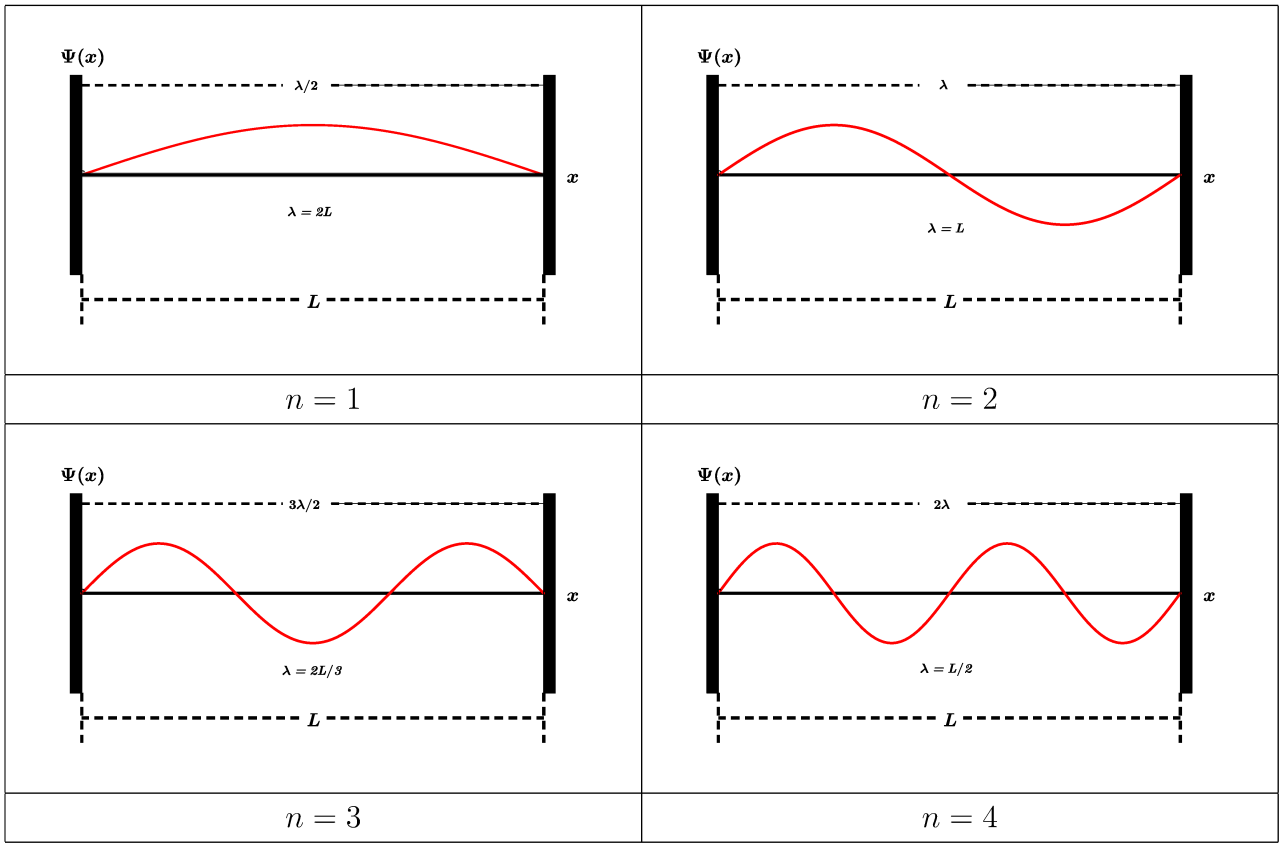
$$\chi \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}0\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}0\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \rightarrow A_n = \chi \;\; si \;\; n = m \tag{86}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\chi \frac{n\pi v}{L} \sin\left(\frac{n\pi v}{L} 0\right) + B_n \frac{n\pi v}{L} \cos\left(\frac{n\pi v}{L} 0\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \rightarrow B_n = 0 \tag{87}$$

