Modelamiento e Identificación de Parámetros para el Helicóptero 2DOF quanser aero

Juan Nicolas Gonzalez Camberos



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Facultad de Ingeniería

Proyecto Curricular de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C.

2024

Modelamiento e Identificación de Parámetros para el Helicóptero 2DOF quanser aero

Juan Nicolas Gonzalez Camberos Código: 20181005116

Trabajo de grado para optar al título de:
Ingeniero Electrónico

Director:
Doc.-Ing. Marco Aurelio Alzate Monroy

Modalidad de Grado:
Investigación - Innovación



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
Facultad de Ingeniería
Proyecto Curricular de Ingeniería Electrónica
Bogotá D.C.
2024

Contenido

Lista de Figuras VII

Lista de Tablas XIII

1. Planteamiento del problema **1**
1.1. Formulación del problema 1
1.2. Objetivos 2

2. Estado del arte **3**
2.1. Modelos 5
2.1.1. Modelo Lineal Quanser 5
2.1.2. Modelo Euler-Lagrange 7
2.2. Control sin modelo 15

3. Modelización **19**
3.1. Modelo No Lineal 19
3.2. Modelo lineal - Linealización 23
3.2.1. Consideraciones iniciales 23
3.2.2. Puntos de equilibrio 24
3.2.3. Linealización 25
3.3. Motor 27
3.3.1. Modelo Segundo Orden 27
3.3.2. Modelo de Primer Orden 30
3.4. Modelo Motor-Planta 31

4. Protocolo toma de datos **33**
4.1. Configuración 34
4.1.1. Toma de datos 36
4.2. Toma de datos 38

4.2.1. Lazo abierto 39
4.2.2. Lazo cerrado 43

5. Identificación Inicial **44**
5.1. Parámetros basicos 44
5.1.1. Inercia 45
5.1.2. Fricción Viscosa 46
5.1.3. Empuje 50
5.2. Respuesta natural del movimiento de pitch 54
5.3. Relación entre el motor de cola y pitch 57
5.4. Relación entre el motor de dirección y pitch 62
5.5. Relación entre el motor de cola y yaw 65
5.6. Relación entre el motor de dirección y yaw 71

6. Identificación modelo No lineal **77**
6.1. Aporte motor de dirección a pitch 77
6.2. Aporte motor de cola sobre pitch 80
6.3. Aportes cruzados 81
6.3.1. Aporte motor de dirección a pith y yaw 81
6.3.2. Aporte motor de cola a pitch y yaw 82
6.3.3. Aporte simultáneo 83
6.3.4. Preparación de datos 85
6.3.5. Resultados estimación 87

7. Consideraciones **95**
7.1. Dificultades 95

8. Conclusiones y Trabajo Futuro **101**
8.1. Conclusiones 101
8.2. Trabajos futuros 103

Bibliografía **105**

Anexos **109**
A. Aporte motor de dirección y pitch datos completos 109
B. Aporte motor de dirección y pitch datos separados 110
C. Resultados estimación no lineal 113

Lista de Figuras

2-1. Sistema AERO 2 de Quanser[1]. 3
2-2. Marco referencial, tomado de [1]. 6
2-3. Lógica controlador H infinito, tomado de [2]. 15

3-1. Circuito equivalente motor. 27
3-2. Sistema con dinámica de motor. 30

4-1. Bloques QUANSER AERO. 33
4-2. Tomado de [1] Ajuste motor. 34
4-3. Tomado de [1] seguros movimiento. 35
4-4. Configuración comunicación. 35
4-5. Configuración lectura. 36
4-6. Configuración escritura. 37
4-7. Host to file. 37
4-8. Visualización sensores completos. 38
4-9. Montaje lazo abierto. 39
4-10.$V_y = 0$ y V_p de 0 a 10 V. 40
4-11.$V_y = 0$ y V_p de 0 a -10 V. 40
4-12.$V_p = 0$ y V_y de 12 a 14 V. 40
4-13.$V_y = 0$ y V_p de 8 a 10 V. 40
4-14.$V_y = 0$ y V_p de -8 a -10 V. 40
4-15.$V_p = 0$ y V_y de 0 a 10 V. 41
4-16.V_p de 8 a 10 V y V_y de 0 a 8 V. 41
4-17.V_p de -10 a 10 V y V_y de -6 a 6 V. 41
4-18.Lazo cerrado. 43
4-19.Montaje lazo cerrado. 43

5-1. Respuesta libre pitch. 48
5-2. Respuesta libre yaw. 50

5-3. Empuje Vp theta. 51
5-4. Empuje Vy theta. 51
5-5. Empuje Vp y Vy theta. 51
5-6. Empuje Vy psi. 52
5-7. Empuje Vp Psi. 52
5-8. Empuje Vp y Vy psi. 52
5-9. Theta 0 a 10 V. 53
5-10.Theta 0 a -10 V. 53
5-11.Psi 8 a 10 V. 53
5-12.Psi -8 a -10 V. 53
5-13.Psi 0 a 10 V. 53
5-14.Movimiento pendular normalizado para condiciones iniciales positivas. 56
5-15.Movimiento pendular normalizado para condiciones iniciales negativas. 56
5-16.Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\theta(t)$. . . . 57
5-17.Respuestas de $\theta(t)$ normalizadas respecto a escalones en $V_y(t)$. . . 58
5-18.Respuestas de $\theta(t)$ normalizadas respecto al valor de estado estacionario. 59
5-19.Respuestas temporales de un sistema con función de transferencia $G(s) = \frac{0{,}25s + 0{,}1404}{s^2 + 0{,}2895s + 2{,}006}$. 59
5-20.Aproximación para las respuestas temporales positivas para V_y y variación de θ. 62
5-21.Aproximación para las respuestas temporales negativas para V_y y variación de θ. 62
5-22.Toma de datos 2v $V_p(t)$. 64
5-23.Toma de datos 8v $V_p(t)$. 65
5-24.Escalón 2v intervalo 1. 65
5-25.Escalón 2v intervalo 2. 65
5-26.Escalón 8v intervalo 1. 66
5-27.Escalón 8v intervalo 2. 66
5-28.Amplitud entrada -2. 67
5-29.Amplitud entrada 2. 67
5-30.Amplitud entrada -3. 67
5-31.Amplitud entrada 3. 67
5-32.Amplitud entrada -4. 67
5-33.Amplitud entrada 4. 67

5-34.Amplitud entrada -5. 68
5-35.Amplitud entrada 5. 68
5-36.Amplitud entrada -6. 68
5-37.Amplitud entrada 6. 68
5-38.Amplitud entrada -7. 68
5-39.Amplitud entrada 7. 68
5-40.Amplitud entrada -8. 69
5-41.Amplitud entrada 8. 69
5-42.Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\psi(t)$, descendente. 69
5-43.Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\psi(t)$, ascendente. 70
5-44.Normalización y segmentación comportamiento descendente. . . . 71
5-45.Normalización y segmentación comportamiento ascendente. 72
5-46.Comparación simulación, comportamiento $V_y(t)$ $\psi(t)$, creciente. . 72
5-47.Comparación simulación, comportamiento $V_y(t)$ $\psi(t)$, decreciente. 73
5-48.Toma de datos para relacionar $V_p(t)$ con la variación de $\psi(t)$, creciente. 74
5-49.Toma de datos para relacionar $V_p(t)$ con la variación de $\psi(t)$, descendente. 74
5-50.Comparación simulación, comportamiento $V_p(t)$ $\psi(t)$, creciente. . . 75
5-51.Comparación simulación, comportamiento $V_p(t)$ $\psi(t)$, decreciente. 75

6-1. Amplitud entrada -7. 78
6-2. Amplitud entrada 7. 78
6-3. Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_p sobre θ. 79
6-4. Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_p sobre θ, al incluir la fricción de coulomb. 79
6-5. Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_y sobre θ. 80
6-6. Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_p(t)$ $\theta(t)/V_p(t)$, creciente. 81
6-7. Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_p(t)$ $\theta(t)/V_p(t)$, decreciente. 82
6-8. Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_y(t)$ $\theta(t)/V_y(t)$. . 83
6-9. Datos utilizados para la comparación de resultados. 84

6-10.Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_y y V_p sobre θ y ψ. 85
6-11.Datos utilizados para la estimación de los parámetros. 88
6-12.Resultados estimación experimento 1 intervalo 30-60. 89
6-13.Resultados estimación experimento 2 intervalo 30-60. 90
6-14.Resultados estimación experimento 1 intervalo 90-120. 92
6-15.Resultados estimación experimento 1 intervalo 0-30. 93

7-1. Datos lazo cerrado offset referencia de 1.047 rad (°60). 96
7-2. Datos lazo cerrado controlador LQR. 96
7-3. Sistema representado en bloques. 97
7-4. Quanser Theta 0 rad Psi 1.074 rad. 98
7-5. Quanser Theta 1.074 rad Psi 0 rad. 98
7-6. Quanser Theta 1.074 rad Psi 1.074 rad. 98

8-1. Escalón 3v vp-theta. 109
8-2. Escalón 4v vp-theta. 109
8-3. Escalón 5v vp-theta. 110
8-4. Escalon 6v vp-theta. 110
8-5. Escalon 7v vp-theta. 110
8-6. Escalón 2v intervalo 1. 111
8-7. Escalón 2v intervalo 2. 111
8-8. Escalón 3v intervalo 1. 111
8-9. Escalón 3v intervalo 2. 111
8-10.Escalón 4v intervalo 1. 111
8-11.Escalón 4v intervalo 2. 111
8-12.Escalón 5v intervalo 1. 112
8-13.Escalón 5v intervalo 2. 112
8-14.Escalón 6v intervalo 1. 112
8-15.Escalón 6v intervalo 2. 112
8-16.Escalón 7v intervalo 1. 112
8-17.Escalón 7v intervalo 2. 112
8-18.Escalón 8v intervalo 1. 113
8-19.Escalón 8v intervalo 2. 113
8-20.Archivo 2 0 30. 113
8-21.Archivo 2 30 60. 113
8-22.Archivo 2 60 90. 114
8-23.Archivo 2 90 120. 114

8-24.Archivo 2 120 150. 114
8-25.Archivo 2 150 180. 114
8-26.Archivo 2 180 210. 114
8-27.Archivo 2 210 240. 114
8-28.Archivo 1 30 60. 115
8-29.Archivo 1 90 120. 115
8-30.Archivo 1 150 180. 115

Lista de Tablas

2-1. funciones usadas. 14

4-1. Puertos, elementos de control. 38
4-2. Puertos elementos cartesianos. 38

5-1. Parámetros inercia. 46
5-2. Respuesta libre pitch. 48
5-3. Resultados fricción viscosa pitch. 48
5-4. Resultados fricción viscosa yaw. 50
5-5. Resultados empujes. 52
5-6. Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud como se establece en la columna "Entrada" en $V_y(t)$ con efecto en $\theta(t)$. 63
5-7. Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud como se establece en la columna "Entrada" en $V_p(t)$ con efecto en $\theta(t)$. 66
5-8. Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud 0.261799 con efecto en $\psi(t)$. 76
5-9. Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud -0.261799 con efecto en $\psi(t)$. 76

6-1. Parámetros obtenidos a partir de la identificación no lineal experimento 1. 88
6-2. Parámetros obtenidos a partir de la identificación no lineal experimento 2. 89
6-3. Resultados validación experimento 1. 91
6-4. Resultados validación experimento 2. 91

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Formulación del problema

En la facultad de ingeniería de la universidad distrital Francisco José de Caldas se cuenta con el equipo Quanser AERO el cual es un equipo de laboratorio que permite estudiar el comportamiento de un helicópteroa escala con dos (2) grados de libertad (DOF, del inglés Degrees Of Freedom), un aero-pendulo y medio cuadricóptero. Este consta de dos motores con hélices acoplados a un eje, estos generan la fuerza que permite el movimiento de pitch y yaw; el usuario puede bloquear cada uno de los movimientos y desplazar 90° los motores; de esta forma se llega a las configuraciones nombradas. Respecto a la sensórica se cuenta con sensores de corriente para cada motor, un encoders y un acelerómetro, estos permiten conocer la velocidad angular de cada motor, posición y velocidad en cada eje. El fabricante Quanser entrega el equipo funcionando con dos controladores de lazo cerrado básicos basados en PID y realimentación de estados óptima, a partir del cálculo de las ganancias con la solución al problema del regulador lineal cuadrático (LQR, del inglés Linear Quadratic Regulator). Sin embargo, cuando se empieza a experimentar con el equipo se puede observar que el desempeño del sistema en lazo cerrado no es el mejor, en ninguno de los casos. Lo anterior no resulta sorprendente, debido a que el diseño de los controladores se realiza a partir de un modelo lineal multivariable bastante simplificado. Al analizar el comportamiento dinámico del helicóptero con 2DOF, observamos que es un sistema MIMO

(del inglés, Multiple Inpult Multiple Output) con dos entradas, dos salidas, su comportamiento tiene componentes altamente no lineales y fuertes acoples entre las salidas y las entradas, lo que junto con las variaciones dinámicas de distintas posiciones dificultan el proceso de identificación del sistema. En ese sentido, lo que busca este proyecto es encontrar un modelo no lineal que describa el comportamiento dinámico del sistema, y los parámetros específicos para el equipo que está en la universidad, con el fin de posibilitar el diseño de controladores que generen un mejor comportamiento del sistema. Lo anterior resultaría bastante útil, porque pese a que existen trabajos en el área de control con el QUANSER AERO, y de una u otra forma dichos trabajos utilizan algún modelo, la mayoría de los controladores que se implementan no requieren realmente modelo y el modelo como tal se utiliza para hacer una comparación entre la simulación y los resultados experimentales, que normalmente resulta en que los comportamientos no son tan parecidos entre si, justamente porque el modelo no representa realmente el comportamiento del sistema.

1.2. Objetivos

Objetivo General

Identificar los parámetros de un modelo dinámico no lineal que represente satisfactoriamente el comportamiento dinámico del QUANSER AERO en su configuración helicóptero 2DOF.

Objetivos específicos

- Modelizar el sistema utilizando el método de Euler−Lagrange, teniendo en cuenta las interacciones entre movimientos y las entradas del sistema.
- Realizar la toma de datos de entrada – salida del sistema en diferentes condiciones de funcionamiento.
- Identificar los valores de los parámetros del modelo del sistema, para un modelo linealizado en diferentes puntos de operación y para el modelo no lineal originalmente propuesto.
- Validar los parámetros obtenidos.

Capítulo 2

Estado del arte

El helicóptero de dos (2) grados de libertad (DOF, del inglés Degrees Of Freedom) comercializado por la empresa Quanser, denominado AERO, es un sistema para la prueba de métodos de control multivariable que, como su nombre lo indica, tiene dos grados de libertad. Puede girar al rededor del eje y, en lo que conocemos como el ángulo de pitch (o cabeceo), determinado por el símbolo θ. Así como también al rededor del eje z, en lo que conocemos como el ángulo de yaw (o dirección),



Figura 2-1: Sistema AERO 2 de Quanser[1].

determinado por el ángulo ψ. Dichos movimientos son generados por dos pares motor-hélice idénticos, cuyas fuerzas de empuje se ejercen a la misma distancia del punto fijo al rededor del cual gira el cuerpo, en posiciones opuestas, y cada uno ejerce su fuerza al rededor del eje y y z, para producir los movimientos de pitch y yaw, respectivamente. La Figura **2-1** muestra el equipo AERO disponible en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital.

El sistema trabaja con encoders ópticos para determinar la posición angular en cada eje. Sin embargo, también incluye acelerómetro y giroscopio. Además, tiene integrados sensores de voltaje y corriente para cada uno de los motores lo que hace posible conocer también su velocidad angular. Físicamente, tiene un mecanismo de anillo que permite 360° de rotación en yaw y el acople de pitch permite ±45° de inclinación. La comunicación se realiza usando el módulo QFLEX USB, el cual en conjunto con el software QUARC permite utilizar MATLAB y SIMULINK para interactuar con los periféricos. Es importante resaltar que el Quanser AERO tiene integrado un amplificador de potencia que permite y limita que el voltaje aplicado a los motores este entre ±24 V.

El modelamiento e identificación de parámetros del sistema AERO de Quanser ha sido un tema de interés desde su aparición en el mercado, debido a que muchas de las técnicas de control que se desean probar en el equipo son dependientes del modelo del mismo. Sin embargo, se puede evidenciar, del análisis de la literatura existente en este tema, que no parecen haber parámetros generales para todos los equipos, como evidencia el trabajo de Dyvik [3]. Razón por la cual se ha decidido trabajar en esta temática, con el fin de obtener un modelo para el equipo disponible en la Universidad.

A lo largo de este capítulo, se presentarán algunos de los modelos encontrados en la literatura, con el fin de definir un modelo no lineal y un modelo lineal para el sistema, a los cuales posteriormente le serán identificados y validados los parámetros respectivos.

2.1. Modelos

Actualmente, se tienen varios enfoques a la hora de encontrar un modelo que represente la dinámica del sistema. Es posible partir de un modelo lineal para la construcción de los controladores, encontrar un modelo no lineal y linealizarlo en el punto de operación o, trabajar con un controlador no lineal.

2.1.1. Modelo Lineal Quanser

La primera situación es el lineal desde la concepción presentada por el mismo fabricante Quanser [1]. Este realiza un análisis físico de las fuerzas que actúan sobre el sistema partiendo de algunos supuestos:

- La distancia entre cada motor con el centro de masa es la misma y la masa de ambos motores es igual.
- Las interacciones sobre entre un motor con el otro son representadas como una perturbación proporcional al voltaje aplicado.
- El torque generado por cada motor es igual sin importar el sentido de giro.
- La velocidad de giro de los motores es modelada mediante una ecuación lineal.

Asumiendo lo anterior, el modelo se construye analizando las fuerzas que actúan sobre el sistema y se simplifica a una matriz de funciones de transferencia de la forma

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Theta(s)}{V_p(s)} & \dfrac{\Theta(s)}{V_y(s)} \\ \dfrac{\Psi(s)}{V_p(s)} & \dfrac{\Psi(s)}{V_y(s)} \end{bmatrix}. \tag{2-1}$$

La Figura **2-2** muestra las fuerzas generadas por cada par motor-hélice y los ejes de movimiento del sistema. Inicialmente, se tendería a pensar que como cada motor está aplicando una fuerza normal a cada eje de movimiento, por lo que los términos cruzados en (2-1) deberían ser cero. Sin embargo, el giro de cada motor genera movimiento alrededor de los dos ejes, como se evidenciará más adelante. Por lo tanto, es necesario modelar el efecto cruzado que tienen los motores, por

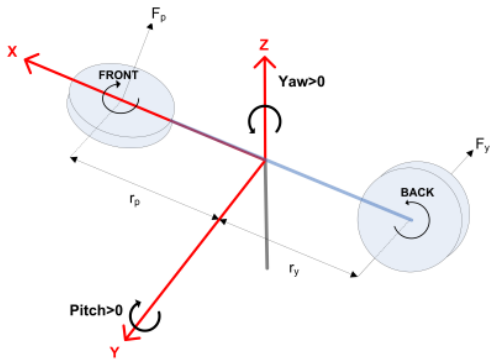


Figura 2-2: Marco referencial, tomado de [1].

lo que el torque generado al rededor del eje y se podría escribir como

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y, \tag{2-2}$$

donde V_p es el voltaje aplicado al motor del frente (normal al eje y), V_y es el voltaje aplicado al motor de cola (normal al eje z), K_{pp} y K_{py} son las constantes qué indican en qué medida se afecta el movimiento de pitch, o cabeceo, por los motores del frente y cola, respectivamente. Mientras que el torque generado al rededor del eje z se podría escribir como y

$$\tau_\psi = K_{py}V_p + K_{yy}V_y, \tag{2-3}$$

donde K_{yp} y K_{yy} son las constantes qué indican en qué medida se afecta el movimiento de yaw, o dirección, por los motores del frente y cola, respectivamente.

Con el fin de hacer el análisis dinámico del sistema, sobre el diagrama de cuerpo libre del sistema, aplicamos la segunda ley de Newton, en relación a los movimientos rotacionales. Para el caso del movimiento de pitch, considerando la fricción y la elasticidad torcional, se tiene

$$J_p\ddot{\theta} = \tau_\theta - D_p\dot{\theta} - K_{sp}\theta, \tag{2-4}$$

donde D_p es la constante de fricción y K_{sp} es la constante de elasticidad. Remplazando τ_θ por su definición en (2-2) y pasando los términos que tienen que ver con θ a la derecha, tenemos

$$J_p\ddot{\theta} + D_p\dot{\theta} + K_{sp}\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y. \tag{2-5}$$

Por su parte, para el movimiento de yaw, solo incluimos el efecto de la fricción, ya que no se evidencia el efecto de la elasticidad en las pruebas realizadas. Por lo que, al aplicar la segunda ley de Newton para dicho movimiento rotacional, tenemos

$$J_y\dot{\psi} = \tau_\psi - D_y\dot{\psi} \tag{2-6}$$

donde D_y es la constante de fricción. Remplazando τ_ψ por su definición en (2-3) y pasando los términos que tienen que ver con ψ a la derecha, tenemos

$$J_y\dot{\psi} + D_y\dot{\psi} = K_{py}V_p + K_{yy}V_y. \tag{2-7}$$

A partir de (2-5) y (2-7), es posible encontrar la matriz de funciones de transferencia presentada en (2-1), como

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Theta(s)}{V_p(s)} & \dfrac{\Theta(s)}{V_y(s)} \\ \dfrac{\Psi(s)}{V_p(s)} & \dfrac{\Psi(s)}{V_y(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{K_{pp}}{J_p s^2 + D_p s + K_{sp}} & \dfrac{K_{py}}{J_p s^2 + D_p s + K_{sp}} \\ \dfrac{K_{yp}}{J_y s^2 + D_y s} & \dfrac{K_{yy}}{J_y s^2 + D_y s} \end{bmatrix}. \tag{2-8}$$

Lo cual muestra que el movimiento de pitch es estable en lazo abierto, mientras que el de yaw no lo es. Características que se pueden verificar fácilmente con el sistema.

2.1.2. Modelo Euler-Lagrange

Este modelo es el más usado a lo largo de los desarrollos, se encuentra desarrollado con especial detalle en [4] y [5]. Adicionalmente, es usado como base para modelos expuestos en múltiples trabajos, como por ejemplo [6] y [7], como punto de partida del cual escoger los parámetros iniciales de sus sistemas antes de ejecutar algoritmos de búsqueda.

Un resumen general del proceso para obtener modelos por el método de Euler−Lagrange es el siguiente:

1. Identificar el Lagrangiano: El Lagrangiano es una función que describe la diferencia entre dos formas de energía, en este caso, cinética y potencial.
2. Aplicar el Principio de Acción Mínima: Este principio establece que el camino que sigue un sistema físico minimiza la acción, que es la integral sobre el tiempo, de la diferencia entre las dos formas de energía.

3. Derivar la Ecuación de Euler−Lagrange: A partir del principio de acción mínima, se puede derivar una relación diferencial para el camino que minimiza la acción. Esta ecuación es la ecuación de Euler−Lagrange.
4. Resolver la Ecuación de Euler−Lagrange: Las soluciones a esta ecuación describen el comportamiento dinámico del sistema físico.

Para el caso del AERO de Quanser, el proceso completo para llegar al modelo del sistema por el método de Euler−Lagrange se encuentra expuesto en (3-7), siendo este resultado final el conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se presenta a continuación

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta = \tau_\theta, \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \tau_\psi, \end{aligned} \tag{2-9}$$

Donde m es la masa total del sistema que se puede mover, l_{mc} es la distancia sobre el eje x a la cual se encuentra el centro de masa respecto al punto de giro, J_{eq-p} representa la inercia total al rededor del eje y y J_{eq-y} representa la inercia total al rededor del eje z.

El modelo (2-9) presenta diversas variaciones, de acuerdo a cómo se decidan considerar los torques que generan los motores al rededor de los ejes y y z. Una primera variación se obtendría considerando las definiciones en (2-2) y (2-3), que resultaría en

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta = r_p\,F_p, = K_{pp}V_p + K_{py}V_y, \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = r_y\,F_y, = K_{py}V_p + K_{yy}V_y. \end{aligned} \tag{2-10}$$

A continuación presentaremos otras variaciones, considerando fricción viscosa y torque cuadrátrico.

Torque lineal y fricción viscosa

En [8] se definen los torques aplicados sobre el sistema considerando la fricción, como hicimos en el modelo lineal. Por lo que dichos torques se podrían escribir como

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}, \tag{2-11}$$

y

$$\tau_\psi = K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}, \tag{2-12}$$

que al remplazarlos en modelo presentado en (2-9) resulta en

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta &= K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}, \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta &= K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Torque cuadratico y friccion viscosa

En [9] se realiza un enfoque diferente para torque generado, modelándolo partiendo de la velocidad angular del motor y además considerando la dinámica del motor significativamente más rápida que la de la planta. Por lo que la relación entre velocidad angular del motor y el voltaje aplicado es modelada con una ecuación lineal de la forma $w = K_w V$, donde K_w sería la constante que relaciona el voltaje aplicado con la velocidad angular del motor en estado estacionario. Además, esta aproximación considera el hecho ampliamente aceptado de que la fuerza de empuje depende directamente del cuadrado de la velocidad de giro de la hélice. Si a ese hecho, le sumamos el efecto de la fricción, podemos modelar los torques aplicados como

$$\tau_\theta = K'_{pp}\omega_p^2 + K'_{py}\omega_y^2 - D_p\dot{\theta}, \tag{2-14}$$

y

$$\tau_\psi = K'_{yp}\omega_p^2 + K'_{yy}\omega_y^2 - D_y\dot{\psi}, \tag{2-15}$$

donde K'_{pp}, K'_{py}, K'_{yp} y K'_{yy} representan las constantes asociadas a la generación de torques por los motores en cada eje. Al remplazar las nuevas definiciones de torques en el modelo presentado en (2-9) resulta en

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta &= K'_{pp}\omega_p^2 + K'_{py}\omega_y^2 - D_p\dot{\theta}, \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta &= K'_{yp}\omega_p^2 + K'_{yy}\omega_y^2 - D_y\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{2-16}$$

Perturbaciones o variaciones en la planta

Debido al papel que juegan las perturbaciones, en [10] se aprecia un enfoque considerando una posible inclinación del motor de la cola ϕ grados respecto al eje x, considerando la definición de torques como

$$\begin{bmatrix}\tau_\theta\\ \tau_\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}K_{pp} & K_{py}\sin(\phi) + K_{pv}\cos(\phi)\\ K_{vp} & K_{vy}\cos(\phi) + K_{vv}\sin(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_p\\ V_y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}D_p\dot{\theta}\\ D_y\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

Ajuste torques cruzados

Al analizar los resultados en algunos experimentos se encuentra que las ganancias de los voltajes de entrada solo son válidas en un rango pequeño, debido a esto [4] toman dos consideraciones. Primero en su montaje se tiene un desplazamiento del centro de masa en el eje z representado por h, por lo cual la matriz de transformación homogénea que se debe considerar para incluir los desplazamientos del centro de gravedad debe incluir el desplazamiento en z, como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & l_{mc}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Utilizando dicha $\mathbf{T}$, las ecuaciones de movimiento se modifican un poco, incluyendo el parámetro h

$$(J_{eq-p} + m(l_{mc}^2 + h^2))\ddot{\theta} + m\left[\frac{\sin(2\theta)(l_{mc}^2 - h^2)}{2}\right] - l_{mc}h\cos(2\theta)]\dot{\psi}^2 + \\ + mg(l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta) + D_p\dot{\theta} = \tau_\theta$$

$$[J_{eq-y} + m(\cos^2\theta(l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h\sin 2\theta + h^2)]\ddot{\psi} + \\ + m[\sin 2\theta(h^2 l_{mc}^2) + 2l_{mc}h\cos 2\theta]\dot{\psi}\dot{\theta} + D_y\dot{\psi} = \tau_\psi$$

Adicionalmente en [4], también se propone una definición diferente para los torques, como

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + F_{cpp} + K_{py}V_y + F_{cpy},$$

$$\tau_\psi = (K_{yp}V_p + F_{cyp})\cos\theta + (K_{yy}V_y + F_{cyy})\cos\theta,$$

donde se incluyen los términos F_{cpp} ,F_{cpy}, F_{cyp} y F_{cyy}, que son encontrados experimentalmente y representan la fuerza de Coulomb, que en este caso se relaciona con el voltaje necesario para iniciar el movimiento. También en el torque para ψ se incluye un término que relaciona la posición de θ.

Modelo Completo

En los anteriores modelos únicamente ha variado la forma como se define el torque. Sin embargo, en [11] y en [12] se realiza un análisis más detallado de los componentes del sistema. Inicialmente, se realiza una definición de las fuerzas que actúan sobre el fuselaje, planteando la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional al rededor del eje y como

$$I\,\ddot{\theta} = \tau_\theta - T_{f\theta} - T_g + T_{\dot{\phi}} - T_G, \tag{2-17}$$

donde $T_{f\theta}$ representa la friccion de Coulomb y viscosa, T_g representa el torque generado por la gravedad, $T_{\dot{\phi}}$ representa el torque generado por la fuerza centrífuga y T_G representa el efecto giroscopio. La fricción viscosa está dada por Dp y C_θ representa la fricción seca o fricción de Coulomb.

$$T_{f\theta} = D_p\,\dot{\theta} + C_\theta\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}),$$

El torque que genera la gravedad está dado por

$$T_g = m\,g\,l\,\sin\theta.$$

El torque generado por la fuerza centrífuga se puede escribir como

$$T_{\dot{\phi}} = \dot{\psi}^2\,\frac{1}{2}\,m\,l^2\,\sin 2\theta.$$

El efecto giroscopio se puede expresar como

$$T_G = K_{G\dot{\phi}\omega_m}\cos\theta.$$

Por lo que al despejar τ_θ de (2-17) y reemplazar las expresiones para los distintos torques, tendríamos

$$\tau_\theta = I\,\ddot{\theta} + D_p\dot{\theta} + C_\theta\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}) + m\,g\,l\,\sin\theta - \dot{\psi}^2\,\frac{1}{2}\,m\,l^2\,\sin 2\theta - K_{G\dot{\phi}\omega_m}\cos\theta. \tag{2-18}$$

Ahora, planteando la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional al rededor del eje z como

$$I\,\ddot{\psi} = \tau_\psi - T_{f\psi} - T_R \tag{2-19}$$

De forma similar al caso de pitch, el coeficiente de la fricción viscosa sobre yaw se define como D_y, el coeficiente de la fricción seca como C_ψ, y la expresión se define respecto a ψ. como

$$T_{f\psi} = D_y\,\dot{\psi} + C_\psi\,\mathrm{sign}(\psi).$$

El torque generado por el movimiento cruzado se puede expresar como

$$T_R = \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,m\,l^2\,\sin\theta\,\cos\theta$$

Al despejar (2-17) y remplazar cada uno de los torques se llega a

$$\tau_\psi = I\,\ddot{\psi} + D_y\,\dot{\psi} + C_\psi\,\mathrm{sign}(\dot{\psi}) + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,m\,l^2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{2-20}$$

Es importante resaltar que hasta este punto solo se ha tratado la dinámica propia del sistema sin fuerzas aplicadas. Los autores de [11], para cada motor, definen el torque aplicado como T_{ir}, donde K_{ai} es la constante del motor de pitch o yaw respecto a cada movimiento, ω_i es la velocidad angular del motor

$$T_{ir} = K_{ai}\omega_r^2\,\mathrm{sign}(\omega_r). \tag{2-21}$$

Al añadir términos similares a (2-21), relacionados con el efecto de cada motor en cada movimiento, en las ecuaciones de los movimientos al rededor de los ejes y y z definidos en (2-18) y (2-20), se llega a

$$\tau_\theta = I\,\ddot{\psi} + D_y\,\dot{\psi} + C_\psi\,\mathrm{sign}(\dot{\psi}) + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,m\,l^2\,\sin\theta\,\cos\theta + K_{pp}\,\omega_p^2\,\mathrm{sign}(\omega_p) + K_{yp}\,\omega_y^2\,\mathrm{sign}(\omega_y)$$

$$\begin{aligned}\tau_\psi = I\,\ddot{\theta} + D_p\,\dot{\theta} + C_\theta\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}) + m\,g\,l\,\sin\theta - \dot{\psi}^2\,\tfrac{1}{2}\,m\,l^2\,\sin 2\theta - K_{G\dot{\phi}\omega_y}\cos\theta + \\ + K_{yy}\,\omega_y^2\,\mathrm{sign}(\omega_y) + K_{py}\,\omega_p^2\,\mathrm{sign}(\omega_p)\end{aligned} \tag{2-22}$$

Modelo por Euler−Newton

En los modelos anteriores se aprecia cómo se usa el resultado de Euler−Lagrange y posteriormente se analizan las diferentes posibilidades de definir los torques. Por

su parte, en [13] se usa la ecuación de Euler−Newton para posteriormente hallar de forma práctica las funciones que definen los torques cruzados, amortiguamiento, inercia y fuerza centrifuga. Este modelo se detalla a continuación.

