Números racionales positivos, relaciones de orden y densidad: Procesos de matematización de estudiantes del grado octavo.

Juan David Díaz López

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá D.C

2021

Números racionales positivos, relaciones de orden y densidad: Procesos de matematización de estudiantes del grado octavo.

Juan David Díaz López

Director

Luis Ángel Bohórquez Arenas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá D.C

2021

RESUMEN

La presente propuesta de investigación está orientada a desarrollar un tratamiento cualitativo al problema referido a la noción de densidad de los números racionales positivos ya que, autores como Broitman et al. (2003) expresan al respecto que no existe en la literatura investigativa una variedad de trabajos que desde diferentes perspectivas den cuenta del proceso de su enseñanza-aprendizaje, por esta razón, se ha seleccionado trabajar bajo los principios de la educación matemática realista con el propósito de exponer las matematizaciones gestionadas por los estudiantes del grado octavo al enfrentarse a situaciones de orden entre fracciones orientadas a construir la noción de densidad de los números racionales positivos a través de la construcción de un instrumento (cuestionario) que pueda ser aplicado previo a la instrucción, como un tópico que puede aportar al marco de trabajos investigativos realizando un análisis a priori desde la perspectiva (Zolkower, Bressan y Gallego, 2016).

Palabras clave: Orden, densidad, matematización, procesos, racionales positivos, fracción, decimal.

ABSTRACT

This research proposal is aimed at developing a qualitative treatment of the problem related to the notion of density of positive rational numbers, since authors such as Broitman et al. (2003) express in this regard that there is not in the research literature a variety of works that from different perspectives account for the teaching-learning process, for this reason, it has been selected to work under the principles of realistic mathematics education with the purpose to expose the mathematizations managed by eighth grade students when facing situations of order between fractions aimed at constructing the notion of density of positive rational numbers through the construction of an instrument (questionnaire) that can be applied prior to instruction , as a topic

that can contribute to the framework of research work by carrying out an a priori analysis from the perspective (Zolkower, Bressan & Gallego, 2016).

Keywords: Order, density, mathematization, processes, positive rationals, fraction, decimal.

Tabla de contenido

RESUMEN I

INTRODUCCIÓN X

1. Contextualización del problema 1

1.1. Antecedentes 1

1.2 Delimitación del problema 7

2. Marco teórico 10

2.1 El análisis fenomenológico 10

2.1.1 tipos de análisis fenomenológico 12

2.1.2 concepción de las matemáticas 13

2.1.3 sistemas matemáticos de signos 14

2.1.4 objetos mentales vs conceptos 16

2.2 Principios de la Educación Matemática Realista (EMR) 18

2.2.1 principio de actividad 18

2.2.2 principio de realidad 19

2.2.3 principio de reinvención guiada 20

2.2.5 ¿Qué es la didáctica desde la perspectiva de la EMR? 23

2.3 Al respecto de las representaciones 24

1.3.1 La EMR y las representaciones 24

2.4 Dificultades observables en el aprendizaje de los números racionales en su notación fracción 39

2.4.1 Dificultades en el reconocimiento de esquemas 40

2.4.2 Dificultades en la gestión del adjetivo igual 41

2.4.3 Dificultades en la gestión de figuras no estándar 42

2.4.5 Dificultades en la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos ... 42

2.4.6 Exceso de representaciones semióticas 43

2.4.7 Imágenes y modelos formados demasiado pronto 43

2.4.8 misconcepciones 44

2.4.9 obstáculos ontogenéticos, didácticos y epistemológicos 44

2.5 Dificultades observables en el aprendizaje de los números racionales en su notación decimal 46

2.5.1 errores más frecuentes relacionados con el concepto de número decimal, con su escritura y con sus operaciones 46

2.6 Acerca de la enseñanza de los números racionales positivos 47

2.6.1 Perspectiva de Obando (2003) 47

2.7 Perspectiva de Gairín (1998) 54

2.7.1 Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción 54

2.7.2 solo se hace referencia a los números racionales positivos 54

2.7.4 No se abordan las fracciones con significado de razón. 55

2.7.5 Asociar los números racionales a la medida de magnitudes 55

2.7.6 Comenzar la instrucción con las fracciones 57

2.7.7 Introducir las fracciones con el significado de medida 57

2.7.8 Trabajar con las magnitudes más adecuadas 59

2.7.9 Introducir la fracción con significado de operador 60

2.7.10 Conectar las notaciones fraccionaria y decimal 61

2.7.11 La fracción como significado de cociente. 64

2.7.12 De la notación fraccionaria a la notación decimal 65

2.7.13 Relaciones y operaciones entre expresiones decimales 65

3. Metodología de investigación 67

3.1 El estudio de caso 67

3.2 Técnicas para recolección de la información 70

3.3 Construcción del cuestionario para la recolección de la información 71

3.3.1 Aproximación al análisis fenomenológico Puig (1997) 76

3.3.2 Sobre las categorías de análisis. 87

3.3.3 Cuestionario abierto. 89

3.3.4 Limitaciones del proyecto de investigación 98

4. Análisis de la información 100

4.1 Niveles de matematización alcanzados para la T1 de cada caso 101

4.1.1 Niveles de matematización alcanzados para la T1E1 101

4.1.2 Niveles de matematización alcanzados para la T1E2 103

4.1.3 Niveles de matematización alcanzados para la T1E3 105

4.1.4 Niveles de matematización alcanzados para la T1E4 107

4.2 Niveles de matematización alcanzados para la T2 de cada caso 108

4.2.1 Niveles de matematización alcanzados para T2E1 108

4.2.2 Niveles de matematización alcanzados para la T2E2 110

4.2.3 Niveles de matematización alcanzados para la T2E3 112

4.2.4 Niveles de matematización alcanzados para la T2E4 114

4.3 Niveles de matematización alcanzados para la T3 de cada caso 115

4.3.1 Niveles de matematización alcanzados para T3E1 115

4.3.2 Niveles de matematización alcanzados para la T3E2 117

4.3.3 Niveles de matematización alcanzados para la T3E3 119

4.3.4 Niveles de matematización alcanzados para la T3E4 121

4.4 Niveles de matematización alcanzados para la T4 de cada caso 123

4.4.1 Niveles de matematización alcanzados para la T4E1 123

4.4.2 Niveles de matematización alcanzados para la T4E2 124

4.4.3 Niveles de matematización alcanzados para la T4E3 126

4.4.4 Niveles de matematización alcanzados para la T4E4 128

4.5 Niveles de matematización alcanzados para la T5 de cada caso 130

4.5.1 Niveles de matematización alcanzados para la T5E1 130

4.5.2 Niveles de matematización alcanzados para la T5E2 131

4.5.3 Niveles de matematización alcanzados para la T5E3 133

4.5.4 Niveles de matematización alcanzados para la T5E4 134

4.6 Niveles de matematización alcanzados para la T6 de cada caso 136

4.6.1 Niveles de matematización alcanzados para la T6E1 136

4.6.2 Niveles de matematización alcanzados para la T6E2 137

4.6.3 Niveles de matematización alcanzados para la T6E3 139

4.6.4 Niveles de matematización alcanzados para la T6E4 140

4.7 Resumen de los niveles de matematización alcanzados por cada caso al respecto de las fenómenos y propósitos de las tareas 142

4.7.1 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E1 142

4.7.2 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E2 143

4.7.3 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E3 145

4.7.4 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E4 147

5. Conclusiones y reflexiones 149

Referencias Bibliográficas 169

Índice de Gráficos

Gráfico 1. Ejemplo de partición no estándar de la unidad (Fandiño, 2009). 41

Gráfico 2. Ejemplo de partición de la unidad en contexto discreto (Fandiño, 2009) 41

Gráfico 3. Ejemplo del uso del adjetivo igual en contexto continuo 42

Gráfico 4. Evidencia T1P3E1 102

Gráfico 5. Evidencia T1P3E2 104

Gráfico 6. Evidencia T1P3E3 106

Gráfico 7. Evidencia T1P3E4 107

Gráfico 8. Evidencia T2P3E1 109

Gráfico 9. Evidencia T2P4E2 111

Gráfico 10. EvidenciaT2P3E3 113

Gráfico 11. Evidencia T2P3E4 115

Gráfico 12. Evidencia T3P1E1 116

Gráfico 13 . Evidencia T3P3E2 118

Gráfico 14. Evidencia T3P3E3 120

Gráfico 15. Evidencia T3P2E4 122

Gráfico 16. Evidencia T4P2E1 124

Gráfico 17. Evidencia T4P3E2 125

Gráfico 18. Evidencia T4P2E3 127

Gráfico 19. Evidencia T4P2E4 129

Gráfico 20. Evidencia T5P3E1 130

Gráfico 21. Evidencia T5P2E2 132

Gráfico 22. Evidencia T5P2E3 134

Gráfico 23. Evidencia T5P2E4 135

Gráfico 24. Evidencia T6P1E1 137

Gráfico 25. Evidencia T6P1E2 138

Gráfico 26. Evidencia T6P1E3 139

Gráfico 27. Evidencia T6P1E4 141

Gráfico 28. Niveles de matematización alcanzados por E1 de acuerdo con las categorías de análisis..... 142

Gráfico 29. Niveles de matematización alcanzados por E2 de acuerdo con las categorías de análisis..... 144

Gráfico 30. Niveles de matematización alcanzados por E3 de acuerdo con las categorías de análisis..... 145

Gráfico 31. Niveles de matematización alcanzados por E4 de acuerdo con las categorías de análisis..... 147

Gráfico 32. Niveles de matematización alcanzados por los cuatro casos de acuerdo con las categorías de análisis..... 156

Índice de tablas

Tabla 1 142

Tabla 2 144

Tabla 3 145

Tabla 4 147

Tabla 5 156

INTRODUCCIÓN

La propuesta de investigación que se presenta a continuación, aborda el orden entre números racionales positivos y la noción de densidad, entendida esta última como la posibilidad de hallar un número racional entre otros dos números racionales dados y que, desde una perspectiva personal, es un primer paso en la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales y de objetos matemáticos más complejos como los del cálculo. Sin embargo, en la revisión bibliográfica realizada se identificó que al respecto del trabajo en el aula sobre la noción de densidad de los números racionales positivos no son muchos los informes de investigación que se puedan encontrar.

Algunos de estos resultados de investigación sugieren la necesidad de utilizar diferentes tipos de notaciones, otros establecen la necesidad de establecer primero la equivalencia de fracciones para la comprensión de la propiedad de densidad y la conveniencia de iniciar el estudio de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Sin embargo, dentro de las dificultades detectadas en la teoría al respecto de la propiedad de densidad se encontró, que un factor principal de dichas dificultades es el orden entre números racionales.

En este trabajo de grado se trata de relacionar el orden entre números racionales positivos con respecto a la noción de densidad haciendo uso de los principios de la Educación Matemática Realista (EMR), como un elemento que contribuye a la enseñanza de este concepto. Para tal propósito, dentro de la indagación realizada se pudo reconocer que el proceso de construcción de una sesión de clases dentro de la EMR, no es un proceso inmediato, ya que como lo expresa Bressan et al (2016) para identificar al respecto de un objeto matemático los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes es necesario realizar análisis didácticos a priori y a posteriori que posibiliten un desarrollo constante del acto educativo, no obstante, para realizar

estos análisis a priori, Puig (1997) expresa que implícito en la propuesta de Freudenthal, la cual, fundamenta la EMR, se encuentran una serie de análisis fenomenológicos que deberían realizarse previo a la enseñanza, para delimitar el campo de fenómenos y estrategias didácticas sobre dicho objeto matemático. Por esta razón, esta propuesta investigativa tiene como propósito principal la construcción de un instrumento que permita determinar los niveles de matematización que alcanzan estudiantes del grado octavo a través de situaciones de orden entre números racionales orientadas a construir la noción de densidad realizando un acercamiento al análisis fenomenológico que propicie delimitar los fenómenos y las estrategias didácticas al respecto de estos objetos matemáticos.

De acuerdo con lo anterior, en la primera parte de este trabajo, se especifica la problemática abordada de manera superficial anteriormente, así mismo, se justifica la problemática y se genera una pregunta de investigación. En el segundo capítulo, se expone el marco teórico, en el cual, se encontrará en un primer momento la apuesta teórica de (Puig, 1997) que contribuyó mucho en el desarrollo de esta investigación a través de los análisis fenomenológicos y sus reflexiones explícitas sobre lo que está implícito en la propuesta de Freudenthal. A su vez, se expondrán los principios de la Educación Matemática Realista, los cuales, contribuyeron a la construcción de categorías y a desarrollar los procedimientos de análisis. Sumado a lo anterior, se expondrán dificultades y aspectos didácticos de los números racionales positivos debido a que no se encontraron unos mínimos didácticos al respecto, en ese sentido, correspondió tratar de conectar diversas investigación al respecto de las fracciones, números decimales y la enseñanza de los números racionales positivos y por último, se presenta una posible conexión entre la idea de modelo desde la Educación matemática Realista y la propuesta de (Duval, 1999) al respecto de los registros de representación semiótica y sus funciones.

Para la tercera parte de esta investigación, se expondrá la metodología seleccionada, la cual es cualitativa y se seleccionó como método el estudio de caso múltiple, debido a que hace mayor énfasis sobre el análisis de los datos para cuando el tema no ha sido desarrollado desde múltiples perspectivas. Así mismo, se exponen las técnicas de recolección de la información y cómo serán utilizadas para tal propósito. Seguidamente, se presentará la construcción del instrumento (cuestionario) y se especificarán las elecciones tomadas sobre el mismo junto con el acercamiento al análisis fenomenológico desde la apuesta teórica de (Puig, 1997) de donde surgen los fenómenos que se indagarán a través del cuestionario abierto, posterior al acercamiento del acercamiento al análisis fenomenológico, se expone junto con las categorías de análisis el instrumento. Así mismo, se expone la población que son, 4 estudiantes del grado octavo del Santa Lucía IED junto con sus características.

Luego, en el apartado cuarto de esta investigación, se expone la manera en la que se analizará la información y el análisis de la información recolectada a través de los instrumentos de recolección de datos, el marco teórico y las categorías de análisis, para esclarecer, en un primer momento se realiza un análisis pregunta a pregunta, que se tuvo que presentar en los ANEXOS por cuestiones de espacio, no obstante, a partir de éste se presenta un análisis de los niveles de matematización alcanzados por cada uno de los casos o estudiantes y por cada una de las tareas.

En el apartado quinto de esta investigación, se exponen las conclusiones y reflexiones al respecto del instrumento y los objetivos propuestos para su construcción, así mismo, se presenta una posible respuesta a la pregunta de investigación junto con el instrumento cualificado para futuras aplicaciones que le permitan complementarse y posibilitar procesos de análisis más refinados.

Por último, en el apartado seis se presenta la bibliografía que sustenta esta investigación y en el apartado séptimo, se expone el análisis pregunta a pregunta de cada uno de los casos por cada una de las tareas que como se mencionó, por cuestiones de espacio correspondió ubicarlo en ANEXOS, no obstante, se presentan como referentes en hipervínculos para corroborar y complementar información puesta en el análisis de los resultados o apartado quinto.

1. Contextualización del problema

1.1. Antecedentes

Uno de los referentes que influyó en la selección de la temática central de esta propuesta investigativa fue el de Fandiño (2009), en el cual plantea explícitamente la relación existente entre algunos elementos de la fracción y el número racional con respecto a algunos procesos trabajados en el cálculo como los son la continuidad de la recta, el número real, la continuidad etc. En ese sentido y sustentado en su propia revisión bibliográfica internacional y nacional, la autora expresa que varias de las dificultades y obstáculos epistemológicos reconocidos en el cálculo no devienen del mismo cálculo sino de elementos anteriores como lo son la fracción y el número racional.

Bajo esta premisa, categoriza algunas dificultades y obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos. Dentro de los obstáculos didácticos expresa Fandiño (2009) se encuentran la vinculación temprana de elementos infinitamente actuales de la geometría para la enseñanza de la fracción y la interpretación de la recta como un collar de perlas no continuo, a su vez, dentro de los obstáculos ontogenéticos presenta, la dificultad que representa para los estudiantes el enfrentarse con las propiedades de orden entre fracciones y números racionales argumentando que, el uso excesivo del conteo con números naturales es el factor más influyente que obstruye el tránsito entre la aritmética con números naturales y la aritmética con fracciones y, racionales en consecuencia, emerge la problemática entre el orden y la densidad racional.

Con el aporte de Fandiño (2009) se continuó indagando en la temática de la densidad. En tal indagación, se encuentra una propuesta de trabajo frente al tema de la densidad racional realizada por Guichón y Duarte (2014), quienes exponen estrategias para abordar en el aula el concepto de densidad haciendo uso de intervalos racionales donde llegan a establecer como uno de sus resultados, la importancia de variar la forma en que se presentan los extremos de los intervalos

(decimal, fracción) ya que dependiendo de la representación utilizada los estudiantes gestionan o no la densidad racional, a su vez, fue un referente importante en tanto posibilitó la construcción de un instrumento diagnóstico cuyo resultado permitió identificar en el aula la ausencia de tratamiento al respecto de la densidad racional.

Del referente anterior, se extrajo el trabajo investigativo de Broitman, Itzcovich y Quaranta (2003) quienes realizan un estudio acerca de la enseñanza-aprendizaje de la notación decimal de los números racionales y las concepciones que tienen los estudiantes sobre el valor posicional de los números decimales donde, las dificultades y conocimientos disponibles pueden constituirse en puntos de partida para nuevos aprendizajes. Además de lo anterior, presenta un tratamiento a la densidad racional que busca analizar los procedimientos y las reflexiones de los educandos a propósito de problemas en los que inicialmente los números decimales son visualizados como subunidades que llegan a un límite más allá del cual resultan indivisibles.

Respecto a la densidad, Broitman et al. (2003) expresan que muchos de los tratamientos que se realizan sobre los números decimales tienen como contexto el dinero y la medida, en ese sentido, el primero permite dependiendo del país trabajar hasta centésimos y en el segundo, aunque se considera que cada unidad se puede dividir infinitamente, en muchas ocasiones la subdivisión de tales unidades solo alcanza los límites de lo empírico por los instrumentos de medida utilizados permeando los límites de lo útil y lo razonable, sin embargo, si se restringe el trabajo con los números decimales a tales contextos, propicia no poner en juego las propiedades de los números decimales y por tanto de los números racionales. Dentro de las situaciones planteadas por los autores, se utilizan intervalos en donde los estudiantes deben tratar de sumar tantos números como puedan hasta acercarse a un límite superior y el que tenga la mayor cantidad de sumandos gana el juego. A través de la situación anterior expresan los autores, los estudiantes lograron evocar el uso

de números decimales para obtener una mayor cantidad de sumandos, reconociendo que cada sumando agregado tiene un valor menor y por ello puede ser desarrollado infinitamente.

Otro documento que hace referencia a la densidad es el de Panizza y Alvares (1990), quienes presentan en su artículo los resultados de una investigación mayor sobre la representación, adquisición y utilización del concepto de densidad en los niveles de enseñanza media y universitaria el cual, analiza en tres momentos las concepciones de los estudiantes. Tales momentos son inicial, intermedio y final. En el proceso, reconocieron que los resultados debían estudiarse teniendo en cuenta la interacción de la densidad racional con respecto a la constitución de clases de equivalencia, la representación interna de los números basada en aspectos superficiales como la notación y la representación de operaciones y, la influencia de estos elementos en el control de la conducta.

En dicho artículo se vislumbra la constitución de investigación de tipo cuantitativo y exploratorio, ya que en el momento en que se realizó, las investigaciones al respecto eran inexistentes; en su investigación, aplicaron dos tareas de distinta complejidad a tres grupos de estudiantes uno de escuela media y dos de universidad obteniendo como resultados, que en el estado inicial los estudiantes se categorizan por ser sujetos novicios (estudiantes de escuela media e inicios de universidad) los cuales definen los números superficial y operatoriamente, a su vez son inconsistentes dependiendo de la notación usada para abordar un problema y , se les dificulta en mayor grado la notación fracción que la decimal. Los estados intermedios de los estudiantes se caracterizan por continuar con inconsistencias frente a la notación, pero existe una tendencia a abordar algunos aspectos de la propiedad de densidad, aunque perdura la superficialidad y la operatividad lo cual, se vislumbra en el hecho de que la recuperación de la propiedad de densidad frente a un problema depende de la notación utilizada. Por último, en el estado final se reconoce

que las clases algebraicas de números tienen su sustento en las propiedades que los definen. Finalmente, expresan que las características fundamentales del proceso de adquisición de la propiedad son: La propiedad de densidad inicialmente se asocia a conjuntos numéricos superficiales y seguido asociada a clases algebraicas de números, los aprendices acceden a la densidad de manera confiable cuando se construyen las clases algebraicas de números y la parte operatoria es puesta en un segundo plano, los elementos operatorios para la adquisición de la propiedad de densidad inicialmente deben partir de la notación decimal, la notación decimal infinita periódica tienen un efecto negativo en la adquisición de la densidad.

Recientemente Cabarcas y Soler (2017) realizaron una investigación cuyo objetivo fue analizar cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes del grado noveno para comprender la densidad racional haciendo uso del registro fracción y decimal. Esta investigación es de carácter mixto pues tiene un componente cuantitativo en tanto medían los aciertos y desaciertos frente a la interpretación, orden y densidad de los números racionales y cualitativo en tanto fue un estudio de caso múltiple que les permitió interpretar las producciones de los educandos. Dentro de sus resultados manifiestan que, la mayor dificultad de esta población se encuentra en poder aceptar que entre dos números racionales existen infinitos números racionales (densidad), así mismo, expresan que el registro fracción representa más dificultad que el registro decimal y en contraposición de lo estipulado por Fandiño, explicitan que la recta numérica fue un recurso importante en el proceso de comprensión de la propiedad de densidad.

Gairín (1998) por su parte, presenta puntos de anclaje sobre los cuales construir propuestas didácticas al respecto de los números racionales positivos, a su vez, manifiesta la importancia de conectar la representación fracción y decimal a través de la interpretación de la fracción como cociente partitivo, no obstante, recomienda que la mejor forma de abordar los números racionales

es a través del contexto de medida de magnitudes ya que les permite a los estudiantes reelaborar la idea de número que construyeron tan diferenciado como el recuento. Así mismo, expresa que en la enseñanza-aprendizaje del número racional se deben asimilar los cambios estructurales (algebraicos y topológicos) con respecto a los números naturales bajo dos ideas complejas la existencia de un inverso multiplicativo y la noción de densidad respecto del orden.

Por su parte Nardoni, Camara y Pochulo (2014) en su trabajo, dan cuenta de la complejidad para evaluar la comprensión sobre los números racionales en estudiantes al finalizar la secundaria, dicho estudio desarrollado en el marco del Enfoque ontosemiótico (EOS) en donde se trabajaron entrevistas clínicas y situaciones problema concluyen que, los procesos algorítmicos de los estudiantes se confunden entre sí, no hacen uso de representaciones gráficas respecto a la fracción para solucionar problemas y, no utilizan ni solucionan problemas con números racionales sino solo a través del lenguaje natural. En consecuencia, los estudiantes de la investigación no tienen una comprensión de los números racionales en tanto no dominan el sistema de prácticas del objeto matemático (número racional) estableciendo dentro de las dificultades reconocidas a través de sus resultados la densidad respecto del orden.