Con las expresiones 86 y 87 en 85 se obtiene

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{88}$$

La anterior expresión representa la solución de la ecuación para una cuerda de longitud L atada en sus extremos dadas las condiciones de frontera e iniciales anterior mente determinadas y con $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Ahora bien, la representación espacial de esta cuerda para diferentes valores de n esta dada por



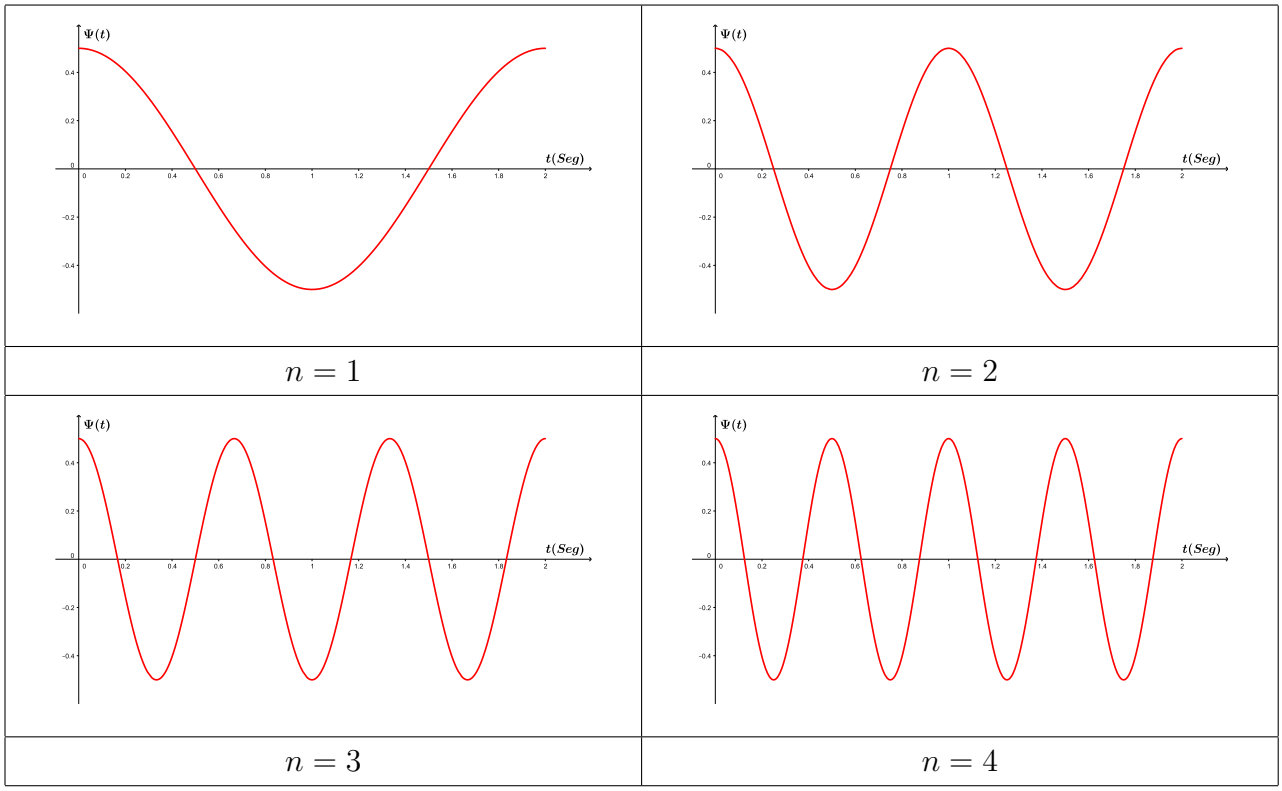
Gráfica 33: Se muestra la representación espacial para diferentes valores de n con $\chi = 0.5m$