Para el movimiento de pitch, se define el momento generado por los motores, es definido como una función cuadrática de la forma

$$F_p(V_p) = C_{1p}\, V_p^2 + C_{2p}\, V_p - C_{2p},$$

donde C_{ip} representan los coeficientes de la función cuadrática de V_p.

El torque cruzado es definido como

$$M_{py}V1 = F_p(V_y) = C_{1py}\, V_y^2 \pm C_{2py}\, V_y \mp C_{3py},$$

donde C_{ipy} representan los coeficientes de la función cuadrática de V_p. Para V_p positivo, se consideran los signos de la parte de arriba, si V_p es negativo, se toman los signos de la parte de abajo, de forma que se refleje la función en ambos ejes.

La fricción de Coulomb es representada con la convención tradicional, donde se tiene un coeficiente, siendo en este caso M_{rp}, acompañado de la función signo de la velocidad. Adicionalmente, se tiene el término ΣM_p, que es la suma de los momentos que actúan sobre el eje de pitch

$$M_{rp}\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}_p)\,\Sigma M_p.$$

La fricción viscosa es representada como una función que depende de la velocidad de forma proporcional, así

$$M_{Dp}(\dot{\theta}_p) = C_6\,\dot{\theta}_p,$$

donde C_6 representa la mencionada constate de proporcionalidad.

Finalmente, la fuerza centrífuga es representada como una función que depende de la velocidad en yaw y de la posición en pitch

$$(M_s(|\dot{\theta}_y|, \theta_p) = C_7 \dot{\theta}_y^2 \sin\theta_p \cos\theta_p,$$

donde C_7 es un valor constate.

Para el movimiento de yaw, se define el momento generado por los motores, es definido de la misma forma que en pitch como una función cuadrática

$$F_y(V) = C1V^2 + C_2V - C3$$

De manera similar se representa el torque cruzado

$$M_{yp}V1 = F_y(V) = C1V^2 + C_2V - C3$$

Para la fricción de Coulomb se mantiene la representación

$$(M_{ry}(\operatorname{sign}(\dot{\theta}_y), \Sigma M_y)$$

La fricción viscosa es representada como una función que depende de la velocidad; sin embargo, para este caso es una función cuadrática:

$$MD_y(\dot{\theta}_y) = C_4\dot{\theta}_y^2 + C_5\dot{\theta}_y$$

Al remplazar los componentes presentados, se llega a las siguientes ecuaciones

$$J_p\ddot{\theta}_p = F_p(V_0)D + M_{py}(V_1) - M_{rp}(\operatorname{sign}(\theta_p)\Sigma M_p) - M_{Dp}(\theta_p) - mg\ \operatorname{sign}\theta_p - M_s(|\dot{\theta}_y|, \theta_p)$$

$$J_y(\theta_p)(\ddot{\psi}_y) = F_y(V_1)\cos\theta_p D - M_{yp}(V_0)\cos\theta_p - M_{ry}(\operatorname{sign}(\dot{\theta}_v), \Sigma M_y) - MD_v(\dot{\theta}_y)$$

En la tabla **2-1** se presenta una síntesis de las componentes usadas

Tabla 2-1: funciones usadas.

	Pitch	**Yaw**
Inercia y aceleración sobre los ejes	$J_\phi\ddot{\theta}_p$	$J_y(\theta_p)\ddot{\theta}_y$
Momento generado por los motores	$F_p(V_0)D$	$F_y(V_1)\cos\theta_p, D$
Torques cruzado	$M_{py}(V_1)$	$M_{yp}(V_0)\cos\theta_p$
Friccione de Coulomb	$M_{rp}(\operatorname{sign}(\dot{\theta}_p)\Sigma M_p)$	$M_{ry}(\operatorname{sign}(\dot{\theta}_y), \Sigma M_y)$
Fricción viscosa	$MD_p(\dot{\theta}_p)$	$MD_y(\dot{\theta}_y)$
Gravedad	$m_g g\sin\theta_p$	-
Fuerza centrifuga	$M_s(\|\dot{\theta}y\|, \theta_p)$	-

2.2. Control sin modelo

Una alternativa para realizar el control sin modelo se tiene en [14] donde se utiliza un algoritmo robusto de aprendizaje simple; donde se usa el concepto de descenso del gradiente para minimizar la función de costo que en este caso es el error de posición de lazo cerrado. La razón para implementar este control y no uno que se base en el modelo es la incertidumbre sobre algunos parámetros físicos, así como las perturbaciones.

Vale la pena destacar que si bien no era necesario, para mejorar el desempeño del algoritmo, los autores partieron de los parámetros que conocían del sistema, reduciendo el espacio de búsqueda y evitando algunos mínimos locales.

Otras alternativas como [2] realizan un mayor énfasis en las incertidumbres del modelo tradicional y las no linealidades, por lo que usan μ síntesis junto con H infinito como herramientas del control óptimo ; el diagrama de este controlador se encuentra en **2-3**.

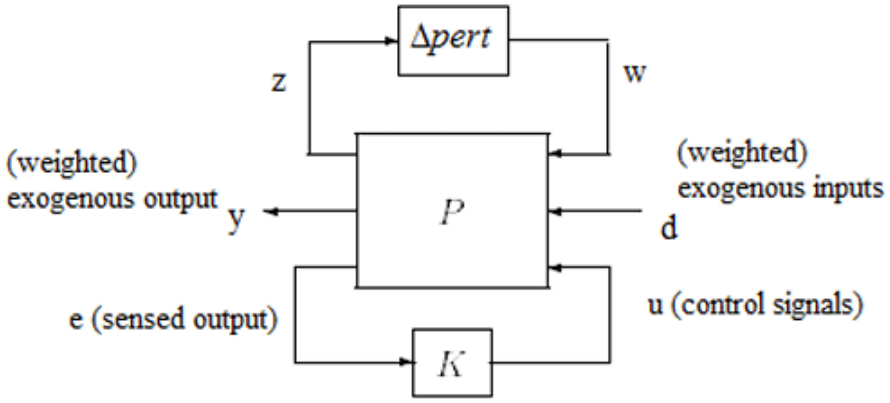


Figura 2-3: Lógica controlador H infinito, tomado de [2].

Donde se tiene el modelo de la planta (p) pero con la incertidumbre de algunos parámetros que son añadidas por $\Delta pert$,K es el controlador.

Es importante notar que ninguno de los modelos tratados ha tenido en cuenta efectos como la saturación de las entradas y los límites físicos de las salidas, por eso en este trabajo [7] se busca unificar estos efectos más las perturbaciones,

asegurando la estabilidad en lazo cerrado haciendo uso de un control neuronal adaptativo. El control usado tiene las siguientes características:

- Red neuronal de función de base radial (RBFNN)esta se utiliza para estimar las incertidumbres del sistema. Se elige por su capacidad de aproximación general en conjuntos compactos, lo que lo hace adecuado para sistemas no lineales inciertos.
- Parámetro auxiliar adaptativo para compensar la perturbación compuesta, que incluye error de saturación y perturbaciones externas. Este parámetro ayuda a mantener la estabilidad del sistema a pesar de estas perturbaciones.
- Función de barrera asimétrica de Lyapunov (BLF); se emplea para evitar la violación de restricciones de la salida del sistema. El uso de BLF garantiza que la salida del sistema permanezca dentro de una región que varía en el tiempo, abordando el problema de las restricciones de salida que varían en el tiempo.

Posteriormente, los mismos autores proponen en [15] otra estrategia enfocada en los parámetros de los actuadores y a un fenómeno denominado "dirección de control desconocida", en el cual no se tiene pleno conocimiento del signo de la referencia esto puede suceder debido a dinámicas complejas o a inquietudes en los parámetros. Las características principales del control usado son:

- La estrategia de control utiliza una red neuronal de base radial (RBFNN) para aproximar las funciones inciertas dentro del sistema del helicóptero.
- Para abordar el problema de la dirección de control desconocida, se emplea una clase de funciones de Nussbaum en el diseño de control. La función de Nussbaum se utiliza para manejar situaciones donde se desconoce el signo del coeficiente de control, asegurando estabilidad y robustez ante esta incertidumbre.
- Parámetro adaptativo para compensación de fallas del actuador; al adaptar la estrategia de control en función de las fallas detectadas, el sistema puede mantener la estabilidad y el rendimiento incluso en presencia de fallas del actuador.

También se han aplicado algunos métodos híbridos como el expuesto en [6] el cual se basa en un controlador PID-AFC-IL (Proportional Integral Derivative - Active Force Control - Iterative Learning). El contro AFC es una estrategia de control robusto que funciona basándose en la segunda ley del movimiento de Newton y tiene como objetivo expulsar perturbaciones conocidas o desconocidas de un sistema, garantizando al mismo tiempo la estabilidad. En este contexto, se utiliza

para rechazar perturbaciones externas que afectan al sistema del helicóptero de doble rotor.

Por otro lado, el Aprendizaje iterativo (IL) mejora el rendimiento de los sistemas de control aprendiendo de iteraciones pasadas y mejorando la entrada de control en consecuencia. En este esquema, IL se utiliza para estimar automáticamente la inercia de la dinámica del sistema en línea, mejorando la efectividad de la estrategia AFC. Este artículo es valioso, pues demuestra primero la posibilidad de integrar múltiples técnicas de control, así como su efecto sobre las perturbaciones. No solamente desde una perspectiva teórica, sino con una implementación y validación.

Capítulo 3

Modelización

En este trabajo se seleccionó el modelo que integra la metodología Euler−Lagrange, pues su desarrollo es claro, integra la mayoría de las fuerzas que afectan la dinámica del sistema y además es el más utilizado no solo con helicópteros de 2DOF pero particularmente con el modelo de Quanser.

3.1. Modelo No Lineal

Para el desarrollo del modelos no lineales es necesario seguir las directrices dadas anteriormente y realizar el análisis de la planta a partir del método Euler Lagrange, para esto se partió del procedimiento descrito en [4].

Para realizar la identificación es necesario calcular la energía cinética y potencial del sistema, para esto es necesario conocer la posición del sistema; sin embargo, se debe primero usar matrices de transformación que representan la posición y orientación del cuerpo.

Sistema de coordenadas

En primer lugar, a parir de la observación de la planta, se infiere que el centro de masa del sistema se encuentra desplazado únicamente en x es decir, a lo largo del eje sobre el que se soportan los 2 motores, por eso se propone la siguiente matriz de traslación.

$$T_{trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En seguida, se utilizan las matrices de rotación convencionales para llegar a la matriz de transformación completa

$$\mathbf{T_0^2} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Simplificando

$$\mathbf{T_0^2} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi - \cos\psi\cos\theta & 0 & l_{mc}\cos\psi\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\psi & \cos\psi + \sin\theta\sin\theta & 0 & -l_{mc}\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & l_{mc}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo el siguiente sistema de coordenadas para la posición cartesiana de la masa, que corresponde a la última columna de la matriz de transformación completa

$$\mathbf{D_c} = \begin{bmatrix} l_{mc}\cos\psi\cos\theta \\ -l_{mc}\cos\theta\sin\psi \\ l_{mc}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

Para llegar a la velocidad cartesiana se aplican las derivadas parciales a la posición con respecto a θ y ψ.

$$V_c = \frac{\partial \mathbf{D_c}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D_c}}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi - l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi \\ -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi + l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi \\ l_{mc}\dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

Cálculo de la energía cinética y potencial

Para la energía potencial se parte de su definición y el vector de posición (3-1):

$$U = mg^T D_c$$

En este caso es necesario expresarla en forma vectorial

$$U = m \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{mc}\cos\psi\cos\theta \\ -l_{mc}\cos\theta\sin\psi \\ l_{mc}\sin\theta \end{bmatrix} = mgl_{mc}\sin\theta \tag{3-3}$$

En el caso de la energía cinética primero se halla el componente relacionado con el vector de velocidad (3-2)

$$K = \frac{1}{2}m||V_c||^2$$

$$||V_c||^2 = V_c^T V_c$$

Al remplazar se obtiene el vector de la norma al cuadrado de la velocidad.

$$= \begin{bmatrix} -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi - l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi \\ -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi + l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi \\ l_{mc}\dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi - l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi \\ -l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi + l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi \\ l_{mc}\dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$||V_c||^2 = [l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi - l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi]^2[-l_{mc}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi + l_{mc}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi]^2$$
$$[l_{mc}\dot{\theta}\cos\theta]^2$$

$$||V_c||^2 = l_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta)$$

Tomado la definición de energía cinética, se agrega las componentes de la inercia.

$$K = \frac{1}{2}ml_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta)$$

$$K = \frac{1}{2}ml_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}J_{eq-p}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq-y}\dot{\psi}^2 \tag{3-4}$$

Teniendo la energía cinética (3-4) y potencial (3-3) del sistema se calcula el operador de Lagrange

$$\mathcal{L} = K - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l_{mc}^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) + \frac{1}{2} J_{eq-p} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{eq-y} \dot{\psi}^2 - m g l_{mc} \sin\theta$$

Este se simplifica para facilidad en los siguientes procesos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l_{mc}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l_{mc}^2 \dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} J_{eq-p} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{eq-y} \dot{\psi}^2 - m g l_{mc} \sin\theta \qquad (3\text{-}5)$$

A partir de la definición de las ecuaciones de movimiento de Euler−Lagrange, se buscan sus componentes.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \tau$$

En primer lugar, se trabaja con R que hace referencia a la disipación o pérdida de energía, que en esta planta corresponden a los coeficientes de fricción viscosa D_p y D_y

$$R = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} = \frac{1}{2}(D_p \theta + D_y \psi)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} D_p \dot{\theta} \\ D_y \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Ahora se desarrolla las derivadas del lagrangiano con respecto a las coordenadas generalizadas (θ y ψ).

Desarrollando para θ, tenemos la derivada parcial del lagrangiano respecto a $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m l_{mc}^2)\dot{\theta} + J_{eq-p}\dot{\theta},$$

y su derivada respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m l_{mc}^2)\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta}.$$

Así como la derivada parcial del lagrangiano respecto a θ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m l_{mc}^2 \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta - m g l_{cm} \cos\theta.$$

Al operar los componentes del lagrangiano se llega a la expresión de θ

$$m l_{mc}^2 \ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + m l_{mc}^2 \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + m g l_{mc} \cos\theta = \tau_\theta$$

Desarrollando para ψ, tenemos la derivada parcial del lagrangiano respecto a $\dot{\psi}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = (m l_{mc}^2)\dot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\dot{\psi},$$

y su derivada respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = (ml_{mc}^2)\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2(ml_{mc}^2)\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta.$$

Dado que la expresión no contiene a ψ, la derivada parcial del lagrangiano respecto a ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0.$$

Al operar los componentes del lagrangiano se llega a la expresión de ψ

$$(ml_{mc}^2)\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2(ml_{mc}^2)\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \tau_\psi$$

Generando el siguiente modelo

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta &= \tau_\theta \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta &= \tau_\psi \end{aligned} \tag{3-6}$$

Ahora es necesario incluir las fuerzas que actúan sobre el sistema, siendo para este caso el aporte de cada motor y los componentes de la disipación.

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta &= K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta} \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta &= K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi} \end{aligned} \tag{3-7}$$

3.2. Modelo lineal - Linealización

3.2.1. Consideraciones iniciales

Partiendo del modelo encontrado(3-7) se plantea una representación en un espacio de estados.

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta} - ml_{mc}\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\psi}^2 - mgl_{mc}^2\cos(\theta)}{ml_{mc}^2 + J_{eq-p}} \tag{3-8}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{K_{yp}V_p + K_{yy}V_y - D_y\ \dot{\psi} + 2ml_{mc}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}}{ml_{mc}^2\cos(\theta)^2 + J_{eq-y}} \tag{3-9}$$

Antes de realizar la linealización se define el vector de estados

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\psi} = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta},$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\psi},$$

por lo que el vector de estados se podrá escribir como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T.$$

Adicionalmente, se definen las entradas del sistema, recalcando que V_p es el voltaje aplicado al motor de pitch (motor principal) y V_y al motor de yaw (motor de cola)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_p & V_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}.$$

3.2.2. Puntos de equilibrio

Para encontrar un punto de equilibrio se busca cuando la solución del sistema es constante. Por lo tanto, se igualan las ecuaciones de estado (3-9) a 0, teniendo en cuenta que las derivadas presentes también son 0, por lo tanto, los estados deberían tomar la siguiente forma:

$$\dot{\bar{x}}_3 = 0$$

$$\dot{\bar{x}}_4 = 0$$

$$K_{pp}\bar{u}_1 + K_{py}\bar{u}_2 - mgl_{mc}^2 \cos(\bar{x}_1) = 0$$

$$K_{yp}\bar{u}_1 + K_{yy}\bar{u}_2 = 0$$

Al despejar $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ se llega a:

$$\bar{u}_1 = \frac{K_{py} - K_{yy} + K_{yy} mgl_{cm} \cos \bar{x}_1}{K_{pp}K_{yy} - K_{py}K_{yp}},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{-K_{yp}}{K_{yy}} \bar{u}_1,$$

como se observa los puntos de equilibrio están directamente relacionado con el ángulo de pitch, dependiendo de su valor se tienen los valores de las entradas de equilibrio, sin importar el valor de yaw que tenga el sistema.

3.2.3. Linealización

Para la linealización se siguió el proceso utilizado en [4], primero es necesario tener el modelo no lineal en variables de estado para conocer las ecuaciones a las que se le aplican las derivadas parciales. Por lo que el modelo en variables de estado se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 = f_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\
\dot{x}_2 &= x_4 = f_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\
\dot{x}_3 &= \frac{-K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p x_3 - ml_{mc}\sin(x_1)\cos(x_1)x_4^2 - mgl_{mc}^2\cos(x_1)}{ml_{mc}^2 + J_{eq-p}} = f_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\
\dot{x}_4 &= \frac{K_{yp}V_p + K_{yy}V_y - D_y\ x_4 + 2ml_{mc}^2\sin(x_1)\cos(x_1)x_3\,x_4}{ml_{mc}^2\cos(x_1)^2 + J_{eq-y}} = f_4(\mathbf{x},\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{3-10}$$

Obteniendo un modelo parametrizado por $\bar{x}_1$ y las demás componentes de la planta, a esto se le asigna q

$$\dot{X} = A(q)x + B(q)u$$

donde

$$\tilde{X} = x - \bar{x} \quad ; \quad \tilde{U} = u - \bar{u}$$

y

$$A(q) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad ; \quad B(q) = \frac{\partial f(x)}{\partial u}$$

con

$$\mathbf{A(q)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B(q)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

Resultando en

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{mgl_{cm}\sin\bar{x}_1}{J_{eq-p}+ml_{cm}^2} & 0 & \dfrac{-D_p}{J_{eq-p}+ml_{cm}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-D_y}{J_{eq-y}+ml_{cm}^2\cos^2\bar{x}_1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{K_{pp}}{J_{eq-p}+ml_{cm}^2} & \dfrac{K_{py}}{J_{eq-p}+ml_{cm}^2} \\ \dfrac{K_{yp}}{J_{eq-y}+ml_{cm}^2\cos^2\bar{x}_1} & \dfrac{K_{yy}}{J_{eq-y}+ml_{cm}^2\cos^2\bar{x}_1} \end{bmatrix}, \tag{3-11}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar la matriz de funciones de transferencia del sistema a partir del modelo en variables de estados se utiliza

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{C}((s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})] + \mathbf{D}.$$

Lo anterior genera una matriz 2×2 de la forma

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{K_{pp}}{ml_{cm}g\sin(x_1)+s\left(D_p+s\left(ml_{cm}^2+J_{eq-p}\right)\right)} & \dfrac{Kpy}{ml_{cm}g\sin(x_1)+s\left(D_p+s\left(ml_{cm}^2+J_{eq-p}\right)\right)} \\ \dfrac{K_{yp}}{s\left(D_y+s\left(ml_{cm}^2\cos^2(x_1)+J_{eq-y}\right)\right)} & \dfrac{K_{yy}}{s\left(D_y+s\left(ml_{cm}^2\cos^2(x_1)+J_{eq-y}\right)\right)} \end{bmatrix}.$$

Al simplificar, podemos escribir la transformada de Laplace de los ángulos de pitch y yaw en función de la transformada de Laplace de los voltajes de los motores como

$$\begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p(s) \\ V_y(s) \end{bmatrix}$$

con

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{(J_{eq-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm}\sin\bar{x}_1}, \tag{3-12}$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{(J_{eq-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm}\sin\bar{x}_1}, \tag{3-13}$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{(J_{eq-y} + ml_{cm}^2(\cos^2\bar{x}_1))s^2 + D_y s}, \tag{3-14}$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{(J_{eq-y} + ml_{cm}^2(\cos^2\bar{x}_1))s^2 + D_y s}. \tag{3-15}$$

3.3. Motor

3.3.1. Modelo Segundo Orden

Para algunos análisis puede resultar valioso, tener presente el comportamiento del motor, por lo tanto, se realizó su análisis.

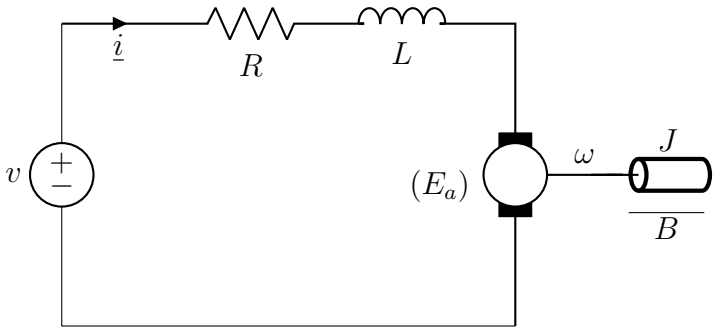


Figura 3-1: Circuito equivalente motor.

Partiendo del circuito equivalente del motor figura **3-1** donde v es la fuente de alimentación, i la corriente; R es la resistencia de armadura; L la inductancia; Ea la fuerza contra electromotriz; J el momento de inercia y B la fricción viscosa; primero se realiza malla del circuito.

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + E_a(t)$$

$$L\frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t) - E_a(t) \tag{3-16}$$

Ahora, al desarrollar la parte mecánica se tiene:

$$T_m(t) = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega(t)$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_m(t) - B\omega(t) \tag{3-17}$$

Es necesario relacionar las dos ecuaciones, por lo que se tomó como hipótesis, que existe una relación proporcional K_a entre el voltaje inducido en la armadura y la velocidad angular del eje del motor.

$$E_a(t) = K_a\omega(t) \tag{3-18}$$

Y la relación electromecánica establece que el torque es proporcional a la corriente eléctrica del motor DC, usando una ganancia K_m.

$$T_m(t) = K_m i(t) \tag{3-19}$$

Después de haber realizado la transformada de lapace a las ecuaciones (3-16) y (3-17), estas se combinan usando (3-18) y (3-19):

$$Ls\frac{T_m(s)}{K_m} = v(s) - R\frac{T_m(s)}{K_m} - K_a\omega(s)$$

$$v(s) = \frac{(R + Ls)T_m(s)}{K_m} + K_a\omega(s)$$

$$Js\omega(s) = T_m(s) - B\omega(s)$$

$$\omega(s) = \frac{T_m(s)}{Js + B}$$

Finalmente, se pueden combinar ambas ecuaciones para obtener una función de transferencia

$$v(s) = \frac{(R + Ls)T_m(s)}{K_m} + K_a\frac{T_m(s)}{Js + B}$$

Se encuentra la función de transferencia que relaciona voltaje con torque.

$$\frac{T_m(s)}{v(s)} = \frac{K_m(Js + B)}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mK_a}$$

Finalmente, se puede pasar a la relación voltaje velocidad angular

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{K_m}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a}$$

Cálculo parámetros individuales:

Cálculo K_a partiendo de la ecuación de malla en estado estacionario:

$$K_a = \frac{E_a}{w(t)} = \frac{v - iR}{w(t)}$$

Momento de inercia

$$J = \frac{t_m K_a K_m}{R}$$

Fricción de coulomb con la ecuación mecánica en estado estacionario.

$$B = \frac{T_m}{\omega(t)} = \frac{K_m i(t)}{\omega(t)}$$

Representación en espacio de estados Ya que en las ecuaciones iniciales (eléctrica y mecánica) se tomaron las variables (i y w) como las razones de cambio o derivadas utilizadas, los estados propuestos son los siguientes:

$$x_1 = \omega$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\omega}$$

$$x_2 = i$$

$$\dot{x}_2 = \dot{i}$$

Al reescribir las ecuaciones diferenciales se llega a:

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_m}{J}x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{K_a}{L}x_1 + \frac{1}{L}v$$

Resultando en

$$A_m = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m}{J} \\ -\frac{K_a}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También es posible llegar a una representación de estados partiendo de la función de transferencia

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{RB + K_m K_a}{LJ} & -\dfrac{RJ + LB}{LJ} \end{bmatrix} B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_m}{LJ} \end{bmatrix} C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En la figura **3-2**, se observa como queda la representación en funciones de transferencia del sistema, teniendo en cuenta la dinámica de los motores.

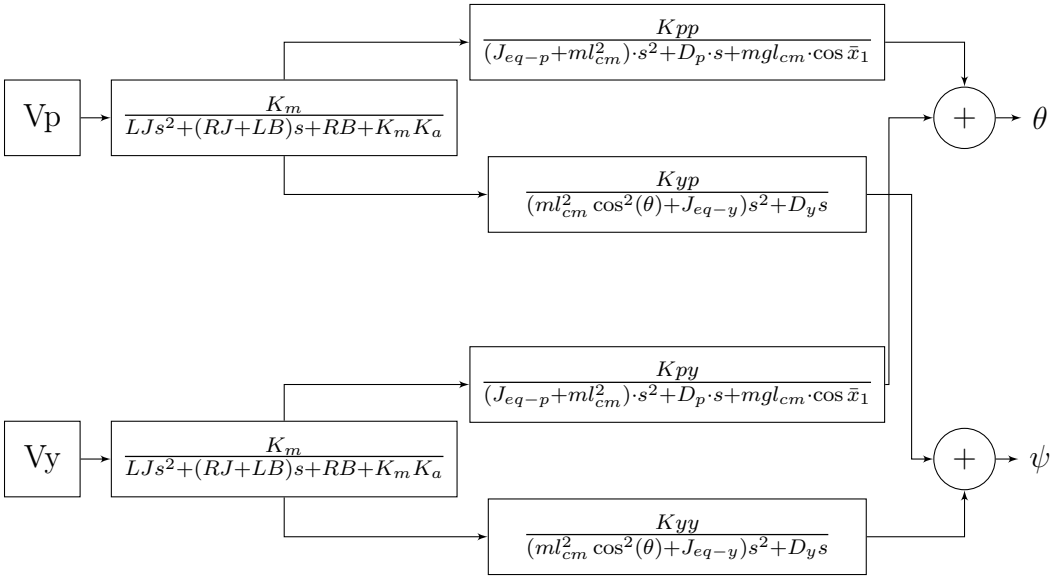


Figura 3-2: Sistema con dinámica de motor.

3.3.2. Modelo de Primer Orden

Ya que en varias ocasiones es necesario un modelo de primer orden, se puede simplificar de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor.

$$v(t) = Ri(t) + E_a(t)$$

$$v(t) = R\frac{T_m(t)}{K_m} + K_a\omega(t)$$

Se realiza la transformada de Laplace y se remplaza

$$v(s) = R\frac{T_m(s)}{K_m} + K_a\frac{T_m(s)}{Js+B}$$

Obteniendo la función de transferencia del torque en función del voltaje

$$\frac{T_m(s)}{v(s)} = \frac{K_m(Js+B)}{R(Js+B)+k_ak_m}$$

Para finalmente expresar la velocidad angular en función del voltaje.

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{K_m}{RJs+RB+K_mK_a}$$

3.4. Modelo Motor-Planta

Para construir el modelo motor planta primero se plantea a los dos motores en espacio de estados, tomando los resultados anteriores, se afirma que los motores particulares no tienen interacciones entre ellos, por los tanto se trata de un sistema MIMO 2x2 desacoplado con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_m}{LJs^2+(RJ+LB)s+RB+K_mK_a} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_m}{LJs^2(RJ+LB)s+RB+K_mK_a} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la representación en diagrama de estados sigue una lógica similar, donde A_m hace referencia al motor individual y A_{mm} al conjunto de motores.

$$A_{mm} = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ 0 & A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{RB+K_mK_a}{LJ} & -\dfrac{RJ+LB}{LJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{RB+K_mK_a}{LJ} & -\dfrac{RJ+LB}{LJ} \end{bmatrix}$$

$$B_{mm} = \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{K_m}{LJ} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{K_m}{LJ} \end{bmatrix} C_{mm} = \begin{bmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{mm} = \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al integrar el desarrollo en la dinámica de la planta se obtiene una nueva matriz de funciones de transferencia.

$$\frac{\Theta(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{pp}K_m}{(ml_{cm}g\sin(\theta) + s\left(D_p + s\left(ml_{cm}^2 + J_{eq-p}\right)\right))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mK_a)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{py}K_m}{(ml_{cm}^2g\sin(\theta) + s\left(D_p + s\left(ml_{cm}^2 + J_{eq-p}\right)\right))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mK_a)}$$

$$\frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{yp}K_m}{(s\left(D_y + s\left(ml_{cm}^2\cos^2(\theta) + J_{eq-y}\right)\right))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mK_a)}$$

$$\frac{\Psi(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{yy}K_m}{(s\left(D_y + s\left(ml_{cm}^2\cos^2(\theta) + J_{eq-y}\right)\right))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mK_a)}$$

Capítulo 4

Protocolo toma de datos

Para realizar la correcta estimación de los parámetros del modelo es necesario contar con datos reales que reflejen el comportamiento del sistema a diversas entradas en la configuración de helicóptero de 2 DOF, para esto se hizo uso de las herramientas dadas por Quanser. Básicamente, se dispone de 3 bloques, uno para enviar la señal de control a los motores y otro para realizar la lectura de los datos, adicionalmente se tiene un bloque para la configuración de hardware y otro para la toma de datos, que se observan en la Figura **4-1**.

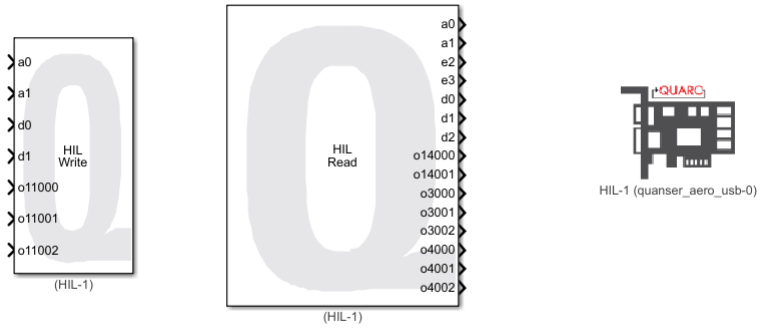


Figura 4-1: Bloques QUANSER AERO.

4.1. Configuración

Hardware

La primera consideración que se debe seguir es el ajuste de las hélices, ya que el modelo dispone de 2 pares, uno de alta y otro de baja eficiencia. En caso de querer cambiar las que se trae por defecto, se debe utilizar una llave hexagonal para soltar el seguro del protector de la hélice. Posteriormente, este se retira tirando hacia arriba. Una vez se tiene expuesta la hélice, esta sé retira haciendo uso de una varilla delgada, insertándola en los orificios de la parte superior y girando en sentido antihorario. Finalmente, se ensamblan las nuevas hélices y se debe verificar la correcta para cada motor usando las referencias.

Ahora, es necesario orientar los motores para la configuración deseada (para nuestro caso, la configuración de helicóptero de 2 DOF). Cada motor tiene una ranura hexagonal, la cual permite ajustar la posición del motor, mostrada en la Figura **4-2**. En este caso, se busca que el motor de pitch esté apuntando de forma perpendicular a la base mientras que el de yaw sea paralelo.



Figura 4-2: Tomado de [1] Ajuste motor.

Antes de realizar alguna prueba se deben retirar los bloqueos de cada eje. Para pitch se tienen 2 seguros en el tenedor que permite el movimiento. Mientras que para yaw únicamente se debe retirar una llave en la parte inferior del tenedor, esto se evidencia en la Figura **4-3**.