Crespo (2004) realizó un recorrido histórico por las ideas que influyeron en la construcción matemática del concepto de continuidad y a su vez, expone las concepciones de los estudiantes frente al concepto de continuidad en distintas edades. En lo que respecta a la densidad, manifiesta que la mayoría de los estudiantes tienden a confundir la densidad de la recta con la continuidad de la recta debido a la vinculación indebida de interpretaciones de la recta de manera intuitiva. Respecto al recorrido histórico, aborda la influencia del pensamiento aristotélico en las concepciones del infinito y la geometría, las paradojas y el infinito para llegar hasta Zenón del cual toma una de sus paradojas (dicotomía) para identificar las concepciones de los estudiantes en

distintas edades encontrando que, los niños del primer ciclo de la Enseñanza General Básica EGB trivializan el problema de la continuidad mientras que conforme avanza la edad tienden a reconocer la paradoja entre los 16 y 18 años o nivel polimodal.

Obando (2003) hace uso de algunos elementos de la teoría de las situaciones didácticas y como metodología la ingeniería didáctica para abordar el problema de cómo organizar la enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Al respecto, parte de un análisis histórico del concepto de número racional comprendiendo que la dicotomía griega continuo-discreto, unidad aritmética-unidad geométrica y número-magnitud es uno de esos problemas epistemológicos que se debe llevar al aula para posibilitar la superación de tales dicotomías para ello, postula utilizar la concepción numérica de Stevin quien antes de descartes unificó la magnitud y el número para resolver problemas de la vida económica de su época, a su vez, a través de su análisis histórico comprende que las prácticas sociales de medición son una fuente importante para la conceptualización de la fracción y la aceptación de las partes de la unidad como números.

Además de lo anterior, realiza un análisis didáctico con el cual reconoce que la relación parte-todo es un recurso que permite acceder a otros aspectos de los números racionales como la equivalencia y la suma de fracciones; así mismo, reconoce que la relación parte-todo es un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como divisible en partes menores, como también sus dos características esto es, unidad simple-compuesta y continuo-discreto. Sumado a lo anterior, dentro de sus resultados identifica que la relación parte-todo en muchas ocasiones centra su mirada en la partición y el conteo, lo cual, no contribuye a transitar de los naturales a los racionales, a su vez, menciona la importancia de hacer un tratamiento cuidadoso al tipo de unidad y contexto en el que se presenta dicha unidad, pues los educandos conceptualizan de distinta forma dependiendo

del contexto y reconoce que la relación parte-todo, tiene una debilidad respecto a la estructura multiplicativa de los números racionales.

Vega (1999) reporta una posible disociación entre la notación fracción y decimal presente en el artículo de Panizza y Álvarez (1990) y emprende un trabajo investigativo en el cual identifica que para la comprensión de la densidad de los racionales los estudiantes primero deben pasar por la relación parte-todo y las distintas interpretaciones de las fracciones para luego realizar un tratamiento a la equivalencia de fracciones y seguido el orden para después poder abordar la densidad. Dentro de sus resultados identifica que los estudiantes trasladan las propiedades de orden de los números naturales al de los racionales cuando no se utilicen potencias de 10, ya que éstas si representan un foco de dificultad, gestionando un problema de orden entre fracciones.

En conformidad con estos antecedentes y algunas apuestas teóricas de la EMR junto con (Maza, 1999) surge el siguiente problema de investigación.

1.2 Delimitación del problema

Concuerdan Panizza y Álvarez (1990), Broitman et al. (1999) y Cabarcas y Soler (2017) en que la propiedad de densidad de los números racionales es uno de esos conceptos que poco son abordados en la escuela y que, además, sufre de no tener alrededor suyo una variedad de trabajos investigativos que posibiliten comprender de manera compleja su impacto en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, concuerdan con Fandiño (2009), Guichón y Duarte (2014), Nardoni et al. (2014) y Vega (1999) que la principal dificultad respecto a la noción de densidad racional deviene de extender las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales bajo la idea de "siguiente" originada por el conteo con número naturales, siendo uno de los factores que impide el tránsito de la aritmética con naturales a la aritmética con racionales, ya que para los educandos esto implica, asimilar los cambios estructurales (algebraicos

y topológicos) de los racionales con respecto a los números naturales bajo dos ideas complejas, que son: la existencia de un inverso multiplicativo y la noción de densidad respecto del orden (Gairín, 1998).

Sin embargo, como lo expresa Maza (1999) el carácter de número de los números racionales implica la posibilidad de ser ordenados, pero, también son densos y por ello, el estudiante debe tener la oportunidad de comprender que los números racionales se pueden ordenar a través de procesos de comparación para determinar entre dos o más números racionales cual es el mayor, menor o igual, sin embargo, no existe en ellos un orden inductivo, esto es, no existe un racional siguiente de uno dado debido a su carácter denso, por esta razón es necesario no solo centrar la enseñanza-aprendizaje del número racional en la equivalencia como se hace tradicionalmente, sino también considerando su orden, pues es allí donde se encuentra una de las problemáticas para la comprensión de la propiedad de densidad (Fandiño, 2009).

De los antecedentes presentados, en la literatura investigativa internacional y local respecto al problema de la enseñanza-aprendizaje de la propiedad de densidad, se pueden identificar la preocupación constante por el efecto adverso del uso de un tipo de notación (fracción-decimal), la preocupación por el efecto adverso que propicia utilizar modelos geométricos actualmente infinitos como los segmentos para su enseñanza que según Fandiño-Pinilla (2009) genera sobre tales representaciones nociones intuitivas que obstaculizan la comprensión de la continuidad de la recta y por último, el hecho de no considerar inicialmente la relación parte-todo para la comprensión de la equivalencia y el orden entre fracciones que posibilite la comprensión de la propiedad de densidad, no obstante, en estas investigaciones no se ha utilizado un instrumento de recolección de la información que combine las relaciones de orden entre números racionales positivos y situaciones o problemas contextualizados desde la noción de densidad que permita

diagnosticar el estado de estos objetos matemáticos en los estudiantes como elemento previó al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por esta razón que este trabajo pretende contribuir a la investigación en educación matemática al respecto de la noción de densidad utilizando los principios de la Educación Matemática Realista al tratar de responder la siguiente pregunta:

¿Qué niveles de matematización alcanzan los estudiantes del grado octavo al abordar tareas de orden entre números racionales positivos orientadas a construir la noción de densidad?

Para responder a esta pregunta problema, esta investigación se propone documentar los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al abordar situaciones de orden entre números racionales positivos orientadas a construir la noción de densidad. A partir, de la construcción de un instrumento (cuestionario) que contenga los elementos didácticos y fenómenos obtenidos del acercamiento al análisis fenomenológico al respecto del orden y la noción de densidad de los números racionales positivos; tercero, realizar un acercamiento al análisis fenomenológico de acuerdo con los tipos de fenomenología propuesto por (Puig, 1997) al respecto de la propuesta de Freudenthal que permita delimitar los fenómenos e indicaciones didácticas al respecto, por último, establecer unas categorías de análisis de acuerdo con las orientaciones didácticas del marco teórico y los niveles de matematización propuestos en la EMR por cada una de las tareas del cuestionario.

2. Marco teórico

2.1 El análisis fenomenológico

Puig (1997) manifiesta que algunos conceptos respecto a la educación matemática realista de cierta manera son mal interpretados debido a que su creador Hans Freudenthal hace mayor énfasis sobre la praxis que en la definición teórica lo cual, no es desacertado, sin embargo, es importante tratar de comprender teóricamente lo que Hans Freudenthal quiso movilizar a través de su escrito en la educación matemática.

Para tratar de definir lo que es el análisis fenomenológico según la interpretación de Hans Freudenthal, Puig (1997) manifiesta que los términos que dan origen al método son retomados por Freudenthal de la tradición filosófica los cuales son, Noumenon y Phainómenon, sin embargo, estos términos Freudenthal no los utiliza basándose en las apuestas teóricas de Hegel, Husserl o Heidegger, al contrario, les da una interpretación particular. De esta manera, Puig (1997) expresa que para Freudenthal el Noumenon es el objeto de pensamiento y Phainomenon es la experiencia que se tiene del Noumenon, no obstante, Freudenthal no hace mayor énfasis en estos términos.

De esta manera, expresa Puig (1997) que Noumenon viene del griego “nous” y puede interpretarse como “lo que es pensado mediante la razón” o “lo inteligible” y Phainomenon puede interpretarse como “lo que parece” en consecuencia, los fenómenos son la apariencia de las cosas. Desde la tradición filosófica el Noumenon y Phainomenon pertenecen a mundos distintos de tal manera que, bajo algunos sistemas filosóficos solo los Noumenon son reales y los Phainomenon se contraponen a la verdad de los Noumenon, pues sostienen una dualidad entre el mundo de lo sensible y el mundo inteligible o la experiencia posible y lo que queda fuera de la experiencia. En ese sentido, cuando se establece que los conceptos matemáticos son Noumenon, se los está

situando fuera de nuestra experiencia, pero, para Freudenthal, los conceptos matemáticos no caen fuera de nuestra experiencia ni fuera de los fenómenos que organiza.

En ese sentido, Puig (1997) arguye que se podría cambiar el término Noumenon por "medio de organización" debido a la función que cumplen los conceptos en su relación con los fenómenos y el término Phainomenon (fenómeno) se puede mantener porque hace alusión a nuestra experiencia matemática, esto es, despojándolo de la idea de "apariencia", tenemos que los medios de organización de los fenómenos es aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática y esto a su vez, es tomado como objeto de experiencia. Por ello, Puig (1997) expresa que el par (Phainomenon/Noumenon) o (Fenómeno/Medios de organización) queda definido por la relación entre ambos y no por la pertenencia a mundos distintos, en consecuencia, se producen otros pares (Phainomenon/Noumenon) donde los Noumenon se convierten en fenómenos en otro par (Phainomenon/Noumenon) por tanto, hacer fenomenología es describir uno de esos pares (Phainomenon/Noumenon) que en nuestro caso sería el par (fenómenos/ Noción de densidad de los números racionales).

Para esclarecer lo anterior, (Puig, 1997) arguye que:

> El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de

la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos. (Pág. 2-3)

2.1.1 tipos de análisis fenomenológico. Según Puig (1997) en la propuesta teórica de Hans Freudenthal se encuentran implícitos distintos tipos de análisis fenomenológicos, cada uno importante para la didáctica, pero sólo uno con nombre propio, los cuales son:

a) Fenomenología
b) Fenomenología didáctica
c) Fenomenología genética
d) Fenomenología histórica

Como se expresó anteriormente, la fenomenología se preocupa por considerar los fenómenos con respecto al concepto cuyo análisis se realiza. Es así que para el (a) se trata de considerar los fenómenos que están organizando las matemáticas en su estado actual; en el caso (b), se consideran los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y los propuestos en las secuencias de enseñanza. Para el caso del (c), se consideran los fenómenos relacionados con el desarrollo cognitivo de los estudiantes y, por último, en el caso del (d), se consideran los fenómenos para los cuales su organización se construyó y cómo se extendió a otros fenómenos.

En consecuencia, para la fenomenología pura, los conceptos matemáticos y estructuras matemáticas se tratan como productos cognitivos mientras que, en el caso de la fenomenología didáctica, se tratan como procesos cognitivos, esto es, se les sitúa en el sistema educativo como objeto de enseñanza y siendo aprendidos por estudiantes. A su vez, expresa Puig (1997) que para Freudenthal, pensar que la fenomenología didáctica debería estar basada en una fenomenología genética es erróneo puesto que el orden en que deberían secuenciarse los distintos tipos de análisis fenomenológico empieza por (a) para lo cual se necesitan conocer las matemáticas y sus

aplicaciones, ésta, a su vez se complementa con (d) pues los hechos históricos dan cuenta de los fenómenos que dieron origen a la organización de algunos fenómenos respecto a un concepto matemático, seguido se pasa a (b) para el cual, es necesario conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto matemático terminando en una fenomenología genética.

2.1.2 concepción de las matemáticas. Aunque Freudenthal según Puig (1997) no explicita una concepción de las matemáticas, es importante realizar una interpretación de una posible concepción en coherencia con lo propuesto por él, sin embargo, la propuesta de este autor se podría desarrollar sin adoptar ningún compromiso epistemológico u ontológico sobre las matemáticas y solo aceptar, que para la organización de la enseñanza podemos reconocer los conceptos matemáticos como medios de organización de fenómenos no obstante, la concepción que tengan tanto los estudiantes como los docentes de las matemáticas influye en cómo se vislumbra la actividad matemática.

De eta manera para Puig (1997) los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos de este mundo del cual, todos tenemos una noción de realidad, pero a su vez, las experiencias que tengamos con ese mundo físico tienen que ver con los objetos del mundo, por lo tanto, los fenómenos que organizan las matemáticas son los objetos del mundo esto es, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las acciones que realizamos sobre esas propiedades hace que podamos interpretar que los conceptos matemáticos no se encuentran en un mundo ideal como lo pensaba Platón ni tampoco, tienen una existencia anterior a la actividad matemática como tampoco, se encuentran fuera de nuestra experiencia. En consecuencia, los conceptos matemáticos entran a ser parte de nuestra experiencia a través de los fenómenos que posteriormente se transforman en conceptos matemáticos y que a su vez organizan otros

fenómenos propiciando que las matemáticas crezcan con cada producto de la actividad matemática.

Para esclarecer expresa:

> Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática. (Puig, 1997, p. 7)

A su vez:

> La progresión escalonada de pares fenómenos / medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de conceptos matemáticos como medios de organización, que viene indicado por cada par, y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de los fenómenos. La progresión escalonada dibuja una imagen de la producción de objetos matemáticos cada vez de nivel más elevado, más abstractos, y muestra que la actividad matemática genera su propio contenido. (p. 7)

2.1.3 sistemas matemáticos de signos. Asevera Puig (1997) en su interpretación de la fenomenología didáctica que, a cualquier mirada ya sea experta o no, los textos matemáticos tienen una variedad de símbolos que no pertenecen al lenguaje vernáculo, este hecho, hace que por lo común se haga una diferencia entre el lenguaje vernáculo y el "lenguaje matemático". Esta idea, es apoyada por quienes consideran que la única forma de expresar las matemáticas es a través del lenguaje formal. Como consecuencia de esta diferencia, se da existencia a dos tipos de conjuntos de signos, esto es, uno compuesto por los signos denominados "artificiales" que son los heredados de la matemática como ciencia y el otro compuesto por los signos de alguna lengua vernácula.

Sin embargo, más allá de los tipos de signos y sus diferencias, en cuanto a lo didáctico nos debemos preocupar más por los procesos de sentido y producción de significado de los símbolos que por el estudio propio de los símbolos, en consecuencia, desde una perspectiva didáctica la diferencia entre símbolo artificial y vernáculo deja de ser crucial lo cual, permite considerar el sistema de signos de manera global, por ello:

> Lo que hay que calificar de matemático entonces no es un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos, es decir, hay que hablar de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos. (…) Lo que se está usando en la actividad matemática no lo voy a separar, por tanto, en signos matemáticos o un sistema de signos matemáticos, el lenguaje vernáculo y, quizá, otros medios de representación. Por el contrario, voy a considerar que todos los signos que se usan, están combinados constituyendo un sistema matemático de signos. Ahora bien, una vez he subrayado que lo voy a tratar como un sistema, tengo que señalar que, a diferencia de los que sucede con el sistema de las lenguas vernáculas, sus signos no son homogéneos. Además, como quiero tomar en consideración todos los signos que se usan en la actividad matemática, me parece más conveniente adoptar una terminología tomada de la semiótica, en vez de una tomada de la lingüística, ya que muchos de los signos que se usan en la actividad matemática no tienen naturaleza lingüística. En ese sentido, prefiero no usar la pareja significante / significado que introdujo Saussure para describir las dos caras del signo, sino hablar —como hacen Eco o Barthes, siguiendo a Hjemslev— de expresión y contenido de un signo (o una función semiótica, en general). En esos términos, los sistemas matemáticos de signos contienen signos cuya materia de la expresión es heterogénea —característica que los separa de las

> lenguas vernáculas, como ya he dicho, y que comparten con los sistemas de signos de otras actividades humanas como el cine o la canción." (Puig, 1997, p. 9).

Esta toma de partido didáctico desde la semiótica realizado por Puig (1997) permite entrever que el signo se concibe como la expresión de un contenido que a su vez se convierte en signo. De esta manera, el carácter dinámico del signo se relaciona de manera coherente con la relación fenómenos/medios de organización, ya que:

> (…) los conceptos matemáticos son creados por los sistemas matemáticos de signos que los describen. (…) De ahí que los objetos matemáticos así creados no sean entonces objetos ideales que se coloquen fuera del mundo de nuestra experiencia ya que tienen la existencia material que les dan los sistemas de signos que simultáneamente los describen y los crean. (…) Correlativamente, la abstracción progresiva generada en el proceso de objetivación de los medios de organización y su situación como fenómenos ante unos nuevos medios de organización tiene su expresión en la creación de sistemas matemáticos de signos también más abstractos, con los que se crean esos conceptos más abstractos." (Puig, 1997, p. 10)

2.1.4 objetos mentales vs conceptos. Según Puig (1997) en la propuesta de Freudenthal se reconoce un elemento importante que sustenta la toma de partido didáctico para desarrollar su propuesta, pues para Freudenthal existe una diferencia entre el objeto metal y el concepto, en otras palabras, la diferencia entre lo que entienden y comprenden quienes estudian los conceptos matemáticos y los conceptos matemáticos como disciplina científica histórica y culturalmente establecida, sin embargo, se encuentran estrechamente relacionadas. En ese sentido, haciendo uso del vocabulario de la semiótica expresa Puig (1997), lo que se puede entender en la teoría de Freudenthal sobre el objeto mental es que se le considera como el campo semántico del concepto

matemático que se estudia mientras que el concepto matemático es la construcción histórica y culturalmente aceptada, en otras palabras, son cristalizaciones de objetos mentales.

Conforme con lo anterior, los objetos mentales sobre un concepto matemático se obtienen en tanto se estudia éste a través de sus fenómenos que le dan sentido, por ello:

> El objetivo de los sistemas educativos que marca Freudenthal es esta constitución de buenos objetos mentales. Adquirir el concepto implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo. La relación particular que cada concepto matemático tiene con el objeto mental correspondiente determina cómo se relaciona la constitución del objeto mental con la adquisición del concepto. Los constituyentes del objeto mental bueno se determinan gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente." (Puig, 1997, p.20)

Así mismo la distancia entre el objeto mental y el concepto en ocasiones es abismal, pues existen conceptos matemáticos cuyos fenómenos no permiten tender un puente que acorte la distancia y por ello, antes de una fenomenología didáctica se debe realizar una fenomenología que permita establecer los fenómenos donde se pueden desarrollar esos objetos mentales, en otras palabras:

- En ocasiones, hay componentes esenciales para la formación del concepto que no son pertinentes para la constitución del objeto mental. Es el caso del número cardinal: la comparación de conjuntos sin estructura es esencial para el concepto, pero apenas desempeña papel alguno para la constitución del objeto mental porque, en las situaciones reales en que una persona experimenta el fenómeno que se organiza con el objeto mental número en su significado cardinal, los conjuntos de objetos rara vez carecen de estructura

y, además, la estructura es un medio para realizar la comparación, en vez de algo que hay que eliminar para hacerla.

- En ocasiones, lo que muestra una fenomenología didáctica es que los fenómenos organizados por el concepto son tan variados que se constituyen de hecho objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para explorar en la enseñanza, o varios objetos mentales si se exploran varios tipos de fenómenos. Para la adquisición del concepto es preciso integrar entonces esos distintos objetos mentales en un único objeto mental. Éste es el caso, por ejemplo, del concepto de área.
- En ocasiones, incluso es difícil distinguir el objeto mental del concepto. Al menos si se quiere tener un objeto mental unitario: sólo mediante el acceso al concepto es posible unificar un conjunto heterogéneo de objetos mentales. Éste es el caso del concepto de función.
- Finalmente, hay objetos mentales cuyo campo de fenómenos sólo se presentan en un contexto matemático o matematizado. Un ejemplo de ello en la Educación Secundaria lo proporcionan los conceptos de la geometría analítica. (Puig, 1997, p. 24).

2.2 Principios de la Educación Matemática Realista (EMR)

Habiendo presentado una interpretación a la teoría propuesta por Freudenthal, a continuación, se darán a conocer los principios sobre los cuales se sustenta ésta, denominados los principios de la Educación Matemática Realista, a saber:

2.2.1 principio de actividad. Según Bressan (2004) para Freudenthal las matemáticas más allá de transmitirse se aprenden en tanto se hacen en la actividad de matematizar, por ello y teniendo en cuenta que no todos los estudiantes serán matemáticos en sus profesiones se hace fundamental

acercarlos a utilizar las matemáticas en contextos que les otorgue un significado y los acerque al concepto. De esta manera (Freudenthal, 1991) expresa:

> (…) hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. El énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura sino en formalizar y estructurar. (Citado en Bressan, 2004, p. 2)

2.2.2 principio de realidad. Según Bressan (2004) para Freudenthal la matemática surge como matematización de la realidad, esto es, como organización de la realidad, haciendo uso de problemas contextualizados, sin embargo, (Freudenthal, 1991) expresa:

> Yo prefiero aplicar el término "realidad" a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario. (citado en Bressan, 2004, p. 3)

Esta cita se puede complementar con lo expresado por Puig (1997) quien manifiesta que existen ciertos conceptos matemáticos cuyos fenómenos no tienen otro contexto que el matemático y aun así sigue siendo real pues según Bressan (2004) para Freudenthal la matemática es una actividad humana y en tanto humana es real porque cumple con los criterios de ser realizable, imaginable y razonable. A su vez, cabe aclarar que según Bressan (2004) los contextos realistas tienen un carácter relativo en tanto dependen de las experiencias previas de los educandos y de su capacidad para imaginarlo.

De esta manera:

> Desde este punto de vista, resultará tan "real" para un estudiante de primer ciclo trabajar sobre el colectivo al que diariamente aborda para venir a la escuela, como, posteriormente, hacerlo sobre el lenguaje de flechas que representa lo que en el colectivo acontece, o en

> estudiantes más avanzados, recurrir a lo que se sabe sobre números y operaciones para resolver mentalmente problemas tales como 39 x 41, 252 ÷ 12 o inventar un método para predecir las dos últimas cifras de una potencia de 7 dado el exponente. (Bressan, 2004, p.3)

Cabe aclarar que, para Freudenthal los contextos no son una fachada que impide comprender las matemáticas abstractas sino al contrario son elementos que acortan la distancia entre los objetos mentales y el concepto (Puig, 1997). Por ello (Freudenthal, 1973) expresa:

> Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo. (Citado en Bressan, 2004, p.3)

2.2.3 principio de reinvención guiada. Según Bressan (2004) para Freudenthal la matemática es otra forma de sentido común pero mejor organizada, esto es palabras de Puig (1997) hace referencia a que los objetos mentales se van enriqueciendo conforme a nuevas matematizaciones y con ello se cristalizan objetos mentales de una matemática de orden superior. No obstante, para que estas cristalizaciones sucedan debe darse la oportunidad de que los estudiantes reinventen las matemáticas en las aulas a través de la asignación de roles y responsabilidades del docente y el estudiante a partir de una interacción denominada reinvención guiada, la cual, para (Freudenthal, 1991) significa:

> …un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar. (citado en Bressan, 2004, p. 5)

De esta manera:

> La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos

> al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina. (Bressan, 2004, pág. 5-6)

Cabe resaltar que, para desarrollar este proceso de la mejor manera, el docente debe tener la capacidad de anticipación, observación, auto observación y reflexión acerca de los aprendizajes de los estudiantes que le permitirán conocer las comprensiones y habilidades de los mismos que propicien los cambios de nivel de matematización.