Estas gráficas representan la posición de la onda de la cuerda para diferentes valores de n y son conocidos en la literatura como *armónicos de la cuerda*, los cuales son los modos fundamentales de vibración de la misma. Dados estos armónicos, es posible generalizar

la longitud de onda (λ) y definir la cantidad de longitud de onda por ciclo transcurrido lo cual se conoce como número de onda angular (K), los cuales respectivamente son

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$K_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \rightarrow K_n = \frac{n\pi}{L}$$

Estudiando el comportamiento temporal de la ecuación de onda 88 se obtiene



Gráfica 34: Se muestra el comportamiento temporal para diferentes armónicos con $\chi = 0.5m$ y $v = 2m/Seg$

Es de destacar que el comportamiento temporal de la onda de la cuerda es como el de un oscilador amónico simple con diferentes frecuencias angulares dependiendo del armónico, lo cual se debe a que este corresponde a un *diferencial de la cuerda* el cual es, como se vio en la determinación de la ecuación de onda, uno de estos osciladores. Ahora bien, de este comportamiento temporal se puede definir la frecuencia angular de la onda (ω), el periodo de tiempo de la onda (T) y la frecuencia de la onda (f) como

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T_n = \frac{2L}{nv}$$
$$f_n = \frac{1}{T_n} \rightarrow f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow f_n = nf_1$$

Nótese que los anteriores términos son los definidos cotidianamente en la literatura al estudiar las fuentes sonoras. También es factible relacionar el comportamiento espacial y temporal de la onda por medio de la razón entre la longitud de onda (λ_n) y el periodo de tiempo de la onda (T_n) obteniendo

$$\frac{\lambda_n}{T_n} = \frac{\frac{2L}{n}}{\frac{2L}{nv}} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow v = \lambda f$$

Las anteriores expresiones definen la velocidad de la onda producida en la cuerda. Es de destacar que a partir de este ejemplo de la cuerda atada a sus extremos se a podido definir una serie de parámetros trabajados cotidianamente en estos cursos inclusive a nivel de bachillerato.

8. CONCLUSIONES

1. Las consideraciones que se tienen en cuenta en el presente trabajo de grado, permiten mejorar, en cierto grado, la comprensión y la profundización del estudio de los sistemas oscilatorios.
2. La propuesta del esquema mental, bajo las intersecciones de las diferentes dimensiones propuestas y su trasversalidad temporal, permite abordar los diferentes sistemas oscilatorios, además de mejorar su contextualización para su respectivo estudio.
3. Los sistemas oscilatorios que se abordan a profundidad en el presente trabajo de grado, permiten evidenciar diferentes características de dichos sistemas que se consideran relevantes, además de que estos sistemas se consideren de especial importancia para poder abordar sistemas oscilatorios más complejos.
4. Las practicas de laboratorio desarrolladas, permiten ratificar los cálculos teóricos realizados, además de ser la manera de evaluar su validez.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Almeida, M. P., & Costa, U. M. S. (2000). Exemplo de Histerese com um Sistema de Massa-Mola. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22(1).

[2] Baker, G. L., & Blackburn, J. A. (2005). *The pendulum.* OUP.

[3] Baratto, A. C. (1998). Ondas estacionárias longitudinais no tubo de chamas. *Revista Brasilera de Ensino de Física*,20,6.

[4] Barrera, J. I., Paez, B. A., & de Películas Delgadas, G. (2002). DETERMINACIÓN DE LA IMPEDANCIA EN UN OSCILADOR REAL AMORTIGUADO. *REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA*, 34(1), 294.

[5] Beléndez, A., Pascual, C., Méndez, D. I., Beléndez, T., & Neipp, C. (2007). Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista brasileira de ensino de física*, 29(4), 645-648.

[6] BLEICHER, L., SILVA, M. M. D., RIBEIRO, J., & MESQUITA, M. (2002). Análise e simulação de ondas sonoras assistidas por computador. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(2), 129-133.