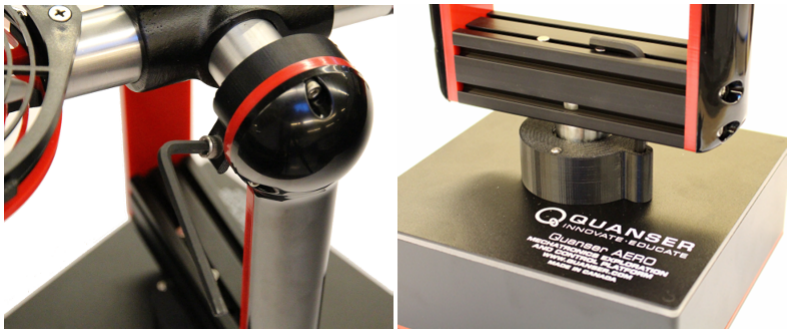


Figura 4-3: Tomado de [1] seguros movimiento.

Software

Para la comunicación con el sistema se usa el software MATLAB, junto con la API de QUARC, de esta forma es posible comunicarse usando SIMULINK. Al crear un nuevo archivo, primero se debe insertar el bloque de comunicación y configurarlo, escogiendo el sistema a utilizar, como se ve en la Figura **4-4**.

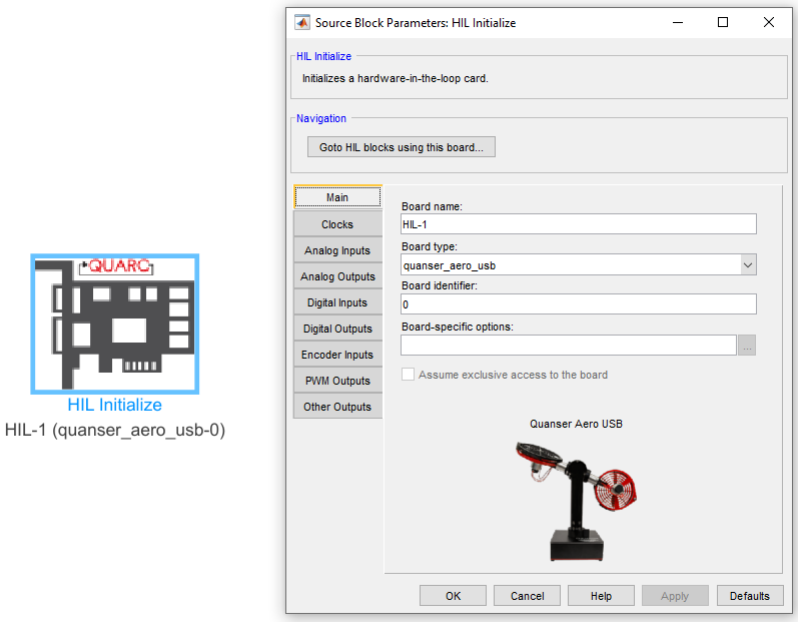


Figura 4-4: Configuración comunicación.

Una vez se verifica el estado en la comunicación, se insertan los bloques de lectura y escritura. En el caso del de lectura, se configuran las variables que se desean leer

en la siguiente ventana y, de ser necesario, se realiza una conversión para llevarlas a la unidad deseada (veáse Figura **4-5**, para mayor claridad).

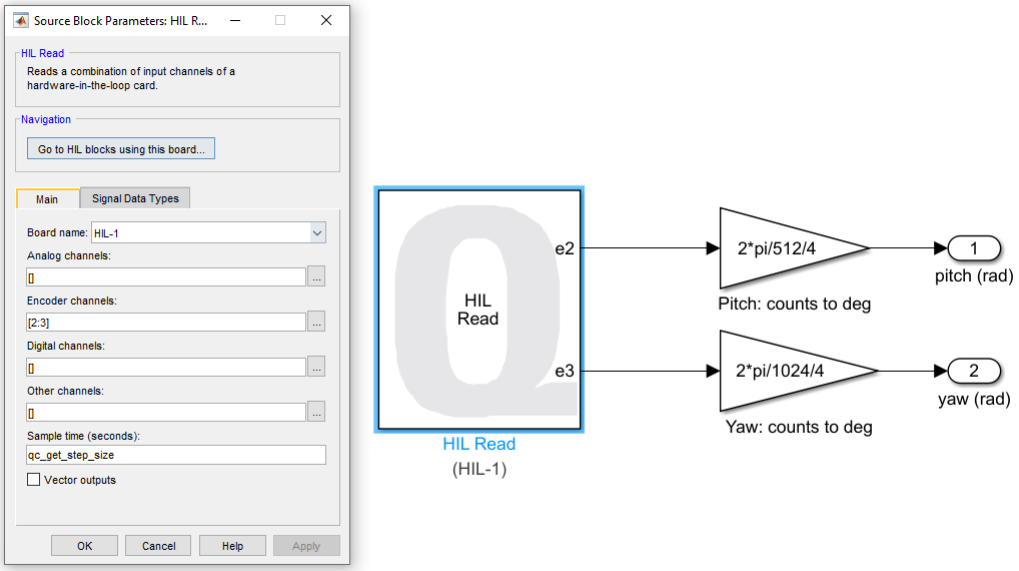


Figura 4-5: Configuración lectura.

Para la escritura la configuración es similar, pero también se agrega un bloque de saturación para asegurarse de que la señal se mantenga en el rango deseado ($\pm 24v$), véase Figura **4-6**.

4.1.1. Toma de datos

Si bien la configuración anterior es la mínima para el funcionamiento del sistema, para llevar a cabo el proceso de identificación de parámetros de los modelos también es necesario guardar los datos. Para esto, se hace uso del bloque "To Host File" dado por el fabricante. En este, se debe seleccionar el nombre del archivo .mat a crear, el nombre de la variable, así como el periodo de muestreo y el formato. Para este caso, los datos se ingresaron al bloque usando un multiplexor, por ende se creó una sola variable con varias columnas y se configuró el periodo de muestreo con -1 (0.002) para que se utilizara el mismo en todo el programa, esto se evidencia en la Figura **4-7**.

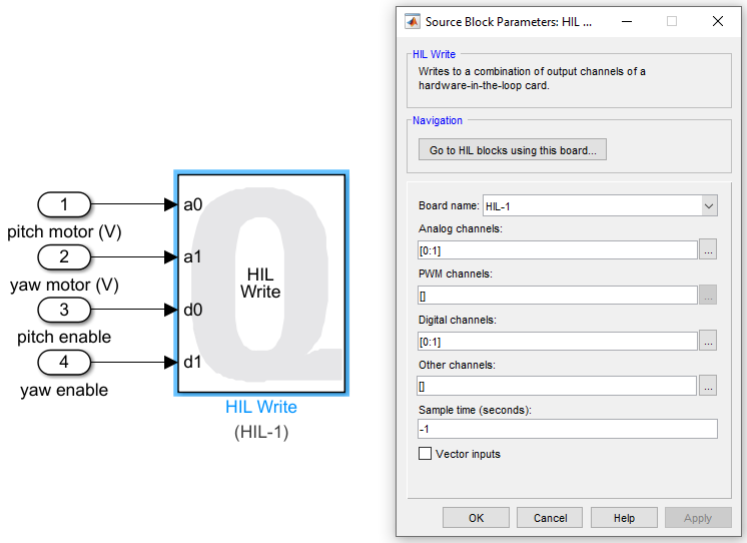


Figura 4-6: Configuración escritura.

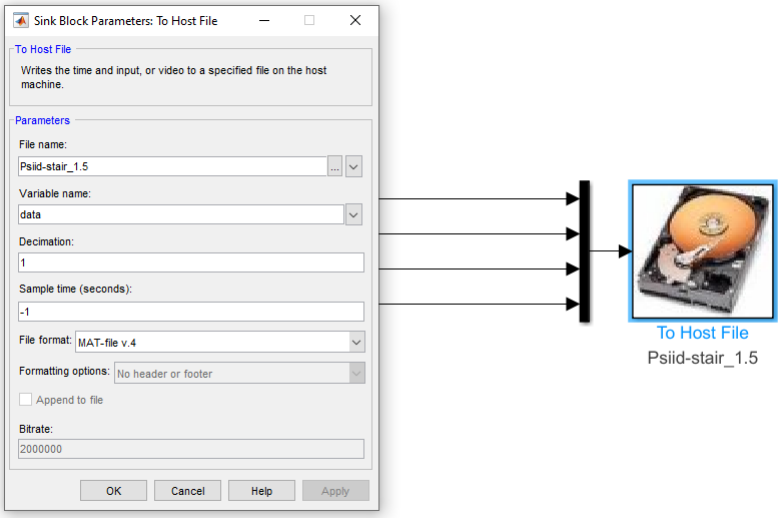


Figura 4-7: Host to file.

Adicionalmente, para la caracterización del motor se hizo uso de los tacómetros y de los sensores de corriente integrados. Su acceso es similar a las otras lecturas, para esto se presenta el bloque completo de lectura junto con los puertos correspondientes, como se observa en la Figura **4-8**.

Las Tablas **4-1** y **4-2** muestran los puertos para los elementos de control y para los elementos sensores cartesianos (velocidad y aceleración).

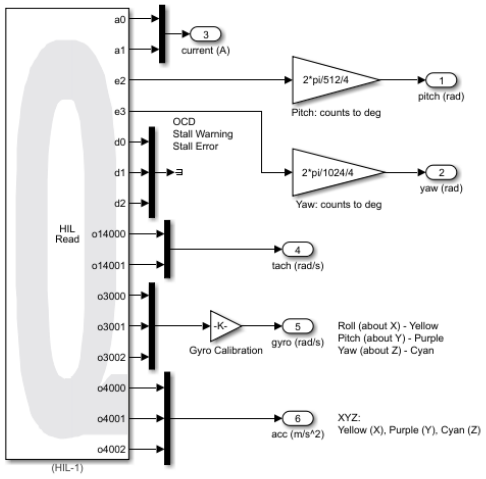


Figura 4-8: Visualización sensores completos.

Tabla 4-1: Puertos, elementos de control.

Elemento	Corriente [A]	Velocidad Motor [rad/s]	Posición Eje [rad]
Pitch	a0	o14000	e2
Yaw	a1	o14001	e3

Tabla 4-2: Puertos elementos cartesianos.

Elemento	Giroscopio [rad/s]	Aceleración [m/s^2]
x	o3000	o4000
y	o3001	o4001
z	o3002	o4002

4.2. Toma de datos

Para la identificación del sistema es necesario tomar datos con diferentes configuraciones. Sin embargo, debido a las características propias del sistema, se busca capturar la dinámica completa, por lo cual se exploraron varias configuraciones y combinaciones. Es importante tener presentes las restricciones del sistema, es decir, la señal que ingresa a los motores está limitada a $\pm 24V$. Para el caso de pitch, se tienen limitaciones físicas de movimiento, por esto se evita que el sistema choque. Adicionalmente, ya que la función de transferencia de yaw tiene un integrador en el origen, aplicar un voltaje suficientemente alto constante causa que el sistema gire sin parar, por lo tanto, se debe tener cautela.

4.2.1. Lazo abierto

La primera toma de datos se realizó en lazo abierto con el siguiente diagrama mostrado en la Figura **4-9**. En este, se aplica directamente una señal de voltaje a cada motor, las pruebas se realizaron con diferentes señales variando frecuencia, forma y amplitud.

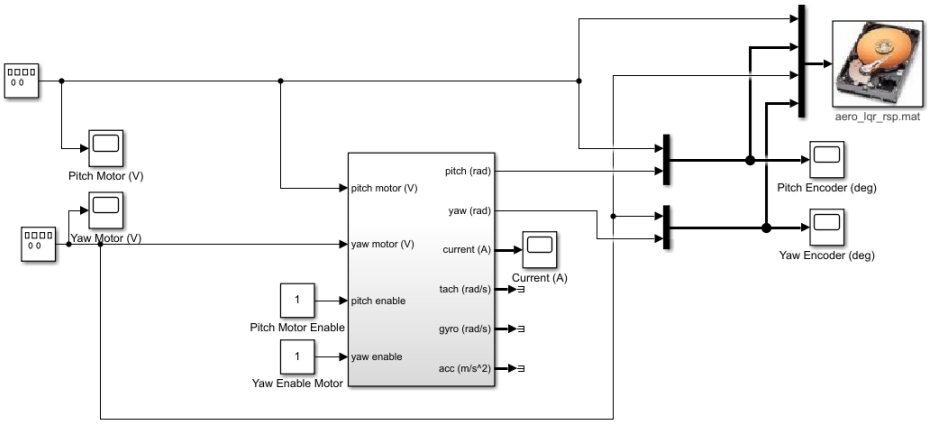


Figura 4-9: Montaje lazo abierto.

Las pruebas iniciales se realizaron fijando $V_y(t)$ a 0 V y dejando $V_p(t)$ como una señal cuadrada. La Figura **4-10** muestra el cambio en $V_p(t)$ de 0 V a 10 V y la Figura **4-11** muestra el cambio en $V_p(t)$ de 0 V a -10 V. En estas pruebas se aprecia el efecto que tiene el motor de pitch sobre el movimiento en yaw, que para el cambio de voltaje no tiene el comportamiento de integrador esperado. Además, se puede apreciar la respuesta de segundo orden del comportamiento del ángulo de pitch, con la variación del motor de pitch.

Al realizar pruebas configurando $V_y(t)$ como una señal cuadrada se encontró que, para valores superiores a los 11 V, el sistema gira permanentemente, generando fuerza sobre pitch llevándolo a 0°, esto se explica a partir del efecto giroscopio presente en (3-7) (véase Figura **4-12**).

Posteriormente, se ajustaron los voltajes para tratar de aislar los efectos de cada motor y seleccionar zonas adecuadas para estudiar los sistemas por separado. Así, manteniendo $V_y(t) = 0$, la Figura **4-13** muestra la respuesta del sistema a cambios en $V_p(t)$ de 8 a 10 V y la Figura **4-14** muestra la respuesta del sistema a cambios en $V_y(t)$ de -8 a -10 V. Por su parte, la Figura **4-15** muestra la respuesta

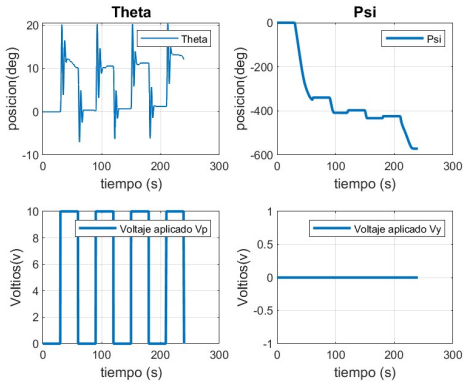


Figura 4-10: $V_y = 0$ y V_p de 0 a 10 V.

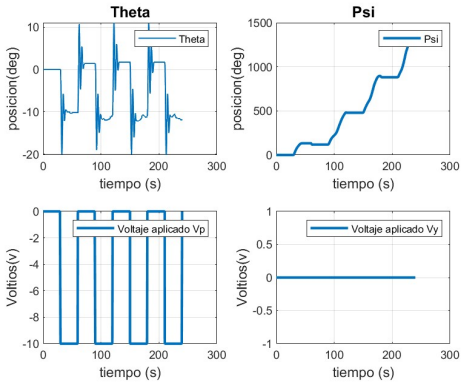


Figura 4-11: $V_y = 0$ y V_p de 0 a -10 V.

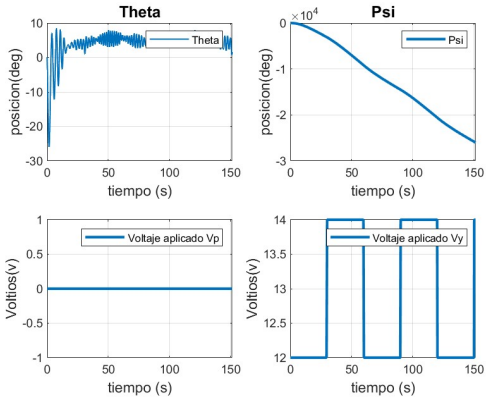


Figura 4-12: $V_p = 0$ y V_y de 12 a 14 V.

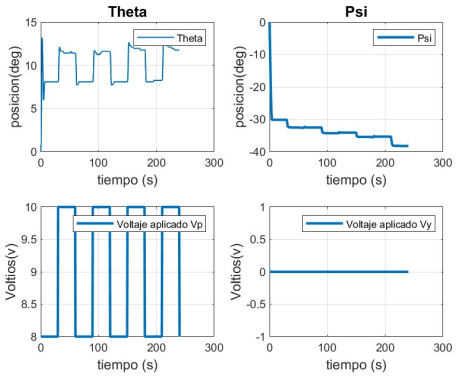


Figura 4-13: $V_y = 0$ y V_p de 8 a 10 V.

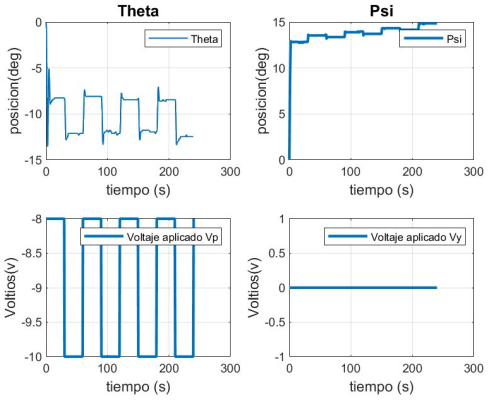


Figura 4-14: $V_y = 0$ y V_p de -8 a -10 V.

del sistema a cambios en $V_y(t)$ de 0 a 10 V, manteniendo $V_p(t) = 0$. Con estos resultados se confirma que es posible establecer zonas donde los efectos cruzados

son descartables. Así como la presencia de una zona muerta, en otras palabras, aun cuando el voltaje de entrada puede variar entre ± 24 hay rangos que no generan movimiento, sí se parte desde el reposo, pues se debe generar una fuerza mínima que debe ejercer el motor para generar movimiento, y además estas no son constantes, sino que dependen de la posición del otro motor y de la condición inicial.

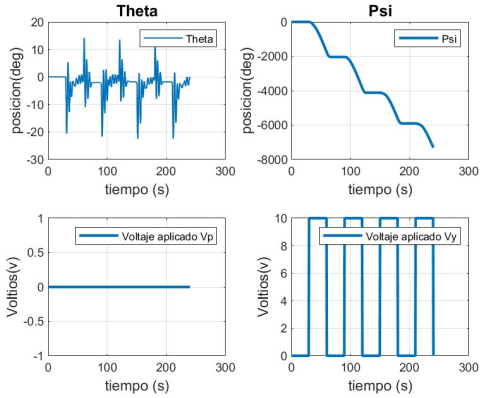


Figura 4-15: $V_p = 0$ y V_y de 0 a 10 V.

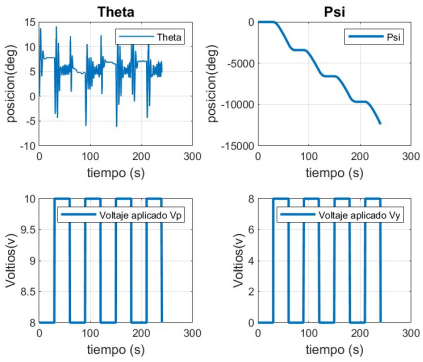


Figura 4-16: V_p de 8 a 10 V y V_y de 0 a 8 V.

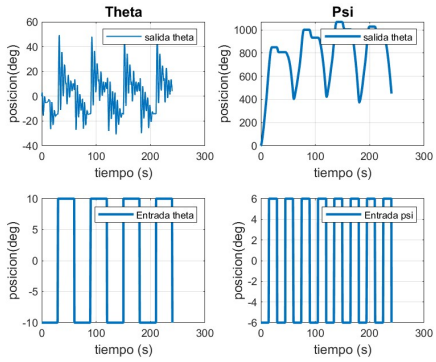


Figura 4-17: V_p de -10 a 10 V y V_y de -6 a 6 V.

Con el objetivo de conocer más a fondo la dinámica del sistema y partiendo de la información recolectada, se realizaron pruebas usando ambos motores, teniendo en cuenta que no se produjeran choques. Así, la Figura **4-16** muestra la respuesta del sistema a cambios en $V_p(t)$ de 8 a 10 V, mientras $V_y(t)$ cambia de 0 a 8 V, y la Figura **4-17** muestra la respuesta del sistema a cambios en $V_p(t)$ de -10 a 10 V, mientras $V_y(t)$ cambia de -6 a 6 V. En la sección A se encuentran otros experimentos realizados aplicando una señal únicamente el motor de pitch.

En el siguiente capítulo se mostrará cómo se utilizarán estos datos para la estimación de parámetros de los modelos del sistema.

4.2.2. Lazo cerrado

Partiendo de los resultados anteriores se decidió cerrar el lazo de control y añadir una ganancia a la señal de error. En la figura **4-18** se ve el montaje general utilizado y en la figura **4-19**, se encuentra la implementación.

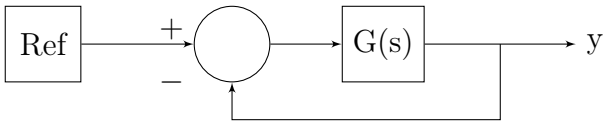


Figura 4-18: Lazo cerrado.

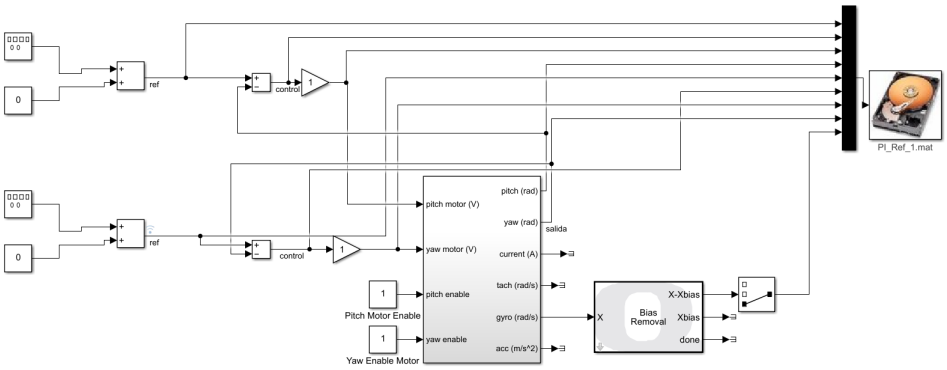


Figura 4-19: Montaje lazo cerrado.

Los resultados de este montaje se utilizaron para la identificación de las funciones de transferencia cuya salida es ψ.

Capítulo 5

Identificación Inicial

En este capítulo se expone el proceso para la identificación de modelos lineales y no lineales, partiendo de los datos ya tomados y reportados en el capítulo anterior. Sin embargo, antes de mostrar cada uno de los procesos, se presenta la metodología y tipos de modelos a los que se busca llegar.

5.1. Parámetros basicos

La primera aproximación se realizó siguiendo la metodología planteada en [1]. En esta, se parte del modelo en funciones de transferencia (2-8) posteriormente se realizan pruebas individuales para hallar cada uno de los coeficientes; sí bien esta estructura no tiene en cuenta las características que se desprenden del modelo no lineal y que se heredan al modelo linealizado escogido (3-15) se ha decidido incluirla, pues es el proceso más usado en la literatura o simplemente se toman los resultados del proceso.

5.1.1. Inercia

Es importante destacar que J_{eq-} hace referencia al momento de inercia equivalente sobre el centro de masa, este hace referencia al eje que se desplaza y a los dos motores, sin embargo, ya que en el movimiento de yaw, gira el yugo, este se agrega.

$$J_{eq-p} = J_{cuerpo_p} + J_p + J_y$$

Para el momento de inercia en pitch se toma J_{cuerpo_p}, como el momento de inercia del cuerpo que se desplaza en ese eje,J_p para referirse al momento de inercia del motor de pitch y J_y para el motor de yaw.

$$J_{eq-y} = J_{cuerp_y} + J_p + J_y + J_{yugo}$$

En el caso de yaw se sigue la misma convención, pero se agrega el momento de inercia del yugo como J_{yugo} pues este también se desplaza.

Siguiendo el procedimiento de [1] los componentes individuales son:

$$J_y = m_{prop} r_{prop}^2$$

$$J_p = m_{prop} r_{prop}^2$$

En este caso se observa que J_y y J_p depende de la masa de los motores (m_{prop}) y el radio de las hélices (r_{prop})

$$J_{cuerpo_p} = \frac{m_{cuerpo_p} L_{cuerpo}^2}{12}$$

$$J_{cuerpo_y} = \frac{m_{cuerpo_y} L_{cuerpo}^2}{12}$$

$$J_{yugo} = \frac{m_{yugo} r_{yugo}^2}{2}$$

De forma similar al calcular los momentos de inercia del cuerpo y del yugo m_{cuerpo} hace referencia a la masa del cuerpo, yL_{cuerpo} a su largo.

En la tabla **5-1**, se encuentran los valores encontrados de forma experimental.

Tabla 5-1: Parámetros inercia.

Parámetro	Descripción	Valor
J_{eqp-p}	Momento de inercia motor pitch	0.0219 Kg/m^2
J_{eqp-y}	Momento de inercia motor yaw	0.0220 Kg/m^2
J_y	Momento de inercia motor yaw	0.0108 Kg/m^2
J_p	Momento de inercia motor pitch	0.0108 Kg/m^2
J_{cuerpo_p}	Momento de inercia equivalente alrededor de pitch	$2.1352{\cdot}10^{-4} Kg/m^2$
J_{cuerpo_y}	Momento de inercia equivalente alrededor de yaw	$2.1352{\cdot}10^{-4} Kg/m^2$
J_{yugo}	Momento de inercia equivalente alrededor del yugo	$1.052 \cdot 10^{-4} Kg/m^2$
m_{prop}	Masa del para motor hélice	0.43 Kg
r_{prop}	Radio del motor	0.1588 m
m_{cuerpo_p}	Masa del cuerpo desplazada en pitch	0.094 Kg
m_{cuerpo_y}	Masa del cuerpo desplazada en yaw	0.094Kg
L_{cuerpo}	Largo del cuerpo	0.1651 m
m_{yugo}	Masa del yugo	0.526 m
r_{yugo}	Radio del yugo	0.02 m

5.1.2. Fricción Viscosa

Pitch

En el momento de identificar los coeficientes D_p y D_y es importante recordar que en la linealización se llegó a una matriz de funciones de transferencia de dimensión 2×2, con 4 funciones de transferencia de segundo orden, por esto se puede expresar la respuesta libre del sistema usando la siguiente ecuación:

$$J_{eq-p}\ddot{\alpha} + D_p\dot{\alpha} + K\alpha = 0$$

En este caso K hace referencia a los posibles valores que puede tomar $mgl_{cm}\sin\bar{\theta}$ Al asumir condiciones iniciales iguales a 0 y realizar la transformada de Laplace se llega a la siguiente función de transferencia:

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_0/J_{eq-p}}{s^2 + D_p/J_{eq-p}s + K/J_{eq-p}}$$

Además, conociendo la forma típica del denominador de una función de transferencia, se llega a la siguiente igualdad.

$$s^2 + D_p/J_{eq-p}s + K/J_{eq-p} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Que permite hallar los siguientes parámetros:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J_{eq-p}} \qquad 2\zeta\omega_n = \frac{D_p}{J_{eq-p}}$$

Ahora se busca expresar ω_n en función de datos que son medibles como lo es el periodo de oscilación T_{osc}.

$$T_{osc} = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

Donde n es el número de oscilaciones

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_{osc}} \qquad \omega_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

En seguida es necesario hallar ζ, es decir, la relación de amortiguación; para esto se utiliza la relación de decremento, expresada en función de la amplitud de las oscilaciones.

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{A_1}{A_2} \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\pi}{\delta}^2}}$$

Toma de datos y estimación

Para poder encontrar la respuesta libre del sistema, se utilizó el montaje en lazo abierto **4-9**, se bloqueó el eje de yaw usando el seguro mostrado en **4-3** y se configuró la entrada para inyectar un impulso de amplitud 20 durante 0.776 s. Lo anterior genero la figura **5-1**, de la cual se extrajeron los resultados condensados en **5-2**.

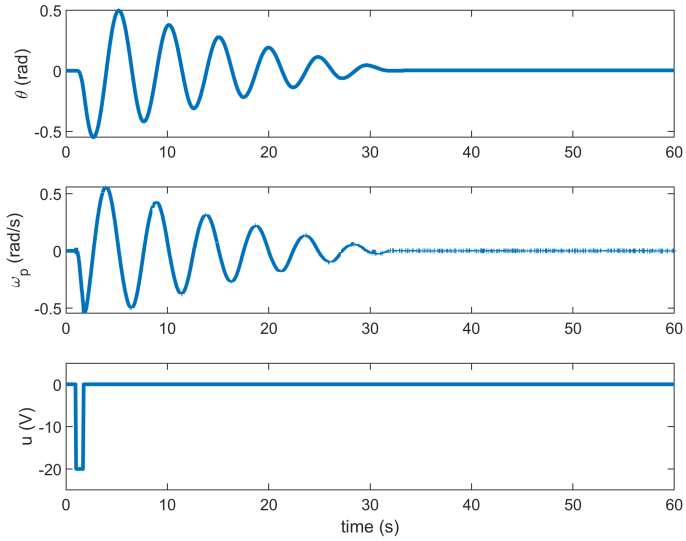


Figura 5-1: Respuesta libre pitch.

Tabla 5-2: Respuesta libre pitch.

#Oscilación	Amplitud (rad)	Tiempo (s)
1	0.49701	0.49701
4	0.19021	19.974

Con los datos anteriores utilizando las fórmulas expuestas anteriormente se calculan los valores expuestos en **5-3**:

Tabla 5-3: Resultados fricción viscosa pitch.

Parámetro	Valor
T_{osc}	4.9355 s
δ	0.2590
ζ	0.1138
ω_d	1.2731 rad/s
ω_n	1.2814 rad/s
D_p	0.0064 N/v
K	0.0360 N/v

Yaw

El procedimiento varía ligeramente para yaw, pues como se ve en 3-15 la ecuación tiene la siguiente forma,

$$J_{eq-y}\ddot{\psi} + D_y\dot{\psi} = 0$$

Esta se puede expresar en función de la velocidad angular.

$$J_{eq-y}\dot{\omega}_y(t) + D_y\omega_y(t) = 0$$

Para posteriormente aplicarla transforma de Laplace y obtener una ecuación de primer orden.

$$\Omega_{yaw}(s) = \frac{J_{eq-y}/D_y}{J_y/D_y s + 1}$$

Ahora sabiendo que una ecuación de primer orden tiene la solución

$$y_1 = e^{-\tau}(y_0 - y_{ss}) \rightarrow D_y = \frac{J_{eq-y}}{\tau}$$

Para encontrar τ primero se busca el valor donde la magnitud cae al 37 % comparado con el valor inicial.

$$\omega_1 = (1 - 0{,}63)\omega_0 \quad \tau = t_1 - t_0$$

Toma de datos y estimación

Se utilizó el montaje descrito en **4-9** para inyectar un pulso de voltaje de amplitud 20 durante 0.776 s. Lo anterior genero la figura **5-2** y los resultados se encuentran consignados en la tabla **5-4**.

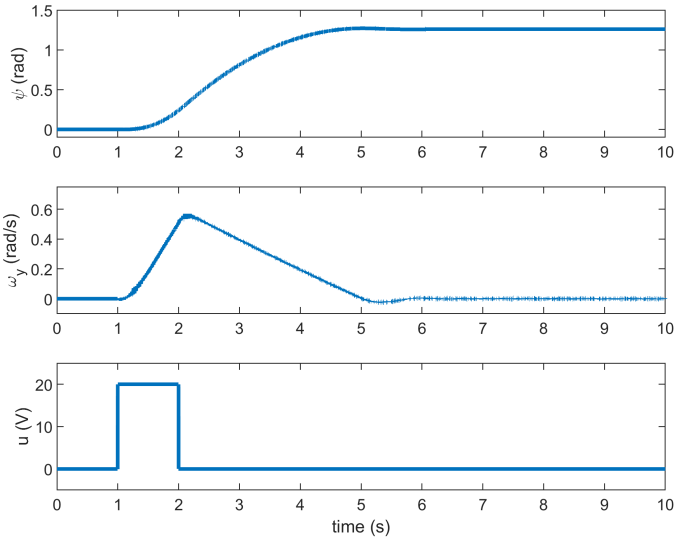


Figura 5-2: Respuesta libre yaw.

Tabla 5-4: Resultados fricción viscosa yaw.

Parámetro	Valor
ω_n	0.558 rad/s
ω_d	0.0.2065 rad/s
τ	1.8020 1/s
D_y	0.0122 N/v

5.1.3. Empuje

Este desarrollo hace referencia a las constantes K_{pp}, k_{py}, K_{yp} y K_{yy},las cuales cuantifican el aporte realizado por cada motor, en otras palabras transforman el voltaje aplicado V_p y V_y en la fuerza generada por el par motor hélice.