2.2.4 Principio de niveles. Según Bressan (2004) Freudenthal complementa su teoría con lo propuesto por Treffers quien habla de matematización progresiva, aceptando que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas (Bressan, Gallego, Pérez, Zolkower, 2016). Esta matematización progresiva reconoce que los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática (Bressan, 2004).

Esta matematización progresiva se desglosa en dos tipos:

- Matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva.
- Matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática. (Bressan, 2004, p. 6)

Para la definición de tales niveles se utilizarán como referencia a (Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, pp.7-8), quienes lo denominan niveles de matematización, que son:

- Nivel situacional: se da la interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Los estudiantes, apoyándose en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia, pueden identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, reconocer analogías con otros problemas, etc. A este proceso se lo denomina matematización horizontal.
- Nivel referencial: es donde aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como (modelos de) en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.
- Nivel general: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supere la referencia al contexto. En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior, surgen aspectos generalizables de los mismos y los alumnos pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas homólogos a los estudiados, dando lugar a los (modelos para) la resolución de los mismos.
- Nivel formal: se comprende y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales propios de la rama de la matemática con que se está trabajando.

Estos niveles de matematización indican las autoras, son dinámicos y un estudiante puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para distintos contenidos o aspectos diferentes de

un mismo contenido, por ello, dichos niveles más que describir de forma exacta qué puede hacer cada alumno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje, pues la idea es que los estudiantes puedan revertir el proceso de matematización cada vez que lo requieran ya que las matematizaciones de nivel superior están conectadas con las de nivel inferior. En otras palabras:

> Comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la matemática por sí mismos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. En resumen, estructurando el proceso de matematización horizontal por sí mismos. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, aplicación de abreviaturas, reemplazando el lenguaje relativo a la propia lengua por el lenguaje convencional de símbolos y variables, en otras palabras, por abstraer, generalizar, unificar y cuando es necesario especificar… (Streefland citado por Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p.8)

Conforme con lo anterior, un elemento importante en este proceso es la reflexión sobre la propia actividad en los alumnos, pues permite el cambio de nivel, es decir, puede propiciar un cambio de perspectiva o un cambio total, en suma, como lo expresa Freudenthal citado en Bressan et al (2016) los estudiante en un principio deberían tener la oportunidad de conocer lo que están haciendo y lo que aún es más importante, deberían tener la posibilidad de pensar sobre lo que cada uno hace y sobre lo que hacen sus pares, a este proceso es a lo que se le denomina la reflexión en el proceso de aprendizaje.

2.2.5 ¿Qué es la didáctica desde la perspectiva de la EMR?. Según Freudenthal (1991) citado en Bressan et al. (2016) la actividad primordial del docente desde esta perspectiva es la de didactizar, esto es, una actividad organizadora que aborda también lo horizontal y lo vertical,

horizontalmente los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros, por otro lado, en lo vertical los docentes reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización. En otras palabras:

> La didáctica de una disciplina significa la organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje relevantes a esa área… Nuestra visión de la didáctica reflejará lo dicho sobre la matemática… la matemática surgiendo de la matematización es despejada por la didáctica surgiendo de la didactización. Nótese que el paralelismo intentado aún se extiende a distinguir la didactización horizontal y vertical: desde la realidad didáctica para tornarse consciente de ella por un lado y para paradigmatizar por el otro (Freudenthal citado en Bressan et al, 2016, p. 9).

Lo anterior implica que para Freudenthal según Bressan et al (2016) el currículo significa proceso, no una regla prestablecida cuya expresión la constituyen los desarrollos educativos que no son elaboraciones de "académicos" y no se restringen a diseños curriculares, sino que son diseños estratégicos fundados que incluyen una filosofía educativa explicita incorporando todo tipo de materiales a partir de la práctica en las escuelas con el propósito de:

> fomentar un cambio en la marcha de la enseñanza actual de la clase (Gravemeijer & Terwel citados en Bressan et al, 2016, p. 9).

2.3 Al respecto de las representaciones

1.3.1 La EMR y las representaciones. Bressan (2021) manifiesta que en la actualidad se habla de representaciones internas y externas que cumplen un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas ya que:

> Las representaciones sirven a las personas tanto como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, como para la comunicación a otros, y la objetivación o validación hacia sí mismo de comprensiones (imágenes mentales y concepciones). (Bressa, 2021, p. 1)

A su vez, manifiesta Bressan (2021) al igual que Duval (1999) que la manera en la que los sujetos alcanzan a comprender los objetos matemáticos o conceptos matemáticos es a través de sus representaciones, sin embargo, no deben confundirse las representaciones del objeto con el objeto mismo, no obstante, existe una relación estrecha entre las representaciones externas y los objetos matemáticos en el aprendizaje ya que la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos se realizan a partir de las transformaciones ejercidas sobre sus representaciones.

Sumado a lo anterior, concuerda con algunas teorías semióticas de la didáctica de las matemáticas que:

> Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Este conocimiento proporciona el dominio formal de cada estructura conceptual. (Bressan, 2015, p. 1)

Sin embargo, Bressan (2015) disiente de las teorías semióticas en el sentido de valorar las representaciones ya que expresa:

> ¿Cuál es la mejor representación? No podemos abogar por una en particular, según para qué, para quién y cuándo, tendrá valor una u otra. (Bressan, 2015, p. 2)

Lo anterior lo fundamenta en el hecho de que la mayoría de las representaciones matemáticas no solo cumplen una función modeladora de las propias matemáticas sino también cumplen la función de modelar los fenómenos de otras ciencias y del mundo real, de allí que las matemáticas tengan un poder modelizador, a su vez, manifiesta que muchos fenómenos y objetos de la vida real se pueden usar como ejemplos de ideas matemáticas, de allí que también se les pueda llamar modelos. En ese sentido, sostiene que la idea de modelo en la EMR difiere de la idea común de modelo que se tiene, esto es, no considera pertinente separar representación de modelo, es decir, son representaciones las representaciones cuando se utilizan en un contexto matemático y son modelos cuando se utilizan para modelar un fenómeno de la realidad, no obstante, aclara (Bressan, 2015) que:

> En la EMR los modelos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarla. El uso de modelos en la EMR dista del concepto generalizado de modelización matemática, como traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos. En esta corriente el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación. (Gravemeijer, 2002). En la EMR se respetan los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales ya sea utilizadas por los estudiantes o que aparecen en la historia de la matemática -estudiados a partir de la fenomenología didáctica. (…) Esto significa que el término "modelo" no está tomado en sentido literal (como ejemplo de algo) o solamente involucrando objetos y simbolismo matemático puro, sino que materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, y aun símbolos pueden servir de modelos. (pág. 2-3)

Conforme con lo anterior, esta interpretación de lo que es un modelo debe cumplir tres características que son: estar enraizados en contextos realistas, ser imaginables y ser lo suficientemente flexibles para posibilitar la aplicación de éstos a un nivel más avanzado o más general, en otras palabras, el modelo debería propiciar la matematización vertical sin obstaculizar la matematización horizontal posibilitando que los estudiantes puedan retornar a sus pensamientos y a sus pasos en el proceso de matematización, esto es lo que le da valor a los modelos en este enfoque didáctico sumado al hecho de que, a los estudiantes se les posibilite la reinvención de las matemáticas apoyados en sus procedimientos informales. De esta manera, los modelos en la EMR están compuestos de tres usos, el primero es su uso representacional (modelo de), el segundo es su uso como modelo de trabajo (opera sobre él) y el tercero es su uso como modelo de reflexión (modelo para).

A partir de lo anterior, Bressan (2015) expresa que los desarrollistas curriculares debemos buscar o construir situaciones problema que sean adecuadas a la construcción de modelos y ajustarla para propiciar la evolución del modelo posibilitando mayor comprensión en los estudiantes. De esta manera, es prioritario realizar un análisis fenomenológico didáctico que gestione la construcción o descubrimiento de problemas y tareas ya que, este análisis fenomenológico didáctico se centra en cómo el conocimiento matemático y los conceptos pueden manifestarse por ellos mismo y como pueden ser constituidos, parte de este análisis se realiza a través de experimentos y de deliberación entre colegas en donde los conocimientos de los estudiantes y las ideas sobre conceptos matemáticos deseados funcionan como una pre-imagen para el docente. A su vez, en un documento (Gallego y Perez, 2013) manifiestan que el Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas (GPDM):

> han realizado variadas experiencias, incluyendo planificación conjunta, observaciones de clases y análisis de registros, producciones de estudiantes y narrativas de docentes, dando lugar a la elaboración de materiales curriculares, publicaciones y comunicaciones científicas. (p. 13)

Sumado a lo anterior, (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006) expresan que:

> Para aprender a identificar distintos niveles de matematización, los docentes del GPDM se dedicaron a anticipar respuestas de los alumnos a las actividades planificadas y a contrastar sus predicciones con lo ocurrido en las clases. Estos análisis didácticos *a priori* y *a posteriori* se centraron en la comparación y categorización de producciones, identificándose tanto modelos y estrategias, como formas de simbolización, esquematización y formalización. (p. 22)

Como se puede observar en las dos citas anteriores las coordinadoras del GPDM hacen explícito el hecho de que para identificar niveles de matematización en grupos de estudiantes y para realizar procesos investigativos (experimentos) realizan análisis de las representaciones y de simbolización en las producciones de los estudiantes, no obstante, en el documento de Bressan (2021) enfocado específicamente a las representaciones y modelos desde la perspectiva de la EMR, no se presentan claridades al respecto de cómo categorizar las producciones y gestiones representacionales de los estudiantes aunque sean una parte fundamental en el proceso de construcción de pre-imágenes para el docente que tomará como punto de partida para el desarrollo curricular, la construcción de problemas adaptables y progresivamente complejos o por lo contrario de descubrirlos a partir del análisis fenomenológico didáctico, así mismo, teniendo en cuenta los niveles de matematización expuestos en Bressan et al (2016) y Bressan (2004) lo cuales implican sumado a otros aspectos una progresión en la complejidad de las representaciones

gestionadas por los estudiantes no es posible equiparar todas las representaciones en un solo nivel ya que no es lo mismo si un estudiante solo expresa en lenguaje natural su organización del problema realista a matematizar con respecto a un estudiante que gestionó un esquema o alguna representación informal o desde las matemáticas.

Teniendo en cuenta los argumentos anteriores y que uno de los propósitos de esta investigación es documentar los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al respecto de situaciones de orden en procura de la construcción de la noción de densidad racional es que, se ha tomado la decisión de retomar la apuesta teórica de Duval (1999) como apoyo teórico en el proceso de análisis a priori de la información obtenida a partir del cuestionario abierto.

En ese sentido, a continuación, se expone lo que se retomará de la apuesta teórica de Duval (1999) al respecto de las representaciones. Manifiesta este autor que, la noción de representación tuvo tres momentos que le dieron origen e introducción en el campo de la educación, el primer momento se dio entre 1924-1926 a través de las investigaciones de Piaget bajo el nombre de representación mental, dicho estudio se realizó con el apoyo de entrevistas, la cuales contribuyeron a considerar el error como indicadores de una visión distinta de las cosas, en este estudio la representación es concebida como "evocación de los objetos ausentes". El segundo momento se dio entre 1955-1960 bajo la concepción de la representación como representación interna o computacional, esto es, la transformación que hace un sistema de la información de los datos que recibe para que produzcan una respuesta adaptada, por ello, no se trata de una creencia ni de una evocación de los objetos ausentes que permita la conciencia vivida de un sujeto sino que se trata de codificación de la información, en consecuencia, el método empleado debe ser el de los tiempos de reacción (calcular). Por último, en el tercer momento hacia 1985 aparece como representación

semiótica en el marco de los trabajos sobre la adquisición de los conocimientos matemáticos y sobre las dificultades que su aprendizaje implica.

El considerar las representaciones como representaciones semióticas implica, reconocer que éstas son relativas a un sistema particular de signos y que existen relaciones (actividades) entre los diferentes sistemas semióticos, sobre todo, en lo que respecta a la conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. No obstante, aunque se vinculó las representaciones semióticas al campo de la educación, las apuestas teóricas del momento limitaban la funcionalidad de las representaciones a la comunicación lo cual, implica omitir el hecho de que las representaciones semióticas cumplen aparte de la comunicación otras funciones como la de transformación y objetivación o toma de consciencia.

El desconocimiento de estas dos, conlleva a considerar que las representaciones semióticas son un soporte de las representaciones mentales, estimando que se pasa espontáneamente de la forma que representa al contenido representado, esto implica, que el contenido sería fácilmente separable de su forma o lo que es lo mismo, si hay noesis sin semiosis la operación de conversión no es otra cosa que una operación cognitiva neutra, mínima o nula, sin embargo no lo es, ya que en el aprendizaje de las matemáticas se comprueba que la conversión de una representación para muchos estudiantes de diferentes niveles de escolaridad, es una operación difícil o incluso imposible.

Conforme con lo anterior, para Benveniste citado en Duval (1999) la semiosis implica no solo una variedad de sistemas semióticos sino la posibilidad de ponerlos en correspondencia, por ello, bajo esta perspectiva los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación que son: primero debe constituir una marca o un conjunto de marcas que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema semiótico determinado; segundo, debe permitir transformar las representaciones de acuerdo con las únicas

reglas propias al sistema, de tal manera que generen economía respecto a las representaciones iniciales y tercero, permitir convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema de tal manera que se gestionen otras significaciones relativas a aquello que es representado. Sin embargo, aunque existen diversos sistemas de representaciones, algunos no posibilitan las tres actividades cognitivas fundamentales como el lenguaje morse, pero, el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos etc. si las posibilitan y es a estos sistemas de representación a los que se llamarán registros de representación semiótica, además, son los elementos de los que dispone un sujeto para objetivarse.

Ahora bien, por el momento se reconoce que los sistemas de representación semiótica que permiten movilizar las tres actividades fundamentales de la cognición se les conoce como registros de representación semiótica no obstante ¿Qué se entiende por representación? Y ¿qué tipos de representaciones reconoce Duval? En ese sentido, el autor realiza una clasificación haciendo uso de oposiciones, la primera oposición es de las representaciones conscientes/inconscientes, las representaciones conscientes son aquellas que presentan un carácter intencional y que cumplen una función de objetivación, este carácter intencional de las representaciones permite reconocer lo fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados ya que es solo a través de la significación que se hace la aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto. En ese sentido, cuando la determinación de un objeto presupone la aprehensión de una multiplicidad de datos que exceden la capacidad de aprehensión simultanea solo puede realizarse bajo la significación, por lo tanto, la significación y estatus de objeto susceptible de ser visto o aprehendido por alguien son los dos aspectos recíprocos de toda representación consciente.

La segunda oposición es representación externa/interna, esta oposición a su vez se divide en dos precisiones suplementarias, la primera es que todas las representaciones llamadas externas son

producidas por un sujeto o por un sistema y la segunda es que la producción de una representación externa solo puede efectuarse a través de un sistema semiótico, en ese sentido, las representaciones externas son por naturaleza representaciones semióticas. Por su parte, las representaciones internas son representaciones que pertenecen a un sujeto y que no son comunicadas a otro a través de la producción de una representación externa, sin embargo, aunque las representaciones externas tengan una función de comunicación no se les puede limitar a ésta ya que, cumplen otras dos funciones cognitivas que complementan las representaciones internas que son, la función de objetivación como todas las representaciones conscientes y la función de tratamiento, esto es, las representaciones semióticas son externas y conscientes ya que permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos que tienen un valor de significantes (Duval, 1999).

Aunado a lo anterior, arguye Duval (1999) que comúnmente se tiende a equiparar las representaciones semióticas con las representaciones mentales (internas), sin embargo, las representaciones semióticas pueden interpretarse de dos maneras, la primera es que pueden ser aprehendidas bajo el aspecto de representante y la segunda es que puede ser aprehendida bajo el aspecto de lo que es representado, en oposición, las representaciones mentales solo tienen una interpretación bajo el aspecto de lo que es representado por lo tanto, esta diferenciación entre representaciones semióticas y mentales permite deducir que las representaciones mentales solo se prestan a tratamientos a través de la movilización de un registro semiótico y de la práctica mental sobre ese registro, esto, permite establecer que no existe noesis sin semiosis, pues el desarrollo de las representaciones mentales está ligado a la adquisición y a la interiorización de sistemas y representaciones, comenzando por el lenguaje ordinario Vygotsky (1962) citado en (Duval, 1999).

Por último, se tiene otro tipo de representación que merece también parte de la atención porque hace parte de esa compleja interacción entre las representaciones internas/externas y

conscientes/inconscientes denominadas representaciones computacionales. Dichas representaciones se clasifican dentro de las representaciones inconscientes debido a que no cumplen una de las funciones de las representaciones conscientes, es decir, no evocan un objeto en su ausencia, no obstante, aunque sean inconscientes juegan un papel importante, pues permiten explicar cómo el aprendizaje puede desarrollar en los individuos sus capacidades cognitivas de tratamiento. Estas representaciones computacionales son aquellas cuyos significantes de naturaleza homogénea no requieren de la mirada al objeto y permiten la transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie, esto es, expresan la información externa en un sistema de manera tal que la hacen direccionable, combinable y recuperable en el interior de ese sistema.

Como se ha sugerido anteriormente, la producción de imágenes mentales implican procesos físicos o psicológicos semejantes a los que están en juego en la percepción; por su parte, la producción de representaciones semióticas están sometidas al respecto de reglas sintácticas de formación y de transformación de unidades significantes, en consecuencia, las representaciones computacionales pueden asociarse con operaciones elementales del tipo de las que pueden ser efectuadas por una máquina de Turing Jhonson-Laird (1983) citado en (Duval, 1999), la combinación de estas operaciones elementales permite entrever la complejidad propia de cada comportamiento y de cada resultado observable. El costo del tratamiento aumenta con el número de operaciones combinadas y la reiteración de cada operación combinada.

La diferente naturaleza de las representaciones semióticas y de las representaciones computacionales radica en la existencia de dos tipos de transformaciones cuya complementariedad es primordial para dar cuenta del funcionamiento y del desarrollo cognitivo del pensamiento humano que son: las transformaciones cuasi-instantáneas y las transformaciones intencionales. Las primeras transformaciones mencionadas son las que se efectúan incluso antes de haber sido

observados y producen las informaciones y, las significaciones de las cuales un sujeto toma inmediatamente consciencia, no obstante, aunque sean realizados fuera del campo de atención producen la información necesaria para la visión del objeto. Por su parte las transformaciones intencionales, son aquellas que para ser ejecutadas toman tiempo de un control consciente y que se basan en los datos previamente observados, aunque el objeto observado esté ausente, esto es, solo pueden dirigirse a lo que un sujeto ve u observa de manera cuasi-instantánea sumado a que solo pueden ser ejecutadas una después de otra y son sensibles a la cantidad de elementos que se deben integrar. De esta manera (Duval,1999) manifiesta:

> Toda actividad cognitiva humana se basa en la complementariedad de estos dos tipos de transformaciones. Dada la no extensibilidad de la capacidad de transformación intencional, la diferencia de los desempeños cognitivos entre los sujetos depende de la diversidad y de la arquitectura de las transformaciones cuasi-instantáneas de que ellos dispongan. El conjunto de las transformaciones cuasi-instantáneas de que dispone un sujeto, determina el nivel y el horizonte epistémico para la aplicación de las transformaciones intencionales. Mientras más posibilidades de transformaciones cuasi-instantáneas posea un sujeto, es mayor el número de elementos inmediatamente integrados y fusionados en una sola unidad informacional (“Chunk”) y, por tanto, el nivel epistémico de los objetos a los que puede aspirar es superior. (p. 41)

En otras palabras, el objetivo de estas transformaciones es proporcionar a la percepción inmediata de la consciencia unidades informacionales más ricas que posibiliten la aproximación a objetos más complejos, de esta manera la adquisición de nuevas transformaciones cuasi-instantáneas es pues la condición de progreso cualitativo en el aprendizaje.

Habiendo presentado los distintos tipos de representación considerados por Duval (1999) y su implicación en el aprendizaje y la cognición, a continuación, se tratará de explicitar las tres actividades fundamentales de la cognición ligadas a la semiosis, a saber:

- Formación de representaciones semióticas y conformidad a las restricciones de un sistema semiótico: Formar una representación es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o sustituir la visión de un objeto, dichos signos pertenecen a un sistema semiótico ya construido y utilizados por otros. La formación de representaciones comprende tres actos elementales que son: la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido y la codificación de algunas relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. La formación de representaciones al estar condicionadas a un sistema de representación semiótica debe respetar las reglas propias del sistema empleado no solo por su comunicabilidad sino para hacer posible el uso de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado o reglas de conformidad, estas reglas de conformidad definen el sistema de representación y por tanto, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles que permita el registro seleccionado.
- Tratamiento de las representaciones semióticas y expansión informacional: Un tratamiento es la transformación de una representación semiótica al interior de un mismo registro de representación semiótica o de un sistema, en otras palabras, el tratamiento de una representación semiótica corresponde a una expansión informacional.
- Conversión de las representaciones y cambio de registros: La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro de representación semiótica, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o esta misma información en otro registro de representación

semiótica distinto al primero, esta conversión es una transformación externa relativa al registro de representación de partida. En la conversión debe percibirse la diferencia entre el representante y lo representado, sin esta diferencia la actividad de conversión resulta imposible o incomprensible, en ese sentido, expresa Duval (1999) que no hay reglas estandarizadas que faciliten la actividad de conversión, no obstante, la conversión en ocasiones se utiliza con el objetivo de economizar el tratamiento lo cual implica, que después de realizada la conversión un sujeto se queda con el registro sobre el cual se trabaja, a su vez, esta actividad de conversión dista de ser inmediata y simple ya que es la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los estudiantes.

Ahora bien, expresa Duval (1999) que en el análisis del desarrollo del conocimiento y de las dificultades detectadas en los aprendizajes fundamentales respecto al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos se enfrenta a tres fenómenos que están estrechamente relacionados que son:

- La diversificación de los registros de representación semiótica, debido a que la lengua natural y las lenguas simbólicas no pueden encapsularse en un solo sistema de representación semiótica puesto que cada sistema de representación semiótica tiene sus propias reglas de conformidad, a su vez, la lengua natural no es la única encargada de posibilitar la creación de representaciones y significados, por tanto, cada sistema de representación semiótica permite aprehender características de un mismo objeto a través de las actividades de tratamiento y conversión.
- La diferencia entre representante y representado, esto es, la diferencia entre forma y contenido, dicha diferenciación está relacionada a la comprensión de lo que una

representación representa y en consecuencia a la posibilidad de relacionar e integrar otras representaciones en los procedimientos de tratamiento, sin embargo, esta diferencia no se aprende espontáneamente cualquiera que sea el registro de representación y cualquiera sea la edad del sujeto.