[7] Bertuola, A. C., Hussein, M. S., & Pato, M. P. (2005). O oscilador harmônico amortecido forçado revisitado. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 27(3), 327-332.

[8] Bruno-Alfonso, A., & Florêncio, A. S. (2004). Uma discussão sobre as densidades de energia em ondas mecânicas unidimensionais. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 26(3), 247-250.

[9] Camiletti, G. G., & Ferracioli, L. (2002). A utilização da modelagem computacional semiquantitativa no estudo do sistema mola-massa.*Revista Brasilera de Ensino de Física*,24,110-122.

[10] Campos,D.(1996).Comportamiento Caótico en Sistemas Dinámicos Clásicos:Un Paradigma para la Ciencia.*El Maestro de ciencias, Universidad Nacional de Colombia*

[11] Diógenes, C., & Isaza, J. F. (2002). *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[12] Chapra, S. C. C., Hano, R. P. R., & del Carmen, M. (2003). *Métodos numéricos para ingenieros* (No. TA335. Ch37 2003).

[13] Crawford, F. S. (1994). *Ondas: Berkeley physics course. volumen 3 (Vol. 3)*. Reverté.

[14] Dartora, C. A., Nobrega, K. Z., Matielli, M. H. K., de Campos, F. K. R., & dos Santos Filho, H. T. (2011). Conceitos básicos sobre a difraçao e a dispersao de ondas eletromagnéticas. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 33(1), 1307.

[15] Fonseca, M., Hurtado, A., Lombana, C., & Ocaña, O. (2003). APROXIMACIÓN A UNA PROPUESTA DIDÁCTICO-EXPERIMENTAL QUE INTEGRE NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS OSCILACIONES DE UN SISTEMA MASA-RESORTE. *Revista Colombiana de Fisica*, 35(1), 90.

[16] French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas* (Vol. 2). Reverté.

[17] Galindo, F. (2004),*Elementos para el Estudio del Caos a Través de un Sistema Dinámico Simple*(Tesis de Pregrado).Universidad Distrital Francisco José de Caldas,Bogotá.

[18] Galléas, W., Ymai, L. H., Natti, P. L., & Natti, E. T. (2003). Ondas do tipo sóliton em guias dielétricos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(3).

[19] Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*. Reverté.

[20] Guerrero de Mesa,A.(2005).*Notas de Clase:Oscilaciones y Ondas*.Bogotá.Universidad Nacional de Colombia.

[21] Hsu, H. P. (1973). Análisis de Fourier (No. 517.355 H8Y).

[22] Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1968). *Berkeley physics course: Mecánica*. Reverté.

[23] Martins,U.(2013).Ensinando Sobre Ondas Transversais, Ondas Estacionarias E Ondas Polarizadas Utilizando Um Simples Motor A Pilha.*Revista Brasilera de Ensino de Física*,35,1307-1 a 1307-2.

[24] Páez, B. A., & Barrera, J. I. (2002). CURVAS DE RESONANCIA EN OSCILADORES FORZADOS POR SEÑALES DE MUCHOS ARMÓNICOS. *REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA*, 34(1), 289.

[25] Pain,M.(2005).*The Physics of Vibrations and Waves Sixth Edition.*London.Wiley & Sons Ltd.

[26] Pinto, G. & Sánchez, M. (2012). Enseñanza y divulgación de la Química y la Física. Ibergarceta.

[27] Rulli, C. C., & Rino, J. P. (2007). Oscilaçoes paramétricas: uma simulaçao numérica. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 29(1), 71-78.

[28] Santiago, A. J., & Rodrigues, H. (2005). Efeitos de amortecimento sobre um oscilador X3. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 27(2), 245-249.

[29] Sears, F. W., Zemansky, M. W., & Young, H. D. (2009). *Física universitaria*, Volumen 1 Decimosegunda edición.

[30] Tipler,P.(1978).*Física.*Barcelona.Reverté.S.A.