Theta

Partiendo de la sumatoria de fuerzas en función de la posición

$$J_{eqp-p}\ddot{\theta} + D_p\dot{\theta} + K\theta = K_{pp}V_p$$

Se expresa en función de la velocidad angular

$$J_{eq-p}\dot{\omega}_p + D_p\dot{\omega}_p = K_{pp}V_p$$

$$K_{pp} = \frac{J_{eq-p}\dot{\omega}_p + D_p\dot{\omega}_p}{V_p}$$

Tomando esta ecuación se encuentra el aporte de yaw para pitch

$$K_{py} = \frac{J_{eq-p}\dot{\omega}_p + D_p\dot{\omega}_p}{V_y}$$

De forma práctica se utiliza un escalón de voltaje y se registra la velocidad angular esto se aprecia en la figura **5-5** posteriormente usando los parámetros ya encontrados para la inercia y la fricción viscosa, se usa la ecuación anterior.

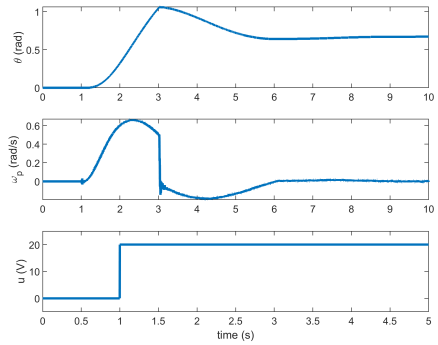


Figura 5-3: Empuje Vp theta.

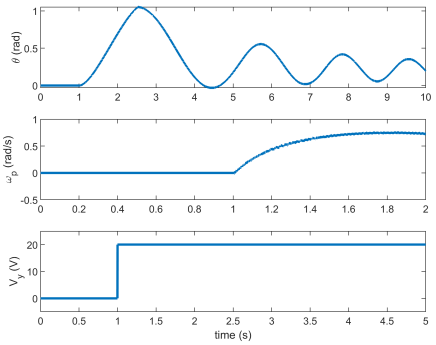


Figura 5-4: Empuje Vy theta.

Figura 5-5: Empuje Vp y Vy theta.

Psi

De manera similar a theta, se expresó las fuerzas en función de la velocidad

$$J_{eq-y}\dot{\psi} + D_y\dot{\psi} = K_{yy}V_y$$

$$J_{eq-y}\omega y + D_y\omega_y = K_{yy}V_y$$

Para el aporte directo

$$K_{yy} = \frac{J_y\dot{\omega}_y + D_y\dot{\omega}_y}{V_y}$$

Se encuentra el aporte del motor de pitch a yaw

$$K_{yp} = \frac{J_y\dot{\omega}_y + D_y\dot{\omega}_y}{V_p}$$

Posteriormente se realiza la toma de datos dando como resultado la figura **5-8** y los valores mostrados en la tabla **5-5**

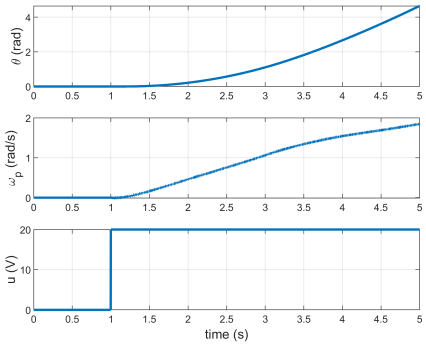


Figura 5-6: Empuje Vy psi.

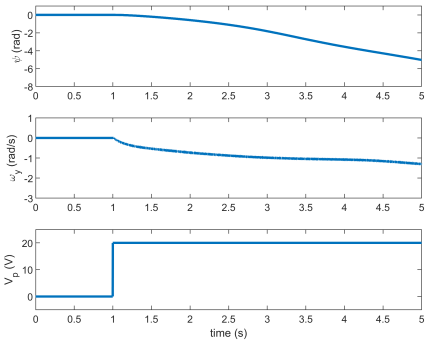


Figura 5-7: Empuje Vp Psi.

Figura 5-8: Empuje Vp y Vy psi.

Tabla 5-5: Resultados empujes.

Parámetro	Valor (N-m/v)
k_{pp}	0.0011
k_{py}	0.0022
k_{yp}	-0.0029
k_{yy}	0.0023

Los datos anteriores dan como resultado la siguiente matriz de funciones de transferencia:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0{,}0011}{0{,}0219s^2 + 0{,}0064s + 0{,}0360} & \frac{\Theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0022}{0{,}0219s^2 + 0{,}0064s + 0{,}0360} \\ \frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-0{,}0029}{0{,}0220s^2 + 0{,}0122s} & \frac{\Psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0023}{0{,}0220s^2 + 0{,}0122s} \end{pmatrix} \tag{5-1}$$

Para la verificación del comportamiento se usaron los datos recogidos en lazo abierto, estos resultados se presentan a continuación; en la figura **5-9**, se utilizó

una señal cuadrada de 0 a 10 v, aplicada a V_p; en **5-10** de 0 a -10 v; en las figuras **5-11**; **5-12**; **5-13** se aplicó la señal al motor V_y de 8 a 10 v; -8 a -10 v y 0 a 10 v respectivamente.

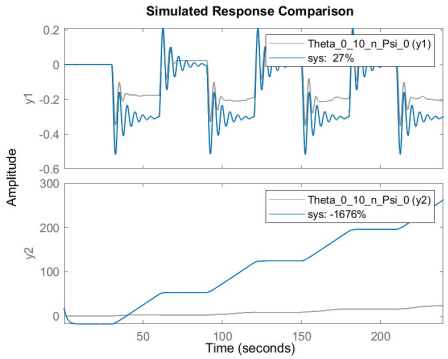


Figura 5-9: Theta 0 a 10 V.

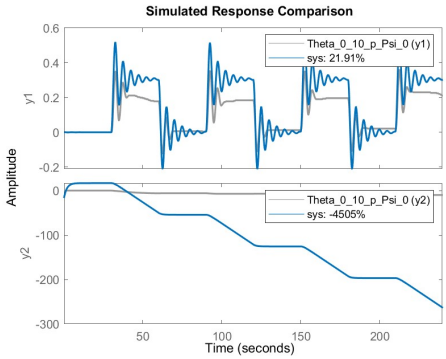


Figura 5-10: Theta 0 a -10 V.

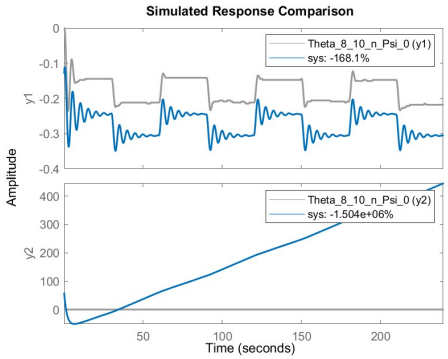


Figura 5-11: Psi 8 a 10 V.

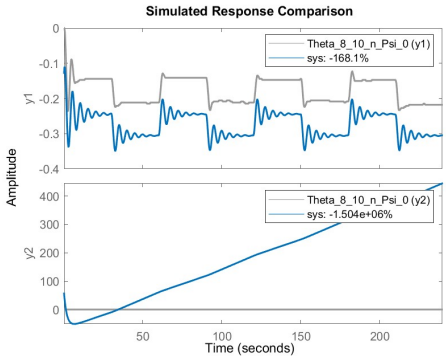


Figura 5-12: Psi -8 a -10 V.

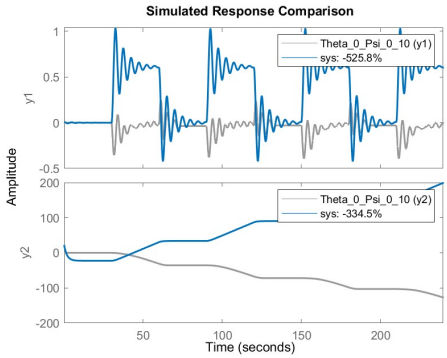


Figura 5-13: Psi 0 a 10 V.

Los resultados obtenidos se pueden condensar en un claro error en las constantes Kyp y Kyy así, pues el comportamiento en psi escala mucho más rápido de lo previsto, por otro lado, para theta se aprecia además de la diferencia del estado estacionario un error en la velocidad de decaimiento de las oscilaciones, lo anterior se puede atribuir primero a que este modelo no tiene en cuenta el punto de operación por lo que los parámetros no deben ser válidos en todo el rango, además de la necesidad de establecer una relación entre las funciones de transferencia más haya de los voltajes aplicados. En vista de esto, se hace un análisis diferente.

5.2. Respuesta natural del movimiento de pitch

El modelo del helicóptero de dos grados de libertad, considerando solamente el movimiento en pitch, dado que los dos motores equilibran la posición horizontal del péndulo, se puede escribir como una ecuación diferencial de la forma

$$m\,\ddot{\theta}(t) = \tau(t)\,\cos\theta - B\,\dot{\theta} - k\,\theta, \tag{5-2}$$

donde m es la masa del sistema, τ representa el torque que genera el movimiento, que resulta ser la componente vertical de la fuerza de empuje aplicada por la hélice del motor de cola multiplicada por la distancia a la cual se aplica la fuerza, B representa la fricción, en este caso considerada como lineal (pero podría considerarse un modelo no lineal, en caso de necesitarse), k representa la constante de elasticidad torcional del sistema y θ representa el desplazamiento angular de cabeceo, también conocido como *pitch*.

Como buscamos una aproximación lineal del comportamiento del sistema, debemos linealizar (5-2), obteniendo

$$m\,\delta\ddot{\theta}(t) + B\,\delta\dot{\theta} + k\,\delta\theta = \cos\theta_e\,\delta\tau + \tau_e\,(-\sin\theta)\,\delta\theta, \tag{5-3}$$

donde las variables $\delta\tau$, $\delta\dot{\theta}$, $\delta\ddot{\theta}$ y $\delta\theta$ indican que las variables de estado son los cambios en las variables originales, respecto a un punto de operación. Reorganizando (5-3), se puede escribir como

$$m\,\delta\ddot{\theta}(t) + B\,\delta\dot{\theta} + k\,\delta\theta + \tau_e\,\sin\theta_e\,\delta\theta = \cos\theta_e\,\delta\tau.$$

Ya con el modelo linealizado, podemos aplicar transformada de Laplace, con el fin de encontrar una función de transferencia

$$m\,[s^2\,\Delta\Theta(s) - s\,\Delta\theta(0) - \Delta\dot{\theta}(0)] + B\,[s\,\Delta\Theta(s) - \Delta\theta(0)] + [k + \tau_e\,\sin\theta_e]\,\Delta\Theta(s) = \cos\theta_e\,\delta\tau(s).$$

Despejando la expresión para la transformada de Laplace de la variación del desplazamiento angular, tenemos

$$\Delta\Theta(s) = \frac{\cos\theta_e\,\delta\tau(s) + (m\,s + B)\,\Delta\theta(0)}{m\,s^2 + B\,s + k + \tau_e\,\sin\theta_e},$$

que nos evidencia varias cosas:

1. Aunque hagamos la misma variación de la entrada, $\delta\tau(t)$, si la hacemos en condiciones iniciales diferentes, el comportamiento no va a ser el mismo.
2. En la medida que el desplazamiento angular inicial de la prueba sea más grande, el efecto de la señal de entrada será más pequeño. Sin embargo, esa misma condición inicial hace que la frecuencia natural del sistema, ω_n, aumente, debido a la presencia de $\tau_e\,\sin\theta_e$, en el término independiente y dado que el término que multiplica a s en el denominador es constante, al aumentar ω_n, el valor del coeficiente de amortiguamiento, ζ, necesariamente tiene que disminuir, aumentando el sobrepaso máximo de la respuesta.
3. Se espera que todas las pruebas que empiezan en reposo, o en general en la misma condición inicial, deberían tener el mismo comportamiento.

Para encontrar los parámetros del denominador de (5.2), utilizamos el comportamiento pendular del sistema, utilizando la parte de la respuesta natural, es decir

$$\Delta\Theta(s) = \frac{(m\,s + B)}{m\,s^2 + B\,s + k}\,\Delta\theta(0),$$

donde no se considera el término $\tau_e\,\sin\theta_e$, porque el torque es siempre cero, dado que la respuesta natural justamente es la respuesta a entrada cero.

La Figura **5-14** muestra la respuesta a condiciones iniciales positivas normalizadas, donde se evidencia un comportamiento bastante consistente para condiciones iniciales superiores a los 7 grados, para las condiciones iniciales inferiores se observa que el modelo no se ajusta muy bien, mostrando que efectivamente un único modelo lineal no puede representar de forma adecuada el comportamiento del sistema en todo el rango. La función de transferencia para las respuestas a

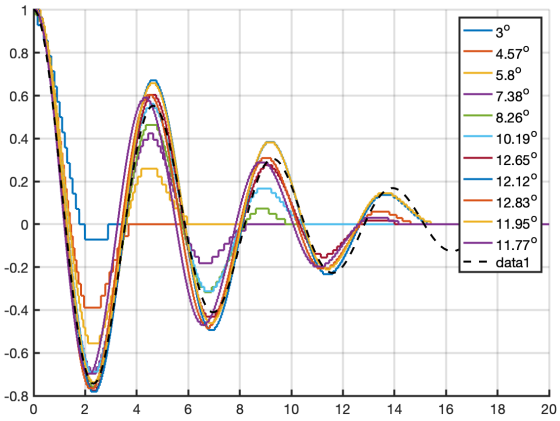


Figura 5-14: Movimiento pendular normalizado para condiciones iniciales positivas.

condiciones iniciales positivas es

$$\Delta\Theta(s) = \frac{s + 0{,}2557}{s^2 + 0{,}2557s + 1{,}849}\,\Delta\theta(0),$$

usando esa misma función de transferencia para las respuestas a condiciones iniciales negativas, vemos que encaja muy bien en los valores, como se aprecia en la Figura **5-15**. Note que este mismo denominador, debería coincidir para las funciones de transferencia tanto de $V_y(s)$ como de $V_P(t)$ a $\Theta(s)$.

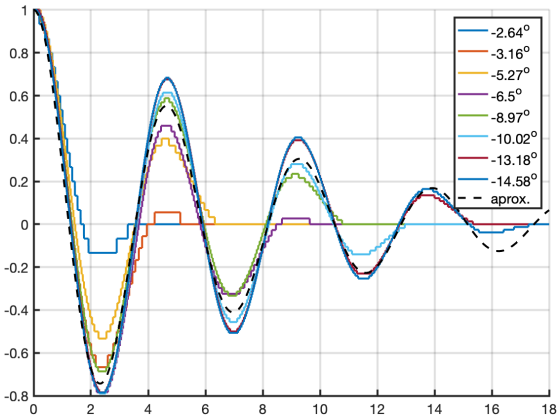


Figura 5-15: Movimiento pendular normalizado para condiciones iniciales negativas.

5.3. Relación entre el motor de cola y pitch

Se utilizaron los daots obtenidos al modificar $V_y(t)$ y observar la variación dé $\theta(t)$, dejando $V_p(t)$ en 0 Se utilizaron escalones de diferentes magnitudes, siempre iniciando desde cero, y aumentando en magnitud desde 2 en pasos de 1 hasta 9, y, posteriormente, disminuyendo en magnitud desde -2 en pasos de -1 hasta -9. Los resultados se muestran en la Figura **5-16**.

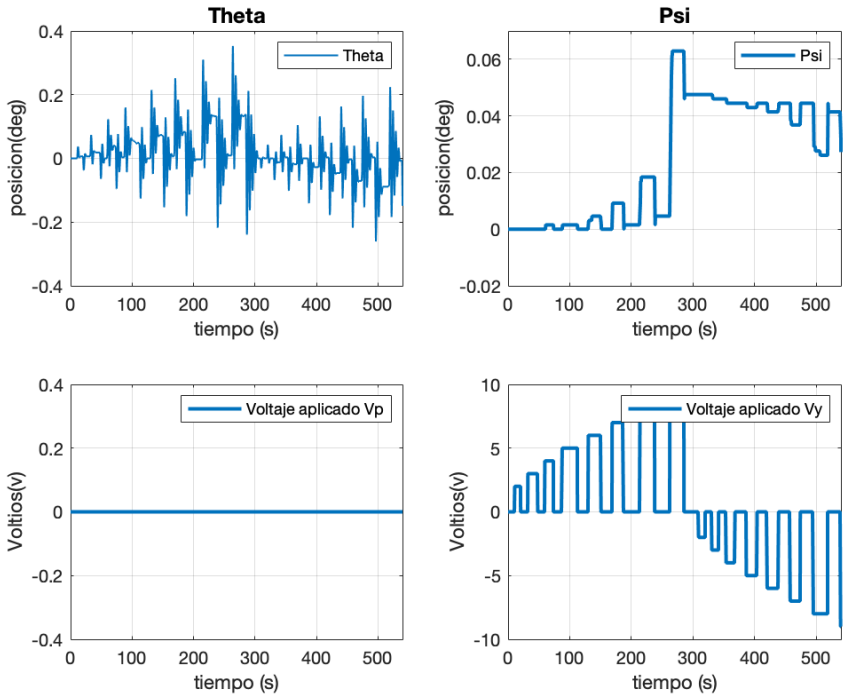


Figura 5-16: Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\theta(t)$.

Dado que se está estudiando en el comportamiento de $\theta(t)$, al observar la Figura **5-16**, se aprecian similitudes en los comportamientos. Sin embargo, por la escala y al no estar las respuestas sobrepuestas, los datos resultan difíciles de comparar. Por lo que se decidió graficar las respuestas normalizadas entre el valor de la variación del escalón, como se muestra en la Figura **5-17**.

En la Figura **5-17**, se alcanzan a ver tendencias, pero todavía falta claridad. En particular, se aprecia un sobrepaso máximo en cada respuesta superior al 100 %

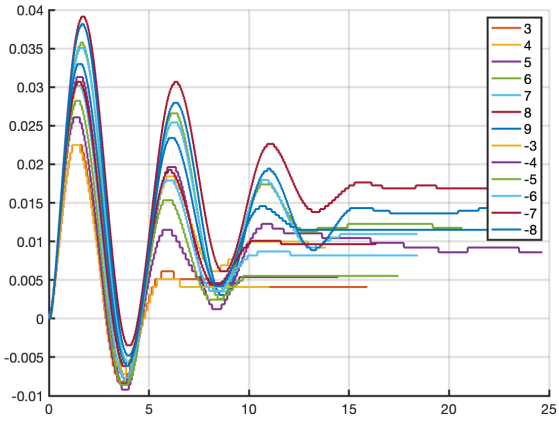


Figura 5-17: Respuestas de $\theta(t)$ normalizadas respecto a escalones en $V_y(t)$.

y al parecer una frecuencia natural amortiguada muy similar, así como el mismo amortiguamiento (envolvente exponencial decreciente). Sin embargo, con el fin de concluir si efectivamente las observaciones previas son ciertas, se normalizó nuevamente las respuestas.

Haciendo lo mencionado, se obtienen los comportamientos de mostrados en la Figura **5-18**. Nótese que efectivamente se evidencia una frecuencia natural amortiguada ω_d constante de 1.3518 rad/s. Claramente, se observan sobrepasos máximos por encima del 100 %, lo que evidencia la presencia de un cero en el numerador de la función de transferencia que modela el comportamiento del sistema. Note que las Figura **5-17** hace pensar que efectivamente tenemos la misma exponencial decreciente amortiguando las señales, pero cuyo valor inicial está ligado a la ganancia del sistema, que depende del cambio angular neto, así como el sobrepaso máximo.

Una vez tenemos clara la dinámica del comportamiento pendular del sistema, en el grado de libertad asociado al movimiento de pitch. Es necesario determinar una función de transferencia para las respuestas presentadas en la Figura **5-17**. Al tener estas respuestas sobrepasos superiores al 100 % del valor de estado estacionario, sabemos que el numerador no debe ser constante. En virtud de lo anterior se propone una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V_y(s)} = \frac{K\,\omega_n^2\,s + a\,\omega_n^2}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,s + \omega_n^2},$$

donde el denominador debe coincidir con el encontrado en el movimiento pendular

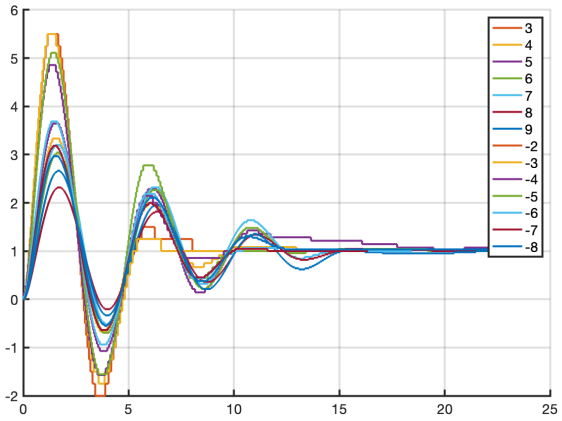


Figura 5-18: Respuestas de $\theta(t)$ normalizadas respecto al valor de estado estacionario.

y el numerador consiste de una ganancia $K\,\omega_n$ y un cero en $-a/K$. Simulando el comportamiento de la respuesta temporal a una entrada escalón de un sistema con dicha función de transferencia, tenemos lo que se muestra en la Figura **5-19**. Allí, se puede observar que el comportamiento es como se espera, así que $G(s)$ aparentemente es una buena elección de función de transferencia. Sin embargo, es importante tener una forma estructurada para hallar K y a.

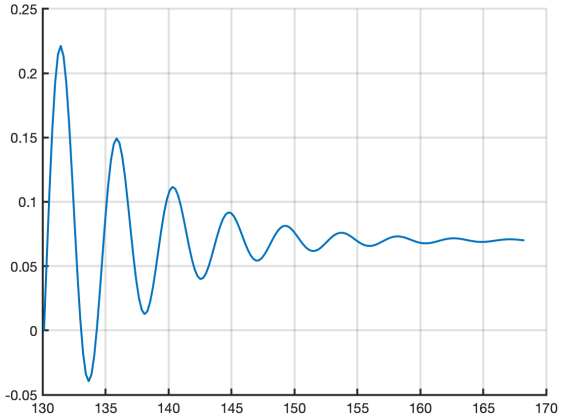


Figura 5-19: Respuestas temporales de un sistema con función de transferencia $G(s) = \dfrac{0{,}25s + 0{,}1404}{s^2 + 0{,}2895s + 2{,}006}$.

.

Con el fin de tener una forma analítica de determinar los coeficientes de la función de transferencia propuesta para el comportamiento de $\theta(t)$ en función de $V_y(t)$, hallaremos una expresión para la salida del sistema a un escalón unitario, entradas aplicadas en las pruebas, para encontrar el y_{max} y relacionarlo con los parámetros

que debemos hallar. Partimos entonces de

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{\omega_n^2\,(K\,s+a)}{s^2+2\,\zeta\,\omega_n\,s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2\,(K\,s+a)}{(s+\sigma+j\omega_d)\,(s+\sigma-j\omega_d)},$$

por lo que la respuesta escalón unitario del sistema está dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2\,(K\,s+a)}{(s+\sigma+j\omega_d)\,(s+\sigma-j\omega_d)}\frac{1}{s}\right\}.$$

Si se realiza una expansión en fracciones parciales de $Y(s)$, se obtiene que

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+\sigma+j\omega_d} + \frac{k_2^*}{s+\sigma-j\omega_d},$$

con

$$k_1 = Y(s)s\,|_{s=0} = \frac{a\,\omega_n^2}{\omega_n^2} = a,$$

$$k_2 = Y(s)\,(s+\sigma+j\omega_d)\,|_{s=-\sigma-j\omega_d} = \frac{\omega_n^2\,(a-K\,\sigma-j\,K\,\omega_d)}{2j\omega_d\,(\sigma+j\omega_d)} = \frac{a\,\omega_n^2}{2j\omega_d\,(\sigma+j\omega_d)} - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d},$$

$$k_2^* = -\frac{\omega_n^2\,(a-K\,\sigma+j\,K\,\omega_d)}{2j\omega_d\,(\sigma-j\omega_d)} = -\frac{a\,\omega_n^2}{2j\omega_d\,(\sigma-j\omega_d)} + \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d},.$$

Reemplazando se obtiene:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{\frac{a\,\omega_n^2}{2j\omega_d(\sigma+j\omega_d)} - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}}{s+\sigma+j\omega_d} - \frac{\frac{a\,\omega_n^2}{2j\omega_d(\sigma-j\omega_d)} - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}}{s+\sigma-j\omega_d},$$

que se puede reescribir como

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{a\,\omega_n}{2j\omega_d}\left[\frac{\frac{\omega_n}{\sigma+j\omega_d}}{s+\sigma+j\omega_d} - \frac{\frac{\omega_n}{\sigma-j\omega_d}}{s+\sigma-j\omega_d}\right] - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}\left[\frac{1}{s+\sigma+j\omega_d} - \frac{1}{s+\sigma-j\omega_d}\right].$$

Expresando $\dfrac{\omega_n}{\sigma+j\omega_d}$ y $\dfrac{\omega_n}{\sigma-j\omega_d}$ en forma polar se tiene $\dfrac{\omega_n}{\sigma+j\omega_d} = e^{-j\theta}$ y $\dfrac{\omega_n}{\sigma-j\omega_d} = e^{j\theta}$, por lo que

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{a\,\omega_n}{2j\omega_d}\left[\frac{e^{-j\theta}}{s+\sigma+j\omega_d} - \frac{e^{j\theta}}{s+\sigma-j\omega_d}\right] - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}\left[\frac{1}{s+\sigma+j\omega_d} - \frac{1}{s+\sigma-j\omega_d}\right].$$

Tomando la transformada inversa de Laplace se tiene

$$y(t) = \left[a + \frac{a\,\omega_n}{2j\omega_d}\left[e^{-j\theta}e^{-(\sigma+j\omega_d)t} - e^{j\theta}e^{-(\sigma-j\omega_d)t}\right] - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}\left[e^{-(\sigma+j\omega_d)t} - e^{-(\sigma-j\omega_d)t}\right]\right]u(t)$$

Reagrupando las exponenciales

$$y(t) = \left[a + \frac{a\,\omega_n}{2j\omega_d}\left[e^{-\sigma t}e^{-j(\omega_d t+\theta)} - e^{-\sigma t}e^{j(\omega_d t+\theta)}\right] - \frac{K\,\omega_n^2}{2j\omega_d}\left[e^{-\sigma\,t}\,e^{-j\omega_d\,t} - e^{-\sigma\,t}\,e^{j\omega_d\,t}\right]\right] u(t)$$

Reagrupando términos para simplificar, tenemos

$$y(t) = \left[a + \frac{a\,\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t}\left[-\frac{e^{-j(\omega_d t+\theta)} - e^{j(\omega_d t+\theta)}}{2j}\right] - \frac{K\,\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\sigma t}\left[-\frac{e^{-j\,\omega_d t} - e^{j\,\omega_d\,t}}{2j}\right]\right] u(t)$$

Por lo que finalmente

$$y(t) = \left[a - \frac{a\,\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t + \theta) + \frac{K\,\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t)\right] u(t).$$

Para hallar un K que satisfaga cierto valor de y_{max}, en cierto t_p, remplazamos dichos valores en la expresión de $y(t)$

$$y_{max} = a - \frac{a\,\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p + \theta) + \frac{K\,\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p)\,,$$

y despejamos K. Entonces, eliminando común denominador

$$y_{max}\,\omega_d - a\,\omega_d + a\,\omega_n\,e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p + \theta) = K\,\omega_n^2\,e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p)\,,$$

por lo que

$$K = \frac{y_{max}\,\omega_d - a\,\omega_d + a\,\omega_n\,e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p + \theta)}{\omega_n^2\,e^{-\sigma t_p}\sin(\omega_d t_p)}.$$

En resumen, para encontrar los modelos que aproximen las respuestas mostradas en la Figura **5-17**, debemos medir los valores de la ganancia en estado estacionario, a, el valor máximo de la salida, y_{max}, y el tiempo al cual ocurre dicho máximo, t_p y partir de los valores de $\zeta = 0{,}0800$, $\omega_n = 1{,}3103$ rad/s, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1{,}3061$ rad/s, $\sigma = \zeta\,\omega_n = 0{,}1048$ rad/s, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\omega_d}{\sigma} = 1{,}4907$ rad.

La Tabla **5-6** muestra los valores de a, y_{max} y t_p, para cada una de las respuestas al escalón mostradas en la Figura **5-17**, sin normalizar. Así como los valores de K calculados. Con dichos valores se generan las aproximaciones que se muestran en las Figuras **5-20** y **5-21**, para escalones de entrada positivos y negativos, respectivamente. Como se puede observar, las aproximaciones son bastante satisfactorias visualmente. Específicamente, se puede observar que la ganancia para entradas positivas es más grande que para entradas negativas, en todos los casos. Por lo que si queremos definir un único modelo lineal para el comportamiento del ángulo

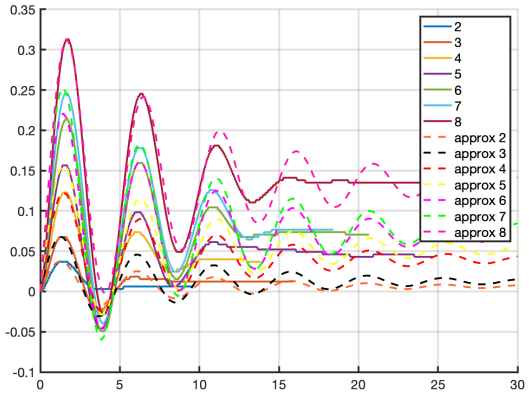


Figura 5-20: Aproximación para las respuestas temporales positivas para V_y y variación de θ.

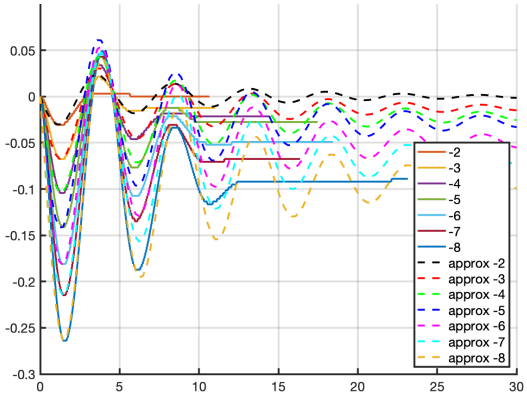


Figura 5-21: Aproximación para las respuestas temporales negativas para V_y y variación de θ.

de pitch a partir de las variaciones del motor de yaw, aunque el sistema es claramente no lineal, como mínimo deberíamos usar dos modelos diferentes para los valores positivos y negativos. Directamente, promediando los valores para a y K de los comportamientos positivos, tendremos

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0184\,(1{,}717)\,s + 0{,}0096\,(1{,}717)}{s^2 + 0{,}2463\,s + 1{,}717},$$

y haciendo lo propio para la las entradas negativas, tenemos

$$G_n(s) = \frac{\Theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0196\,(1{,}717)\,s + 0{,}0063\,(1{,}717)}{s^2 + 0{,}2096\,s + 1{,}717}.$$

5.4. Relación entre el motor de dirección y pitch

Para estudiar esta relación se toma los datos realizando variaciones en $V_p(t)$ y dejando $V_y(t)$ en 0 esto con el objetivo de separar los efectos, por lo tanto, se busca que el movimiento en ψ sea 0. Estas señales son escalones de amplitud constante, pero con un nivel dc en cada prueba; particularmente para los escalones de 2 a 4 sé tomar una escalera que va de forma asciéndete hasta 12v y posteriormente esta se reinicia y con un nivel dc diferente esta se ve en la Figura **5-22**; por otro lado, para escalones entre 5 y 8 v se toma un escalón con la amplitud deseada,

Tabla 5-6: Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud como se establece en la columna "Entrada" en $V_y(t)$ con efecto en $\theta(t)$.

Entrada	a	y_{max}	t_p	K
-2	0	1.2616	0.0150	0.0131
-3	0.0041	1.3479	0.0225	0.0161
-4	0.0054	1.3899	0.0261	0.0181
-5	0.0055	1.4326	0.0282	0.02
-6	0.0082	1.5000	0.0302	0.0191
-7	0.0096	1.5400	0.0307	0.0179
-8	0.0115	1.5609	0.0330	0.0331
2	0.0031	1.4520	0.0184	0.0137
3	0.0041	1.4060	0.0225	0.0162
4	0.0100	1.5420	0.0307	0.0175
5	0.0104	1.5420	0.0313	0.0175
6	0.0118	1.6800	0.0358	0.0211
7	0.0110	1.6580	0.0351	0.0214
8	0.0169	1.7000	0.0391	0.0214

después se le resta un nivel dc y se repite el escalón, con el objetivo de no saturar la señal de entrada un ejemplo de esta es la secuencia (0 8 1 9 2 10 3 11), la cual se evidencia claramente en la Figura **5-23**.