- La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica a disposición. Duval (1993) expresa que el uso de diversos registros de representación parece ser una característica del pensamiento humano y que a su vez, lo diferencia del razonamiento animal y computacional, pues en las últimas la rigidez funcional impide la producción de representaciones nuevas sobre un mismo objeto de manera autónoma, en oposición, el progreso del conocimiento siempre va acompañado de la producción y desarrollo de registros semióticos que conviven parcialmente con anteriores ya aprehendidos. Así mismo, expresa Duval (1999) que una representación solo puede funcionar como tal solo cuando se cumplen dos condiciones: la primera es que disponga de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso etc. y el segundo es que pueda espontáneamente convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas sin notarlo, en consecuencia, cuando estas dos condiciones no se cumplen el representante y el representado se confunden por ello, no puede darse una coordinación de representaciones de un mismo objeto. Dicha coordinación de registros permite, primero la economía en el coste de la memoria al realizar conversiones entre distintos sistemas de representación semiótica, segundo la complementariedad de los distintos sistemas de representación semiótica sobre un objeto permite aprehender distintas características del objeto y tercero permite conceptualizar objetos en tanto se realicen las

transformaciones de conversión entre distintos registros de representación semiótica de un objeto.

Sumado a lo anterior y para ser específicos en el lenguaje utilizado en el análisis de la información que se expondrá más adelante, se retomará una clasificación realizada por Oviedo, Kanashiro, Benzaquen y Gorrochategui (2012) acerca de las representaciones semióticas y registros semióticos que sobre el concepto de fracción se pueden establecer, a saber:

Concepto: Número fracción:

Registro semiótico r^1: Lenguaje común

Representación semiótica R_1^1: Un cuarto.

Representación semiótica R_2^1: La mitad de la mitad.

Registro semiótico r^2: Lenguaje aritmético.

Representación semiótica R_1^2: $\frac{1}{4}$ (Escritura fraccionaria)

Representación semiótica R_2^2: $0{,}25$ (Escritura decimal)

Representación semiótica R_3^2: 25×10^{-2} (Escritura exponencial)

Registro semiótico r^3: Lenguaje algebraico

Representación semiótica R_1^3: $\{x \in Q^+ / \, 4x - 1 = 0\}$ (Escritura Conjuntista)

Representación semiótica R_1^3: $y = f(x) : x \rightarrow \frac{x}{4}$ (Escritura funcional)

Registro semiótico r^4: Esquemas gráficos.

Representación semiótica R_1^4: 

Representación semiótica R_2^4: 

(Oviedo et al, 2012, p. 33)

Conforme con lo anterior un ejemplo de una actividad de tratamiento sería:

- $\frac{1}{4} \rightarrow 0{,}25 \rightarrow 25 \times 10^{-2}$ debido a que dentro de un mismo registro semiótico estamos representando el mismo objeto, aunque sus representaciones semióticas sean distintas en algunos aspectos.

Por su parte una actividad de conversión sería:

- $Un\ cuarto \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \{x \in Q^{+} / \ 4x - 1 = 0\}$ es decir, representar el mismo objeto, pero en registros semióticos distintos.

Habiendo expuesto este apartado importante para el desarrollo del análisis a priori de los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes a continuación, se presentan algunos elementos que también contribuyeron a la constitución del problema, a la construcción del cuestionario abierto para recopilar la información y a realizar un análisis de las dificultades presentes en las producciones de los estudiantes, que funcionan como indicadores para la generación de conclusiones y comprobaciones teóricas expuestas al final de esta investigación. Cabe aclarar, aunque esta investigación no pretende desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje entre tanto, las indicaciones didácticas y genéticas que nos proporcionan los procesos de enseñanza-aprendizaje al respecto de las propiedades de orden entre números racionales positivos, las fracciones y la noción de densidad contribuyen a delimitar el marco de problemas y representaciones que los estudiantes pueden gestionar al respecto de estos objetos matemáticos.

2.4 Dificultades observables en el aprendizaje de los números racionales en su notación fracción

Manifiesta Fandiño (2009) que una dificultad recurrente reconocida por los investigadores es la de ordenar fracciones, números decimales o ambos mezclados, ya que para muchos estudiantes por ejemplo $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{9}$ porque $2 < 4$, esta justificación dada por los estudiantes también se

traslada a los números decimales porque $2{,}3 < 4{,}9$ pues $2 < 4$. No obstante, este error se puede tratar recurriendo a fracciones equivalentes y a fracciones con igual denominador.

Dentro de las dificultades en el orden entre fracciones y números decimales expresa Fandiño (2009) se puede encontrar el no reconocer que la fracción y el número decimal representan el mismo objeto, a su vez, en el orden entre números con coma por ejemplo, si se quiere ordenar $1{,}2$ y $1{,}15$ muchos estudiantes responderán que $1{,}2 < 1{,}15$ como consecuencia de las competencias adquiridas con el trabajo con números naturales, a este hecho, Fandiño (2009) lo denomina como paridad de parte entera, para sopesar lo descrito, muchos docentes recurren a escribir $1{,}2 = 1{,}20$ sin embargo, debido a que el agregar un cero a la derecha en los números naturales implica multiplicar por 10 los estudiantes tienden a generalizar esta situación a los números con coma, esto es, se extiende de forma errada propiedades de orden de los números naturales a los racionales.

Las anteriores dificultades, expresa Fandiño (2009) tienen su centro en la idea de (sucesivo) de un número que es válida para los números naturales, pero no para las fracciones y los números racionales, en palabras de la autora:

> Estas declaraciones demuestran la escasa comprensión de la estructura y del lenguaje de las fracciones y de los números racionales. Las causas se buscan en un intento de adaptar lo que sucedía con éxito en los números naturales a esta nueva situación. Vista la dificultad difundida, este punto es tratado explícitamente, mostrando cómo, tanto entre las fracciones como entre los racionales, la idea de "sucesivo", tan intuitiva en N ya no existe en Q. (p. 144)

2.4.1 Dificultades en el reconocimiento de esquemas. Según Fandiño (2009) citando D'Amore (1999) los esquemas no siempre son perfectamente explicativos y que entre ellos algunos

son más difíciles de interpretar que otros como es el caso de los contextos discretos y la unidad compuesta, por ejemplo: si se le presenta al estudiante el esquema a continuación:

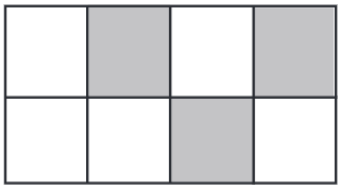


Gráfico 1. Ejemplo de partición no estándar de la unidad (Fandiño, 2009).

Se espera que el estudiante reconozca que la parte sombreada represente los $\frac{3}{8}$ de la unidad, sin embargo, algunos estudiantes responderán "$\frac{3}{5}$" interpretando erróneamente el esquema y la pregunta, pues no reconocen que la unidad es el rectángulo dividido en 8 partes. No obstante, algo similar, pero con mayor complejidad pasa cuando el contexto es discreto y la unidad es múltiple, por ejemplo, si se les propone a los estudiantes el siguiente esquema:

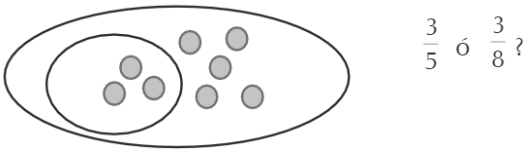


Gráfico 2. Ejemplo de partición de la unidad en contexto discreto (Fandiño, 2009)

La cantidad de respuestas erróneas aumenta ya que a los estudiantes se les dificulta identificar la unidad y que cada bolita gris equivale a $\frac{1}{8}$ de la unidad, así como también, aumentan las respuestas erróneas cuando se trabajan fracciones impropias.

2.4.2 Dificultades en la gestión del adjetivo igual. Fandiño (2009) expresa que en una situación como la siguiente:



Gráfico 3. Ejemplo del uso del adjetivo igual en contexto continuo

Los estudiantes por lo común no encuentran cómo interpretar la exigencia de que las partes sean iguales en área, pero no en forma, sin embargo, se ha encontrado hasta en docentes que creen que la exigencia de que las partes sean igual implica que sean iguales en forma y tamaño omitiendo el hecho de que deben ser iguales en magnitud independientemente de la forma. A su vez, manifiesta la autora que, cuando se le pide a un estudiante que divida un cuadrado en 4 partes la cantidad de aciertos es mayor, no obstante, cuando se le pide dividir un cuadrado en 5 partes la cantidad de aciertos disminuye considerablemente. Este hecho se debe al uso constante de figuras simples de dividir, de tal manera que dichas figuras se convierten en obligadas y esperadas por los estudiantes.

2.4.3 Dificultades en la gestión de figuras no estándar. Aduce Fandiño (2009) que, para simplificar las actividades rutinarias, los docentes tienden a privilegiar el uso de figuras estándar para determinar fracciones en contextos continuos, como lo son: rectángulos, círculos, cuadrados y en ocasiones triángulos equiláteros. Lo anterior, es peligroso según Fandiño porque genera una misconcepción en la cual sólo se pueden hallar fracciones de esas figuras y no de otras.

2.4.5 Dificultades en la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos. Manifiesta Fandiño (2009) que a pesar de que las representaciones y modelos son necesarios para obtener un resultado positivo por parte de los estudiantes, las investigaciones han demostrado que los estudiantes entran en crisis cuando deben gestionar diagramas, esquemas, figuras etc. de forma autónoma, debido a que pasar de un modelo interno a uno externo implica una traducción que no es fácil de lograr, por esta razón, es necesario que en el aula el estudiante aprenda a usar todos los

registros a su disposición de forma autónoma para ello, debe tratar de escoger cuál registro es el más apropiado para solucionar la situación, luego de tratar de pasar de una representación a otra en el mismo registro, realizar conversión de una representación en un registro a otro registro o en resumen tratar de hacer las tres operaciones fundamentales de la semiótica.

2.4.6 Exceso de representaciones semióticas. Conforme con lo anterior manifiesta Fandiño (2009) que, aunque hay que acercar a los estudiantes al uso de varios registros semióticos de un concepto en ocasiones, se puede caer en la paradoja de Duval, es decir, que el estudiante en lugar de pasar de la semiótica a la noética se quede en la gestión de registros semióticos y no en el aprendizaje conceptual. Por ello, se debe hacer el paso de un registro a otro tratando de que los estudiantes involucren su conciencia, por esta razón, expresa Fandiño (2009) no hay una solución a esta dificultad más que el compromiso profesional del docente y el conocimiento de las operaciones fundamentales de la semiótica.

2.4.7 Imágenes y modelos formados demasiado pronto. Aduce Fandiño (2009) que por naturaleza el ser humano se crea imágenes mentales de objetos como resultado de un estímulo sensible, por ejemplo, si se nombra algún objeto desconocido no se puede creer que los sujetos se hagan de inmediato una imagen de ese objeto solo basándose en los propios conocimientos y experiencias etc. En ese sentido, D'Amore (1999, 2003b) citado en Fandiño (2009) propone el término imagen mental, el cual concibe como

resultado figurativo o proposicional producido por una solicitud interna o externa, es decir, la imagen mental está permeada por influencias culturales, estilos personales etc. sin embargo, esta imagen mental es interna y en primera instancia es involuntaria. Ahora bien, un modelo se forma demasiado pronto cuando la imagen mental se hace interna aun cuando debería permanecer como imagen permitiendo enriquecerla o transformarla constantemente.

2.4.8 misconcepciones. Para D'Amore (1999) citado en Fandiño (2009) una misconcepción es una concepción momentánea e incorrecta en espera de una organización cognitiva más elaborada y crítica, en donde el estudiante no es consciente de que sus misconcepciones lo sean, pues las considera verdaderas por ello, es el adulto experto el que determina si las misconcepciones de los estudiantes lo son en realidad. De esta manera, las misconcepciones no son elementos a eliminar o simples errores, pues al ser construcciones propias del estudiante, se le deben generar las condiciones necesarias para criticarlas y así poder alcanzar una concepción más elaborada.

2.4.9 obstáculos ontogenéticos, didácticos y epistemológicos. Fandiño (2009) citando a D'Amore (2003) aduce que un obstáculo es una idea, que en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas precedentes, pero que resulta ineficaz cuando se intenta aplicar a un nuevo problema convirtiéndose en una barrera para los nuevos aprendizajes, con esta definición y los tres tipos de obstáculos que son, el obstáculo ontogenético que hace referencia a la edad y la madurez cognitiva de los educandos ya que, hay argumentos que no pueden ser abordados en ciertos niveles de escolaridad; el obstáculo didáctico, que hace referencia a la postura didáctica y a la transposición didáctica realizadas por el docente desde su quehacer que pueden beneficiar o perjudicar a los estudiantes y por último, los obstáculos epistemológicos que tienen que ver con las fluctuaciones históricas que tuvo un concepto matemático y con la naturaleza de los argumentos de la matemática, Fandiño (2009) expresa que:

- Dentro de los obstáculos epistemológicos respecto de la fracción se puede encontrar el intento por hacer que se construya cognitivamente el número racional como clases de equivalencia de parejas de naturales cuyo segundo término es distinto de cero, a su vez,
- Dentro de los obstáculos didácticos respecto de la fracción, se encuentra la propuesta que hacen algunos docentes de la escuela en primaria al momento de presentar los objetos

actualmente infinitos ya que, por lo común, se les presenta a los estudiantes el segmento como un collar de perlas que por su inmediatez es aceptado por los estudiantes convirtiéndose en un modelo intuitivo, éste, se convierte en un obstáculo didáctico cuando en la escuela superior se introduce la idea de continuidad. A su vez, se encuentra en estos obstáculos el proponer una sola definición de fracción que en lo futuro no se sostiene porque el concepto de fracción tiene diversas interpretaciones y definiciones, además, el uso en la enseñanza de la fracción de modelos estándar y el abuso en diversos registros sin considerar que no es un proceso que surja de forma espontánea. Por último, se encuentra el obstáculo de la idea de sucesivo trasladada a los números racionales.

- Dentro de los obstáculos epistemológicos se encuentran:

* El concepto de infinito, necesaria en la práctica escolar y en la matemática, pero difícil de manejar en forma satisfactoria. El concepto de infinito en la escuela nace desde los primeros días, cuando se aprende a contar, pero se hace cada día más necesario.
* El concepto de cero, necesario en la práctica escolar y en la práctica matemática, pero difícil de manejar en forma satisfactoria, nace en la escuela en la recta numérica y en la resta.
* La reducción de la fracción a los mínimos términos
* El paso de la fracción a los números con coma
* El manejo del cero en las fracciones

2.5 Dificultades observables en el aprendizaje de los números racionales en su notación decimal

2.5.1 errores más frecuentes relacionados con el concepto de número decimal, con su escritura y con sus operaciones. Según Centeno (1997) los errores relacionados con la lectura y escritura de los números racionales en su notación decimal son:

- Valor Posicional: Es común encontrar que los estudiantes entiendan por los términos centésimas, décimas etc. como números enteros y piensan que las milésimas implican tener tres ceros.
- Errores relacionados con el cero: Es cuando los estudiantes frente a un número decimal con ceros intermedios los omiten interpretando el número como entero, por ejemplo, 0,036 es 36.
- Errores relacionados con el orden entre decimales: En la comparación de números decimales, éstos se interpretan como pares de enteros.
- Conocimiento insuficiente de las reglas de la numeración decimal: Hace referencia a la necesidad de dominar la escritura decimal para los números superiores a la unidad, antes de poder extenderla de forma comprensiva a la escritura de números inferiores de la unidad.
- Conocimiento suficiente de los naturales, pero resistente al cambio de status: Es el caso de los estudiantes que habiendo entendido las decenas, centenas, unidades de mil etc. pero que no asocian la escritura de décimas, centésimas, milésimas al mismo esquema.
- La forma en la que se han presentado los números decimales a los estudiantes: Es común que en las aulas a los estudiantes, se les acentúe la idea de que a todo número natural se le puede asociar un número decimal con un cambio de unidad adecuado, y que a todo decimal se puede asociar un número natural, este hecho, ensombrece las diferencias que existen

entre la topología discreta de los naturales y la topología densa, aunque no continua, de los decimales. Centeno (1997) afirma que todas las formas de introducir los números decimales que no permitan su aparición como números nuevos, con algunas propiedades distintas de los naturales, pueden ocasionar obstáculos suplementarios que se añaden.

2.6 Acerca de la enseñanza de los números racionales positivos

2.6.1 Perspectiva de Obando (2003)

*2.6.1.1 Una mirada a la historia***.** Obando (2003) manifiesta que en la antigua Grecia surgió una manera particular de interpretar la unidad pues la dicotomía número y magnitud conllevó a establecer respectivamente unidades distintas, es decir, la unidad aritmética estaba ligada a lo discreto o lo contable, por otro lado, la unidad geométrica estaba ligada a lo continuo o a lo medible. En ese sentido, la unidad aritmética es decir el uno, no tiene la misma naturaleza que los otros números pues al ser el principio generador o por ser la esencia de todos los números era universal e indivisible.

Por otra parte, la unidad geométrica era relativa a la magnitud que se iba a medir, esto es, a diferencia de la unidad aritmética no era única ni universal pues depende de los que se quiera medir o de las necesidades de la medición a su vez, como la unidad geométrica no era otra cosa que un elemento particular elegido arbitrariamente dentro de todos los elementos que comparten la misma cualidad medible entonces dicha comparte la misma naturaleza que las magnitudes o en otras palabras era divisible infinitamente en potencia.

De esta manera, para lo griegos solo eran números aquellos números mayores que la unidad y además no se aceptaban fracciones con numerados unidad como números, no obstante, se aceptaba la fracción 1/2 en tanto expresaba el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas en las cuales las medidas se encuentran en razón de 1 a 2 y con ello todas las demás mediciones

inexactas eran expresadas como razones entre magnitudes homogéneas permitiendo reconocer un contacto entre la aritmética y la geometría.

Posteriormente, en el siglo XVI se da la fusión de ambos tipos de unidad a partir de los trabajos de Simon Stevin. A finales de la edad media el comercio en Europa creció y la gran diversidad de sistemas de medida que había en la época se convertía en un impedimento para efectuar los negocios de manera eficiente y precisa, con esta necesidad, Stevin se aventura a diseñar un sistema de medida que posibilitara la estandarización de los sistemas de medida en todas las regiones y con ello facilitar los cálculos en las mediciones afectando las transacciones comerciales.

En su trabajo se apoya en el sistema de numeración decimal y propone conjuntos de sistemas de medidas (longitudes, pesos, etc.) en los cuales se tomara una unidad como fundamental o una unidad patrón guardando una relación de 1 a 10 entre unidades consecutivas (sistema métrico decimal), de esta manera las técnicas de cálculo desarrolladas para los números podían ser aplicadas a procesos de medición conllevando a Stevin a determinar que la unidad aritmética también era un número y por tanto al igual que la unidad geométrica era divisible. En consecuencia, Stevin borra las barreras entre los continuo y lo discreto, pero a su vez extiende la notación decimal para la escritura de las fracciones unitarias tal cual conocemos la notación hoy en día, esto, permite reconocer que Stevin transformó la naturaleza epistemológica del concepto de número de los griegos a través de la necesidad por matematizar las prácticas económicas de su época.

No obstante, en la historia de las matemáticas no fue Stevin el único que trató de matematizar prácticas sociales de la medición que son una fuente importante para la conceptualización de las fracciones como números como es el caso de los egipcios y babilonios. En ambos casos aunque épocas distintas estas sociedades privilegiaron la agricultura y en consecuencia todo lo relacionado con la agrimensura y la astronomía cobraban importancia, en consecuencia, la medición y los

cálculos aritméticos que debían enfrentar constantemente hicieron que aritmética y geometría estrechamente unidas asumiendo la divisibilidad de la unidad aritmética como con la misma naturalidad con que se aceptaba a divisibilidad de la unidad geométrica, por tanto, las fracciones de la unidad también eran números pues representaban el resultado de una medida sin embargo, las fracciones si tenían limitaciones debido al sistema de numeración utilizado por estas culturas.

De este análisis se pueden extraer dos elementos importantes a tener en cuenta en los procesos de enseñanza aprendizaje del número racional positivo, que son:

- Las dicotomías "continuo–discreto", "unidad aritmética–unidad geométrica" y "número–magnitud", que se muestran como factores epistemológicos claves en el proceso de construcción histórico del concepto de número racional, deben ser firmemente conceptualizadas si se quiere que las fracciones de unidad sean aceptadas como números.
- Las prácticas sociales de la medición son una fuente importante para avanzar en el proceso de conceptualización de las fracciones de unidad como números.

2.6.1.2 aspecto didáctico del número racional. Manifiesta Obando (2003) que abordar la enseñanza-aprendizaje de los números racionales es algo complejo debido a que la fracción representa a la vez homonimia y sinonimia, esto es, Macera (1992) citado en Obando (2003) manifiesta que la fracción $\frac{a}{b}$ $\boldsymbol{con\ a, b \in Z, y\ b \neq 0}$ está asociada a diversos significados (homonimia) a su vez, la misma fracción representa el cociente de dos enteros o número decimal (sinonimia).

Uno de los trabajos que ha abordado la fracción desde un análisis semántico, sintáctico y matemático es el de Ohlsson (1988) citado en Obando (2003) proponiendo una caracterización para las fracciones a partir del concepto de constructo matemático y de dos tipos de significado, esto es, el significado matemático y el significado aplicacional conforme a ello, se distinguen

cuatro constructos para las fracciones, a saber: Función cociente, número racional, vectores binarios y función compuesta.

De los anteriores según Obando (2003) la función cociente tiene asociados los significados aplicacionales de la partición, los acortamientos, las extracciones y el cociente cartesiano; el segundo tiene asociadas la relación parte-todo, la medida fraccional, el cociente indicado, la recta numérica y la fracción decimal; el tercero tiene asociadas las razones, las ratas, las proporciones y las cantidades intensivas y el cuarto tiene asociado un único significado aplicacional como el operador fraccionario, sin embargo, esta propuesta trata más de la fracción que del número racional, expresa Obando (2003) esta propuesta pone de manifiesto la complejidad del campo de las fracciones.

Posteriormente, manifiesta Obando (2003) que otros autores como (Behr y Harel, 1990; Behr, Harel, Post y Silver, 1992; Behr, Harel, Post y Lesh, 1993) profundizan en el tema realizando un refinamiento de la propuesta de Ohlsson al caracterizar semánticamente las fracciones desde la óptica de la matemática de las cantidades llevándolos a considerar do nuevas variables a la fracción, como lo es la unidad (simple o compuesta) y el tipo de magnitud (continua o discreta). Estas dos nuevas variables cobran importancia en tanto son necesarias a la hora de diseñar secuencias de tareas para enseñar los números racionales, haciendo que se conjuguen los diferentes significados desde la óptica de la matemática de cantidades.

De lo anterior manifiesta Obando (2003) se reconoce la importancia del concepto de fracción como un puente de entrada a los números racionales pero, sin dejar de considerar los aspectos semántico, sintácticos y matemáticos relacionados con los diferentes constructos en que se pueden organizar para la enseñanza, a su vez, se deja de manifiesto la importancia de hacer explícito el tipo de unidad y de magnitud sobre los que se realizan los procesos de medición a partir de los

cuales se establecen las fracciones y en consecuencia la relación entre la unidad aritmética y la unidad geométrica.