[31] Vera, A. (2012),*Explorando Las Ondas: Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza-Aprendizaje De Algunos Conceptos Básicos Del Movimiento Ondulatorio*(Tesis de Maestría).Universidad Nacional de Colombia,Bogotá.

[32] Vieira, L. P. (2013). *Ondas Sonoras Estacionárias em um Tubo: Análise de Problemas e Sugestões* (Doctoral dissertation, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, UFRJ, 2013.[Links]).

[33] Welti, R. (2005). Obstáculos conceptuales en el aprendizaje de la energ?a de las ondas. *Revista Brasileira de Ensino de F?sica*, 27(3), 487-490.

[34] Weltner,K,Miranda,P, & Esperidiado,S.(1998).Demonstracado Das Oscilacoes Forcadas E Da Curva Da Ressonancia Em Classe.*Revista Brasilera de Ensino de Física*,20,434-436.

[35] Zill,D.(1986).*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones Segunda Edición.*México.Grupo Editorial Iberoamerica.

10. ANEXOS

10.1. CÓDIGO CABECERA PARA EL MÉTODO DE RUNGE KUTTA CUARTO ORDEN

```
% METODO DE RUNGE KUTTA 4 ORDEN PARA EDOs
function [t,x,v] =rk_2(f,t0,tf,x0,v0,n)
      h=(tf-t0)/n;
      t=t0:h:tf;
      x=zeros(n+1,1);
      v=zeros(n+1,1);
      x(1)=x0; v(1)=v0;
            for i=1:n
        k1=h*v(i);
        l1=h*f(t(i),x(i),v(i));
        k2=h*(v(i)+l1/2);
        l2=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k1/2,v(i)+l1/2);
        k3=h*(v(i)+l2/2);
        l3=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k2/2,v(i)+l2/2);
        k4=h*(v(i)+l3);
        l4=h*f(t(i)+h,x(i)+k3,v(i)+l3);
        x(i+1)=x(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        v(i+1)=v(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
      end
end
```

10.2. CÓDIGO PARA EL EL PÉNDULO MATEMÁTICO NO LINEAL POR MEDIO DEL MÉTODO DE RUNGE KUTTA CUARTO ORDEN

```
disp ('* PÉNDULO NO LINEAL POR MEDIO  DEL METODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 4*')
w0=input('frecuencia angular,         w0: ');
x0=input('ángulo inicial en radianes, x0: ');
v0=input('velocidad inicial en Rad/s, v0: ');
tf=input('tiempo final,               tf: ');
n=input('número de pasos,             n: ');
f=@(t,x,v) -w0*w0*sin(x);
%condiciones iniciales
t0=0;
hold on
%solución numérica
[t,x,v]=rk_2(f,t0,tf,x0,v0,n);
plot(t,x,'b*')
grid on
xlabel('t (Seg)')
ylabel('x (Rad)');
legend('RK4 Péndulo')
title('oscilador amortiguado')
hold off
----
```

10.3. CÓDIGO PARA EL EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO POR MEDIO DEL MÉTODO DE RUNGE KUTTA CUARTO ORDEN

```
disp ('*OSCILADOR AMORTIGUADO POR MEDIO DEL METODO DE RUNGE KUTTADE ORDEN 4*')
w0=input('frecuencia angular,         w0: ');
```

```
g=input('rozamiento,              gamma: ');
x0=input('posición inicial en metros, x0: ');
v0=input('velocidad inicial en m/s,   v0: ');
tf=input('tiempo final,               tf: ');
n=input('número de pasos,             n: ');
f=@(t,x,v) -g*v-w0*w0*x;
%condiciones iniciales
t0=0;
hold on
%solucion numérica
[t,x,v]=rk_2(f,t0,tf,x0,v0,n);
plot(t,x,'r*')
grid on
xlabel('t (Seg)')
ylabel('x (m)');
legend('RK4 Amortiguado')
title('oscilador amortiguado')
hold off
```