Posteriormente, se separó la respuesta en flancos ascendentes y descendentes, eliminando el nivel dc, esto con el objetivo de conocer si la respuesta del sistema cumplía la propiedad de proporcionalidad; la totalidad de las pruebas se encuentran en B.

Este primer análisis deja en evidencia la no linealidad del sistema, pues escalones de la misma amplitud no generan la misma respuesta; sin embargo, sí es posible identificar que las respuestas sí comparten la misma frecuencia de oscilación y un amortiguamiento similar, las figuras **5-24** y **5-25** hacen referencia a los experimentos donde el escalón tiene 2 v de amplitud; las figuras **5-26** y **5-27** muestran los experimentos donde el escalón tiene 8 v de amplitud. Además, a partir de la forma de la respuesta y contrastándola con el modelo expresado en (3-14) se

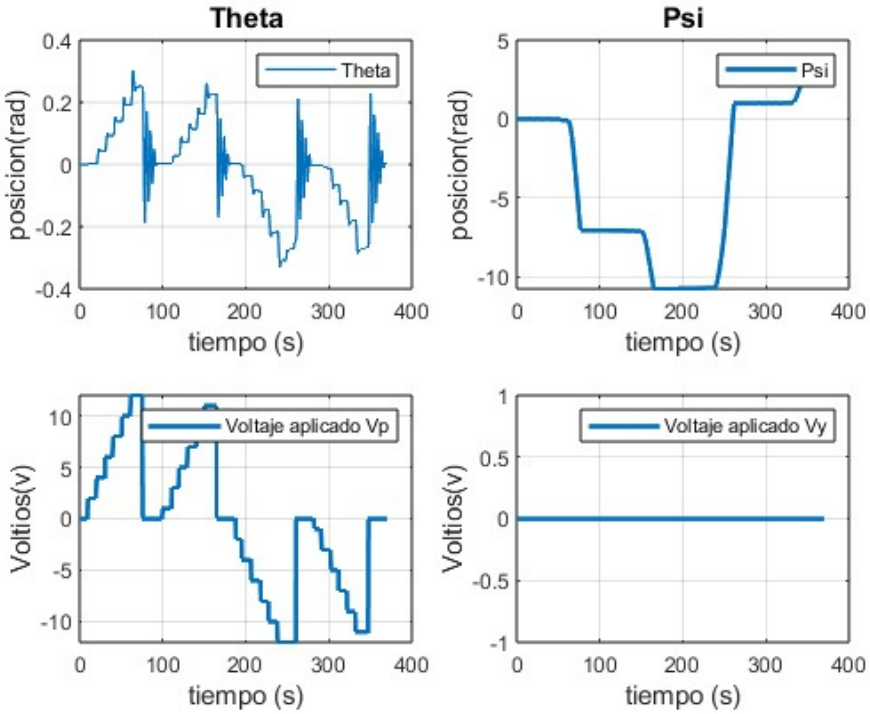


Figura 5-22: Toma de datos 2v $V_p(t)$.

espera una función de transferencia con denominador de segundo orden.

$$\frac{\Theta(s)}{V_p(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,s + \omega_n^2} = \frac{K_{pp}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm}\sin\bar{\theta}}$$

Por lo cual se realizó una estimación de los parámetros ζ, w_n y k a partir de las mediciones, estas se encuentran consignadas en la tabla **5-7**. Se debe resaltar que estos parámetros se hallaron promediando los resultados particulares de cada prueba, es decir, si se tenían varias pruebas con amplitud 8 V, pero nivel dc diferente, estas se promediaron. Con esta información sé verificó la respuesta del modelo respecto varios conjuntos de datos. La figura **5-28** con una entrada de -2 V, **5-29** 2 V, **5-30** -3 V, **5-31** 3 V, **5-32** -4 V, **5-33** 4 V, **5-34** -5 V, **5-35** 5 V, **5-36** -6 V, **5-37** 6 V, **5-38** -7 V, **5-39** 7 V, **5-40** -8 V, **5-41** 8 V.

Como resultado, la función de transferencia puede ser expresada de la siguiente forma:

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0{,}03965}{s^2 + 0{,}306931s + 1{,}6416\cos\bar{\theta}}.$$

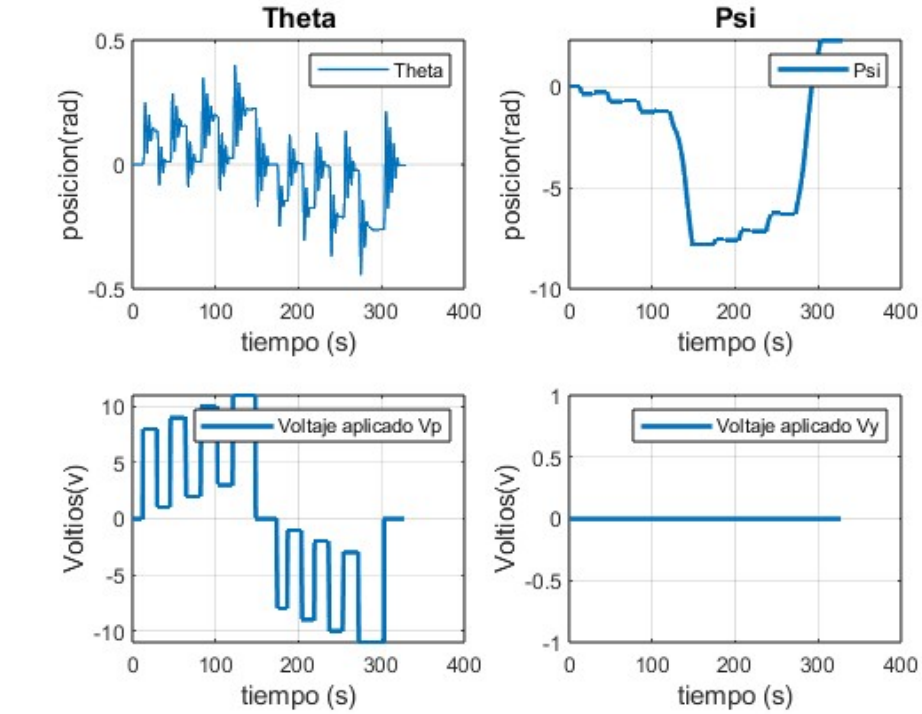


Figura 5-23: Toma de datos 8v $V_p(t)$.

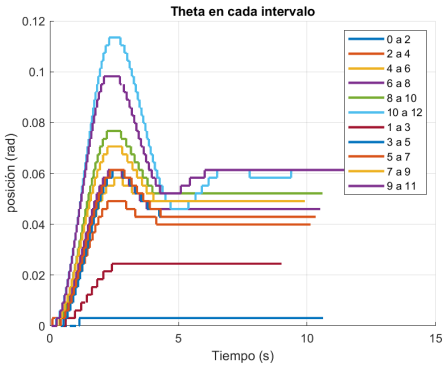


Figura 5-24: Escalón 2v intervalo 1.

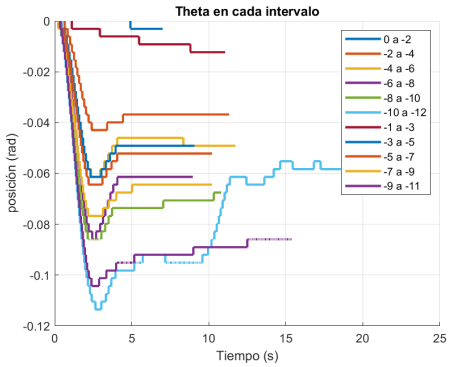


Figura 5-25: Escalón 2v intervalo 2.

5.5. Relación entre el motor de cola y yaw

Para el estudio de esta función de transferencia sé cerro el lazo únicamente de yaw, debido a que la estructura indica que esta es inestable en lazo abierto. Posteriormente, en cada intervalo sé vario la referencia °15; con esta misma conFiguración se muestran 2 experimentos, uno con comportamiento ascendente y otro descen-

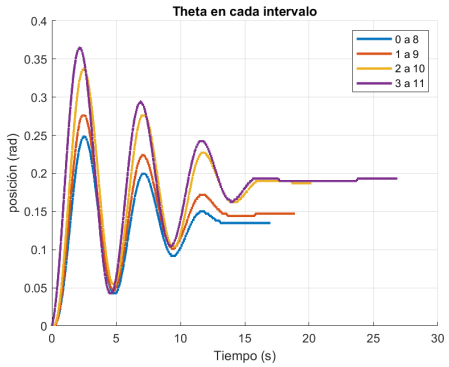


Figura 5-26: Escalón 8v intervalo 1.

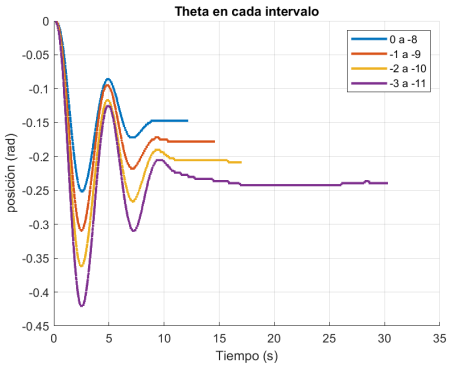


Figura 5-27: Escalón 8v intervalo 2.

Tabla 5-7: Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud como se establece en la columna "Entrada" en $V_p(t)$ con efecto en $\theta(t)$.

Amplitud	t_p	ζ	w_n	k	θ_f	w_d
-8	2.519	0.097	1.253	0.024	-0.193	1.247
-7	2.478	0.107	1.293	0.022	-0.274	1.285
-6	2.481	0.117	1.283	0.023	-0.245	1.274
-5	2.510	0.176	1.260	0.024	-0.130	1.240
-4	2.496	0.169	1.297	0.026	-0.114	1.279
-3	2.527	0.201	1.267	0.031	-0.091	1.241
-2	2.675	0.423	1.302	0.031	-0.063	1.179
2	2.551	0.319	1.293	0.023	0.049	1.237
3	2.535	0.175	1.251	0.024	0.078	1.239
4	2.566	0.121	1.246	0.024	0.154	1.237
5	2.527	0.071	1.236	0.021	0.111	1.233
6	2.503	0.085	1.257	0.023	0.145	1.253
7	2.488	0.078	1.274	0.024	0.165	1.270
8	2.370	0.054	1.313	0.021	0.166	1.326

dente.Estas se encuentran en las Figuras **5-43** y **5-42** Lo primero que se observa es la presencia de la zona muerta, pues cuando el movimiento en psi se detiene el voltaje aplicado no es cero, esta fue estimada entre [-5.2 a 5.45] v. Para poder analizar de mejor forma el comportamiento del sistema se propone aplicar la zona muerta en el voltaje de entrada, separar por intervalos y normalizar.

Este resultado se aprecia en las Figuras **5-44** y **5-45**. En ambos escenario se ve como varía el comportamiento aun cuando todos tienen la misma referencia(°15)

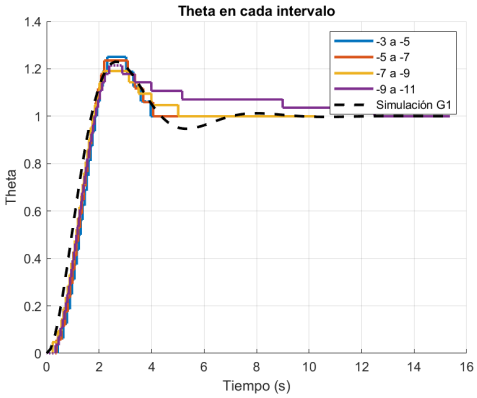


Figura 5-28: Amplitud entrada -2.

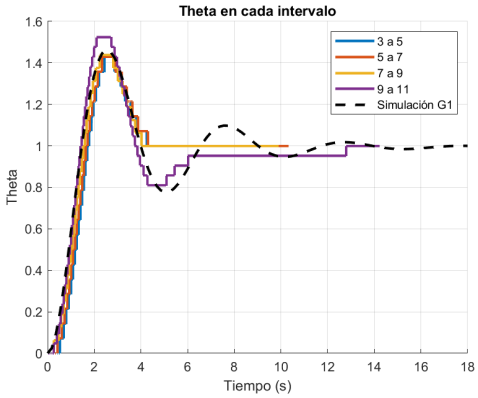


Figura 5-29: Amplitud entrada 2.

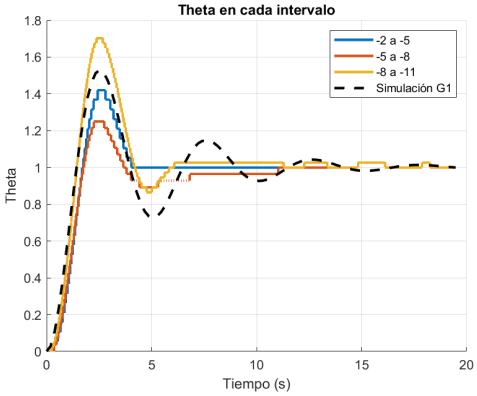


Figura 5-30: Amplitud entrada -3.

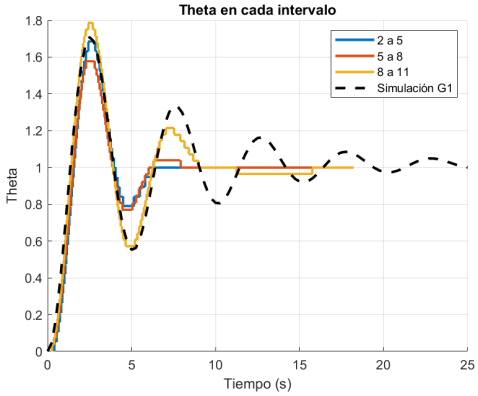


Figura 5-31: Amplitud entrada 3.

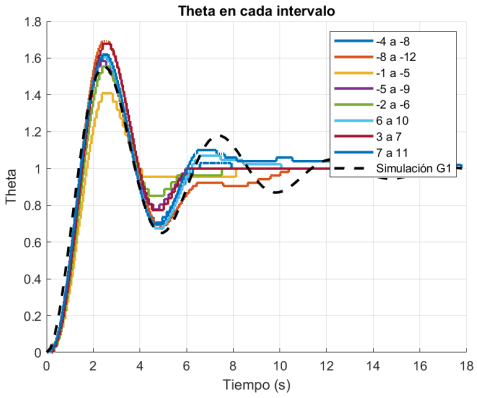


Figura 5-32: Amplitud entrada -4.

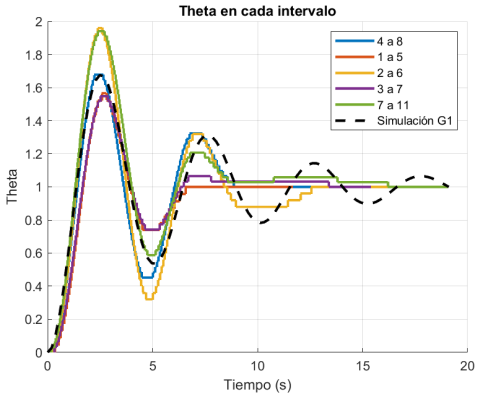


Figura 5-33: Amplitud entrada 4.

y punto de operación ($\bar{\theta} = 0$),dificultando en gran medida la estimación de una función de transferencia en lazo abierto.

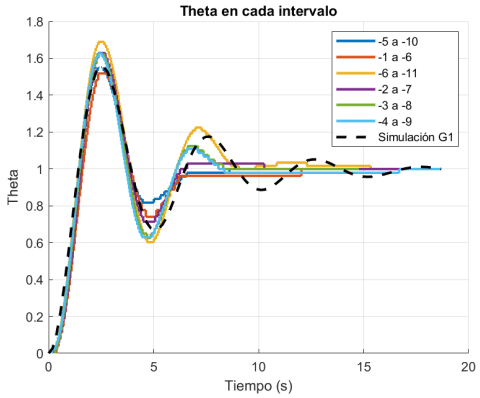


Figura 5-34: Amplitud entrada -5.

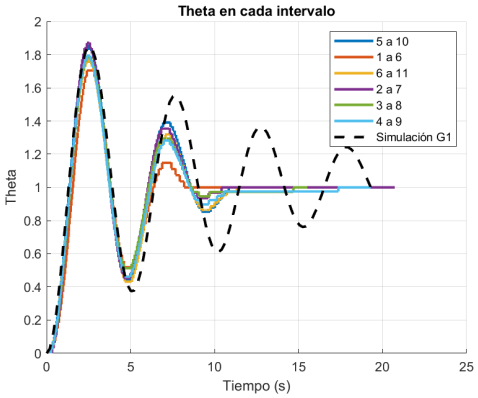


Figura 5-35: Amplitud entrada 5.

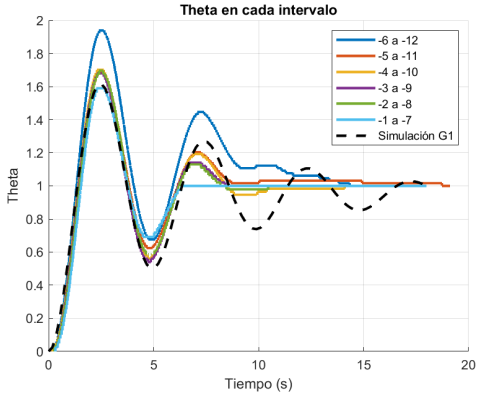


Figura 5-36: Amplitud entrada -6.

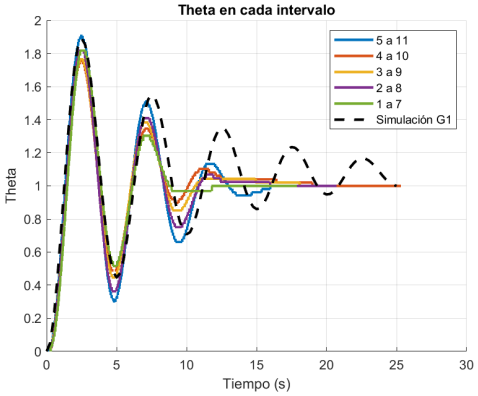


Figura 5-37: Amplitud entrada 6.

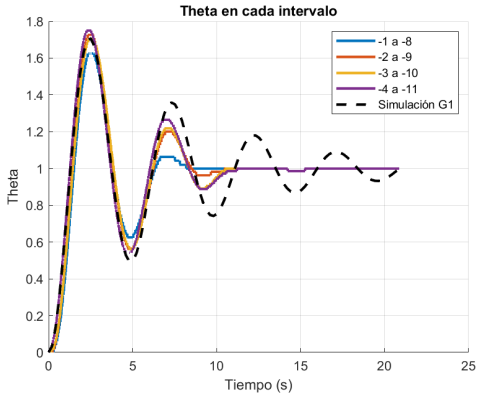


Figura 5-38: Amplitud entrada -7.

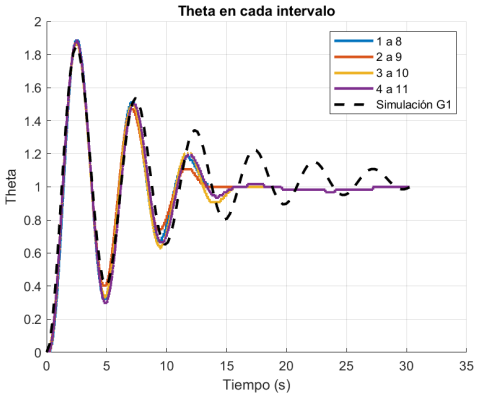


Figura 5-39: Amplitud entrada 7.

Se plantea realizar la estimación de la función de transferencia en lazo cerrado, tomando directamente la referencia (0,261799rad). Partiendo de la función de

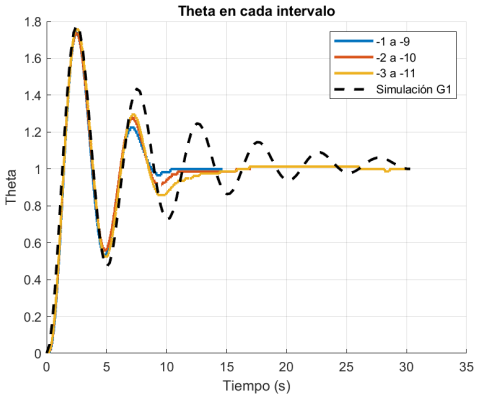


Figura 5-40: Amplitud entrada -8.

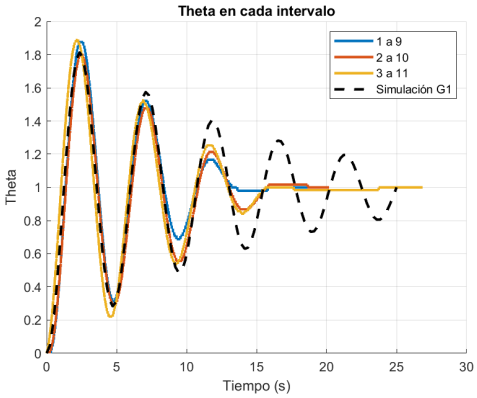


Figura 5-41: Amplitud entrada 8.

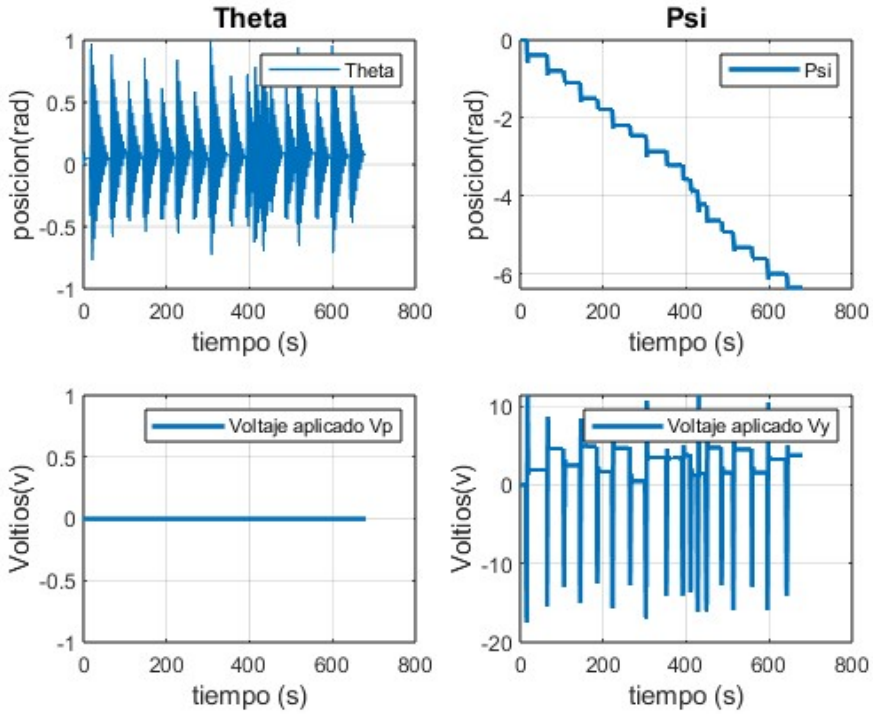


Figura 5-42: Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\psi(t)$, descendente.

transferencia en lazo abierto

$$\frac{\Psi(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{yy}}{(J_{eq-y} + ml_{cm}^2(\cos^2\bar{\theta}))s^2 + D_y s}$$

Se llega a la función de transferencia de lazo cerrado, donde E_v, hace referencia a

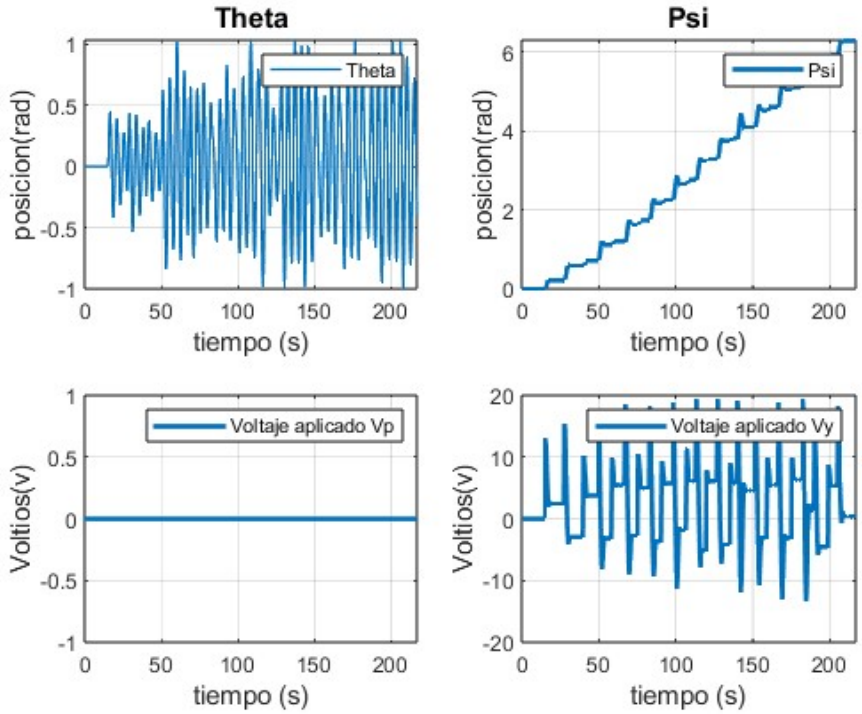


Figura 5-43: Toma de datos para relacionar $V_y(t)$ con la variación de $\psi(t)$, ascendente.

la señal de error y G al la ganancia aplicada a la misma.

$$\frac{\Psi(s)}{E_v(s)} = \frac{GK_{yy}}{(J_{eq-y} + ml_{cm}^2(\cos^2\bar{\theta}))s^2 + D_y s + K_{yy}}$$

Con esas dos consideraciones se realizó la medición de las características de la respuesta al escalón, estas son presentadas en las tablas **5-9** y **5-8**.

Evidentemente, los resultados diferentes para cada intervalo, por lo que se presentan 2 funciones de transferencia, la ecuación(5-4), para los intervalos crecientes y (5-5) para los decrecientes

$$\frac{\Psi(s)}{E_v(s)} = \frac{3{,}415}{s^2 + 1{,}919s + 3{,}415} \tag{5-4}$$

$$\frac{\Psi(s)}{E_v(s)} = \frac{2{,}730}{s^2 + 1{,}736s + 2{,}730} \tag{5-5}$$

En lazo abierto se obtiene las ecuaciones presentadas en 5-6 y 5-7

$$\frac{\Psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0683}{s^2 + 1{,}919s} \tag{5-6}$$

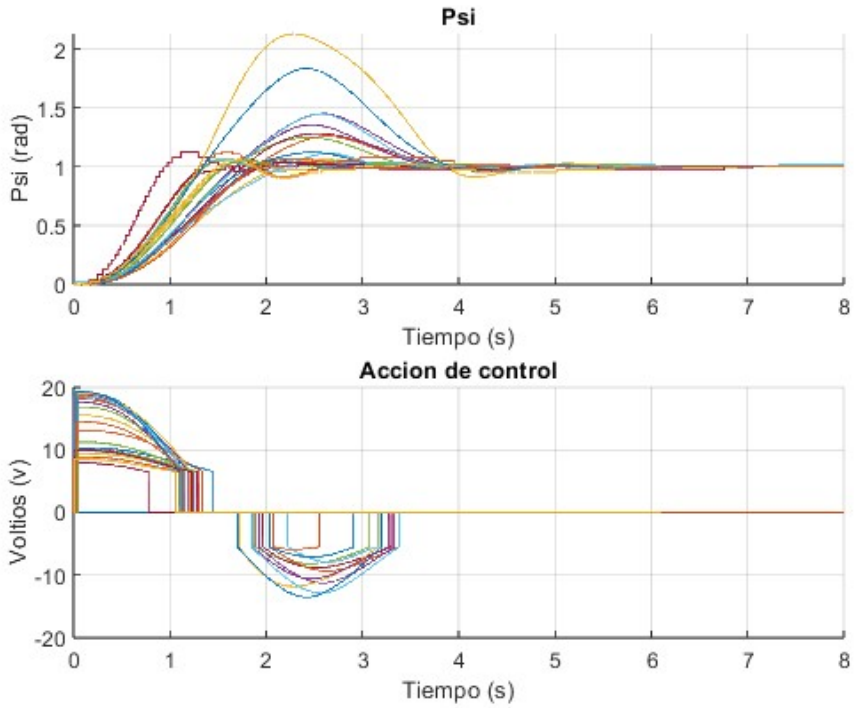


Figura 5-44: Normalización y segmentación comportamiento descendente.

$$\frac{\Psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0{,}0546}{s^2 + 1{,}736s} \tag{5-7}$$

Los resultados de la simulación se presentan en **5-46** y **5-47**.

5.6. Relación entre el motor de dirección y yaw

En este análisis se partió de las ecuaciones propuestas en (3-13) y (3-15) donde se observa que las funciones de transferencia cuya salida es ψ comparten el mismo denominador, por lo tanto, el problema se planteó para intervalos crecientes y decrecientes de la siguiente en

$$\frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{Kyp}{s^2 + 1{,}919s} \tag{5-8}$$

y

$$\frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{Kyp}{s^2 + 1{,}736s}. \tag{5-9}$$

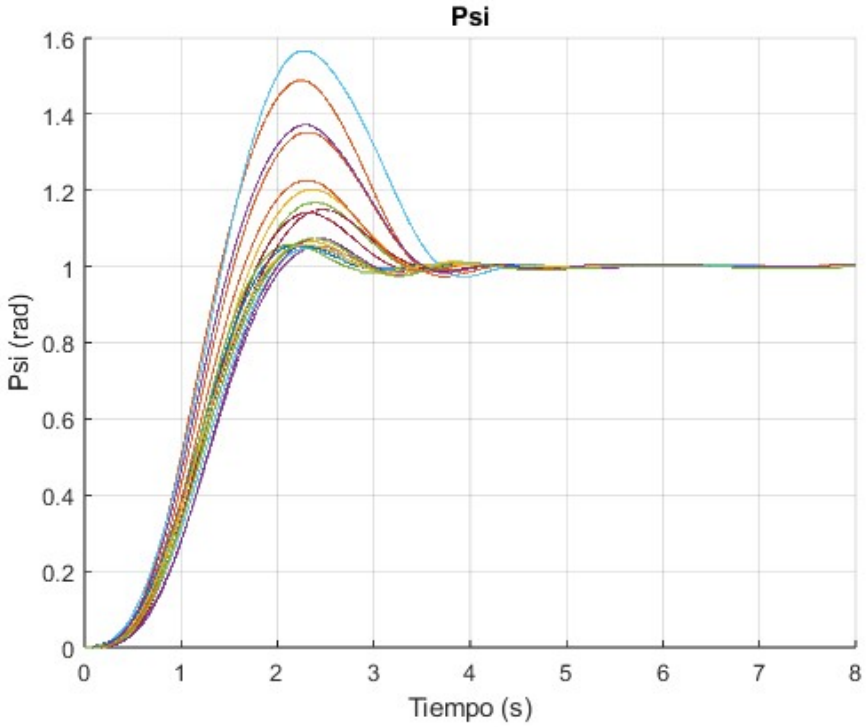


Figura 5-45: Normalización y segmentación comportamiento ascendente.

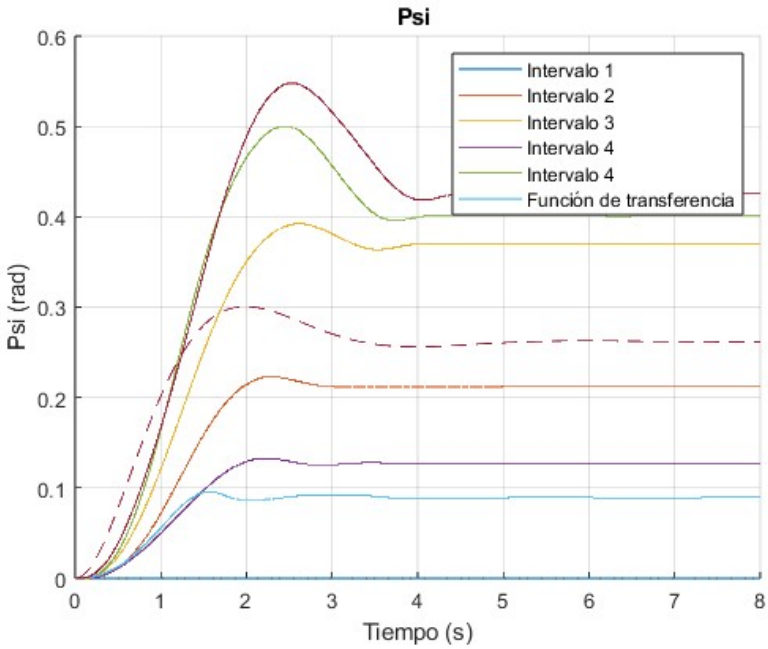


Figura 5-46: Comparación simulación, comportamiento $V_y(t)$ $\psi(t)$, creciente.