2.6.1.3 Las fracciones desde la relación parte-todo. Una aproximación inicial de la fracción como fuente fenomenológica del concepto del número racional expresa (Obando, 2003) con respecto a la relación parte-todo se sustenta en las siguientes razones:

- La relación parte-todo constituye un eje a través del cual acceder a otros conceptos de los números racionales. Las medidas, las fracciones decimales, los números decimales no enteros, los cocientes, algunos tipos de razones, la recta numérica, entre otros, encuentran en la relación parte-todo, una fuente importante para iniciar su proceso de conceptualización.
- A través de la relación parte-todo se tiene un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, sin que por esto deje de ser unidad. Por lo tanto, se inicia un trabajo en la noción del continuo real. Pero, lo anterior hace necesario un análisis de las relaciones entre la unidad aritmética y la unidad geométrica, proceso indispensable en la construcción conceptual de las fracciones de unidad como números.
- La relación parte-todo es un camino natural para la conceptualización de algunas propiedades (como la que conduce a la denominación “fracción propia” e “impropia”), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta). La relación parte-todo constituye un contexto importante a partir del cual se conceptualiza la unidad en sus dos características básicas: tipo de unidad (simple o compuesta) y tipo de magnitud (continua o discreta). (pp. 164-165)

2.6.1.4 Características de la enseñanza usual del número racional. Manifiesta Obando (2003) que el trabajo escolar sobre los números racionales empieza con el estudio de las fracciones a través, de estrategias centradas en la partición y el conteo sumado a la mecanización de reglas y algoritmos por ello, en la conceptualización de la fracción la medición no es el eje central ni tampoco se realiza un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad utilizada convirtiéndose en una fuente de dificultades, a saber:

* Trabajo centrado en la partición y el conteo: Al enfocarse en las actividades de partir y contar los estudiantes conceptualizan el número natural y no la fracción en sí, esto es, centra su mirada en el número de partes del numerador y del denominador, pero no en la relación cuantitativa de las cantidades de magnitud entre las partes y el todo, conllevando a pensar que la fracción es dos números distintos y no uno solo, incluso para algunos estudiantes la parte no sombreada en una figura no constituye una parte de la unidad. Con esta situación se puede dar sustento al error común que realizan los estudiantes al sumar fracciones numerador con numerados y denominador con denominador, así mismo, en las representaciones de áreas continuas no se favorece que la partición corresponda al criterio igual cantidad de magnitud sino en la congruencia geométrica (forma) en este caso, se acepta que las partes de un todo son iguales si tienen la misma forma lo cual es incorrecto, pues lo principal sería la cantidad de magnitud de las partes. Lo anterior menciona Obando (2003), gestiona que al no centrar la mirada en la medición sino en el conteo, la equivalencia de fracciones se ve afectada pues ésta queda limitada a la congruencia de figuras y no las relaciones numéricas entre las partes y el todo, así mismo, este trabajo centrado en el conteo obstaculiza la comprensión de las fracciones impropias pues cómo

es posible que las partes de la unidad sean mayores que la misma unidad, lo anterior está sustentado en el hecho de considerar la fracción como dos números distintos.

* Tratamiento del tipo de magnitud y de unidad: Obando (2003) expresa que en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la fracción se hace un tratamiento de la unidad y de la magnitud indiscriminado, pues no se tiene en consideración que la magnitud discreta y la unidad compuesta implican psicológicamente mayor complejidad, en ese sentido, manifiesta el autor que primero se deben conceptualizar las unidades simples y posteriormente las unidades compuestas, esto es, se accede a entender que una multiplicidad puede ser una unidad.
* Énfasis en la mecanización de reglas y algoritmos: Es común manifiesta Obando (2003) encontrar en los procesos de enseñanza de las operaciones con fracciones que se exhiban algunas situaciones concretas, acto seguido se dan algunos ejemplos, luego se expone y generaliza la formula y finalmente se proponen algunos ejercicios. Conforme con lo anterior:

> En estrategias como esta se asume que para generalizar basta con dar unos cuantos casos particulares, para luego —de manera natural— inferir la ley general. Se olvida que —como lo plantean Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999)— el paso a la formulación de una ley general implica algo más profundo: reconocer una estructura invariante en un conjunto de situaciones particulares, la cual, una vez conceptualizada, debe permitir el tratamiento de cada situación particular como si se tratara de la situación general. Se ha mostrado que un proceso de generalización no se puede dar a partir de unos cuantos ejemplos, sino que requiere de múltiples situaciones en diferentes contextos, a través de

diversos sistemas de representación y a lo largo de un período de tiempo considerable. (Obando, 2003, pp. 173-174)

2.7 Perspectiva de Gairín (1998)

2.7.1 Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción. El trabajo que presenta Gairín (1998) son reflexiones acerca de la instrucción sobre los números racionales sobre todo en la primaria ya que, manifiesta que como en todo objeto matemático los números racionales generan ruptura y dificultades de aprendizaje, por ello, los objetivos de las unidades didácticas que se construyen alrededor de este objeto matemático deben procurar la ruptura con la idea de número forjada desde el estudio con los números naturales y potenciar las conexiones conceptuales de los estudiantes entre la representación como fracción y como decimal.

2.7.2 solo se hace referencia a los números racionales positivos. Es común encontrar en los libros de texto que se presenta a los números racionales como un conocimiento formalmente estructurado y necesario para resolver problemas aritméticos, geométricos y algebraicos, sin embargo, desde la didáctica de las matemáticas no es posible estudiar los números racionales desde el formalismo sino que corresponde hacer una transposición didáctica de acuerdo con las capacidades de los estudiantes y cercana a sus experiencias, por esta razón, en primaria se empieza a estudiar los números racionales positivos debido a que éstos se pueden vislumbrar como elementos del mundo físico mientras que los racionales negativos no tienen representaciones cercanas al mundo real sino más abstractas para lo cual se debe propiciar un proceso abstracción progresiva.

2.7.3 los números periódicos quedan al margen de este trabajo. Las ideas del trabajo realizado por Gairín (1998) se basa en modelos de aprendizaje donde los números racionales positivos se construyen desde la noción de medida, esto es, debido a la edad de los escolares que

es entre los 9-12 años es preferible enfatizar en los procesos finitos quedando las ideas de la continuidad de la medida y los procesos infinitos relegados a etapas posteriores donde los educandos hayan alcanzado un mayor grado de abstracción.

2.7.4 No se abordan las fracciones con significado de razón. Arguye Gairín (1998) que en su trabajo no se tendrá en cuenta la interpretación de la fracción como razón, esto, con la intención de respetar la tradición de quienes a principios de siglo separaron teoría y práctica por esta razón la razón y la proporción se fueron alejando de las fracciones, sin embargo, la autora manifiesta que la razón y la proporción son tópicos adecuados para tratar las fracciones.

2.7.5 Asociar los números racionales a la medida de magnitudes. En la tradición educativa el primer contacto con la idea de número se forja a través del estudio de los números naturales, sin embargo, los números naturales se limitan a responder a la pregunta ¿Cuántos hay? en un contexto concreto de donde surgen, no obstante, si el estudiante traslada esta idea de número a otros contextos se dificulta la comprensión de los números racionales en aspectos esenciales:

- Las fracciones decimales tienen aspecto discreto al considerar numerador y denominador como entes numéricos diferenciados, pero, tienen aspecto continuo al considerar la fracción como un solo ente numérico y es este aspecto continuo de las fracciones que resulta de difícil comprensión para los escolares (Wearne, Hiebert y Taber, 1991).
- Las notaciones fracción y decimal son sistemas simbólicos paralelos que representan los mismos conceptos; para el alumno es una idea difícil de asimilar el que cualquier concepto, especialmente un número, pueda tener más de un símbolo. (Owens y Super, 1993)

* El orden de los números naturales interfiere el orden de las fracciones decimales (Resnick et al, 1989). Los errores en el orden de las expresiones decimales están asociados a la aparente simetría alrededor de la coma decimal y a las dificultades de distinción de los nombres de los números naturales y decimales; estas dificultades provocan la alta tendencia de los niños a aplicar reglas de los números naturales para comparar las fracciones decimales, dando lugar a técnicas de comparación como la regla del número entero, la regla de la fracción o la regla del cero (Owens y Super, 1993). A su vez manifiesta Gairín, que uno de los argumentos para no empezar con la interpretación de la fracción como razón tienen que ver con la invarianza implicando un constructo mental más complejo mientras que el contexto de la medida parte de las preconcepciones de los estudiantes y aparte facilita el significado de las operaciones y algoritmos mientras que la de razón lo dificulta.

Parece ser que el origen de estas dificultades radica en la inexistencia de una ruptura en la idea que tienen los estudiantes de número, pues trasladan significados de los números naturales a los números racionales. Conviene de esta manera presentarle a los estudiantes situaciones en las que los números naturales resulten ineficaces, es decir, situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación con ello los estudiantes lograrán asociar los números naturales a las situaciones en las que se requieran y a su vez amplían su idea de número a contextos diferentes. Tales situaciones se producen en el contexto de la medida en donde los números naturales están limitados a unidades donde la unidad cabe un número entero de veces mientras que en las situaciones en las que la unidad no cabe un número entero de veces, es decir, donde se debe fraccionar la unidad surge la necesidad de definir un nuevo conjunto numérico, el de los números racionales positivos, que permite determinar la medida de cualquier magnitud.

2.7.6 Comenzar la instrucción con las fracciones.

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales positivos es la de fraccionamiento de la unidad la cual surge cuando la unidad de medida es más grande que la unidad a medir de allí surge la necesidad de crear una subunidad de medida que quepa un número entero de veces en la unidad a medir. La experiencia con escolares ha demostrado que los éstos recurren a elementos como un poco más o un poco menos, es decir, el fraccionamiento de la unidad no se da de manera innata por ello, así como se adiestró a los estudiantes en las técnicas de contar así mismo se debe adiestrar a los estudiantes en las técnicas de medición. De este modo los educandos admitirán la necesidad de fraccionar la unidad cuando se requiera y admitirán que este hecho se debe representar teniendo en cuenta la unidad a medir es decir la relación entre la unidad a medir y la unidad de medida por tal motivo parece conveniente que el número racional en un primer momento se presente con la notación fraccionaria. En cambio, si se decidiese por presentar al número racional en su notación decimal el proceso se hace más complejo y requiere varias fases en las cuales se empieza a fraccionar la unidad en potencias de 10, a su vez, es más complejo porque entran en juego las características de los números decimales como el número relativo y que tal simbolización considera implícita la suma de los valores relativos de las cifras.

2.7.7 Introducir las fracciones con el significado de medida.

Las fracciones positivas tienen muchas interpretaciones por ejemplo para Behr, Harel, Post y Lesh (1993, p. 14) referenciados en Gairín (1998) citan el significado de parte-todo, cociente, razón, operador, mientras que Kieran (1993, p. 57) no considera el significado de la relación parte-todo puesto que los incluye en los de cociente y de medida. No obstante, en el sistema educativo la interpretación inicial que más se utiliza es la de parte-todo sin embargo esta práctica expresa Gairín (1998) tiene serios inconvenientes:

- Hay dificultades para definir el todo: cuando una unidad, objeto o figura, la partimos en trozos iguales y nos referimos a uno o varios de esos trozos utilizamos las fracciones (Lamadrid, 1987, p. 67).
- La propia indefinición del todo provoca errores entre los estudiantes a quienes se les presentan tareas de comparación de áreas utilizando todos del mismo tamaño. Esto produce que los alumnos desatiendan el tamaño de los todos de los que provienen las partes (Armstrong-Novillis, 1995, p. 16) y que, en consecuencia, se limiten a la comparación de partes que proceden de divisiones de unidades de distinto tamaño.
- La ocultación de la unidad de medida obstaculiza la identificación de las fracciones del tipo a/a con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que ese tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado a elementos, pero no pueden indicar que vale la unidad puesto que no se les ha presentado como tal.
- La propia instrucción provoca obstáculos de interpretación de las llamadas fracciones impropias, pues al ocultar la unidad en las tareas de medida se crea en el alumno el significado exclusivo de la fracción con el numerador menor que el denominador.

En contraposición a estas dificultades, Gairín (1998) propone que la fracción a/b debe presentarse como el resultado de una medida, como el número a de subunidades de tamaño 1/b que corresponde la cantidad de magnitud medida argumentando las siguientes razones:

- Porque permite presentar una ruptura entre los números naturales y los racionales a partir de sus diferentes usos. Contar y medir son acciones de diferente naturaleza que demandan técnicas diferenciadas y, en consecuencia, sistemas de representación distintos.

- Porque el trabajo con este significado exige un aprendizaje activo, ya que es el propio estudiante quien tiene que decidir la elección de la subunidad de medida necesaria para efectuar la medida.
- Porque el hecho de que en la cantidad a medir no quepa la unidad de medida un número entero de veces posibilita introducir la idea del fraccionamiento de la unidad en un número de partes iguales, facilita la idea de crear subunidades de medida.
- Porque el uso de fracciones para expresar cantidades de magnitud introduce, de forma natural, las fracciones con numeradores mayores, menores o iguales que el denominador, sin más que proponer la medida de cantidades mayores, menores o iguales a la unidad.
- Porque la utilización de dos técnicas de medida distintas posibilita la introducción de las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos: medir con una sola subunidad, medir en una sola fase; o medir con subunidades de la unidad o de partes de la unidad, medir en varias fases.
- Porque este significado permite justificar las relaciones de equivalencia y orden entre fracciones mediante la comparación de cantidades de magnitud.
- Porque posibilita la conceptualización de las operaciones entre fracciones desde el trabajo con cantidades de magnitud; asimismo permite justificar los algoritmos de cálculo.

2.7.8 Trabajar con las magnitudes más adecuadas.

Son tres las variables consideradas por Gairín (1998) para seleccionar la magnitud más adecuada:

- Una magnitud medible, pues un número racional positivo expresa la medida de una cantidad de dicha magnitud
- Unos objetos, puesto que a través de ello el aprendiz puede percibir una cierta cantidad de la magnitud considerada

- Unas acciones, puesto que la generación de las ideas matemáticas se produce al observar las variaciones de las cantidades de magnitud que se producen con la manipulación de los objetos.

En ese sentido, la magnitud más adecuada según Gairín (1998) es la longitud ya que en cuanto a fracciones es importante la simbolización del resultado de la medida, pues la longitud permite la sencillez de la técnica de medida, a su vez, debido a que en comparación con las magnitudes de capacidad o masa las dificultades técnicas de dichas magnitudes en el trabajo del estudiante acapararían la atención del mismo obstaculizando lo prioritario que es simbolizar la medición. Por otro lado, al ser el fraccionamiento de la unidad un aspecto importante para la comprensión de los números racionales positivos conviene aplicar el criterio de facilidad, pues los segmentos permiten haciendo uso del teorema de Thales la división de un segmento en partes iguales de manera fácil. A su vez, no conviene para la instrucción utilizar las superficies como la magnitud adecuada ya que debido a que las particiones responden al criterio igual cantidad de superficie y no de forma, esto es, en partes semejantes puede que la atención de los escolares se centra en garantizar que las partes sean semejantes más que en la medición de las magnitudes. De acuerdo con lo anterior la propuesta que hace Gairín (1998) es la siguiente: Una magnitud medible: la longitud, unos objetos: listones de madera o pajas de refresco y unas acciones: medir, comparar longitudes, unir objetos...

2.7.9 Introducir la fracción con significado de operador.

Para ello, conviene introducir la fracción a/b como composición de los operadores multiplicar por a y dividir por b, lo cual se justifica según Gairín (1998) por:

- Es necesario que los escolares fortalezcan sus conocimientos sobre los diferentes significados de la fracción y que establezcan conexiones entre los mismos, puesto que si los niños aprenden solamente una interpretación de las fracciones tienen serias limitaciones para una sólida comprensión del número racional (Kerslake, 1986).

- En este concepto de fracción se parte de un número o figura dadas y mediante tratamientos operativos se transforma en un segundo número o figura; por tanto, la fracción aparece como una función de cambio (Behr et al., 1993, p. 13). El trabajo con operadores conecta las fracciones con propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos; y también con propiedades del análisis como es la composición de funciones (Kieren, 1993).
- La fracción con significado de operador introduce el producto de fracciones como parte de parte, como el resultado de aplicar un operador a una cantidad de magnitud o a un número. Este significado es de gran importancia porque exige de los escolares la comprensión de la división partitiva y cuotitiva, y porque permite dar soluciones a la enorme diversidad de situaciones problemáticas en las que este significado está implicado. Este significado puede plantearse a los escolares de 10-11 años, siempre y cuando hayan recibido instrucción previa sobre la multiplicación de una fracción por un número natural, y del cociente entre una fracción y un número natural.
- A través de la idea de operador es posible justificar la construcción formal del cuerpo conmutativo de los números racionales, puesto que así se elude tener que evidenciar la existencia del opuesto y del inverso de cada número desde la manipulación de magnitudes extensivas.

2.7.10 Conectar las notaciones fraccionaria y decimal.

Según Gairín (1998) las matemáticas son el estudio de las estructuras y en particular es el estudio de las estructuras numéricas entendidas como un conjunto de entes numéricos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones y de unas relaciones. Las ideas que determinan estas estructuras numéricas surgen del trabajo con modelos, al dar respuesta a situaciones problemáticas

que el escolar resuelve manipulando los objetos, observando el resultado de su acción y describiendo lo acontecido. De esta manera, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entes abstractos sostenidos por un sistema simbólico con el que se formulan enunciados y demostraciones.

En consecuencia y según Lesh (1997) citado por Gairín (1998) el aprendizaje de las estructuras matemáticas consiste en la manipulación de símbolos; en interpretar matemáticamente situaciones problemáticas; en cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto en utilizar sistemas de representación para desarrollar descripciones. En consecuencia, los sistemas de representación juegan un papel importante a tal punto que es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación para alcanzar la comprensión del concepto que se considera asevera Gairín (1998) citando (Kaput, 1992; Duval, 1993; Romero, 1995) a su vez, asevera que algunas dificultades en los estudiantes se pueden detectar en la falta de coordinación entre diferentes sistemas cuando tratan de expresar los mismos conceptos (Castro, 1994; Duval, 1995).

Manifiesta Gairín (1998) que en el sistema educativo se potencia la utilización de dos sistemas de representación de los números racionales: la notación fraccionaria y la notación decimal. Por tanto, conectar conceptual y estructuralmente dichos sistemas de representación debe ser un objetivo prioritario en la formación de los estudiantes, sin embargo, dicha conexión no se alcanza con cualquier significado de las fracciones ya que:

* Desde el significado de relación parte-todo son débiles las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, pues el estudiante asocia la fracción a una parte de la unidad compuesta por la unión de partes de igual tamaño, mientras que las expresiones decimales exigen interpretar la fracción como agregación de partes de unidad de diferentes tamaños.

- Desde el significado de la fracción como resultado de la medida de magnitudes se puede abordar la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal, pero se encuentran las dificultades técnicas inherentes a la continuidad de la medida; en efecto, en magnitudes como la longitud o la masa resulta complicado hacer mediciones más allá de la milésima parte de la unidad, pues estas mediciones dependen grandemente de las percepciones visuales.
- Si la conexión entre notaciones fraccionaria y decimal se aborda desde el significado de razón encontramos dificultades para utilizar un mismo modelo en el que asentar el significado de la fracción y el significado de las expresiones decimales. En efecto, hay dificultades conceptuales para justificar cómo la relación entre dos cantidades de magnitud se transforma en una sola relación numérica que expresa el tanto por uno.
- Tampoco resulta adecuado partir del significado de operador de la fracción por cuanto se presentan dificultades si se utiliza un modelo en el que hay objetos discretos, porque las exigencias del operador demandan el fraccionamiento de los objetos; si el modelo utiliza magnitudes continuas las dificultades aparecerían asociadas a la continuidad de la medida; y si se utiliza números no medida el operador exige el trabajo con expresiones decimales, situación que no es aconsejable por cuanto no se produce una conexión entre los significados de la fracción y de la expresión decimal.

Por estas razones, Gairín (1998) propone que la conexión entre la notación fraccionaria y decimal a través de la interpretación de la fracción como cociente partitivo justificada en los siguientes argumentos:

- El utilizar el significado de cociente permite, mediante una acción de reparto en varias fases, presentar la fracción como agregación de cantidades de magnitud de diferentes tamaños.
- Al utilizar el cociente con el sentido de reparto igualitario se puede construir un único modelo de aprendizaje para dotar de significado tanto a la fracción como a las expresiones decimales; es decir, se pueden presentar las fracciones y las expresiones decimales como formas distintas de simbolizar el resultado de un mismo reparto.
- El uso de la fracción con significado de cociente permite al escolar construir sus conocimientos por medio de reflexiones mentales, ya que en este caso las representaciones gráficas no son imprescindibles.

A su vez, el expresar la fracción como a/b tiene una doble evaluación semántica, por un lado, indica las condiciones del reparto, esto es, se reparten a unidades entre b individuos y por el otro lado indica la cantidad de magnitud que resulta de efectuar dicho reparto, esto es, la parte que corresponde a cada uno de los b participantes.

2.7.11 La fracción como significado de cociente.

Expresa Gairín (1998) que el significado de la fracción como cociente tiene su sentido en contextos continuos, pues es donde se permite el fraccionamiento de la unidad en un número cualquiera de partes y se puede entender como el resultado de un reparto, como la cantidad de magnitud que recibe uno cualquiera las b participantes entre los que se han repartido a unidad de dicha magnitud; o bien la cantidad de magnitud que resulta de distribuir a unidades en b partes iguales.

Así mismo asegura Gairín (1998) que este significado de la fracción requiere del alumno un conocimiento sólido de la división partitiva, es decir, debe terne claridad de los elementos intervinientes como los son la cantidad a repartir, el número de participantes y el cociente o

resultado del reparto, no obstante, la idea de división partitiva es conocida por los estudiantes en el contexto de los números naturales por ello, hay que extender dicha idea a contextos que permitan el fraccionamiento de la magnitud que se trabaja.

2.7.12 De la notación fraccionaria a la notación decimal.

El paso de la notación decimal a la notación fraccionaria se alcanza mediante la búsqueda de repartos equivalentes, de repartos que den el mismo resultado; así, por ejemplo, el número 1,25 podemos considerarlo como el resultado de un reparto en el que interviene una sola persona; para que en otro reparto reciban la misma cantidad interviniendo 10 personas deben repartirse 12,5 unidades; y si se quiere obtener el mismo resultando interviniendo 100 personas, habría que repartir 125 unidades; luego 1,25 = 125/100.

2.7.13 Relaciones y operaciones entre expresiones decimales.

De acuerdo con la manera en que se ha llegado la notación decimal se justifican según Gairín (1998) las relaciones y operaciones entre números decimales conforme con los siguientes argumentos:

- Hay infinitas expresiones fraccionarias que indican la misma cantidad de magnitud, y solamente hay una expresión decimal para simbolizar cada cantidad de magnitud. La aplicación del criterio de la mayor parte demuestra que en cualquier expresión decimal a,0cd... son ciertas las desigualdades $1 > 0,bcd$; $0,1 > 0,0cd$; $0,01 > 0,00d$;...

Tales desigualdades expresa Gairín (1998) son correctas porque a,bcd indica el resultado del reparto realizado con el procedimiento de la mayor parte; por tanto, la parte decimal 0,bcd tiene que ser menor que la unidad, pues si fuese mayor o igual el procedimiento de reparto obligaría a que en la primera fase se hubiesen entregado a+1 unidades a cada uno de los participantes. Dicha propiedad expresa que cualquier unidad de una posición de una expresión decimal representa una

cantidad mayor que la suma de todas las cifras situadas a su derecha; por ello, para comparar dos expresiones decimales basta con ir comparando ordenadamente las cifras que ocupan la misma posición, empezando por las de mayor valor relativo; en el momento que una de las cifras sea mayor, la expresión decimal a la que corresponde es la mayor.

A su vez asevera Gairín (1998), este resultado permite poner de manifiesto que entre dos expresiones decimales hay otras infinitas y que, en consecuencia, dada una cantidad indicada por una expresión decimal no tiene sentido buscar la siguiente o la anterior. Las expresiones decimales tienen usos diferentes de los números naturales: sirven para medir, pero no sirven para contar ni tienen valor ordinal.