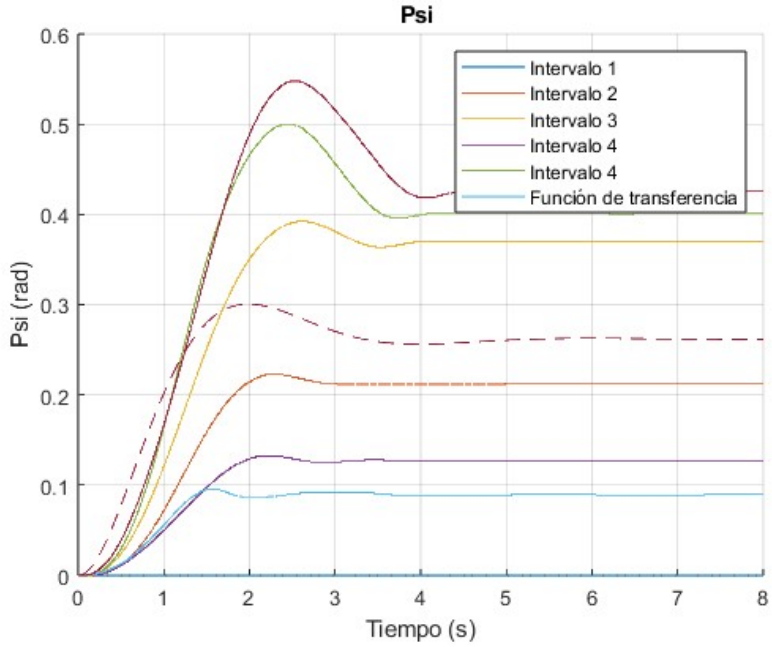


Figura 5-47: Comparación simulación, comportamiento $V_y(t)$ $\psi(t)$, decreciente.

Para esto se realizaron tomas de datos en lazo abierto presentadas en las Figuras **5-48** y **5-49**, pues se busca garantizar que la señal de control se mantenga el intervalo correspondiente. Posteriormente, se segmentó para poder estudiar su comportamiento y estimar una la ganancia adecuada, esto se evidencia en las Figuras **5-50** y **5-51**. En las ecuaciones (5-10) y(5-7) se muestran las funciones de transferencia usadas en la simulación

$$\frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-0{,}1}{s^2 + 1{,}919s} \tag{5-10}$$

$$\frac{\Psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-0{,}09}{s^2 + 1{,}736s} \tag{5-11}$$

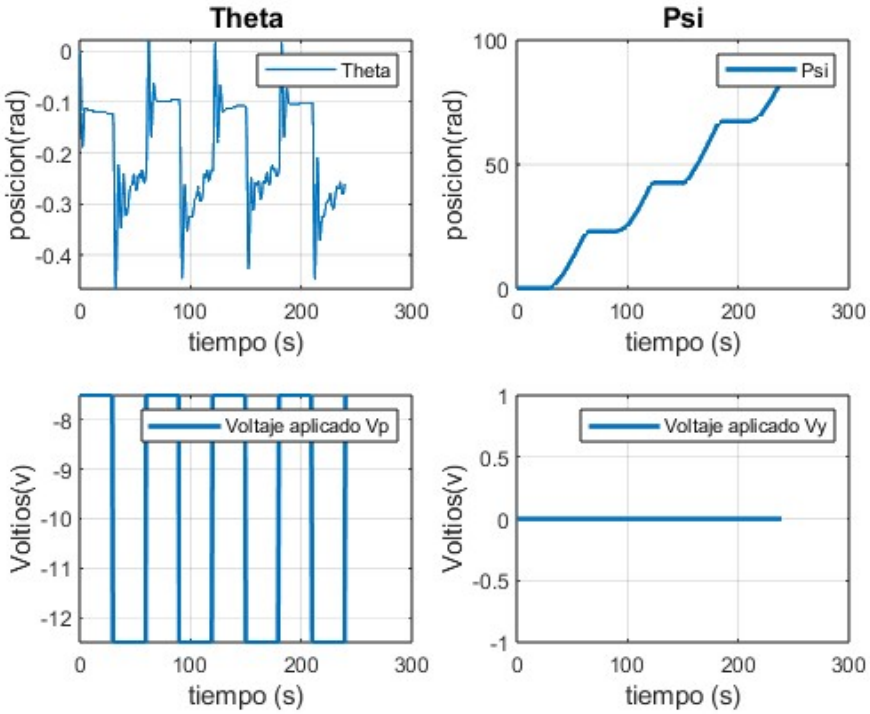


Figura 5-48: Toma de datos para relacionar $V_p(t)$ con la variación de $\psi(t)$, creciente.

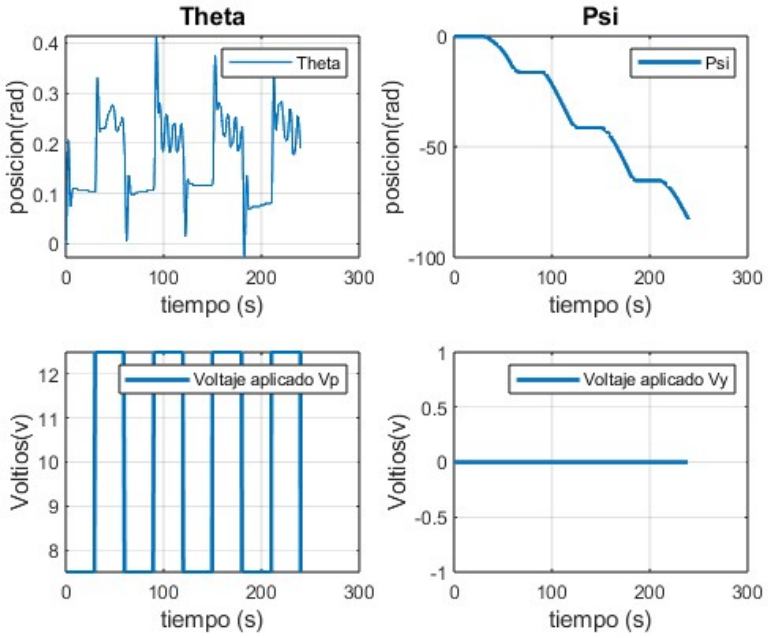


Figura 5-49: Toma de datos para relacionar $V_p(t)$ con la variación de $\psi(t)$, descendente.

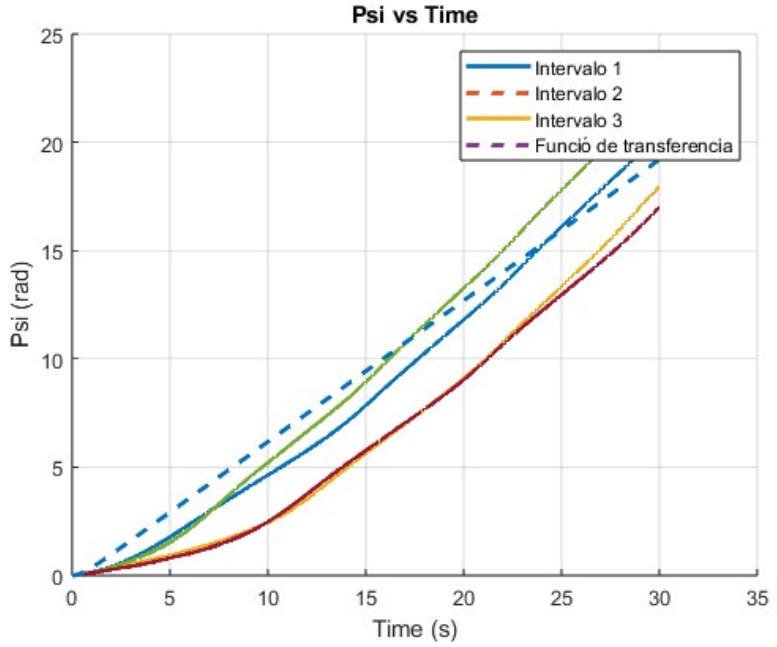


Figura 5-50: Comparación simulación, comportamiento $V_p(t)$ $\psi(t)$, creciente.

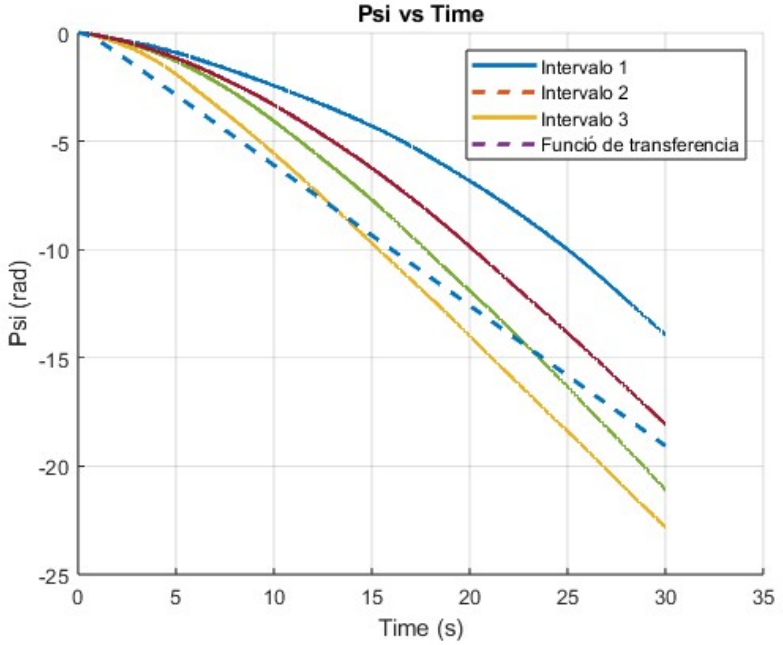


Figura 5-51: Comparación simulación, comportamiento $V_p(t)$ $\psi(t)$, decreciente.

Tabla 5-8: Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud 0.261799 con efecto en $\psi(t)$.

t_p	ζ	w_n	w_d
2.290	0.710	1.940	1.370
2.620	0.660	1.600	1.200
2.230	0.730	2.050	1.410
2.460	0.400	1.400	1.280
1.570	0.650	2.630	2.000
2.530	0.370	1.340	1.240
2.140	0.670	1.980	1.470
2.640	0.390	1.290	1.190
1.760	0.660	2.380	1.780
2.600	0.250	1.250	1.210
1.570	0.700	2.800	2.000
2.670	0.570	1.430	1.180
1.210	0.550	3.100	2.590
2.480	0.550	1.520	1.270
1.600	0.540	2.330	1.960
2.290	-0.040	1.370	1.370
2.480	0.310	1.330	1.270
1.790	0.690	2.420	1.760
2.560	0.240	1.270	1.230
2.670	0.780	1.870	1.180
2.420	0.060	1.300	1.300
2.300	0.650	1.800	1.370
1.670	0.700	2.630	1.880
3.240	0.670	1.300	0.970

Tabla 5-9: Tabla de mediciones de parámetros de las respuestas a escalón de magnitud -0.261799 con efecto en $\psi(t)$.

t_p	ζ	w_n	w_d
2.248	0.223	1.433	1.398
2.384	0.454	1.479	1.318
2.418	0.690	1.795	1.299
2.390	0.491	1.509	1.314
2.354	0.694	1.854	1.335
2.316	0.532	1.602	1.356
2.208	0.672	1.921	1.423
2.314	0.315	1.431	1.358
2.344	0.654	1.771	1.340
2.426	0.640	1.686	1.295
2.144	0.674	1.985	1.465
2.284	0.179	1.398	1.375
2.470	0.515	1.484	1.272
2.302	0.681	1.864	1.365
2.302	0.428	1.510	1.365
2.294	0.671	1.847	1.369
2.292	0.300	1.437	1.371
2.354	0.641	1.738	1.335

Capítulo 6

Identificación modelo No lineal

Recordando el modelo no lineal encontrado en (3-7)

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl_{mc}\cos\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}$$
$$ml_{mc}^2\ddot{\psi}\cos^2\theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}$$

Junto con su posterior linealización en (3-15), se hace necesario establecer relaciones entre el modelo lineal encontrado y el no lineal.

6.1. Aporte motor de dirección a pitch

Para este caso se conservó la estructura de la función de transferencia, por ende es posible estimar los valores iniciales de algunos coeficientes.

$$\frac{\theta(s)}{V_p} = \frac{K_{pp}/(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}{s^2 + \dfrac{D_p}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}s + \dfrac{mgl_{cm}\cos\bar{\theta}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}} = \frac{K}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Como se ve, es posible partir de los parámetros encontrados con la función de transferencia para estimar sus correspondientes en el modelo no lineal.

$$\frac{K_{pp}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)} = K$$

$$\frac{D_p}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2))} = 2\zeta w_n$$
$$\frac{mg(L/2)}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2))} = w_n^2$$

Tomando estas relaciones se pueden remplazar los valores en la ecuación diferencia; sin embargo, se recuerda que al únicamente tomar el aporte del motor de pitch sobre el movimiento en θ la ecuación diferencial resultante se expresa en (6-1)

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{pp}V_p - D_p\dot{\theta} - mgl_{mc}^2\cos(\theta)}{ml_{mc}^2 + J_{eq-p}} \tag{6-1}$$

La validación se realizó inicialmente con los datos separados para una entrada de -7v y 7v ,esta se encuentra en las figuras **6-1 6-2**

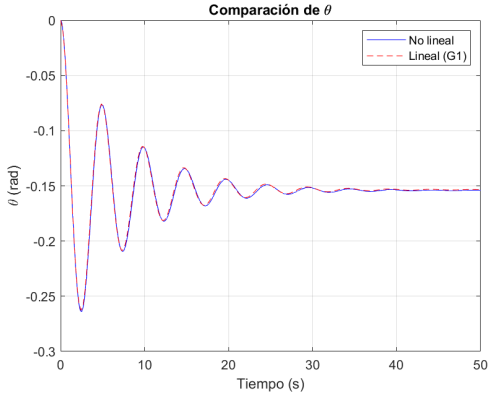


Figura 6-1: Amplitud entrada -7.

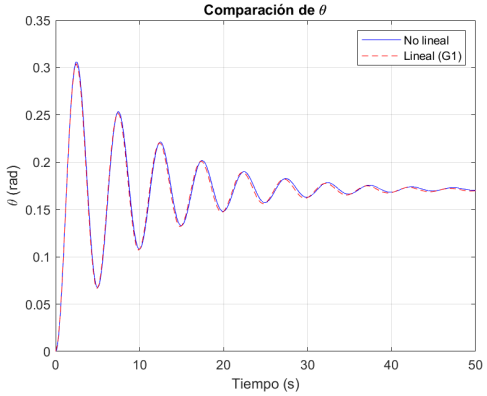


Figura 6-2: Amplitud entrada 7.

La siguiente prueba se evidencia en la figura **6-3** utilizando en la señal completa donde se tienen escalones de 7v de amplitud a los cuales se les aumenta el nivel dc progresivamente.

Si bien los resultados presentados en **6-3** cumplen con la frecuencia de oscilación y el amortiguamiento inicial, se propone, integrar un componente adicional al modelado de las fuerzas que afectan al sistema, es decir τ_θ,este, componente es la fricción de coulomb, siendo esta una fricción constante que actúa cuando hay movimiento relativo entre dos superficies en contacto. Se modela como una fuerza constante que se opone al movimiento, la expresión resultante se encuentra en (6-2). La fuerza de coulomb es definida como F_c, donde μ representa su valor.

$$F_c = \mu(sign(\dot{\theta}))$$

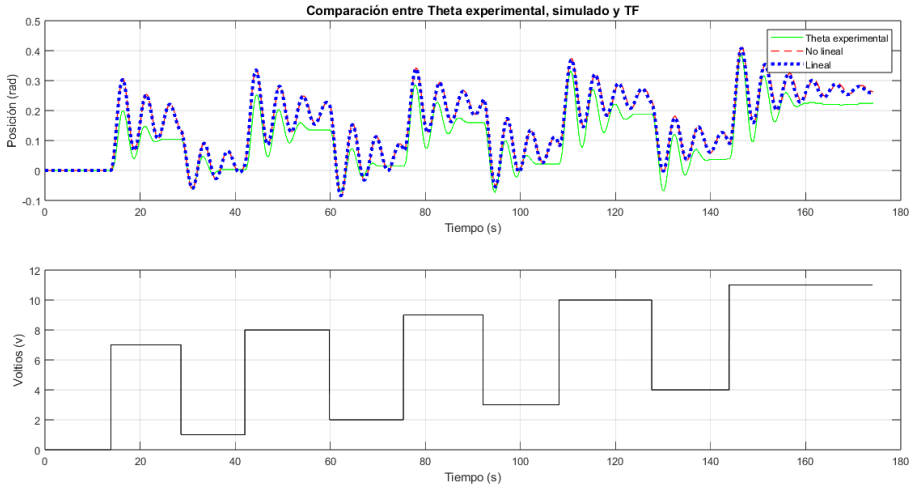


Figura 6-3: Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_p sobre θ.

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{pp}V_p - D_p\dot{\theta} - mgl_{mc}^2\cos(\theta) - F_c}{ml_{mc}^2 + J_{eq-p}} \tag{6-2}$$

Los resultados de incluir la fuerza de coulomb se muestran en la figura **6-4**

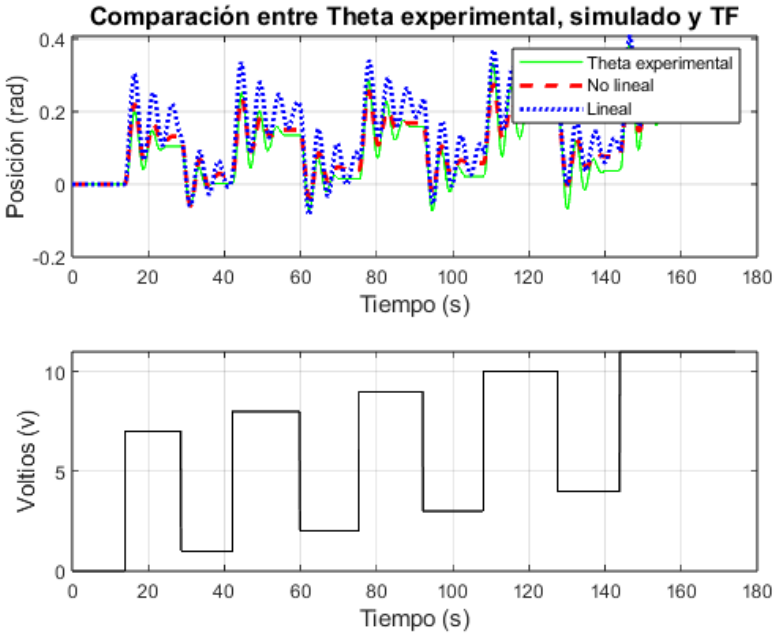


Figura 6-4: Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_p sobre θ, al incluir la fricción de coulomb.

6.2. Aporte motor de cola sobre pitch

Para este caso se generó una discrepancia entre el modelo que resulta de la linealización y el que se ajustó al comportamiento de los datos, como se ve al comparar las ecuaciones (6-3) y (6-4) que corresponden a la estructura esperada y la encontrada respectivamente se obtuvo un cero extra en el denominador, por lo tanto, se añadió esa estructura al modelo no lineal y se extrajeron los coeficientes del denominador.

$$\frac{K_{py}}{(J_{eq-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm}\sin\bar{\theta}} \tag{6-3}$$

$$\Delta\Theta(s) = \frac{(m\,s + B)}{m\,s^2 + B\,s + k}\,\Delta\theta(0) \tag{6-4}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial quedo expresada como se presenta en (6-5), donde $\dot{V}_y$ representa la derivada del voltaje aplicado en el motor de yaw

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + mgl_{mc}\cos\theta = K_{py1}V_y + K_{py2}\dot{V}_y - D_p\dot{\theta} \tag{6-5}$$

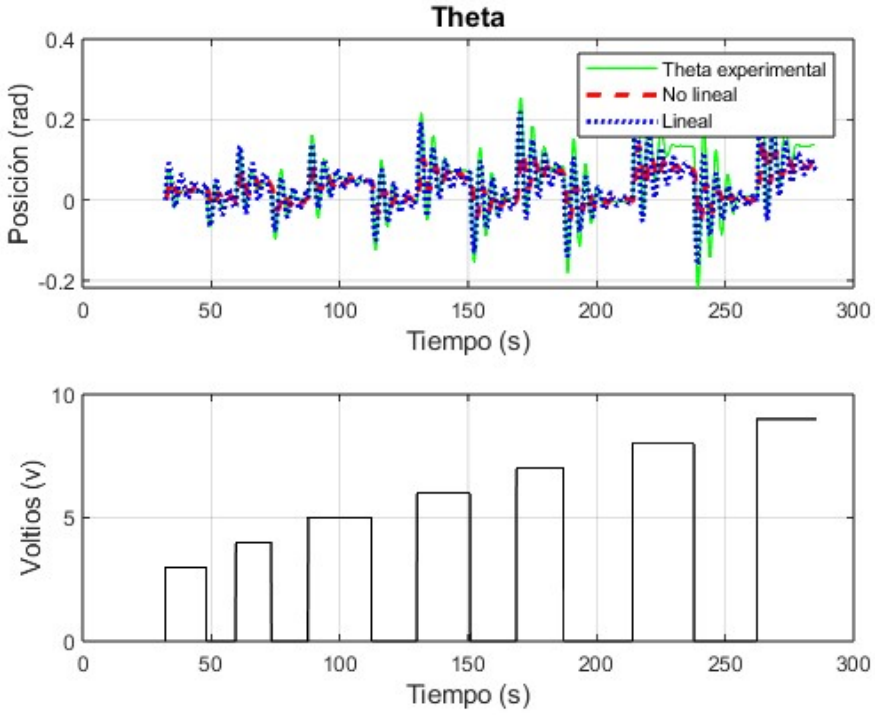


Figura 6-5: Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_y sobre θ.

6.3. Aportes cruzados

Se pasa al análisis de los aportes cruzados directamente, pues los componentes no lineales de la ecuación diferencial que expresa el comportamiento de ψ, dependen de θ, por lo tanto, es necesario estudiar su comportamiento de forma simultánea.

6.3.1. Aporte motor de dirección a pith y yaw

Esta relación mantiene la estructura de la ecuación diferencial planteada en (3-9), tomando los coeficientes a partir de las funciones de transferencia encontradas, por esto se tiene un sistema para los intervalos crecientes **6-6** y otro para los decrecientes **6-7**.

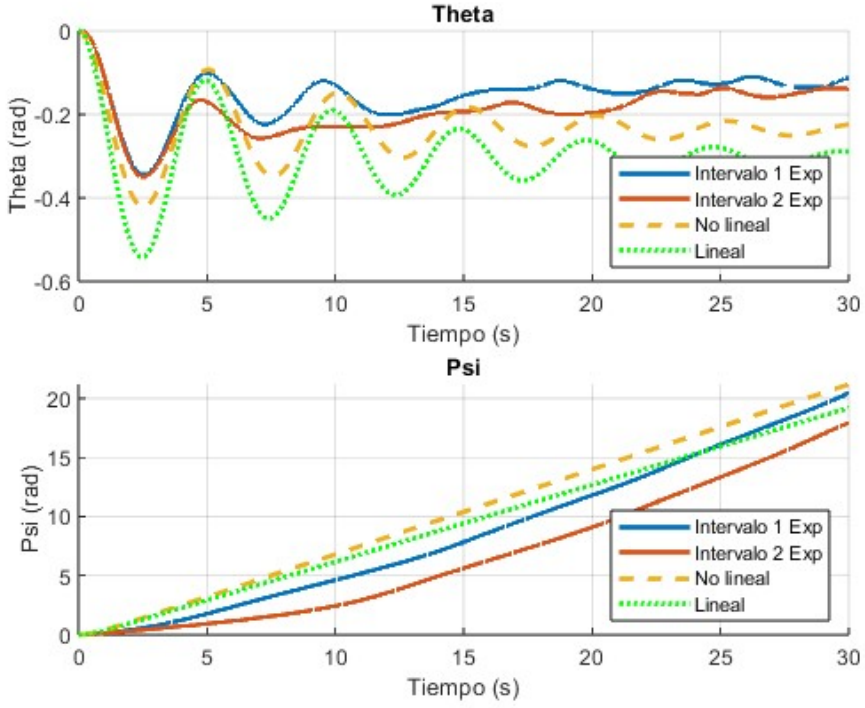


Figura 6-6: Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_p(t)$ $\theta(t)/V_p(t)$, creciente.

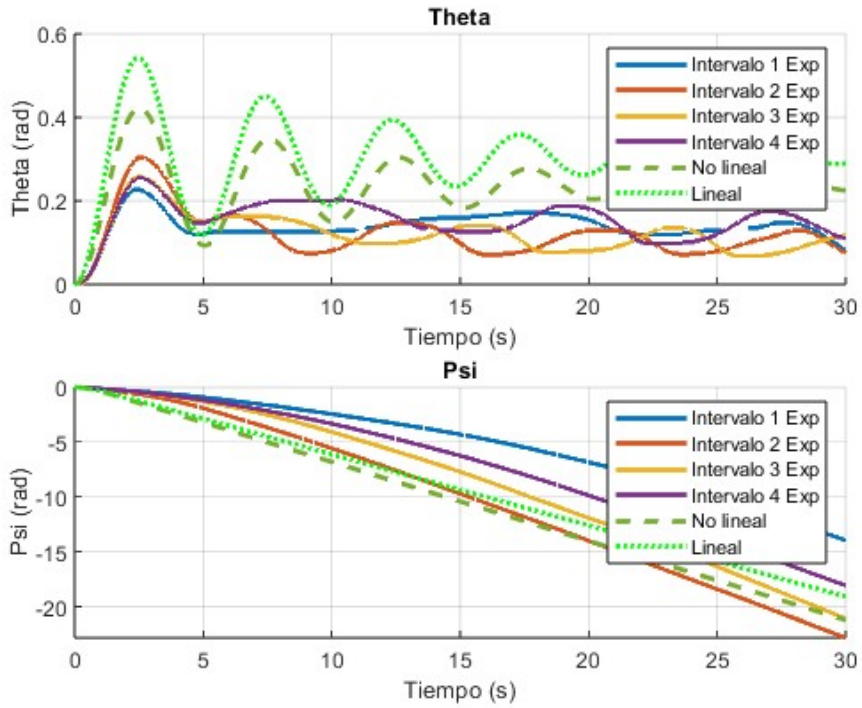


Figura 6-7: Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_p(t)$ $\theta(t)/V_p(t)$, decreciente.

6.3.2. Aporte motor de cola a pitch y yaw

En este caso no se mantiene la estructura, pues como ya se mencionó, la función de transferencia estimada incluye un cero, y por consecuencia también se afecta la ecuación diferencial. Los resultados de la estimación se muestran en la figura **6-8**

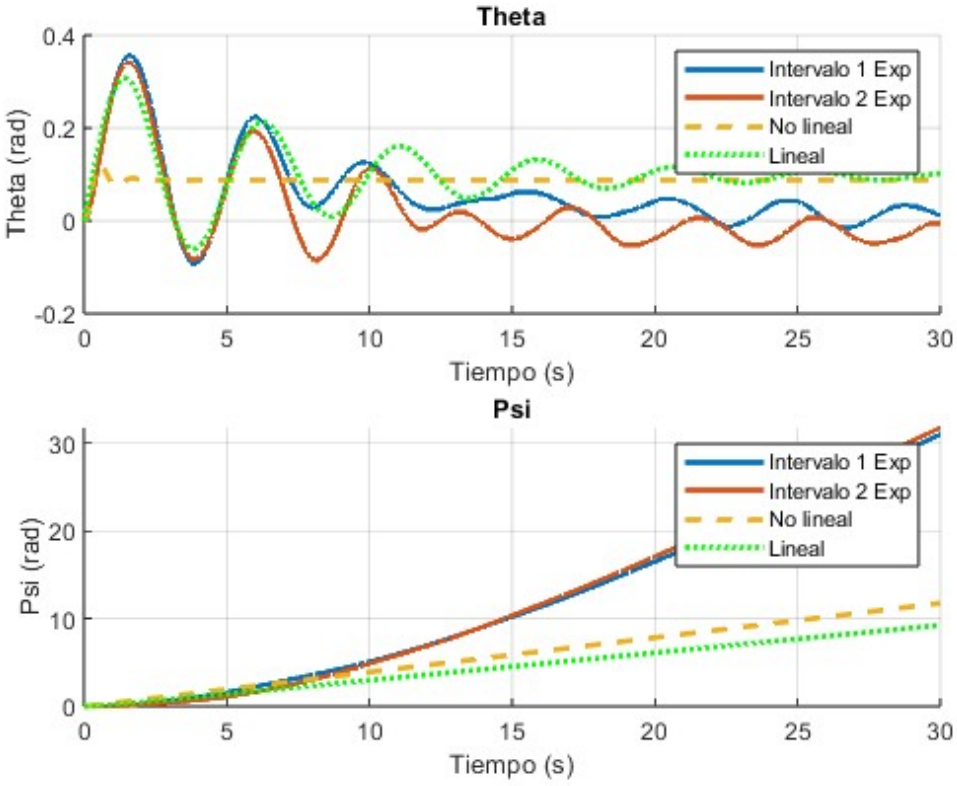


Figura 6-8: Comparación simulación, comportamiento $\psi(t)/V_y(t)$ $\theta(t)/V_y(t)$.

6.3.3. Aporte simultáneo

Adicionalmente, se muestra el comportamiento cuando el voltaje en ambos motores es diferente de 0, es importante resaltar que hay efectos no lineales que no son contemplados por el modelo, por ende se seleccionaron los datos donde esos efectos son menos visibles. Los datos usados se presentan en la figura **6-9**

Después de separar los datos en intervalos, se realizó la comparación del comportamiento de cada movimiento, esta se presenta en **6-10**.

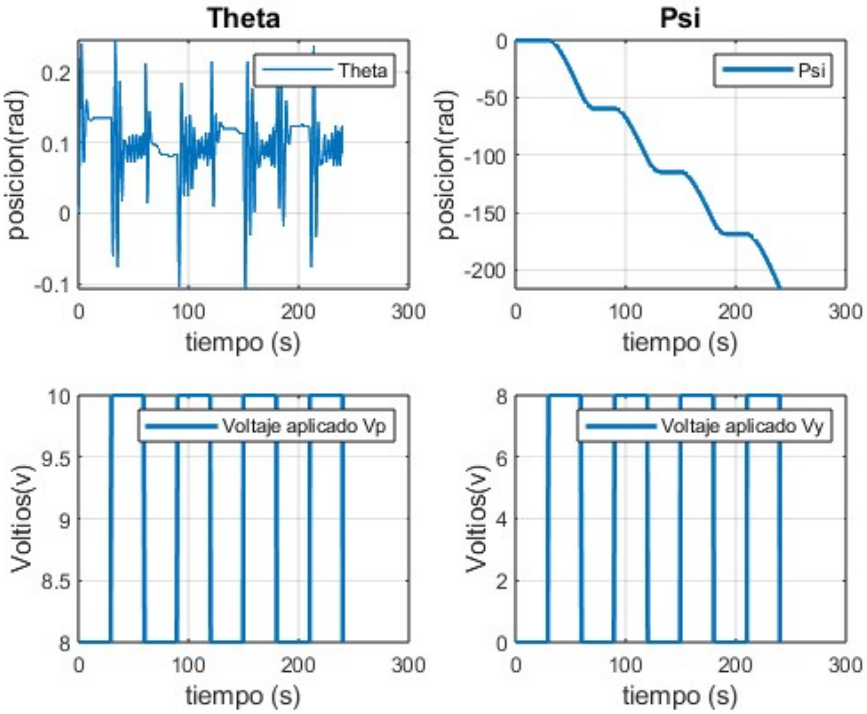


Figura 6-9: Datos utilizados para la comparación de resultados.

Como síntesis se puede evidenciar el modelo utilizado en la ecuación (6-6)

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= 0{,}03V_p + 0{,}0165V_y + 0{,}0316\dot{V}_y + 0{,}0316 - 0{,}1990\dot{\theta} - \\ &\qquad -0{,}0348\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\psi}^2 - 1{,}6234\cos(\theta) \\ \ddot{\psi} &= \frac{-0{,}1V_p + 0{,}0546V_y - 1{,}736\dot{\psi} + 0{,}0348\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}}{0{,}0348\cos(\theta)^2 + 0{,}0215}\end{aligned} \tag{6-6}$$

Los resultados anteriores muestran la necesidad de escoger cuidadosamente las zonas de operación para capturar la parte deseada de la dinámica, además se hace evidente la necesidad de partir de loa coeficientes encontrados en el enfoque lineal. Para mejorar los resultados obtenidos en **6-10**, se propone el uso del software MATLAB particularmente de la "System identification toolbox".

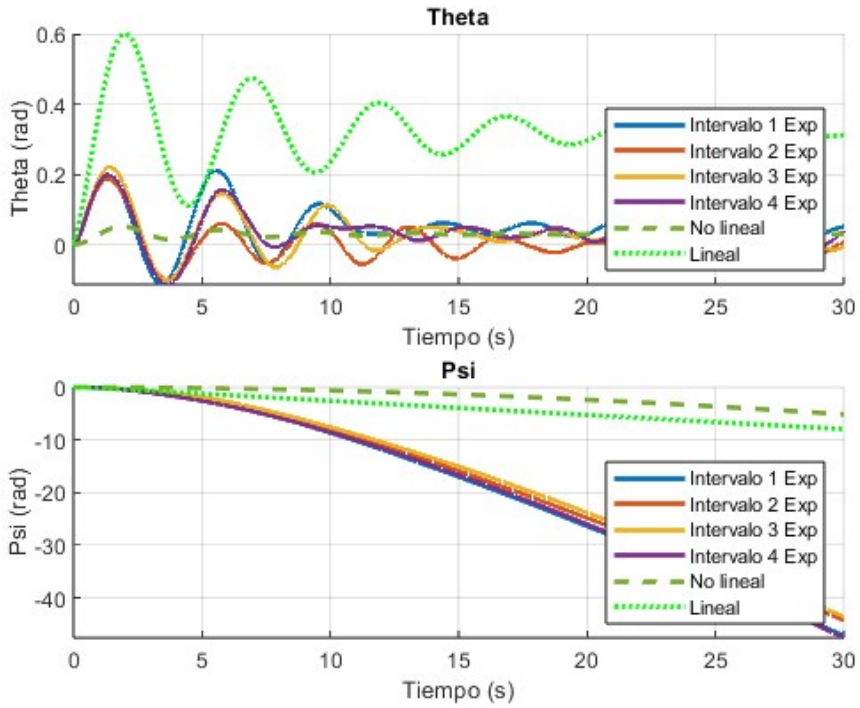


Figura 6-10: Comparación resultados de las simulaciones lineal y no lineal de V_y y V_p sobre θ y ψ.

6.3.4. Preparación de datos

Para usar la herramienta primero es necesario contar con una representación estándar para los datos, estos puedes ser en el dominio de la frecuencia o del tiempo, a su vez se tienen 3 formas para representarlos.

- time table
- iddata
- idfrd

En este trabajó se usó únicamente iddata por su facilidad para crear los objetos, así como su fácil estandarización. Para los datos en el tiempo se utiliza iddata, como se observó en **4-7** la herramienta permite almacenar las variables seleccionadas y adicionalmente el vector de tiempo, con estos se crea un objeto compuesto por salida, entrada y periodo de muestreo. En el siguiente código 6.1 ,se muestra el proceso, el proceso para cargar los datos tomados, asignarlos a una variable y construir el objeto.

Listing 6.1: Proceso para cargar los datos

```
load('aero_abierto_Theta_0_10_n_Psi_0.mat')
t=lqr_rsp(1,:)';
ref_theta=lqr_rsp(2,:)';
ref_psi=lqr_rsp(5,:)';
theta=lqr_rsp(4,:)';
psi=lqr_rsp(7,:)';
Theta_0_10_n_Psi_0=iddata([theta,psi],[ ref_theta ref_psi] ,0.002);
```

Identificación NO lineal

Este proceso permite partir de las ecuaciones no lineales (3-7), para estimar los coeficientes, además permite escoger condiciones iniciales e inicializar parámetros. Se debe expresar el modelo en un espacio de estados no lineal, presentado en (3.2.3). Este se realiza, creando una función cuyos argumentos son los estados iniciales, las entradas y los valores a estimar; la función debe tener dos vectores de salida, los estados del sistema y las salidas (θ y ψ). En el ejemplo 6.2 se estima únicamente las ganancias de los voltajes, la fricción y el momento de inercia de yaw.

Listing 6.2: Funcion no lineal para la estimacion de parametros.

```
function [dx, y] = AERO_vp_vy_pitch_yaw_param(t, x, u, Kpp, Kpy,...
Kyp, Kyy, Jy, Jp, Dp, Dy, b1,varargin)

m = 1.075;
g = 9.8;
l = 0.18;
dt = 0.002;

x1 = x(1);
x2 = x(2);
x3 = x(3);
x4 = x(4);

dx1 = x2;
dx2 = ((b1 * dv_psi + Kpy * u(2)) + (Kpp * u(1)) - (Dp * x2) - ...
(m * g * l * sin(x1)) + (m * l^2 * x4^2 * sin(x1) * cos(x1))) ...
/ (Jp + m * l^2);
```

```
dx3 = x4;
dx4 = ((Kyp * u(1)) + (Kyy * u(2)) -...
(Dy * x4) + (2 * m * l^2 * x4 * x2 * sin(x1) * cos(x1)))...
/ (Jy + m * l^2 * cos(x1)^2);
dx = [dx1; dx2; dx3; dx4];
y = [x1; x3]; % Las salidas son theta (x1) y psi (x3)
end
```

En seguida se crea el objeto idnlgrey, este contiene el nombre de la función, el orden del sistema y los estados iniciales, para finalmente realizar la estimación usando el objeto data.

Listing 6.3: Uso de la toolbox para la estimación no lineal.

```
FileName =  AERO_vp_vy_pitch_yaw_param'; % Archivo de la funcion del
    ↪ modelo no lineal
Order = [2 2 4]; % Orden del sistema [ny nu nx]
Parameters = {0.03, 0.0165, -0.1, -0.0546, 0.1291128, 1, 0.1990,...
1.736, 0.0316}; % Valores iniciales de los parametros
nl_model.Parameters(5).Minimum = -1;    % Limite inferior para Jy
nl_model.Parameters(5).Maximum = 1;    % Limite superior para Jy

nl_model.Parameters(6).Minimum = -1;    % Limite inferior para Jp
nl_model.Parameters(6).Maximum = 1;    % Limite superior para Jp

Is=[-0.3 ;10;0;0];%Condiciones iniciales
nlgr = idnlgrey(FileName, Order, Parameters,Is);

% Estimar los parametros
 nlgr_Theta_0_10_n_Psi_0 = nlgreyest(Theta_0_10_n_Psi_0, nlgr); %
```

Adicionalmente, la implementación 6.3 fue necesario restringir el rango de búsqueda, con el objeto de evitar caer mínimos locales y para obtener valores coherentes.

6.3.5. Resultados estimación

Haciendo uso de la metodología descrita anteriormente se realizó la estimación de los parámetros; para estos se usaron dos experimentos, inicialmente en lazo

abierto se utiliza como se presenta en la figura **6-9**, separándolos en intervalos, posteriormente se utilizaron los datos mostrados en la figura **6-11**.

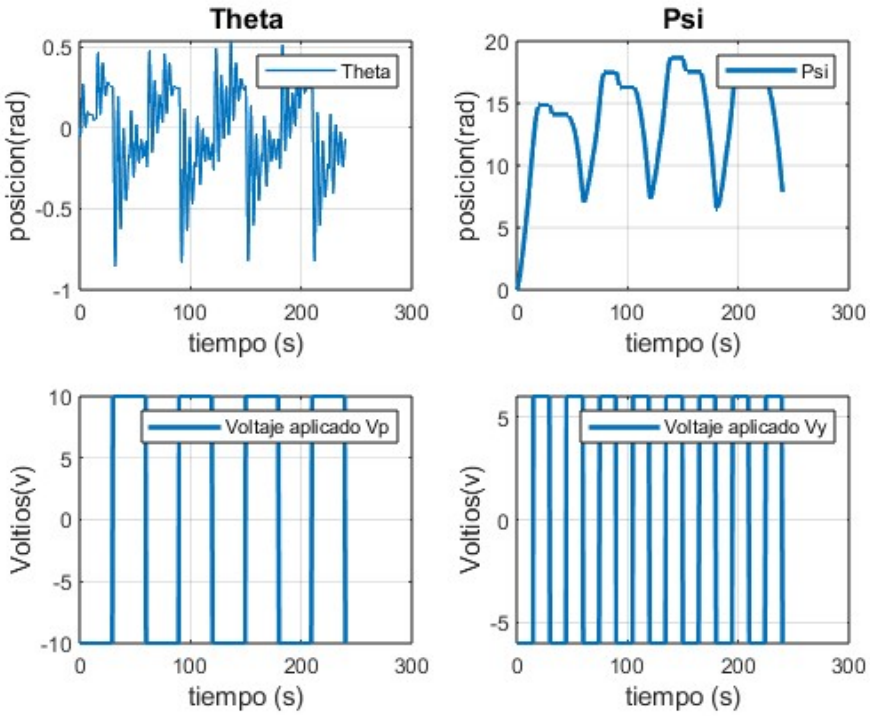


Figura 6-11: Datos utilizados para la estimación de los parámetros.

Los resultados obtenidos son expuestos en las tablas **6-1** y **6-1**, para obtener estos resultados se partió utilizando como valores iniciales los resultados ya obtenidos (6-6); se limitó el rango de búsqueda entre -1 y 1 para las ganancias del voltaje y para los parámetros que representan características físicas entre 0 y 1.

Tabla 6-1: Parámetros obtenidos a partir de la identificación no lineal experimento 1.

Parámetro	K_{pp}	K_{py}	K_{yp}	K_{yy}	Jy	J_p	D_p	D_y	B
$30-60$	0.012	-0.002	-0.037	0.015	0.996	0.649	0.059	0.111	0.032
$90-120$	0.007	-0.006	-0.036	0.016	1.000	0.598	0.000	0.109	0.032
$150-180$	0.010	-0.004	-0.034	0.018	0.991	0.699	0.043	0.092	0.032
$210-240$	0.010	-0.003	-0.023	0.026	0.051	0.695	0.089	0.008	0.032

En la figura **6-12**, se muestra la tendencia de los resultados para el experimento 1 donde se ve un muy bien resultado en yaw; sin embargo, para pitch las primeras

Tabla 6-2: Parámetros obtenidos a partir de la identificación no lineal experimento 2.

Parámetro	K_{pp}	K_{py}	K_{yp}	K_{yy}	Jy	J_p	D_p	D_y	B
$0-30$	0.034	-0.035	-0.001	-0.001	0.000	0.648	0.227	0.011	0.032
$30-60$	0.082	-0.028	-0.004	-0.005	1.000	0.842	0.210	0.066	0.032
$60-90$	0.051	-0.018	-0.003	-0.009	0.546	1.000	0.209	0.094	0.032
$90-120$	0.085	-0.029	-0.006	-0.007	1.000	0.786	0.227	0.094	0.032
$120-150$	0.053	-0.020	-0.000	-0.001	0.000	1.000	0.135	0.006	0.032
$150-180$	0.085	-0.026	-0.002	-0.002	0.214	0.802	0.228	0.026	0.032
$180-210$	0.050	-0.017	-0.004	-0.013	0.798	1.000	0.213	0.130	0.032
$210-240$	0.085	-0.029	-0.008	-0.009	1.000	0.771	0.221	0.165	0.032

oscilaciones se encuentran desfasadas y con diferencias significativas en la amplitud. Para el caso de los resultados del experimento 2 **6-13**, los resultados durantel el primer siclo son los esperados y durante el segundo se ve el desfase, esto es lo esperado, pues el modelo no responde instantáneamente a los cambios bruscos en el voltaje.

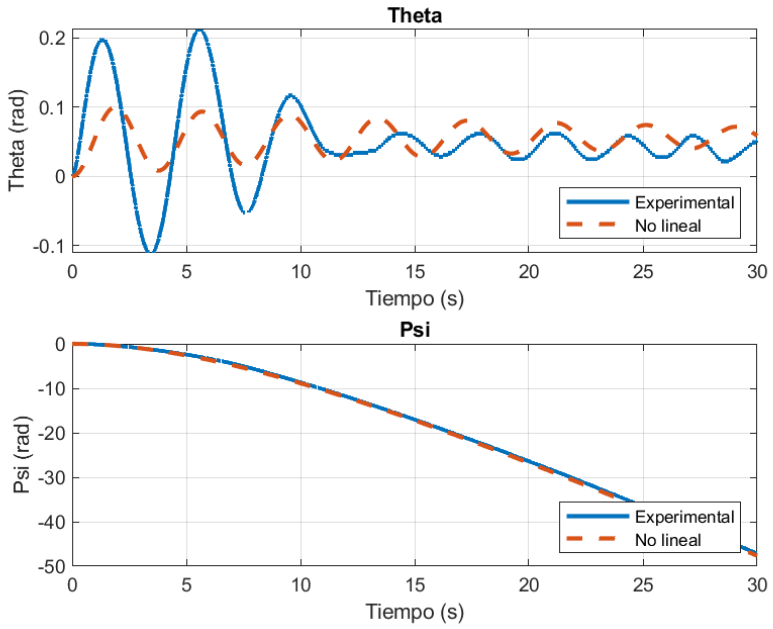


Figura 6-12: Resultados estimación experimento 1 intervalo 30-60.

Los resultados a cada una de las pruebas se encuentran en los anexos de este documento C, no obstante, las métricas usadas para establecer la calidad del

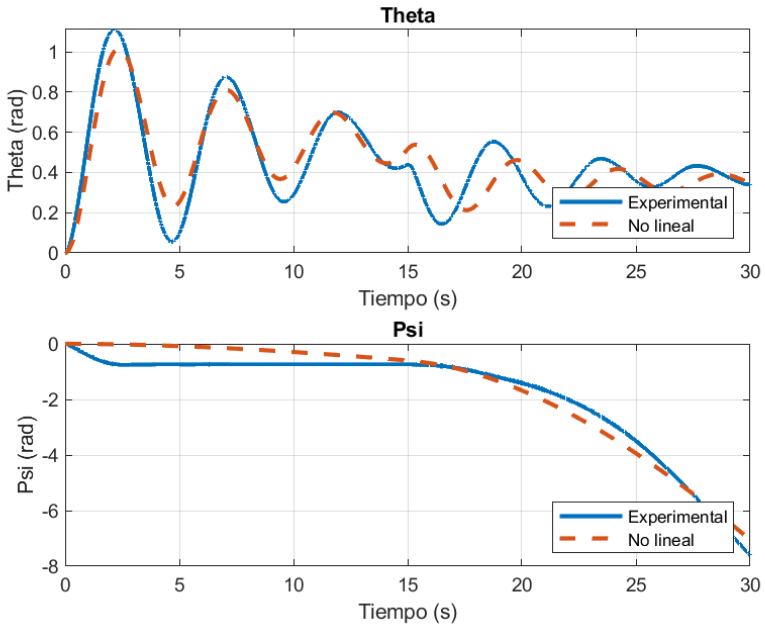


Figura 6-13: Resultados estimación experimento 2 intervalo 30-60.

resultado se muestran en las tablas **6-3** y **6-4**.

- Porcentaje de ajuste: Medido mediante el error cuadrático medio normalizado (NRMSE). Un valor más alto indica un mejor ajuste del modelo a los datos.
  Porcentaje de ajuste= $100(1 - \mathbf{NRMSE})$
- MSE: Mide la diferencia promedio al cuadrado entre los valores estimados por el modelo y los valores reales.
- FPE:Es el error de predicción final del modelo. Esta métrica estima el error de predicción que se esperaría si se aplicara el modelo a un nuevo conjunto de datos.
- AIC Es una medida de la calidad del modelo que penaliza la complejidad del modelo.
  $\mathbf{AIC} = 2k - 2\ln L$
  Donde (k) es el número de parámetros en el modelo y (L) es la función de verosimilitud.

Tomando los resultados tantos de los experimentos se llega al modelo (6-7), los resultados para los valores $D_p, D_y, J_p\, J_y$, se encuentran en el rango esperado, sin embargo, las ganancias que representan los efectos cruzados cambiaron de signo,

Tabla 6-3: Resultados validación experimento 1.

Intervalo	Porcentaje de ajuste pitch	Porcentaje de ajuste yaw	MSE	FPE	FAIC
30-60	1.762e+1	9.937e+1	1.100e-2	1.85e-05	-9.340e+4
90-120	6.967e+0	9.906e+1	1.900e-2	3.57e-05	-8.350e+4
150-180	1.475e+1	9.930e+1	1.100e-2	2.14e-05	-9.120e+4
210-240	1.137e+1	9.925e+1	1.400e-2	2.45e-05	-8.910e+4

Tabla 6-4: Resultados validación experimento 2.

Rango	Porsentaje de ajuste pitch	Porsentaje de ajuste yaw	MSE	FPE	FAIC
0-30	4.454e+1	9.764e+1	2.070e-2	7.460e-5	-7.240e+4
30-60	5.322e+1	7.658e+1	1.923e-1	1.893e-3	-2.390e+4
60-90	2.702e+1	9.466e+1	5.710e-2	5.840e-4	-4.150e+4
90-120	5.622e+1	7.747e+1	3.124e-1	2.504e-3	-1.970e+4
120-150	2.869e+1	9.556e+1	5.197e-2	5.800e-4	-4.160e+4
150-180	5.404e+1	8.484e+1	2.331e-1	1.950e-3	-2.350e+4
180-210	2.545e+1	9.454e+1	7.012e-2	8.080e-4	-3.670e+4
210-240	5.584e+1	7.546e+1	3.865e-1	3.038e-3	-1.680e+4

implicando que el aporte de estas se opone al movimiento generado por los motores principales. Este modelo es válido para desplazamientos en θ de 0.2 rad (°11,5), una forma de utilizarlo para un movimiento más grande es esperar a que el sistema se estabilice e inyectar otro escalon que lo desplace otros 0.2 radianes más.En las figuras **6-14** y **6-15**, se muestran los resultados.

$$\ddot{\theta} = \frac{0{,}065V_p + -0{,}0251V_y + 0{,}0316\dot{V}_y - 0{,}208\dot{\theta} - 0{,}0348\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\psi}^2 - 1{,}6234\cos(\theta)}{0{,}856}$$
$$\ddot{\psi} = \frac{-0{,}003V_p - 0{,}05V_y - 0{,}07389\dot{\psi} + 0{,}0348\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}}{0{,}0348\cos^2(\theta) + 0{,}570} \tag{6-7}$$

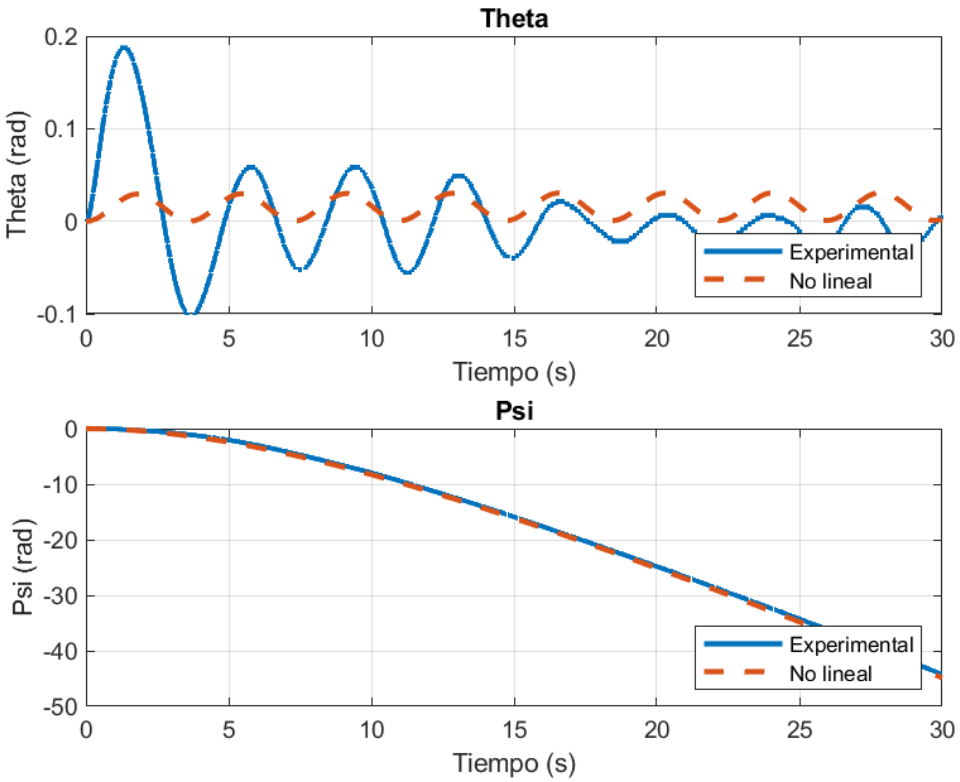


Figura 6-14: Resultados estimación experimento 1 intervalo 90-120.

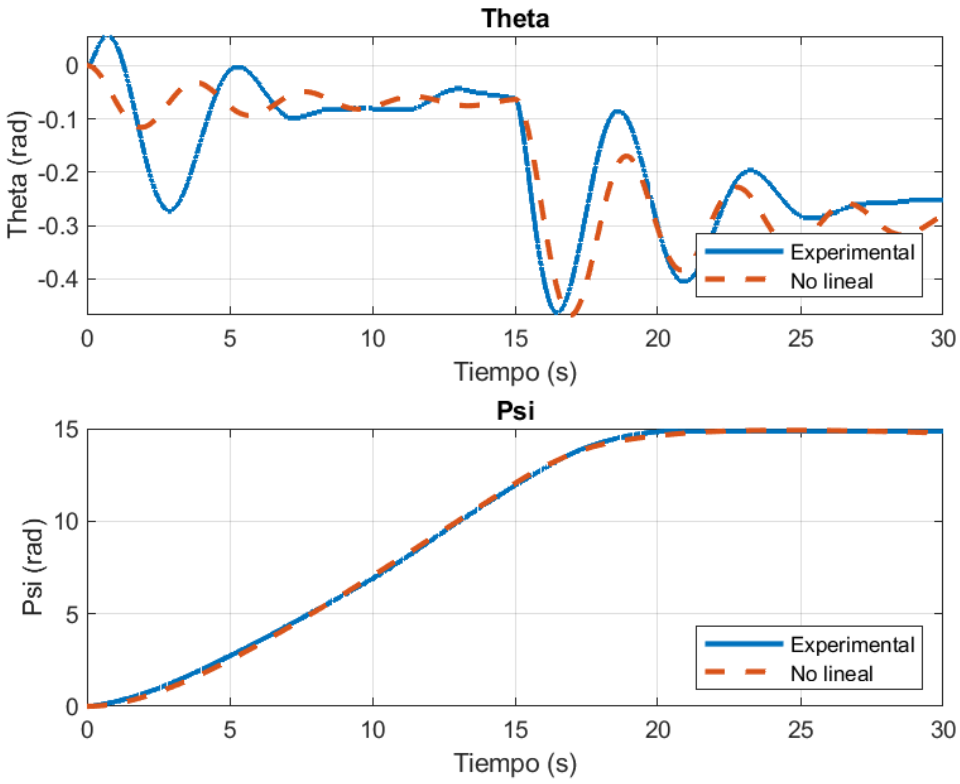


Figura 6-15: Resultados estimación experimento 1 intervalo 0-30.

Capítulo 7

Consideraciones

El objetivo de este capítulo es dar a conocer dificultades, experiencias y procesos que, si bien no puede que no hayan sido parte de la ruta para llegar a los resultados presentados en el documento, sí fueron parte del proceso en general.

7.1. Dificultades

En este desarrollo fue particularmente desafíente determinar la forma correcta de realizar la toma de datos para la identificación, esto debido a que a lo largo del material propuesto por el fabricante [1] se sugiere el uso de controladores basados en un modelo extremadamente simplificado (sin interacciones entre los ejes); generando que para evitar caer en la zona muerta las señales de control sean prácticamente de tipo on/off, pues las señales se saturan o señales de alta frecuencia que debido a la función de transferencia del motor no generaban la respuesta esperada.

En la figura **7-1** se aprecia como aun sin saturarse se obtuvo el comportamiento descrito, en este caso particular ocurre, pues se consideró utilizar un offset para cada eje con el objetivo de evitar la zona muerta; sin embargo, este fue conceptualizado de forma errónea, ya que no es un voltaje propio sobre un eje el único que se encarga de generar movimiento sino la fuerza neta aplicada y esta es proveniente

de los dos motores.

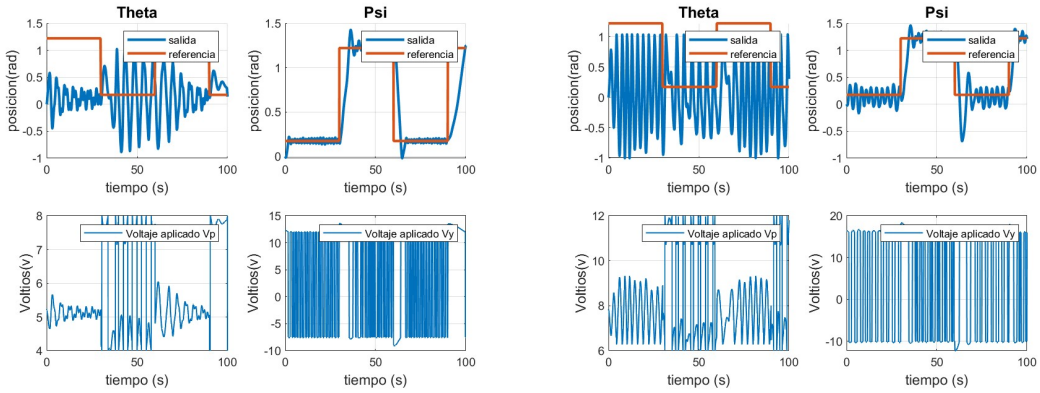


Figura 7-1: Datos lazo cerrado offset referencia de 1.047 rad (°60).

Por otro lado, en la figura **7-2**, se aparecía una situación donde las señales de control en sus picos se saturan y además tiene componente de alta frecuencia a los que los actuadores no responden.

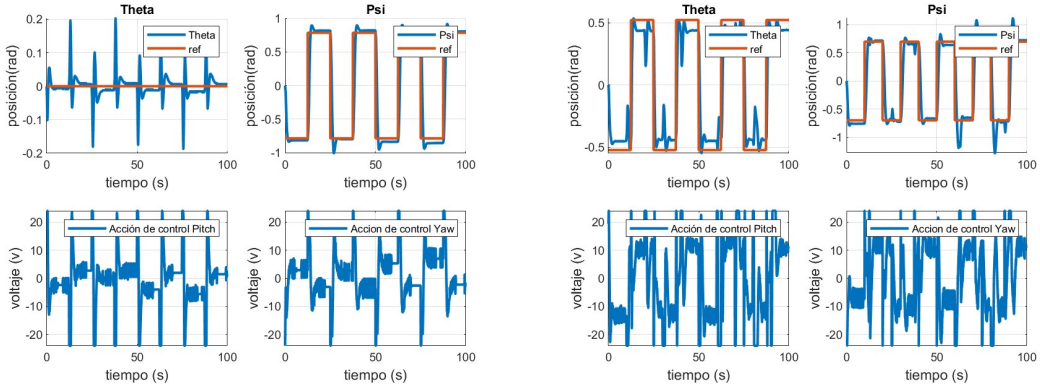


Figura 7-2: Datos lazo cerrado controlador LQR.

Otro punto donde era valioso el análisis era la relación entre movimientos y si era correcta la convención asumida al emparejar los motores con los movimientos, es decir, el motor de dirección controla el pitch y el de cola el yaw; mediante la matriz (RGA)

$$R = P(0) \cdot P^{-1}(T(0)) \qquad R = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

Siendo $P(0)$ la ganancia estática del sistema. λ es el índice de interacción, si su valor es 0 o 1 no existe la relación; si es 0.5 los lazos se deben intercambiar y si

$0{,}67 \leq \lambda \leq 1{,}5$ se sugiere desacoplar. Asumiendo que se va a utilizar la diagonal principal para escoger la función de cada motor, se busca entonces otra matriz que representa un grupo de funciones de transferencias que al multiplicarlos por la planta cancelen los efectos no deseados.

$$RGA = \begin{pmatrix} 0{,}2840 & 0{,}7160 \\ 0{,}7160 & 0{,}2840 \end{pmatrix} \tag{7-1}$$

Vale la pena resaltar que $Q(s)$ se utiliza para el diseño del los controladores.

$$G(s)D(s) = Q(s) = \begin{pmatrix} q_1(s) & 0 \\ 0 & q_2(s) \end{pmatrix}$$

$$G \cdot D = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}d_{11} + g_{12}d_{21} & g_{11}d_{12} + g_{12}d_{22} \\ g_{21}d_{11} + g_{22}d_{21} & g_{21}d_{12} + g_{22}d_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{pmatrix} \quad Q(s) = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{11}} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si se intercambia la función de cada motor se tiene:

$$D(s) = \begin{pmatrix} -\frac{g_{12}}{g_{11}} & 1 \\ 1 & -\frac{g_{21}}{g_{22}} \end{pmatrix} \quad Q(s) = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{21}g_{11}}{g_{12}} \end{pmatrix}$$

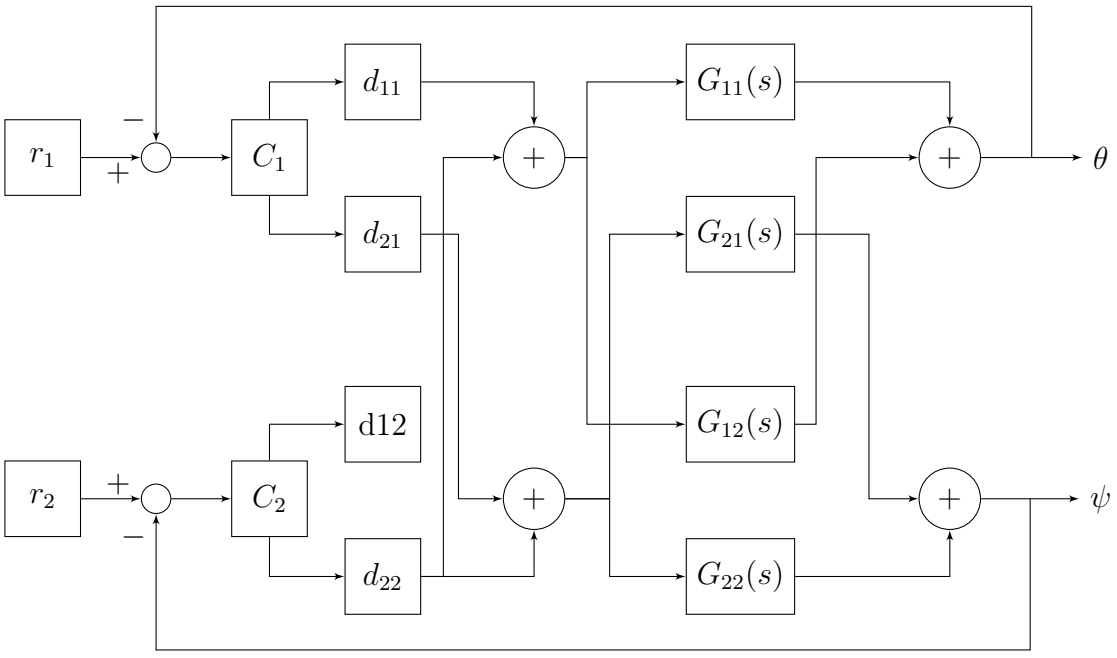


Figura 7-3: Sistema representado en bloques.

Ya que los resultados expuestos en (7-1) indicaban la necesidad de intercambiar las convenciones y además construir un desacoplador, se realizó el proceso.

Desacoplador

$$C_{11} = \frac{-4{,}818s^2 - 1{,}408s - 7{,}92}{2{,}409s^2 + 0{,}704s + 3{,}96}$$

$$C_{22} = \frac{6{,}38s^2 + 3{,}544s}{5{,}06es^2 + 2{,}811s}$$

Sin embargo, los resultados expuestos en las figuras **7-4**, **7-5**, **7-6** muestran tanto señales de alta frecuencia como saturación, ya que los motores deben esforzarse demasiado para realizar el control al cambiar la convención.