3. Metodología de investigación

El presente proyecto de investigación se enmarca en un paradigma cualitativo de la investigación debido a que no pretende la generalización, la objetividad, la abstracción y replicabilidad propias de un paradigma cuantitativo (positivista) a través del instrumentalismo (González, 2006). Por lo contrario, se enmarca en el paradigma cualitativo en tanto el docente en este caso específico no se excluye de la realidad de los investigados, lo que conduce a resaltar la importancia que tiene la subjetividad a la hora de generar zonas de sentido o campos de inteligibilidad, esto es, la profundización no acotada de un fenómeno de la realidad que al ser múltiple, posibilita ampliar y complejizar el conocimiento de tal manera que se produzcan nuevas formas de acción sobre la realidad. En palabras de (González, 2006) en el paradigma cualitativo:

> El conocimiento se legitima en su continuidad, en la capacidad de generar nuevas zonas de inteligibilidad sobre lo estudiado y de articular esas zonas en modelos cada vez más complejos, orientados a la producción de nuevos conocimientos. (p. 25)

3.1 El estudio de caso

Habiendo aclarado que este proyecto no tiene pretensiones positivistas, a continuación, se expondrá el método seleccionado para desarrollar tal proceso investigativo. Dentro de todas las posibilidades que nos ofrece el paradigma cualitativo, se seleccionó el estudio de caso, debido a que en el momento en que se está desarrollando este proyecto, el país se encuentra en un proceso de cuarentena debido al Covid-19 y como consecuencia de ello, el sector educación está trabajando en su mayoría de manera virtual, por esta razón, correspondió modificar las intenciones metodológicas que se tenían estipuladas en un principio con la presencialidad.

A su vez, se seleccionó este método debido a que según Yin (1989) el estudio de caso es apropiado para temas que se consideran nuevos, pues asegura que la investigación empírica

presenta algunos rasgos distintivos como lo son examinar o indagar sobre un fenómeno contemporáneo en su entorno real, clarificar algunos aspectos que entre el fenómeno y su contexto no son evidentes y, utilizar diversas fuentes de datos estudiando un caso o múltiples casos a la vez.

Sumado a lo anterior, Chetty (1996) citado en Martínez (2006) manifiesta que otros argumentos que sustentan una elección de este método son que el estudio de caso es ideal para abordar temas de investigación en los que las teorías existentes son inadecuadas, permite estudiar los fenómenos desde múltiples perspectivas y no desde la influencia de una sola variable, permite explorar en forma profunda y obtener un conocimiento más amplio sobre cada fenómeno, lo cual permite la aparición de nuevas señales sobre los temas que emergen y es adecuada para investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y por qué ocurren.

En ese sentido, en el planteamiento del problema se pudo vislumbrar que no hay una variedad de investigaciones que aborden la noción de densidad y así mismo, no se encontraron investigaciones que trataran de relacionar el orden entre los racionales positivos con la noción de densidad como tampoco, se han podido encontrar investigaciones que posibiliten reconocer las matematizaciones desde análisis didácticos a priori (Zolkower et al, 2006) gestionadas por estudiantes del grado octavo al respecto de esta noción por ello, existe una relación estrecha entre esta propuesta y los objetivos del estudio de caso expuestos, pues se espera poder estudiar a profundidad las matematizaciones de estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Distrital Santa Lucía a través de un cuestionario abierto al respecto de situaciones de orden entre fracciones orientadas a construir la noción de densidad de los racionales positivos.

Aunque el estudio de caso es una herramienta potente y flexible para la investigación cualitativa, no queda exenta de discusiones y posturas contrarias a su alrededor, expresa Munarriz (1992) que al método de estudio de caso se le cuestionan la objetividad, la generalización y la

validez de sus resultados, por un lado, al estar el investigador sumergido en el contexto de los casos seleccionados se considera que se pierde objetividad, sin embargo, como lo manifiesta Gonzales (2006) la subjetividad es un factor importante para la expansión del conocimiento y para la construcción de nuevas perspectivas sobre una realidad particular, a su vez, Munarriz (1992) sostiene que para sopesar este hecho, el investigador que selecciona el estudio de caso debe hacer uso de diferentes de técnicas de recopilación de la información que le permitan un contraste. Por su parte, al respecto de la validez de los resultados y su generalización, los primero que se debe considerar es que la investigación cualitativa no busca la generalización de los resultados, entre tanto, como lo expresa Elliott (1990) citado en Munarriz (1992) el problema de la validación de una investigación mediante el estudio de caso no recae sobre el investigador sino sobre el usuario, quien a partir de un estudio previo analiza la compatibilidad de lo propuesto con lo que investiga o estudia.

Ahora bien, esta estrategia investigativa de estudio de caso presenta las siguientes etapas: primero, enunciar los objetivos de la investigación, indicar cuál es la unidad de estudio, el caso y qué características, relaciones y procesos se van a observar. Segundo, Indicar cómo se selecciona el caso y qué técnicas de observación van a ser utilizadas. Tercero, recolectar los datos. Cuarto, organizar los datos de alguna forma coherente que reconstruya la unidad que se estudia y quinto, informar los resultados y discutir su significación en función de los objetivos propuestos al iniciar el estudio (Tamayo, 1999, pág. 49-50).

De acuerdo con estas etapas, capítulos atrás se realizó la etapa 1, por esta razón, a continuación, se exponen los ajustes de la etapa 2 a esta propuesta de investigación, a saber: Lo primero que se presentará serán los casos o la población seleccionada, que serán 4 estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Distrital Santa Lucia. Se seleccionaron estudiantes del grado octavo

porque como lo expresa Gairín (1998) en el desarrollo curricular de estos estudiantes, aquellos que se encuentran en edades entre los 13 y los 15 años han tenido mayor contacto con las propiedades, características y procesos con números racionales, así mismo, han tenido la oportunidad de apropiar más propiedades de éstos que en edades anteriores.

Lo precedente, contribuye a esta propuesta porque los estudiantes que colaboraron de manera voluntaria en esta investigación teóricamente, han apropiado unas maneras y preferencias de notación, representación e interpretación para abordar situaciones de orden y noción de densidad de los números racionales positivos. Cabe aclarar, se seleccionaron estos 4 estudiantes porque de acuerdo con el método seleccionado se puede estudiar un solo caso o múltiples casos y considerando que el tema de investigación no es muy explorado, es necesario obtener la mayor cantidad de datos posibles para tener diferentes resultados y perspectivas por parte de los estudiantes que propicien una cualificación de los resultados (Cuestionario).

3.2 Técnicas para recolección de la información

Como se expresó anteriormente, concuerdan Martínez (2006), Tamayo (1999) y L.A.C.E (1999) en que el método de estudio de caso se caracteriza por la profundidad y énfasis sobre la información obtenida a través de los instrumentos de recolección de la información por ello, recomiendan hacer uso de varios instrumentos para obtener la mayor cantidad de información posible sobre lo que se investiga con respecto a los objetivos. Los instrumentos utilizados para esta investigación serán:

- El cuestionario desde la perspectiva de (Kemmis y Mctaggart, 1992) y (García, 2003) el cual: (…) busca información u opiniones en las palabras de aquellos que responden. Son útiles para etapas de exploración, pero pueden aportar respuestas poco compaginables. También es posible que el porcentaje de respuestas sea bajo. (p. 135).

Dicho cuestionario será construido, atendiendo al proceso expuesto por (García, 2003) en conjunto con una aproximación al análisis fenomenológico propuesto en (Puig, 1997) que permitirán a partir de la detección de algunos fenómenos y elementos didácticos al respecto del orden y la noción de densidad posibilitar una secuencia de tareas realistas que se expondrá más adelante.

- La grabación de audio y video, se utilizan con el objetivo de conocer a mayor profundidad las reacciones de los participantes, a su vez porque: Esas ayudas visuales cumplen el papel de sustitutos de los razonamientos verbales para aclarar las preguntas y hacerlas más específicas. (Gallardo y Moreno, 1999, p. 72)
- Por último, se utilizará la entrevista no estandarizada desde la perspectiva de (Gallardo y Moreno, 1999) porque: En ésta, ni las preguntas ni las respuestas del sujeto están predeterminadas, con el fin de permitir que las respuestas del entrevistado sean más espontáneas, más profundas, más personales y auto-reveladoras. El principal tipo de esta entrevista no estandarizada es la llamada entrevista no dirigida, en la cual la iniciativa está más en manos del entrevistado que del entrevistador, pues se trata, como en las entrevistas de psicoterapia, que el paciente exprese sus sentimientos, sin sugestiones dirigidas por el terapista. (p. 71).

3.3 Construcción del cuestionario para la recolección de la información

Como se expresó en la delimitación del problema, un objetivo principal en esta investigación es la construcción de un cuestionario que conjugue toda la información analizada al respecto de las propiedades de orden entre números racionales positivos, la noción de densidad y el principio de niveles desde la EMR con la premisa de documentar los niveles de matematización alcanzados por los casos seleccionados. En ese sentido, teniendo en cuenta la apuesta metodológica que se

seleccionó, es válido resaltar que Munarriz (1992) expresa al respecto del estudio de caso que, en dicho método la técnica principal es la observación, no obstante, para la garantizar la objetividad de los resultados se hace indispensable recurrir a viarias técnicas de recolección de la información como lo son las entrevistas, las encuestas, los cuestionarios entre otros, que permitan el contraste de la información con las intuiciones propias en el proceso de análisis.

De acuerdo con lo anterior, expresa García (2003) que el cuestionario es un instrumento clásico de obtención de la información y registro de datos en las ciencias sociales, el cual, puede ser utilizado como instrumento de investigación o como evaluador, con el que se puede obtener información cuantitativa o cualitativa dependiendo del enfoque de la investigación o propósito. Su particularidad radica en su carácter impersonal con respecto a otros instrumentos de investigación. Dicho cuestionario, García (2003) lo define como un conjunto de preguntas de varios tipos, preparado cuidadosa y sistemáticamente sobre los hechos o aspectos que interesan en una investigación y que puede ser aplicado de diversas formas ya sea física o virtual, lo que es de suma importancia, ya que como se mencionó anteriormente, esta investigación está siendo desarrollada durante el proceso de pandemia mundial que conllevó la adaptación del proceso educativo a la virtualidad y por ende, la adaptación a la virtualidad de algunos procesos investigativos en el ámbito educativo.

La finalidad principal del cuestionario, es la obtención de información sistemática y ordenada de la población con la que se trabaja (casos) al respecto de las variables objeto de la investigación. Por su parte, Fox (1991) citando en García (2003) expresa que utilizar esta técnica implica para el investigador la consideración de caminos metodológicos generales, que son: estar plenamente seguro de que las preguntas se pueden formular con claridad para que funcionen en la interacción personal que supone el cuestionario y segundo, dar todos los pasos posibles para maximizar la

probabilidad de que el sujeto conteste y devuelva las preguntas. Dentro de los datos que se pueden recopilar con la aplicación de un cuestionario se encuentran hechos, opiniones, actitudes, motivaciones, sentimientos y cogniciones, para el caso particular del cuestionario que se construirá en esta investigación, los datos que se obtendrán son de naturaleza cognitiva, es decir, índices del nivel de conocimiento de los diversos temas estudiados en el cuestionario y revela el grado de confianza a conceder a las opiniones sobre juicios subjetivos (García, 2003, p. 4).

De acuerdo con Corral (2010) existen diversos tipos de cuestionario, algunos de ellos son: El cuestionario de respuestas cerradas, el cual se caracteriza porque en sus reactivos o preguntas se presentan un número n de respuestas prestablecidas; a su vez, nos encontramos con el cuestionario de respuestas semicerradas, el cual se caracteriza por incluir aparte de preguntas cerradas alguna/s preguntas abiertas, sumado al anterior, también nos encontramos con el cuestionario de respuesta abierta o cuestionario abierto, el cual se caracteriza por requerir respuestas elaboradas por el o los participantes y dentro de esta misma clasificación, se encuentra el cuestionario mixto, el cual es una combinación de preguntas cerradas, abiertas y semicerradas. Además de los anteriores, los cuestionarios también se pueden clasificar según el momento de codificación donde se ramifican dos opciones para esta clasificación, que son: El cuestionario precodificado, el cual se caracteriza por contener preguntas con alternativas previamente identificadas caracterizadas con un número y así mismo, se tiene el cuestionario no codificado, el cual se caracteriza por contener preguntas no codificadas previamente.

Sumado a lo anterior, los cuestionarios también se pueden clasificar según la forma de administración, por ello, expone Corral (2010) la siguiente clasificación: Cuestionarios autoadministrados, los cuales se entregan a los participantes y éstos lo responden directamente; así mismo, se encuentran los cuestionarios autoadministrado enviado por correo postal, correo

electrónico o servicio de mensajería, los cuales son contestados directamente por los participantes pero su medio de recepción es indirecto y tiene la dificultad de que al surgir una duda por parte de alguno de los participantes no se puede aclarar ésta directamente. Por último, se tienen los cuestionarios orales o verbales, en esta categorización tenemos los cuestionarios o entrevistas cara a cara donde el investigador escribe las respuestas de la respuesta verbal de los participantes y por otro lado, también se encuentran los cuestionarios o entrevistas telefónicas o por videoconferencia, los cuales son similares al anterior pero, cambia el medio por el cual se realiza ya sea por teléfono o por internet.

De acuerdo con la clasificación anterior, para esta propuesta investigativa se optará por un cuestionario abierto autoadministrado enviado a través de los WhatsApp personales de los 4 casos seleccionados, con el propósito de identificar el nivel de matematización alcanzado por los 4 casos al respecto de situaciones de orden orientadas a construir la noción de densidad de los números racionales positivos.

A su vez, manifiesta Corral (2010) que una propuesta de fases en la construcción del cuestionario puede ser la de (Ruiz, 2002) quien propone:

1. Determinar el propósito del instrumento, tomar decisiones sobre la finalidad del instrumento, para qué lo queremos.
2. Decidir sobre el tipo de instrumento, es la segunda decisión en el proceso de diseño y elaboración del instrumento de medición.
3. Conceptualizar el constructo, es indispensable para ello realizar una revisión detallada y cuidadosa de la literatura especializada a fin de definir el constructo.
4. Operacionalizar el constructo, en esta fase se conceptualiza el constructo en procedimientos concretos a través de un conjunto de tareas, reactivos, preguntas o ítems,

que permitan validar de manera empírica el constructo. Para la operacionalización del constructo, Ruiz (2002) señala cinco (5) pasos a seguir:

- Definir el propósito del instrumento.
- Definir el constructo.
- Establecer las dimensiones del constructo.
- Desglosar los indicadores de cada dimensión.
- Elaborar los ítems, reactivos, preguntas o tareas. (Corral, 2010, pág. 153-154)

De acuerdo con estas fases, en la fase 1, como se expuso en los objetivos de esta propuesta, el propósito principal es la construcción de un cuestionario que permita la documentación de los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al respecto de situaciones de orden entre racionales positivos orientadas a construir la noción de densidad. En la fase 2, como se expuso párrafos atrás, se ha seleccionado construir un cuestionario abierto autoadministrado enviado a través de los WhatsApp personales de los 4 casos seleccionados debido a la situación de pandemia mundial en el que se está desarrollando este trabajo, cabe aclarar, que se eligen preguntas abiertas porque como lo expresa García (2003) se buscan datos de naturaleza cognitiva, es decir, índices del nivel de conocimiento de los diversos temas estudiados en el cuestionario.

Para la fase 3, como se expuso también en los objetivos de este proyecto, para construir el cuestionario abierto se tendrá en cuenta el proceso implícito en la teoría de Freudenthal al respecto de los análisis fenomenológicos expuesto en (Puig, 1997) con el cual se determinarán los fenómenos e indicaciones didácticas que delimitarán las preguntas que compondrán el cuestionario en coherencia con la EMR.

3.3.1 Aproximación al análisis fenomenológico Puig (1997). Continuando con las fases, En la fase 3 corresponde conceptualizar el constructo, para ello, como se expresó en los objetivos de esta propuesta se realizará un acercamiento al análisis fenomenológico desde la apuesta teórica de (Puig, 1997) quien arguye que implícito dentro del método propuesto por Freudenthal existen cuatro tipos de fenomenologías, que son: la fenomenología (pura), la fenomenología didáctica, la fenomenología genética y la fenomenología histórica y contribuirán como ya se expresó a la delimitación de los fenómenos y elementos didácticos a considerar para la construcción del cuestionario abierto. En relación con lo anterior, para el caso de la fenomenología pura, a continuación, se presentará una axiomática de los números racionales que posibilitarán reconocer las propiedades y operaciones que se pueden realizar con los racionales positivos, a saber:

Según Luque, Mora y Torres (2014) para empezar a desarrollar este proceso se debe establecer una notación para representar los elementos del conjunto de los números racionales o Q, en ese sentido, manifiestan que las fracciones son parejas de número naturales (m, n) y que a su vez, existen parejas de número números naturales que representan al mismo número racional, en otras palabras, dichas parejas de número naturales son equivalentes, por ello, lo importante no son la parejas de números naturales que representan un número racional sino las familias de número racionales que representan un número racional, en consecuencia, se llamará número racional a una familia de fracciones equivalentes y que se representarán en adelante como $[(m, n)]$.

En un sentido formal, expresa Luque et al (2014) que un número racional $[(m, n)]$ es la familia de parejas de número naturales que sean equivalentes a una fracción dada $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

Ahora bien, las parejas de número naturales se comportan como una relación de equivalencia, de hecho, expresan Luque et al (2014) que se comporta como una igualdad, a saber:

* La relación es reflexiva para todo $m, n \in N, con\ n \neq 0$ esto es:

$$(m,n) \approx (n,m)$$

$$pues\ m \times n = n \times m$$

Debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación entre número naturales.

* La relación es simétrica para todo $m,n,a,b \in N\ con\ n \neq 0$ y $b \neq 0$ esto es:

Si $(m,n) \approx (a,b)$ entonces $m \times b = n \times a$ y por la propiedad simétrica de la igualad sumado a la propiedad conmutativa de la multiplicación entre número naturales se tiene que $a \times n = b \times m$ lo cual significa que $(a,b) \approx (m,n)$.

* La relación es transitiva para todo $m,n,a,b,c,d\ N\ con\ n \neq 0, b \neq 0$ y $d \neq 0$ esto es:

Si $(m,n) \approx (a,b)$ y $(a,b) \approx (c,d)$ entonces la primera relación corresponde a $m \times b = n \times a$ y la segunda corresponde a $a \times d = b \times c$, si se multiplica a ambos lados de la primera igualdad por d se obtiene $d \times (m \times b) = (n \times a) \times d$ luego por la propiedad asociativa de la multiplicación de los números naturales se tiene $b \times (m \times d) = n \times (a \times d)$ pero como $a \times d = b \times c$ reemplazamos $(a \times d)$ por $(b \times c)$ es decir, $b \times (m \times d) = n \times (b \times c)$ luego por la propiedad asociativa de la multiplicación de los números naturales $b \times (m \times d) = b \times (n \times c)$ luego por la propiedad cancelativa de la multiplicación de número naturales se tiene $m \times d = n \times c$ por tanto, $(m,n) \approx (c,d)$.

Lo anterior demuestra que un número racional es una clase de equivalencia.

Ahora bien, Rudin (1980) manifiesta que el conjunto Q de los números racionales es un campo, es decir, que es un conjunto ordenado con dos operaciones y la ley distributiva, a continuación, se expone la axiomatización de dicho conjunto:

Según Luque et al (2014) la adición de número racionales se define como:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(ad + cb, bd)]$$

La operación de adición entre número racionales es asociativa:

Para todo $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in Q$ se tiene que

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\}$

Demostración:

Por la definición de adición en Q tenemos

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(ad+bc,db] \oplus [(e,f)]$ luego por la misma definición de adición en Q tenemos que

$[(ad+bc,db)] \oplus [(e,f)] = \left[\left((ad+bc)f+bde,bdf\right)\right]$ luego por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de número naturales:

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(adf+bcf+bde,bdf)]$.

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(adf+b(cf+de),bdf)]$ luego por la definición de adición en Q se tiene

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus [(fc+de,df)]$ luego por definición de adición en Q

$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\}$.

La operación de adición entre racionales es modulativa:

$[(a,b)] \oplus [(x,y)] = [(a,b)]$.

$(ay+bx,by) = [(a,b)]\ con\ b \neq 0$ y $y \neq 0$ para demostrar esta propiedad se hará uso de la notación $\frac{s}{t}$, a saber: $\frac{ay+bx}{by} = \frac{a}{b}$. Luego por la relación de equivalencia se tiene que $b \times (ay+bx) = bya$ por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma se obtiene que $bay + bbx = bya$ si se resta a ambos lados de la igualdad bya se obtiene $bbx = 0$ luego $x = \frac{0}{bb}$ por tanto $x = 0$ reemplazando el valor de x en la ecuación se obtiene que $bay = bya$ lo cual implica que y puede tomar cualquier valor excepto el valor 0 en consecuencia, el módulo de los números racionales es de la forma $[(0,y)]$.

La operación de adición entre número racionales es cancelativa, esto es:

Para todo $a, b, c, d \in Q$ se cumple que $[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a, b)] \oplus [(e, f)]$ luego por la definición de la suma en Q se tiene que $[(ad + bc, bd)] = [(af + be, bf)]$ luego por la definición de igualdad entre número racionales se tiene que $(adbf) + (bcbf) = (afbd) + (bebd)$ y por las propiedades conmutativa, asociativa y cancelativa de la adición entre número naturales se tiene que $(bcbf) = (bebd)$ luego $(bb)(cf) = (bb)(ed)$ por tanto $(cf) = (ed)$ de donde se concluye que $[(c, d)] = [(e, f)]$.

La operación de adición es conmutativa, a saber:

Para todo $a, b, c, d \in Q$ se cumple que $[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(c, d)] \oplus [(a, b)]$ luego por definición de adición en Q se tiene que $[(ad + bc, bd)] = [(cb + ad, db)]$ tomando la primera parte de la igualdad se obtiene que por la propiedad conmutativa de la adición y multiplicación de los números naturales $[(ad + bc, bd)] = [(cb + ad, db)]$ y por definición de adición en Q se tiene que $[(cb + ad, db)] = [(c, d)] \oplus [(a, b)]$.

En coherencia con lo expuesto al inicio de esta axiomática, a continuación, se expondrá la segunda operación que define al conjunto de los números racionales como un campo ordenado, a saber:

La multiplicación entre número racionales se define como $[(a, b)] \otimes [(c, d)] = [(ac, bd)]$.

La operación de multiplicación entre número racionales es asociativa, esto es, para todo $a, b, c, d, e, f \in Q$ con $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $f \neq 0$ se cumple que:

$\{[(a, b)] \otimes [(c, d)]\} \otimes [(e, f)] = [(a, b)] \otimes \{[(c, d)] \otimes [(e, f)]\}$ luego por definición de la multiplicación en Q se tiene que $\{[(a, b)] \otimes [(c, d)]\} \otimes [(e, f)] = [(ac, bd)] \otimes [(e, f)]$ luego por la misma definición se obtiene que $[(ac, bd)] \otimes [(e, f)] = [(ace, bdf)]$ y por la propiedad asociativa de la multiplicación entre número naturales se obtiene que $[(ace, bdf)] =$

$[(a(ce), b(df))]$ y por definición de la multiplicación en Q se tiene que $[(a(ce), b(df))] = [(a, b)] \otimes \{[(c, d)] \otimes [(e, f)]\}$.