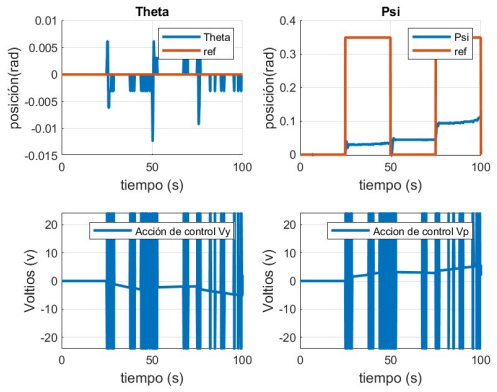


Figura 7-4: Quanser Theta 0 rad Psi 1.074 rad.

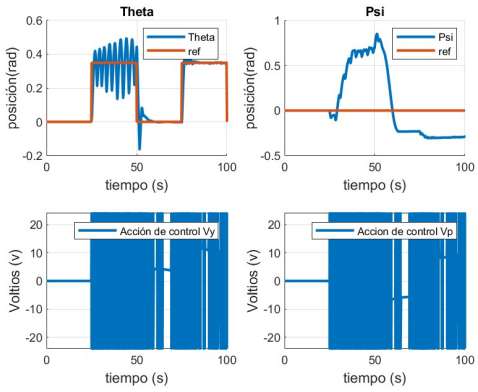


Figura 7-5: Quanser Theta 1.074 rad Psi 0 rad.

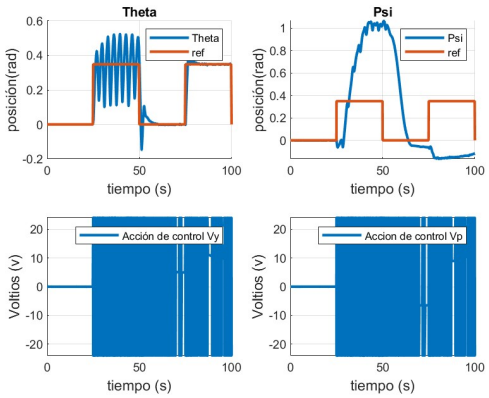


Figura 7-6: Quanser Theta 1.074 rad Psi 1.074 rad.

Otro elemento que se debe considerar es la bibliografía disponible, pues en la gran mayoría se da por sentado el proceso de modelamiento sin detenerse a las particularidades del sistema. Se ha encontrado que a este tipo de montajes se les da varios nombres sin distinción, helicóptero de dos grados de libertad, TRMS (sistema de motores gemelos) y toycopter [16]. Sin embargo, se tienen variaciones dependiendo de la masa de cada extremo, la distancia al centro de masa de cada eje y la inclusión de contrapesos [17][18].

Es importante resaltar que además no se hace énfasis en el punto de operación, siendo este crucial, y generalmente se asume la linealización alrededor de 0, si bien esto se hace con otros sistemas, en este trabajo se encontró que el punto de trabajo de θ afecta bastante la respuesta. Adicionalmente, muy pocos contrastan los resultados obtenidos de sus controladores particulares con los de la simulación por lo que no se tiene una certeza de la calidad del modelo sino únicamente una aproximación de que tan "bueno" es el controlador, basándose en las características estáticas es decir el valor final.

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro

8.1. Conclusiones

Durante el desarrollo del trabajo se encontraron diversas situaciones que dificultaron el proceso de identificación, siendo la principal la calidad de la documentación entregada por el fabricante de la planta e incluso la bibliografía disponible, debido a que al partir de los desarrollos ya planteados se evidenciaron limitantes en varios procesos.

El primer elemento que se revisó fue la modelización del sistema abordada mediante Euler−Lagrange, este es importante, pues permitió integrar características propias del sistema como lo es el desplazamiento del centro de masa de cada uno de los ejes cartesianos y la forma como se establecen las convenciones del movimiento. En este proceso, se evidenció la importancia de caracterizar y diferenciar entre los distintos tipos de helicópteros con 2 grados de libertad, pues es a partir de esas características que se generan los términos no lineales de la dinámica, proceso que es generalmente omitido.

Al trabajar en la toma de datos, con el fin de obtener resultados que representaran la totalidad de la dinámica del sistema, fue necesario familiarizarse con la planta. El primer elemento que se encuentra son las zonas muertas, en donde aún cuando los motores están en funcionamiento, no se genera algún desplazamiento; estas

son diferentes para cada movimiento y para cada sentido de rotación. Lo anterior, lleva a evidenciar la diferencia entre el torque producido en cada sentido de giro de los motores y a su vez a cuestionarse la forma correcta de modelarlo.

Una vez se tuvo claridad de estos efectos, se escogió la forma de tomar las mediciones, ya sea directamente entrada-salida o mediante el uso de un controlador. Si bien en la literatura se insinúa que debido a la inestabilidad del movimiento en el eje z es prudente usar un controlador, en este desarrollo se encontró que la mayoría de controladores diseñados con la información dada por el fabricante generan señales de control que se saturan rápidamente o son de relativa alta frecuencia, dificultando la estimación de parámetros. Por lo anterior, se optó por una identificación directa, con señales de control o referencias tipo escalón. Para el movimiento al rededor del eje y, se hizo una identificación en lazo abierto, mientras que para el movimiento al rededor del eje z, se hizo una identificación en lazo cerrado, con realimentación unitario y una ganancia proporcional de 50. De esta forma fue posible extraer las características dinámicas de cada relación. Para este proceso se buscó aislar los movimientos, es decir, caracterizar de forma independiente cada una de las relaciones $\frac{\theta}{v_p}$, $\frac{\psi}{v_p}$, $\frac{\theta}{v_y}$, $\frac{\theta}{v_y}$, no obstante esto limita el rango de las señales de entrada, pues se buscó llegar a un comportamiento estable, pero las interacciones entre los ejes son fuertes.

En el momento de la identificación se buscó una función de transferencia que se ajustara a los resultados obtenidos, esto fue particularmente interesante para la relación $\frac{\theta}{v_p}$ pues se encontró una función con dos polos y un cero, cuando el desarrollo teórico indicaba la ausencia de ceros, posiblemente relacionado con la forma en la que se modeló el torque generado por el motor. Otro elemento interesante fue el alta no linealidad de las relaciones, cuya salida es ψ pues a la misma entrada, generaba distintos comportamientos.

Para la estimación de los coeficientes del modelo no lineal se partió de los coeficientes encontrados en la aproximación lineal, para el caso particular de $\frac{\theta}{V_p}$ se propuso la incorporación de la fricción de Coulomb, para el resto de movimientos se realizó un ajuste manual para acercarse a la respuesta esperada, obteniendo un buen comportamiento en pitch. Sin embargo, en yaw la respuesta solo es válida en un punto de operación pequeño. Con el objetivo de mejorar la calidad del modelo se utilizó el toolbox de system identification de MATLAB, obteniendo resultados muy buenos. No obstante se resalta la importancia de los valores iniciales, pues el

paisaje de optimización tiene bastantes mínimos locales y al no escoger los valores iniciales correctamente o simplemente incitarlos en 0 es imposible llegar a un resultado satisfactorio.

Aunque este proceso resultó en un modelo no lineal listo para su uso, es fundamental destacar la importancia del procedimiento y el método desarrollado. A través de este, el lector puede caracterizar su propia planta, ajustando la estructura inicial según las características específicas de la planta y realizando sus propios experimentos

Este proceso es importante, pues partiendo del análisis que se presentó se comprenden los componentes del modelo, y al seguirlo se obtiene un modelo especializado para la planta en uso. Adicionalmente, lo anterior plantea una herramienta que busca reducir la curva de aprendizaje para la modelización e identificación, permitiendo así concentrarse en otros aspectos como lo puede llegar a ser el control.

8.2. Trabajos futuros

Inicialmente, se propone diseñar e implementar controladores avanzados, especialmente aquellos que se basen en el modelo no lineal, no solo para validar el comportamiento del mismo, sino también para explotar algunas de sus ventajas. Esto incluye la implementación de restricciones de entrada y salida, señales de control suavizadas y restricciones en la velocidad de cambio del voltaje. Estos aspectos son cruciales para mejorar la estabilidad y eficiencia del sistema, y los datos obtenidos de estas pruebas podrían ser utilizados para ajustar y optimizar aún más el modelo.

Si bien los modelos obtenidos permiten la simulación de la planta, un análisis teórico más profundo del torque generado por los motores, así como de la importancia de la forma de las hélices, podría conducir a un modelo más complejo y preciso. Este puede incluir la incorporación de efectos no lineales más avanzados y un estudio detallado de las fuerzas aerodinámicas mediante técnicas como la simulación CFD (Computational Fluid Dynamics). Este enfoque permitiría mejorar la fidelidad del modelo y abordar fenómenos que el modelo actual no captura completamente.

Por otro lado, la identificación precisa de los parámetros del sistema mediante técnicas de identificación en tiempo real lograría mejorar la similitud entre el modelo y el comportamiento real del helicóptero.

También podrían hacerse esfuerzos orientados en encontrar algún modelo para el sistema que incluyan incertidumbres en los parámetros.

Bibliografía

[1] Quanser, "Quanser AERO - 2DOF Lab Guide."

[2] J. Vishnupriyan, P. Manoharan, and A. Ramalakshmi, "Uncertainty modeling of nonlinear 2-DOF helicopter model," in *2014 International Conference on Computer Communication and Informatics*. Coimbatore, India: IEEE, Jan. 2014, pp. 1–6. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/document/6921840/

[3] M. Dyvik, D. E. Fjereide, and D. Rotondo, "Modeling and identification of the Quanser Aero using a detailed description of friction and centripetal forces," in *Modeling and identification of the Quanser Aero using a detailed description of friction and centripetal forces*, Oct. 2023, pp. 246–253. [Online]. Available: https://ecp.ep.liu.se/index.php/sims/article/view/773

[4] E. C. Vivas González, "Control del helicóptero 2D usando métodos de control robusto H infinito," Feb. 2011. [Online]. Available: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/7453

[5] R. Patel, D. Deb, H. Modi, and S. Shah, "Adaptive backstepping control scheme with integral action for quanser 2-dof helicopter," in *2017 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, 2017, pp. 571–577.

[6] S. I. Abdelmaksoud, M. Mailah, and A. M. Abdallah, "Practical Real-Time Implementation of a Disturbance Rejection Control Scheme for a Twin-Rotor Helicopter System Using Intelligent Active Force Control," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 4886–4901, 2021. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9305201

[7] B. Wu, J. Wu, J. Zhang, G. Tang, and Z. Zhao, "Adaptive Neural Control of a 2DOF Helicopter with Input Saturation and Time-Varying Output Constraint," *Actuators*, vol. 11, no. 11, p. 336, Nov. 2022. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/2076-0825/11/11/336

[8] A. Ramalakshmi, P. Manoharan, K. Harshath, and M. Varatharajan, "Model predictive control of 2DOF helicopter," *International journal of innovation and scientific research*, Jun. 2016. [Online]. Available: https://www.semanticscholar.org/paper/Model-predictive-control-of-2DOF-helicopter-Ramalakshmi-Manoharan/546b8bc047300e571bd8a9df57ec377d5991deb2

[9] G. G. Neto, F. Dos Santos Barbosa, and B. A. Angelico, "2-DOF helicopter controlling by pole-placements," in *2016 12th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*. Curitiba, PR, Brazil: IEEE, Nov. 2016, pp. 1–5. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/document/7874535/

[10] V. G. Sanchez-Meza, Y. Lozano-Hernandez, and O. O. Gutierrez-Frias, "Modeling and Control of a Two DOF Helicopter with Tail Rotor Disturbances," in *2020 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*. Cuernavaca, Mexico: IEEE, Nov. 2020, pp. 79–84. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/9359410/

[11] H.-S. Jeong, S.-M. Chang, and J.-S. Park, "Sliding Mode Trim and Attitude Control of a 2-00F Rigid-Rotor Helicopter Model," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 23–32, Dec. 2005. [Online]. Available: http://koreascience.or.kr/journal/view.jsp?kj=HGJHC0&py=2005&vnc=v6n2&sp=23

[12] "CE 150 HELICOPTER MODEL." [Online]. Available: https://www3.diism.unisi.it/~control/cmr/altro/heli_ce150_manual.pdf

[13] J. M. Frasik and S. I. L. Gabrielsen, "PRACTICAL APPLICATION OF ADVANCED CONTROL : An evaluation of control methods on a Quanser AERO," in *PRACTICAL APPLICATION OF ADVANCED CONTROL : An evaluation of control methods on a Quanser AERO*, 2018. [Online]. Available: https://www.semanticscholar.

org/paper/PRACTICAL-APPLICATION-OF-ADVANCED-CONTROL-%3A-An-of-a-Frasik-Gabrielsen/86b1d1c93a95da917937c84a968ec9d3cbaab006

[14] M. Reyhanoglu, M. Jafari, and M. Rehan, "Simple Learning-Based Robust Trajectory Tracking Control of a 2-DOF Helicopter System," *Electronics*, vol. 11, no. 13, p. 2075, Jul. 2022. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/2079-9292/11/13/2075

[15] B. Wu, J. Wu, W. He, G. Tang, and Z. Zhao, "Adaptive Neural Control for an Uncertain 2-DOF Helicopter System with Unknown Control Direction and Actuator Faults," *Mathematics*, vol. 10, no. 22, p. 4342, Jan. 2022. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/22/4342

[16] P. Mullhaupt, B. Srinivasan, J. Levine, and D. Bonvin, "Control of the Toycopter Using a Flat Approximation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 5, pp. 882–896, Sep. 2008. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/4480149

[17] A. Tastemirov, A. Lecchini-Visintini, and R. M. Morales-Viviescas, "Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation," *Control Engineering Practice*, vol. 66, pp. 89–98, Sep. 2017. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066117301351

[18] L. M. Belmonte, R. Morales, A. Fernández-Caballero, and J. A. Somolinos, "Robust Decentralized Nonlinear Control for a Twin Rotor MIMO System," *Sensors*, vol. 16, no. 8, p. 1160, Aug. 2016. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/1424-8220/16/8/1160

Anexos

A. Aporte motor de dirección y pitch datos completos

En esta sección se presentan datos adicionales tomados al aplicar una señal únicamente al motor de pitch para analizar su efecto sobre ambos movimientos. La señal aplicada es una escalera donde cada escalón tienen un offset de la misma magnitud que su amplitud, la figura **8-1** tiene un offset de 3 v, la **8-1** de 4v, **8-1** de 5v, **8-1** de 6 v y **8-1** de 7 v.

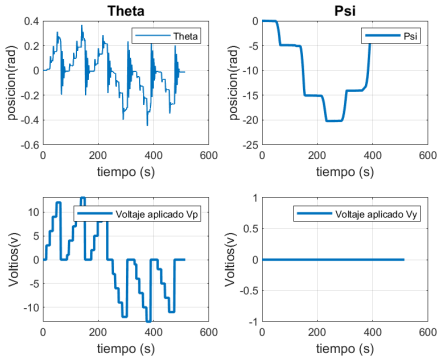


Figura 8-1: Escalón 3v vp-theta.

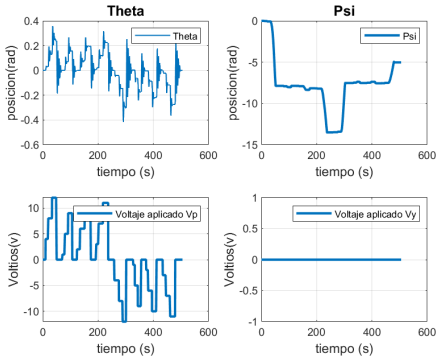


Figura 8-2: Escalón 4v vp-theta.

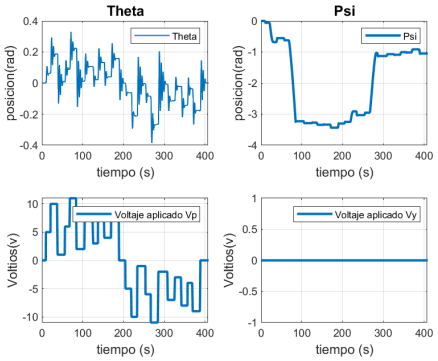


Figura 8-3: Escalón 5v vp-theta.

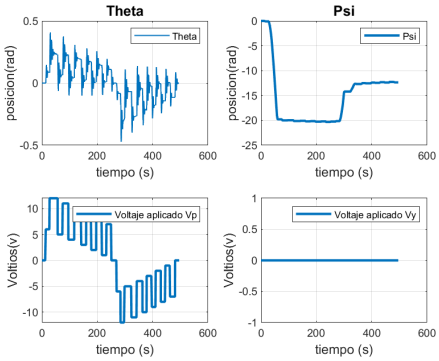


Figura 8-4: Escalon 6v vp-theta.

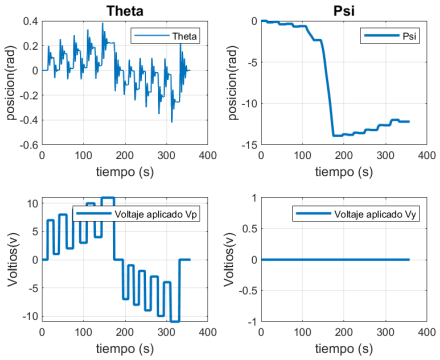


Figura 8-5: Escalon 7v vp-theta.

B. Aporte motor de dirección y pitch datos separados

Los siguientes datos son el resultado, de tomar los datos correspondientes al aporte del motor de dirección sobre pitch, separar en intervalos y quitar el offset, de forma que todas las pruebas comiencen desde cero. Las figuras **8-6 8-7** para 2 v, **8-8 8-9** 3 v, **8-10 8-11** 4 v, **8-12 8-13** 5 v, **8-14 8-15** 6 v, **8-16 8-17** 7 v y **8-18 8-19** 8 v.

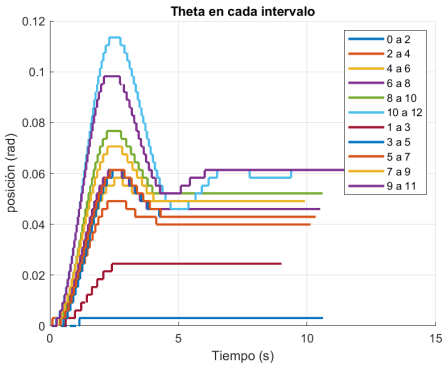


Figura 8-6: Escalón 2v intervalo 1.

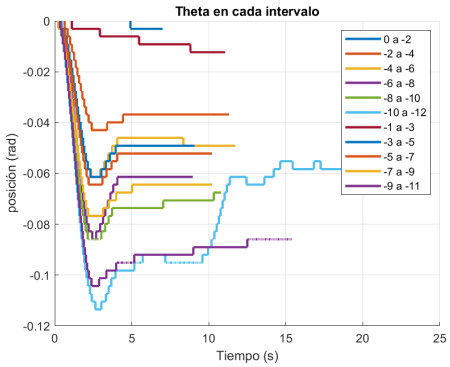


Figura 8-7: Escalón 2v intervalo 2.

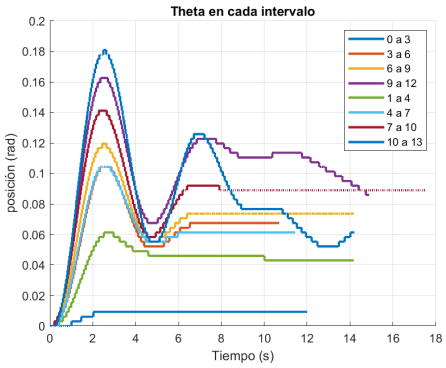


Figura 8-8: Escalón 3v intervalo 1.

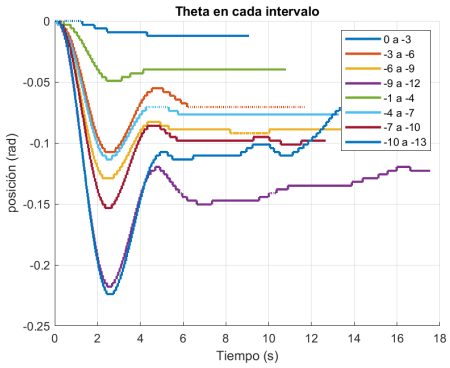


Figura 8-9: Escalón 3v intervalo 2.

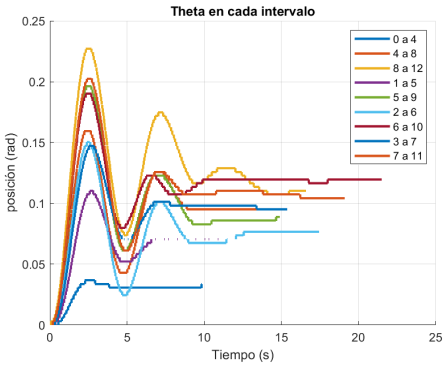


Figura 8-10: Escalón 4v intervalo 1.

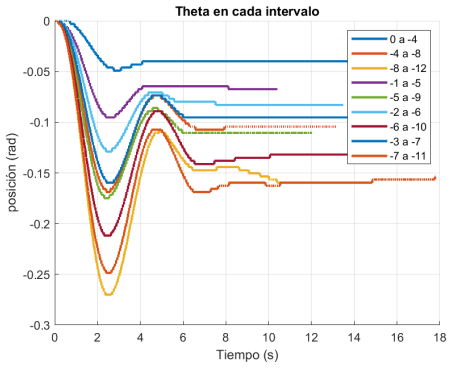


Figura 8-11: Escalón 4v intervalo 2.

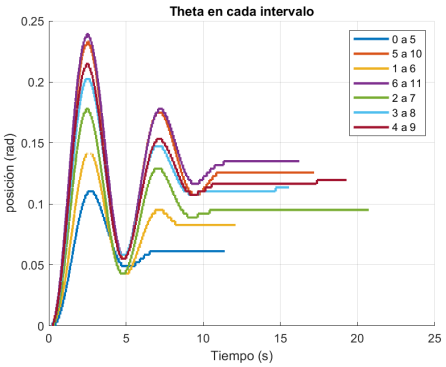


Figura 8-12: Escalón 5v intervalo 1.

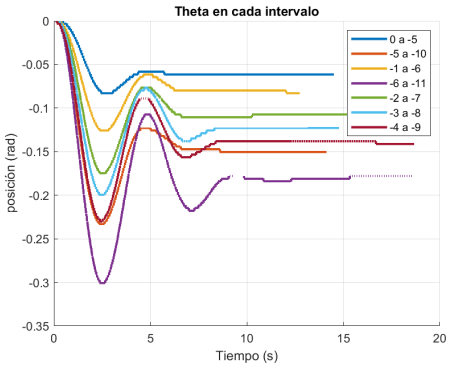


Figura 8-13: Escalón 5v intervalo 2.

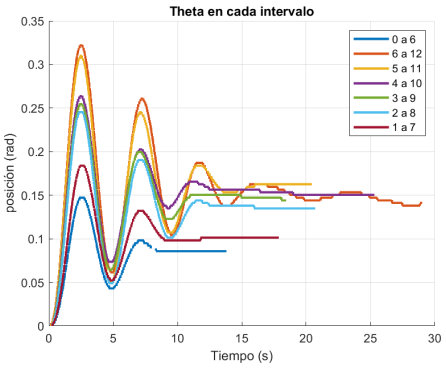


Figura 8-14: Escalón 6v intervalo 1.

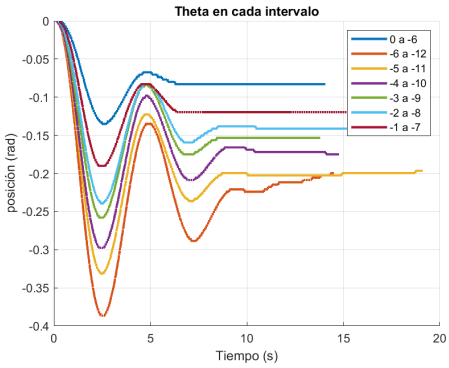


Figura 8-15: Escalón 6v intervalo 2.

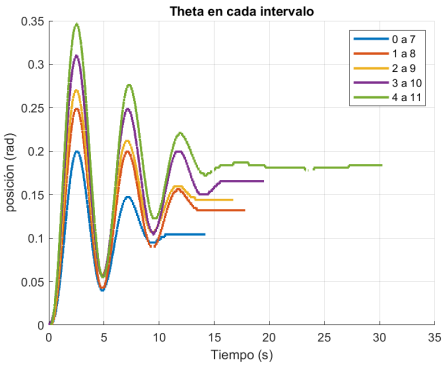


Figura 8-16: Escalón 7v intervalo 1.

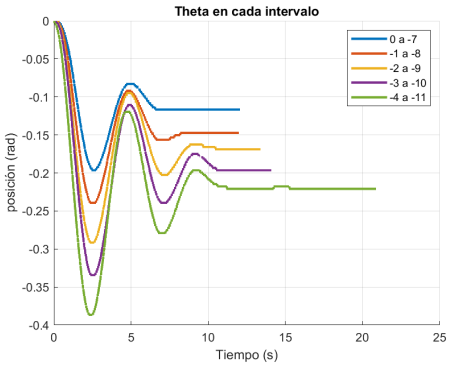


Figura 8-17: Escalón 7v intervalo 2.

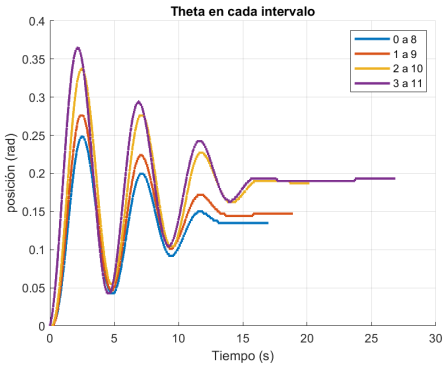


Figura 8-18: Escalón 8v intervalo 1.

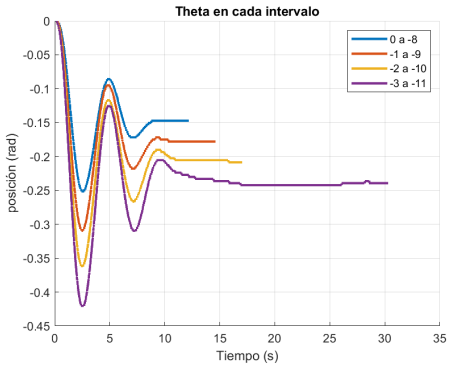


Figura 8-19: Escalón 8v intervalo 2.

C. Resultados estimación no lineal

A continuación se presentan los resultados de los ajustes realizados al modelo no lineal usando la toolbox de matalb para cada conjunto de datos utilizado. Los resultados de las figuras **8-20** a **8-27** corresponden a los datos de la figura **6-9** y los de las figuras **8-30** a **8-28**

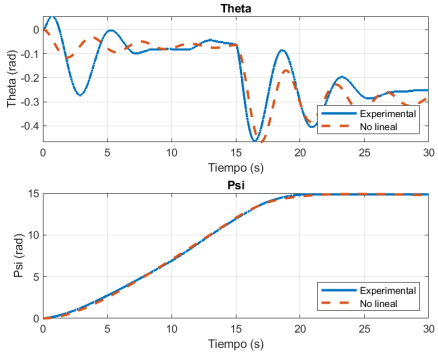


Figura 8-20: Archivo 2 0 30.

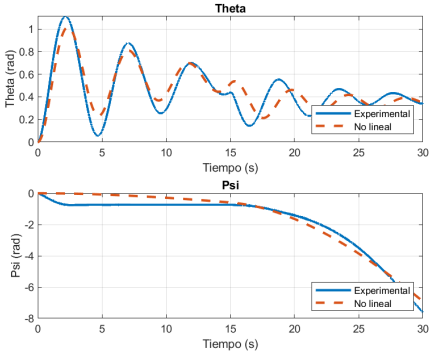


Figura 8-21: Archivo 2 30 60.

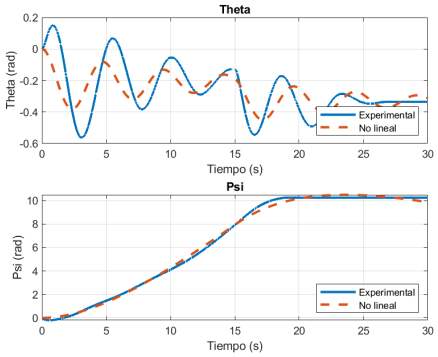


Figura 8-22: Archivo 2 60 90.

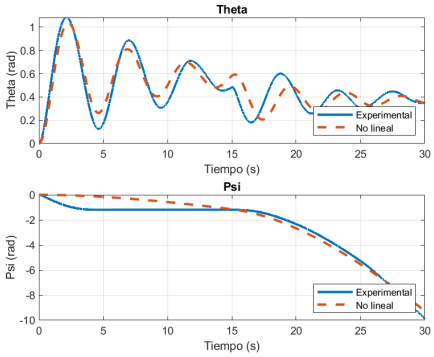


Figura 8-23: Archivo 2 90 120.

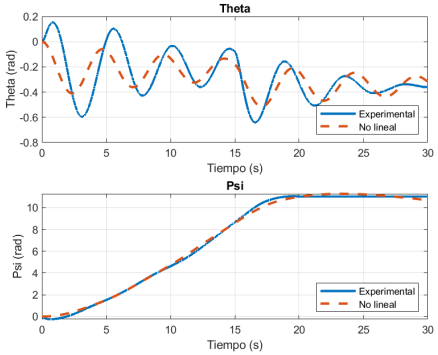


Figura 8-24: Archivo 2 120 150.

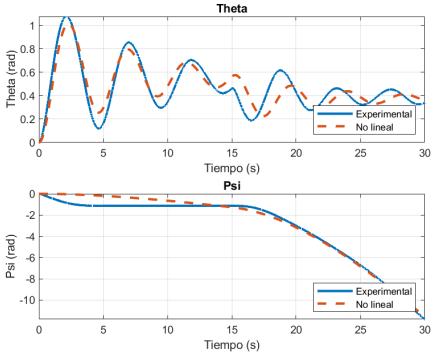


Figura 8-25: Archivo 2 150 180.

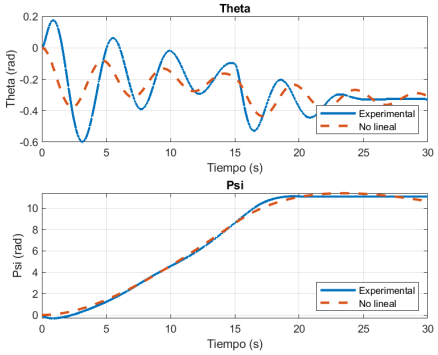


Figura 8-26: Archivo 2 180 210.

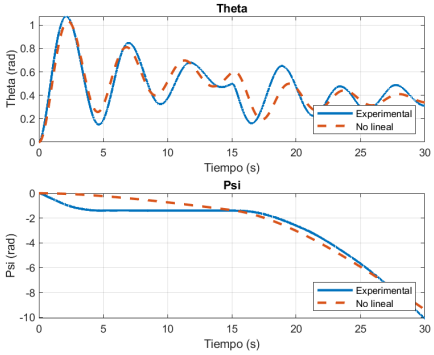


Figura 8-27: Archivo 2 210 240.

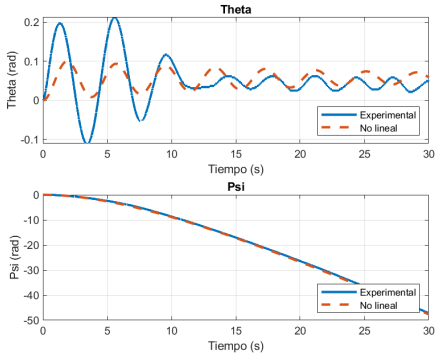


Figura 8-28: Archivo 1 30 60.

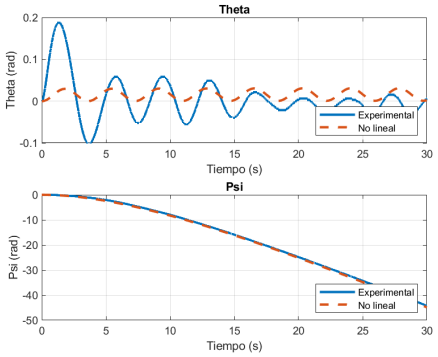


Figura 8-29: Archivo 1 90 120.

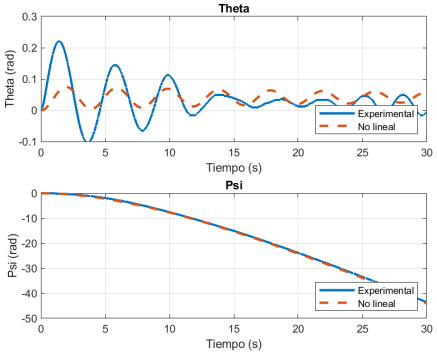


Figura 8-30: Archivo 1 150 180.