La operación de multiplicación entre número racionales tiene un elemento idéntico, a saber:

Para todo $a, b \in Q$ con $b \neq 0$ existe un $x, y \in Q$ con $y \neq 0$ tala que $[(a, b)] \otimes [(x, y)] = [(a, b)]$. Asumiendo que se cumple dicha propiedad y aplicando la definición de multiplicación en Q se obtiene que $[(ax, ay)] = [(a, b)]$ luego por la relación de equivalencia se obtiene que $axb = bya$ y aplicando la propiedad asociativa y conmutativa de la multiplicación entre números naturales se obtiene que $(ab)x = (ab)y$ y por la propiedad cancelativa de la multiplicación entre número naturales se obtiene que $x = y$ luego por definición del número racional $[(y, y)]$.

La operación de multiplicación en Q es invertiva, a saber:

Para todo $a, b, x, y, c, d \in Q$ con $b \neq 0$, $y \neq 0$ y $d \neq 0$ se cumple que $[(a, b)] \otimes [(x, y)] = [(c, d)]$ entonces $[(x, y)] = \frac{1}{[(a,b)]} \otimes [(c, d)]$ donde $\frac{1}{[(a,b)]}$ es un número racional asociado a cada número racional $[(a, b)] \neq [(0, y)]$ por la condición se obtiene que $\frac{1}{[(a,b)]} \otimes [(a, b)] = [(x, x)] = [(1,1)]$ luego esta condición establece que $\frac{1}{[(a,b)]} = [(a, b)]$ ya que $[(a, b)] \otimes [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(1,1)]$.

La multiplicación en Q es conmutativa, a saber:

Para todo $a, b, c, d \in Q$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se cumple que $[(a, b)] \otimes [(c, d)] = [(c, d)] \otimes [(a, b)]$ luego por definición de multiplicación en Q se tiene que $[(ac, bd)] = [(ca, db)]$ luego por la propiedad conmutativa de la multiplicación entre número naturales $[(ca, db)] = [(ac, bd)]$.

Ahora bien, según lo expuesto en Rudin (1980) para terminar con la definición de campo faltaría presentar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, esto es, para todo $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in Q$ con $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $f \neq 0$ se cumple que:

$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \oplus [(e,f)]\}$ luego por la definición de adición en Q se tiene que $[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [(a,b)] \otimes [(cf+de,df)]$ luego por la definición de multiplicación en Q $[(a,b)] \otimes [(cf+de,df)] = [(acf+ade,dfb)]$ luego multiplicamos por b obteniéndose $[(abcf+abde,dbfb)]$ pero por la propiedad asociativa de la multiplicación con respecto a la adición de número naturales $[(abcf+abde,dbfb)] = [((ac)bf+(ae)bd,bdbf)]$ luego por la definición de adición en $[(ac,bd)] \otimes [(ae,bf)]$ en Q.

ORDEN ENTRE NÚMEROS RACIONALES

Según Luque, Mora y Torres (2014) las propiedades de orden entre números racionales también se pueden definir a partir de los números naturales, a saber:

Tenemos que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ si y solo sí $ad \leq bc$, esta relación tiene las siguientes propiedades:

Es reflexiva, por la propiedad conmutativa de la multiplicación entre números naturales y la propiedad reflexiva del orden entre números naturales se tiene que $ab \leq ba$ y por la definición de orden entre números racionales se tiene que $[(a,b)] \leq [(a,b)]$.

Es antisimétrica, esto es, dados dos números racionales cualesquiera $[(a,b)] \leq [(c,d)]$. Si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ y así mismo se cumple que $[(c,d)] \leq [(a,b)]$ entonces $[(a,b)] = [(c,d)]$. Demostración: Si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ entonces $ad \leq bc$ y si además se cumple que $[(c,d)] \leq [(a,b)]$ entonces $cb \leq da$. Luego por la propiedad conmutativa de la multiplicación entre números naturales y la propiedad antisimétrica del orden entre números naturales se tiene que $ad = bc$ por tanto $[(a,b)] = [(c,d)]$.

Es transitiva, es decir, dados números cualesquiera $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ y $[(e,f)]$, si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ y también se cumple que $[(c,d)] \leq [(e,f)]$ entonces $[(a,b)] \leq [(e,f)]$. Demostración: Si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ entonces $ad \leq bc$ y si se cumple $[(c,d)] \leq$

$[(e,f)]$ entonces $cf \leq de$, haciendo uso de las siguientes propiedades si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $ad \leq bc$ y si $ab \leq cb$ entonces $a \leq c$ del orden entre números naturales se concluye que $af \leq be$ de donde $[(a,b)] \leq [(e,f)]$.

Ahora bien, la propiedad de densidad nace en contexto la axiomática de los reales, por ello, a continuación de expondrán y demostrarán tales propiedades:

Q es denso en R, sea $x, y \in R \rightarrow \exists\, k \in Q : x < k < y$.

Tenemos que $x < y$ entonces $0 < y - x$. Tomamos $\frac{1}{y-x}$ y como el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente, se puede asegurar que $\exists\, n \in N : \frac{1}{y-x} < n$ es decir que $> \frac{1}{n} < y - x$. Luego como n es positivo $1 < n(y - x)$ entonces $1 < ny - nx$ por tanto $1 + nx < ny$. Sea $p \in Z$ la parte entera de nx entonces $p \leq nx < p + 1$.Ahora tomamos $p \leq nx$ por propiedades de orden sumamos 1 en ambos lados de la desigualdad $p + 1 \leq nx + 1$ luego:

$p \leq nx < p + 1 \leq nx + 1 < ny$ luego por la propiedad transitiva se tiene que $nx < p + 1 < ny$ seguido multiplicamos en ambos lados por $\frac{1}{n}$ se obtiene $\left(\frac{1}{n}\right) nx < \left(\frac{1}{n}\right) p + 1 < \left(\frac{1}{n}\right) ny$ lyego $x < \frac{p+1}{n} < y$. Ahora hagamos $p + 1 = k \in Z$ entonces $x < \frac{k}{n} < y$.

Q es denso en Q. Sean $x, y \in Q \rightarrow \exists\, z \in Q : x < z < y$. Sea $0 < y - x$ por tanto $x > 0$. Ahora bien, si sumamos x en ambos lados de la desigualdad se obtiene $x + x < y + x$ es decir $2x < y + x$. Luego $y > 0$, si sumamos en ambos lados de la desigualdad y obtenemos $x + y < y + y$ es decir $x + y < 2y$ por la propiedad conmutativa se tiene $x + y = y + x$ entonces $2x < x + y < 2y$, si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ toda la desigualdad se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) 2x < \left(\frac{1}{2}\right) x + y < \left(\frac{1}{2}\right) 2y$ por tanto $x < \frac{x+y}{2} < y$. Hacemos $z = \frac{x+y}{2}$ entonces $x < z < y$.

Continuando con las fenomenologías, para la fenomenología didáctica se tiene que Cabarcas y Soler (2017) plantean los siguientes fenómenos respecto a la propiedad de densidad de los números racionales que su vez, son sus categorías de análisis en su trabajo, a saber: relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que, reconocimiento de la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos, utilización de la recta numérica como otro medio de representación del conjunto de los números racionales, imposibilidad del siguiente o antecesor de un número en el conjunto de los números racionales, acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado y aproximación a la idea de infinito.

Por su parte, Gichón y Duarte (2014) hacen uso del fenómeno acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado o lo que Moreno (2014) denomina matemática de la acumulación, así mismo, Itzcovich y Quaranta (2003) utilizan el mismo fenómeno, sin embargo, ambos trabajos difieren en el tipo de representación en el que es descrito el fenómeno, ya que utilizan tanto la representación fracción como la decimal, mientras que Itzcovich y Quaranta solo utilizan la representación decimal.

Sumado a lo anterior, Fandiño (2009) manifiesta que la propiedad de densidad de los números racionales tiene su nicho de dificultades, obstáculos, misconcepciones etc. en el orden entre fracciones, por esta razón, refiere hacer uso del fenómeno de (estar en medio o entre dos números fraccionarios dados) que en términos de Cabarcas y Soler (2017) sería utilizar relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que, así mismo, recomiendan utilizar la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos. En esta misma perspectiva, manifiesta Maza (1999) que, una problemática recurrente en la enseñanza-aprendizaje de los números racionales reside en priorizar la equivalencia por encima del orden y

por ello, se deben conjugar las dos en el acto educativo, sin embargo, dentro de las tareas que propone para desarrollar la densidad se encuentran:

* Dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
* Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica.

Lo expresado por Maza (1999), en términos de lo que se ha expuesto hasta el momento se traduce en utilizar la noción de intervalo y acercamientos por derecha o por izquierda a un número racional dado. A su vez, Obando (2003) y Waldegg (1996) expresan que la densidad surge de la conmensuración o conmensurabilidad lo cual, se puede asemejar con lo expuesto por Maza (1999) acerca de la ampliación de la recta numérica.

Continuando con la secuencia de fenomenologías, esto es, en la fenomenología histórica, aunque es sabido por libros como historia de las matemáticas de Carl Boyer que, las fracciones se generaron en Mesopotamia y Egipto, no son muchos los referentes respecto a la densidad de los números racionales en la historia que se puedan encontrar, no obstante, Obando (2003) manifiesta a través de un análisis histórico del concepto de número racional que la dicotomía griega continuo-discreto, unidad aritmética-unidad geométrica y número-magnitud es uno de esos problemas epistemológicos que se deben llevar al aula, sin embargo se debe buscar generar la posibilidad de superar tales dicotomías, para ello, recomienda utilizar la concepción numérica de Stevin quien antes de Descartes unificó la magnitud y el número para resolver problemas de la vida económica de su época, comprendiendo que las prácticas sociales de medición son una fuente importante para la conceptualización de la fracción y la aceptación de las partes de un todo como números.

Ahora bien, respecto a la fenomenología didáctica, se tiene que de los pocos documentos encontrados respecto a la enseñanza-aprendizaje de la densidad de los números racionales son

variadas las indicaciones didácticas que se presentan. De los artículos de Broitman, Itzcovich y Quaranta (2003), Fandiño (2009), Guichón y Duarte (2014), Panizza y Alvares (1990), Cabarcas y Soler (2017) y Gairín (1998) de forma sincopada, se reconoce la preocupación constante por el efecto adverso del uso de un tipo de notación (fracción-decimal), por el efecto adverso de utilizar modelos geométricos actualmente infinitos como los segmentos para su enseñanza que según Fandiño (2009), genera sobre tales representaciones nociones intuitivas que obstaculizan la comprensión de la continuidad de la recta y por último, el hecho de no considerar inicialmente la relación parte-todo para la comprensión de la equivalencia y el orden entre fracciones para luego posibilitar la comprensión de la propiedad de densidad. Así mismo, Fandiño (2009) manifiesta que una de las dificultades sobre la propiedad de densidad de los números racionales reside en el ordenamiento de fracciones, coincidiendo de manera parcial con Maza (1991, 1999) en considerar la importancia del orden entre fracciones para la comprensión de la densidad.

De acuerdo con Maza (1999) lo primero que se debería llevar al aula respecto del orden entre fracciones y teniendo en cuenta la relación parte-todo es romper con algunas ideas generalizadas de los números naturales que se trasladan a los racionales, lo cual implica, hacer énfasis sobre la relación inversa entre el tamaño de las partes dependiendo de la cantidad de particiones de la unidad, esto es, pasar paulatinamente de una comparación cualitativa a una cuantitativa, aunado a lo anterior, las representaciones geométricas que contribuirían a desarrollar la comparación cuantitativa del tamaño relativo de las fracciones debería ser el diagrama circular, debido a que, éste varía según el ángulo mientras que la hoja de papel varía en dos dimensiones (largo-ancho).

Aunado a lo anterior, también se deben considerar algunos elementos didácticos respecto de las fracciones debido a que es la notación implícita con la cual se presentará la secuencia de tareas

para desarrollar este proyecto, en ese sentido, Obando (2003) manifiesta que para la enseñanza de la fracción se deben tener en cuenta lo siguiente:

- Trabajo centrado en la partición y el conteo: Cuando en la enseñanza se hace énfasis en la partición y en el conteo de las partes se sigue pensando en los números naturales, no obstante, se deben buscar las relaciones cuantitativas entre las partes y las partes y, las partes y el todo.
- El tratamiento del tipo de magnitud y de unidad: Diferenciar las unidades sobre las cuales se trabajarán las fracciones debido a que, no es lo mismo pensar en la unidad discreta que en la unidad continua ya que la primera requiere reconocer que una multiplicidad puede ser una unidad.
- Énfasis en la mecanización de reglas y algoritmos: Generar a partir de las representaciones y materiales trabajados las operaciones con fracciones para no generar una desconexión entre el trabajo realizado y los algoritmos de las operaciones.

De este acercamiento a un análisis fenomenológico sumado a la apuesta teórica de donde surgió la problemática, se pudieron identificar algunos fenómenos que se seleccionaron para la construcción del cuestionario abierto, que son:

- Fenómeno 1: Relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que.
- Fenómeno 2: Reconocimiento de la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos, en otras palabras, dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
- Fenómeno 3: Acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado.

- Fenómeno 4: Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica. (Aclaración: en este fenómeno no se hará uso de la recta numérica sino de la posibilidad de encontrar entre dos racionales otro)

Siguiendo con las fases para la construcción de este cuestionario abierto, asevera Corral (2010) que en la fase 4 se debe operacionalizar el constructo o en otras palabras construir el instrumento propiamente dicho, para ello, indica que se debe definir el propósito del instrumento, definir el constructo, establecer las dimensiones del constructo, desglosar los indicadores de cada dimensión y elaborar los ítems, reactivos, preguntas o tareas. En ese sentido, párrafos atrás se ha indicado el propósito del instrumento, se ha definido el constructo y se han definido las dimensiones del constructo que, en este caso específico, serían los fenómenos y recomendaciones didácticas de la literatura investigativa al respecto, en consecuencia, para finalizar este proceso de construcción faltaría desglosar los indicadores de cada dimensión y la elaboración de las preguntas.

3.3.2 Sobre las categorías de análisis. Para esta propuesta, desglosar los indicadores de cada dimensión, se entiende, como la forma en la que se categorizarán los datos recopilados. En ese sentido se tendrá en cuenta lo expresado por (Zolkower et al, 2006) al respecto de la construcción de categorías:

> Para aprender a identificar distintos niveles de matematización, los docentes del GPDM se dedicaron a anticipar respuestas de los alumnos a las actividades planificadas y a contrastar sus predicciones con lo ocurrido en las clases. Estos análisis didácticos *a priori* y *a posteriori* se centraron en la comparación y categorización de producciones, identificándose tanto modelos y estrategias, como formas de simbolización, esquematización y formalización. (p. 22)

En ese sentido, como se realizará un análisis didáctico a priori al respecto de los niveles de matematización alcanzados por los estudiante al enfrentarse a situaciones de orden entre números

racionales positivos enfocadas a la construcción de la noción de densidad y con el propósito de anticipar respuestas de los estudiantes ante las tareas, se construyeron unas categorías de análisis, en las cuales, se interpretó y adaptó cada nivel de matematización propuesto en la EMR expuesto en el marco teórico con respecto al acercamiento al análisis fenomenológico y las propiedades de orden y, la noción de densidad de los racionales positivos, así mismo, se tuvo en cuenta los registros de representación semiótica al respecto del tema, las representaciones semióticas y posibles respuestas que podrían gestionar los estudiantes ante las tareas con el objetivo de poder analizar la información y obtener insumos para ubicar a los estudiantes o casos en un nivel u otro o en varios, de acuerdo con sus producciones y el contraste con las categorías preestablecidas.

Como se expresó en el marco teórico, las categorías que se expondrán a continuación junto con las tareas y sus respectivas preguntas batería del cuestionario no son mutuamente excluyentes, ya que como lo expresa Bressan et al (2016), un estudiante puede encontrarse en diferentes niveles de matematización en diferentes tareas y en diferentes preguntas incluso dentro de la misma tarea por ello, es posible que un estudiante se ubique en parejas de niveles o en combinaciones más amplias de éstos de acuerdo a las categorías preestablecidas. De acuerdo con los fenómenos detectados y los elementos didácticos proporcionados por el marco teórico y este acercamiento al análisis fenomenológico, a continuación, se presenta el cuestionario abierto en donde se exponen las tareas, su propósito, sus preguntas batería, la teoría que las sustenta y las categorías de análisis en relación con los niveles de matematización propuesto en la EMR.

3.3.3 Cuestionario abierto. Para finalizar la fase 4 en la construcción del cuestionario abierto propuesta en Corral (2010), dentro de todas las posibilidades de preguntas que pueden componerlo se seleccionaron, para cada una de las tareas una batería de preguntas abiertas, ya que como lo expresa García (2003) permiten partir de lo general a lo más específico dentro de una misma tarea, en ese sentido, se seleccionó este tipo de preguntas, ya que permiten cuestionar sobre algunos aspectos particulares de las relaciones de orden entre números racionales positivos y sobre algunas características de la noción de densidad como lo son la posibilidad de realizar un proceso infinito, concepciones sobre el infinito que tienen los estudiantes etc.

A continuación, se presenta el cuestionario abierto, a saber:

3.3.3.1 Tarea 1 (T1)

Fenómeno 1	Relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que.
Propósito de la tarea	Esta tarea junto con las preguntas orientadoras tiene como objetivo reconocer la comprensión de los estudiantes al respecto de las relaciones de orden en el conjunto de los números racionales positivos como lo son mayor que, menor que e igual que.
Teoría que la sustenta	Según Maza (1999) en los procesos de enseñanza-aprendizaje tradicionales de los números racionales se prioriza la equivalencia de fracciones por sobre el orden, sin embargo, Fandiño-Pinilla (2009) y Broitman et al (2003) establecen que las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la noción de densidad devienen del orden entre números racionales y de trasladar el marco de referencia que traen consigo los estudiantes, es decir, trasladar o generalizar las operaciones y propiedades del conjunto de los números naturales y enteros hacia el conjunto de los números racionales positivos.
Javier, Karen y Daniela tienen una chocolatina y la quieren compartir entre los tres, sin embargo, a algunos no les gusta la chocolatina por tal razón cortan la chocolatina de la siguiente forma: Javier corta un octavo de la chocolatina y se la come, Daniela corta un medio de la chocolatina y se la come, y, Karen corta un cuarto de chocolatina y se la come. Teniendo en cuenta la situación anterior responde:	
T1P1.	¿Cuál de los tres amigos comió la mayor cantidad de chocolatina? Explica tu respuesta usando matemáticas.
T1P2.	¿Cuál de los tres amigos comió la menor cantidad de chocolatina? Explica tu respuesta usando matemáticas.

T1P3.	¿Cómo quedarían organizados los amigos de menor a mayor de acuerdo a la cantidad de chocolatina que se comieron? Explica tu respuesta usando matemáticas.
T1P4.	Si otro amigo se come un dieciseisavo de la chocolatina ¿Come mayor cantidad o menor cantidad que Daniela? Explica tu respuesta usando matemáticas.
T1P5.	¿Qué pasa con los tamaños de los trozos de chocolatina cuando se divide en más partes? Explica tu respuesta usando matemáticas.

3.3.3.1.1 Categorías de análisis T1.

Situacional T1C1	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural determinando un orden entre fracciones unitarias ligado a su intuición, es decir, generalizando las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos sin ningún tratamiento matemático.
Referencial T1C2	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, estableciendo un orden entre fracciones unitarias de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos.
General T1C3	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos determinando un orden entre fracciones unitarias correcto para las cantidades, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =.
Formal T1C4	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden entre fracciones unitarias de manera correcta.

3.3.3.2 Tarea 2 (T2)

Fenómeno 1	Relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que.
Propósito de la tarea	Esta tarea junto con las preguntas orientadoras tiene como objetivo reconocer la comprensión de los estudiantes al respecto de las relaciones de orden en el conjunto de los números racionales positivos como lo son mayor que, menor que e igual que.
Teoría que la sustenta	Según Maza (1999) en el orden entre número racionales propicia mayor dificultad establecer un orden entre fracciones heterogéneas que entre fracciones homogéneas, lo anterior, implica que los estudiantes pueden presentar dificultades con respecto al concepto de unidad y esto, según Obando (2003) permite entrever que los estudiantes con dichas dificultades no pasaron por un proceso que parte de la relación parte-todo hacia las otras interpretaciones de la fracción que en términos de Fandiño-Pinilla (2009) sería un obstáculo didáctico.

Cuatro amigas Johana, Camila, Maricela y Gloria cada una compró una pizza personal rebanada en nueve porciones iguales en tamaño, las cuales, se comieron de la siguiente manera: Camila se comió cuatro novenos de la pizza, Gloria se comió seis novenos de la pizza, Johana se comió cuatro novenos de la pizza y Maricela se comió dos novenos de la pizza. De acuerdo con lo anterior responde:	
T2P1.	¿Quién comió más Pizza Camila o Gloria? Explica con matemáticas tú respuesta.
T2P2.	¿Quién comió menos pizza Camila o Johana? Explica con matemáticas tú respuesta.
T2P3.	¿Cómo quedarían organizadas las amigas de mayor a menor de acuerdo a la cantidad de pizza que se comieron? Explica con matemáticas tú respuesta.
T2P4.	Si una quinta amiga se comiera ocho novenos de pizza ¿Comería mayor o menor cantidad de pizza que Johana, Camila, Maricela y Gloria? Explica con matemáticas tú respuesta.
T2P5.	Si todas las amigas rebanaron las pizzas en las mismas nueve partes semejantes en tamaño ¿Por qué algunas comieron mayor cantidad de pizza que otras? Explica con matemáticas tú respuesta.

3.3.3.2.1 Categorías de análisis T2.

Situacional T2C1	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural determinando un orden ligado a su intuición, es decir, generalizando las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos sin ningún tratamiento matemático.
Referencial T2C2	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, estableciendo un orden de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos.
General T2C3	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =.
Formal T2C4	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden de las cantidades racionales de manera correcta.

3.3.3.3 Tarea 3 (T3)

Fenómeno 2	Reconocimiento de la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos, en otras palabras, dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
Propósito de la tarea	Esta tarea tiene como objetivo reconocer la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos.

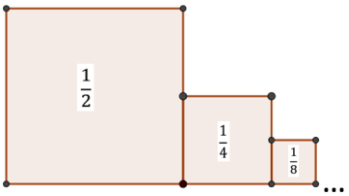
Teoría que la sustenta	De acuerdo con los tipos de fenomenología expuestos por Puig (1997) implícitos dentro de la apuesta teórica de Freudenthal, se encuentra la fenomenología histórica de donde devienen los fenómenos a los cuales está asociado en este caso la noción de densidad. En ese sentido, establece Cabarcas y Soler (2017) que dentro de los contextos matemáticos la noción de densidad se aplica a determinar al menos un número entre otros como primer acercamiento a la noción de densidad y esto abarca tener una noción de intervalo debido a que se debe tener en cuenta el límite inferior y el límite superior para encerrar un número dentro.
Tres amigos compran una gaseosa de un litro de la cual se toman lo siguiente: el amigo 1 se toma un tercio de la gaseosa y el amigo 3 se tomó un quinto de la gaseosa. Si el amigo 2 quiere tomar más de un quinto de gaseosa y menos de un tercio de gaseosa, responde:	
T3P1.	¿Qué porción de la gaseosa es menor, la que se toma el amigo 1, la que se toma el amigo 2 o la que se puede tomar el amigo 3? Explica con matemáticas tú respuesta.
T3P2.	¿Qué porción o porciones de gaseosa se puede tomar el amigo 2? Explica con matemáticas cómo hiciste para hallar la porción de gaseosa o las porciones que se puede tomar el amigo 2.
T3P3.	Si un amigo 4 quiere tomar más de un quinto de la gaseosa, pero menos que un cuarto de la gaseosa ¿Qué porción podrá tomar? Explica con matemáticas cómo hiciste para hallar la porción de gaseosa que se puede tomar el amigo 4.
T3P4.	¿Hay una o varias cantidades de gaseosa que se puede tomar el amigo 4? Explica con matemáticas tú respuesta.
3.3.3.3.1 Categorías de análisis.	
Situacional T3C1	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas de manera intuitiva, esto es, que al trasladar propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales positivos no logra establecer los límites del intervalo ni tampoco un número racional positivo dentro de éste.
Referencial T3C2	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, encontrando un número racional dentro del intervalo, pero, movilizado por su intuición, es decir, encuentra un número racional positivo atendiendo a las propiedades de orden entre números naturales, sin embargo, establece los límites del intervalo.
General T3C3	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, estableciendo correctamente los límites del intervalo y más de un número dentro de éste, pero, no utiliza ningún algoritmo matemático formal ni tampoco notación formal, es decir, no tiene un control sobre cómo determinar tales números.
Formal T3C4	El o la estudiante responden la (T3) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representación figural o todas a la vez junto con signos y operaciones

	formales de las matemáticas como el uso de signos de agrupación, notaciones simbólicas, algoritmo para hallar promedios etc…

3.3.3.4 Tarea 4 (T4)

Fenómeno 3	Acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado.
Propósito de la tarea	Esta situación busca identificar si los estudiantes al realizar una serie (Sin que ellos sepan que es una serie) logran reconocer que las áreas que se suman son cada vez menores y que este proceso se puede realizar indefinidamente.
Teoría que la sustenta	Según Cabarcas y Soler (2017) uno de los detonantes en cuanto a dificultades detectadas en la enseñanza-aprendizaje de la noción de densidad es la noción de infinito, debido a que como lo expresa Leston (2009) desde los primeros años de escolaridad de los estudiantes muchos conceptos se apoyan en dicha noción, pero, en dicho proceso no se hace claridad o reflexión al respecto del carácter dual de la noción de infinito en matemáticas.

A continuación, encontrarás una gráfica que muestra sucesivas áreas de cuadrados.



De acuerdo a la gráfica responde:

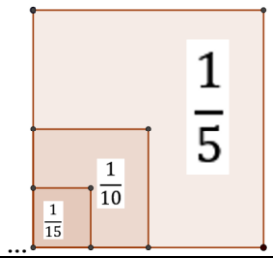
T4P1.	Si continúa el proceso ¿Cuáles serán las tres áreas de los cuadrados que siguen? Explica con matemáticas tú respuesta.
T4P2.	Si sumas las seis áreas de los cuadrados que llevas hasta el momento ¿A qué números se van aproximando? Explica con matemáticas tú respuesta.
T4P3.	¿Cuántas áreas de cuadrados siguiendo la secuencia deberías sumar para que su resultado llegue a ser el número que encontraste en la pregunta anterior? Explica con matemáticas tú respuesta.

3.3.3.4.1 Categorías de análisis.

Situacional T4C1	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la serie y al trasladar propiedades y operaciones propias de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no realizan la operación de suma entre números racionales de manera correcta, imposibilitan la infinitud del proceso y no logran realizar una aproximación.
Referencial T4C2	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el

	patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso y así mismo no logran hacer la aproximación.
General T4C3	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sugiriendo que el proceso es infinito y realizando una aproximación correcta, pero, sin utilizar procedimientos formales de las matemáticas como el límite ni tampoco notación formal desde las matemáticas.
Formal T3C4	Teniendo en cuenta los temas que se abordan y el grado escolar de los casos, no se espera que lleguen al nivel formal porque se escapa de sus conocimientos previos.

3.3.3.5 Tarea 5 (T5)

Fenómeno 3	Acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado.
Propósito de la tarea	Esta situación tiene como propósito identificar si los estudiantes al realizar una sucesión que se aproxima a cero por la izquierda logran identificar que los valores que van hallando son cada vez menores y que este proceso se puede realizar indefinidamente.
Teoría que la sustenta	Según Cabarcas y Soler (2017) y Fandiño-Pinilla (2009) uno de los detonantes en cuanto a dificultades detectadas en la enseñanza-aprendizaje de la noción de densidad es la noción de infinito, debido a que como lo expresa Leston (2009) desde los primeros años de escolaridad muchos conceptos se apoyan en dicha noción, pero, en el proceso no se hace claridad o reflexión al respecto del carácter dual de la noción de infinito en matemáticas. De esta manera la familiaridad de los estudiantes con el infinito en potencia de los números naturales y enteros les hace comprender que todo lo que es infinito aumenta, sin embargo, lo anterior no siempre es cierto ya que la otra característica del infinito, esto es, el infinito actual permite comprender que puede haber números más pequeños y que éstos se pueden ir acercando a un número fijo.
En la parte de abajo se visualizan áreas de cuadrados, el área del cuadrado grande es un quinto, el área del siguiente es un décimo y el área del tercero es un quinceavo. De acuerdo a esta información responde: 	

T5P1.	Si continúa el proceso ¿Cuáles serán las tres áreas de los cuadrados que siguen? Explica con matemáticas tú respuesta.
T5P2.	Si siguen disminuyendo las áreas ¿a qué número se van acercando? Explica con matemáticas tú respuesta.
T5P3.	¿Cuántas áreas de cuadrados siguiendo la secuencia deberías hallar para que tu resultado llegue a ser el número que encontraste en la pregunta anterior? Explica con matemáticas tú respuesta.

3.3.3.5.1 Categorías de análisis.

Situacional T5C1	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la sucesión y al trasladar propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no reconocen que los valores de la sucesión van disminuyendo acercándose al número fijo cero, así mismo, imposibilitan la infinitud del proceso.
Referencial T5C2	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, aunque reconocen que la sucesión disminuye, aunque no logran determinar la aproximación.
General T5C3	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, así mismo, reconocer que la sucesión disminuye y que va acercándose a cero, sin embargo, no utilizan procesos formales de límite ni notación formal desde las matemáticas.
Formal T5C4	Teniendo en cuenta los temas que se abordan y el grado escolar de los casos, no se espera que lleguen al nivel formal porque se escapa de sus conocimientos previos.

3.5.6 Tarea 6 (T6)

Fenómeno 4	Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica. (Aclaración: en este fenómeno no se hará uso de la recta numérica sino de la posibilidad de encontrar entre dos racionales otro)
Propósito de la tarea	Esta situación tiene como propósito identificar si los estudiantes al realizar una sucesión que se aproxima a cero por la izquierda logran identificar que los valores que van hallando son cada vez menores y que este proceso se puede realizar indefinidamente.
Teoría que la sustenta	Según Cabarcas y Soler (2017) y Fandiño-Pinilla (2009) uno de los detonantes en cuanto a dificultades detectadas en la enseñanza-aprendizaje de la noción de densidad es la noción de infinito, debido a que como lo expresa Leston (2009) desde los primeros años de escolaridad muchos conceptos se apoyan en dicha

	noción, pero, en el proceso no se hace claridad o reflexión al respecto del carácter dual de la noción de infinito en matemáticas. De esta manera la familiaridad de los estudiantes con el infinito en potencia de los números naturales y enteros les hace comprender que todo lo que es infinito aumenta, sin embargo, lo anterior no siempre es cierto ya que la otra característica del infinito, esto es, el infinito actual permite comprender que puede haber números más pequeños y que éstos se pueden ir acercando a un número fijo.
En la clase de matemáticas a los estudiantes les piden que encuentren números entre el número 1 y el número 2 para ello:	
T6P1.	Encuentra algunos números entre los números 1 y 2, explica con matemáticas cómo hiciste para encontrar esos números.
T6P2.	¿Cuántos números hay entre 1 y 2? Trata de explicar con matemáticas tu respuesta.
3.5.6.1 Categorías de análisis.	
Situacional T6C1	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y al trasladar propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales positivos manipulan éstos como números naturales.
Referencial T6C2	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y así mismo reconocen que hay infinitos números entre los límites del intervalo, aunque no lo representen de manera formal desde las matemáticas.
General T6C3	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) a través de alguna estrategia preestablecida pero no desde algoritmos matemáticos formales, aunque sí reconocen la infinitud de la cantidad de números que hay en el intervalo.
Formal T6C4	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan números en el intervalo (1,2), reconocen la infinitud del proceso y utilizan algoritmos matemáticos formales como el de hallar promedios, sucesiones etc.

Habiendo expuesto el instrumento junto con sus categorías, cabe aclara que Corral (2010) expresa que el orden de las preguntas puede ser clasificado por datos de identificación del

cuestionado como lo son el nombre, la institución educativa etc. Así mismo, se pueden clasificar por la formulación de las preguntas, es decir, preguntas de introducción, preguntas filtro etc. De acuerdo con lo anterior, cabe aclarar que el instrumento que se presentó anteriormente tiene un tinte de matriz más no de cuestionario y esto es porque, a los casos seleccionados se les presentó las tareas junto con sus preguntas batería en formato cuestionario con preguntas de identificación pero para este escrito, se optó por presentarlo en formato matriz, a su vez, cabe aclarar que el orden en el que se presentan las tareas, parte de las relaciones de orden entre números racionales positivos y se van complejizando hacia características propias de la noción de densidad que no son únicas pero, entre tanto son las reconocidas a partir del ejercicio expuesto anteriormente para el reconocimiento de los fenómenos. Así mismo, las preguntas batería se presentan en orden de dificultad, esto es, las primeras preguntas se de las tareas cuestionan sobre elementos de menor dificultad al respecto del tema y se van complejizando conforme avanzan.

Además de lo anterior, (Corral, 2010) refiere que, dentro del proceso de construcción del cuestionario, es posible realizar un pilotaje del cuestionario con el objetivo:

> (…) de identificar y eliminar cualquier problema en la estructura del cuestionario. Su objetivo es mejorar el cuestionario, por ello deben probarse todos los aspectos del cuestionario, desde la presentación, la secuencia, la redacción, el contenido de las preguntas, etc. Con los datos aportados por esta prueba se estima el nivel de confiabilidad de la información recolectada con el instrumento, aspecto fundamental en toda investigación científica. (p. 165)

Al respecto del pilotaje, cabe resaltar que para esta investigación se realizó un pilotaje de las preguntas y en él, se reconocieron varios aspectos no solo de las preguntas sino también de la población o casos que se requerían para obtener la información adecuada y coherente en contraste

con el tema y los objetivos propuestos. En ese sentido, a través del pilotaje que se aplicó a 10 estudiantes del grado séptimo del Santa Lucia IED, se pudo reconocer que, a las preguntas les faltaba un indicador que exigiera a los estudiantes responder haciendo uso de elementos matemáticos cada una de las tareas y sus respectivas preguntas batería, ya que en su mayoría hacían uso del lenguaje natural, lo cual, no es desacertado, sin embargo, en términos de los propósitos de esta investigación tales respuestas se quedaban cortas, por ello, dentro de cada una de las preguntas se propuso la oración "explica con matemáticas tu respuesta". A su vez, se pudo identificar que, a pesar de que los estudiantes del grado séptimo según las orientaciones curriculares trabajan los números racionales, dentro del pilotaje, se identificó que los estudiantes aún no habían apropiado las representaciones, características, propiedades y operaciones de los números racionales positivos, por ello, correspondió modificar la población a estudiantes del grado octavo y así mismo, cambiar la población ya que, en un principio, esta investigación se iba a desarrolla en el grado séptimo, sin embargo, debido al pilotaje se cambiaron todos aquellos aspectos.

3.3.4 Limitaciones del proyecto de investigación

Como lo expresa Munarriz (1992), al respecto del estudio de caso existen diversas posturas que lo consideran como un pseudo método de investigación debido a su falta de objetividad, generalización y validez, sin embargo, este mismo autor entre otros, arguyen que estas características son sopesadas por la forma en la que se utilizan diversas técnicas de recolección de la información, por esta razón, este trabajo es tan extenso, debido a que se aplicaron diversos filtros que permitieron obtener, contrastar y organizar la información de tal manera que de ésta se pudo extraer resultados para solucionar la pregunta de investigación planteada a través de la coherencia con los objetivos, en ese sentido, una de las limitantes es precisamente la diversidad de respuestas obtenidas a través del cuestionario abierto, es decir, debido al reducido número de casos

seleccionados, los resultados obtenidos son parciales y en ese caso, para futuras aplicaciones del cuestionario sería interesante tomar más de 4 casos y contrastar los resultados obtenidos en este proyecto con los que se puedan obtener en dicha aplicación para identificar que tan lejanos de la realidad está de lo que se propuso responder en un principio al respecto de los niveles de matematización.

Por otro lado, otra limitante que se vislumbró fue la falta de control físico sobre las acciones de los estudiantes, ya que, al haberse realizado en cuarentena este trabajo de investigación, en su desarrollo se pudo identificar que 1 de los 5 casos seleccionado copiaba las respuestas de otro caso y por esta razón correspondió seleccionar 4 casos ya que no es coherente analizar algo que ha sido copiado pues la importancia de la información que se obtuvo radica precisamente en la libertad de cada uno de los casos al resolver las tareas propuestas desde su propio conocimiento. Así mismo, en algunos otros casos, se vislumbra que en sus respuestas intervinieron otras personas o se apoyaron en herramientas tecnológicas las cuales no mencionaban para haber vinculado estos elementos dentro de las categorías de análisis ya que, en su momento no fue posible hacer un control físico debido al covid-19.

4. Análisis de la información

Habiendo expuesto el cuestionario abierto utilizado para la recolección de la información, a continuación, se explicará la forma en la que se analizará la información recolectada:

1) Los datos recolectados del cuestionario abierto serán analizados pregunta a pregunta por cada una de las tareas y por cada uno de los casos. Este análisis pregunta a pregunta se realizará teniendo en cuenta el marco teórico y complementado con los audios, videos y entrevistas. Dentro del análisis se tendrán en cuenta los procesos realizados por los estudiantes y el/los tipos de registro semiótico gestionados para dar solución a las tareas junto con sus interacciones de acuerdo a la propuesta teórica de (Duval, 1999). Así mismo, cabe aclarar que, debido a la magnitud de este análisis pregunta a pregunta se ha tomado la determinación de presentar algunos ejemplos de dicho análisis en el siguiente paso.
2) Luego, los anteriores resultados se contrastarán con las categorías de análisis apoyado con un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para cada uno de los estudiantes y cada una de las tareas, con ello, dar cuenta de los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al respecto del orden y la noción de densidad de los números racionales positivos y de esta manera otorgar una posible respuesta a la pregunta problema.
3) Seguido de los dos procesos inductivos anteriores, se realizará un consolidado de los niveles de matematización alcanzados por cada uno de los casos a nivel particular y global.

Sumado a lo anterior, para el desarrollo del análisis se optó por generar una codificación, la cual se presenta a continuación:

- T1, T2, T3, T4, T5 y T6: Corresponden a las tareas 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- E1, E2, E3 y E4: Corresponden a los casos que sería Estudiante 1,2, 3 y 4 respectivamente.

- Fenómeno 1, 2, 3 y 4: Corresponden a los fenómenos hallados y seleccionados a través del acercamiento al análisis fenomenológico (Puig, 1997)
- C1, C2, C3 y C4: Corresponden a las categorías de análisis adaptadas a los niveles de matematización propuesto por en la EMR.

En ese sentido, si se unen los elementos de la codificación por ejemplo T1C3, significaría Tarea 1 - Categoría 3 nivel de matematización general, así mismo, si se tiene T6E2 significaría Tarea 6 - Estudiante 2, así mismo, debido a la extensión del análisis pregunta a pregunta por cada una de las tareas y cada uno de los estudiantes, no me fue posible vincular todos los análisis de manera explícita en este documento, en su lugar, se optó por presentar una parte específica de dicho análisis después de cada nivel de matematización alcanzado por cada uno de los estudiantes en cada una de las tareas como se hará seguidamente:

4.1 Niveles de matematización alcanzados para la T1 de cada caso

4.1.1 Niveles de matematización alcanzados para la T1E1.

Para la T1, E1 se podría clasificar en la categoría T1C3 o nivel general de matematización: el o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos determinando un orden entre fracciones unitarias correcto para las cantidades, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. Debido a que, utiliza una representación figural (rectángulo) para representar las unidades y las partes de la chocolatina que come cada uno de los amigos de la tarea de manera correcta, así mismo, a partir de esta representación figural el estudiante compara las magnitudes de las partes y logra determinar cuál amigo comió mayor o menor cantidad de chocolatina ordenándolos de menor a mayor de manera correcta, esto es, reconoce que cuanto mayor sea el denominador entre fracciones unitarias menor será la magnitud

de la fracción (Maza, 1999), no obstante, presenta dificultad en la gestión del adjetivo igual (Fandiño, 2009) cuando representa la unidad en forma de círculo, pero, comprende que cuanto más se divida una la unidad menor será la magnitud de las parte. Por otro lado, no hace uso de guarismos desde las matemáticas formales. Por otro lado, no hace uso de guarismos desde las matemáticas formales. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T1E1:

4.1.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T1E1

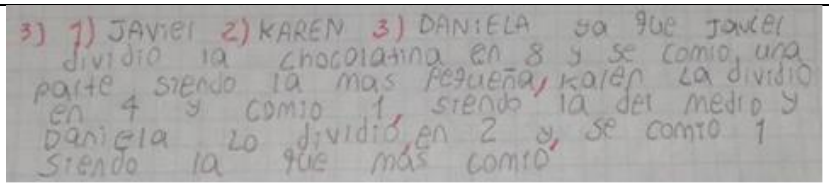


Gráfico 4. Evidencia T1P3E1

Descripción T1P3E1

El estudiante otorga su respuesta en lenguaje natural expresando el orden requerido por la situación que es de menor a mayor. En su argumentación expresa que como Javier dividió la chocolatina en más partes, dichas partes son más pequeñas y como se come una de esas partes más pequeñas es el que come menos ocupando el primer lugar, por otro lado, Karen divide la chocolatina en 4 partes y se come una pero, como las parte que se comió Karen es mayor a la que se comió Javier entonces, Karen ocuparía el lugar del medio en el orden de menor a mayor y por último, como Daniela divide la chocolatina en dos partes y como la parte que se comió es mayor que la de los amigos Daniela come más que los demás ocupando el último lugar de menor a mayor.

Análisis T1P3E1

Como se puede observar en la solución del estudiante, aunque no utiliza registros aritméticos para exponer el orden de los amigos de menor a mayor en su solución, entre tanto, se puede reconocer que establece el orden de manera correcta basado en su gestión autónoma de representaciones figúrales (Fandiño, 2009) y las operaciones realizadas sobre éstas, es decir, al observar la evidencia E1T1P1 párrafos atrás se puede reconocer que el estudiante realiza una transformación de conversión de una representación figural a un registro semiótico y de éstos al lenguaje natural, lo que en términos de Duval (1999) hace referencia una operación cognitiva compleja y esto permite pensar que como lo expresa Obando (2003) que ha hecho un proceso de medición y ha enfatizado sobre las relaciones numéricas de las fracciones para establecer el correcto orden entre las fracciones que son Javier, Karen, Daniela.

Entrevista T1P3E1

Docente Juan: Carlos ¿Cómo resolviste la tercera pregunta de la situación? Carlos: Pues profe como al principio dibujé las chocolatinas y las dividí y, además puse las fracciones pues ya sabía que la parte que comió Javier era la más pequeña y, que Karen comió más que Javier, pero menos que Daniela y que Daniela había comido más porque partió la chocolatina a la mitad siendo el pedazo más grande. Cuando el estudiante expresa *ya sabía que la parte que comió Javier era la más pequeña y, que Karen comió más que Javier, pero menos que Daniela y que Daniela había comido más porque partió la chocolatina a la mitad siendo el pedazo más grande* se puede inferir como lo expresa Obando (2003) que ha realizado un proceso de medición y ha enfatizado sobre las relaciones numéricas de las fracciones para establecer el correcto orden entre las fracciones que son Javier, Karen, Daniela.

4.1.2 Niveles de matematización alcanzados para la T1E2.

Para la T1, E2 se podría clasificar en la categoría T1C2 o nivel referencial de matematización: El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, estableciendo un orden entre fracciones unitarias de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos. Debido a que, utiliza una representación figural (círculo) como unidad la cual divide de manera incorrecta, ya que las partes no corresponden a las magnitudes de la tarea, es decir, presenta una dificultad en la gestión del adjetivo igual (Fandiño, 2009), a su vez, traslada propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos en tanto, no reconoce a la fracción como un número sino, como dos números naturales separados por una rayita, centra su atención sobre los denominadores y esto hace que interprete las fracciones como números naturales en consecuencia $\frac{1}{8} > \frac{1}{2}$ porque $8 > 2$ en el conjunto de los números naturales por esta razón, no establece el orden correcto de menor a mayor de las cantidades de la tarea, es decir, no reconoce que entre fracciones unitarias es menor la que mayor denominador tiene. Por otro lado, no hace

uso de guarismos desde las matemáticas formales. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T1E2:

4.1.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T1E2

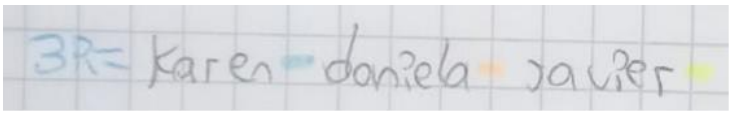


Gráfico 5. Evidencia T1P3E2

Descripción T1P3E2

En la respuesta del E2 y en coherencia con sus razonamientos anteriores establece un orden de los amigos de acuerdo con la cantidad de chocolatina que comió cada uno, de esta manera para E2 el orden de menor a mayor sería Karen quien como menos seguida de Daniela y por último Javier quien come más que las anteriores.

Análisis T1P3E2

Para el estudiante $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{8}$ es el orden de menor a mayor en el que se deben organizar los amigos, sin embargo, respuestas atrás el estudiante establecía que *Javier fue el que comió más chocolatina por sus diferencias de denominador, aunque su numerador es idéntico* y esto permite pensar que el estudiante centró su atención sobre los denominadores de las fracciones omitiendo los numeradores, lo cual, sugiere que E2 no reconoció el hecho de que en la notación fracción aunque haya dos enteros que la componen éstos conforman un solo número(Obando, 2003) no obstante, lo expresado entra en conflicto porque si su atención estaba sobre los denominadores el orden en el que quedarían organizados los amigos sería $Daniela\frac{1}{2}$, $Karen\frac{1}{4}$ y $Javier\frac{1}{8}$ por esta razón, se considera que el estudiante tuvo una consciencia parcial al considerar que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ pero, como aún persiste en que $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ se podría inferir que el estudiante traslada propiedades de orden de los número naturales al conjunto de los números racionales positivos lo que es un factor de dificultad al momento de abordar la noción de densidad (Fandiño, 2009).

Entrevista T1P3E2

Docente Juan: Christopher ¿cómo hiciste para resolver la pregunta tres de la situación? Christopher: El tercero está viendo como lo organicé Karen, Daniela, Javier, es decir, Karen come menos *porque dividió la chocolatina en 4 partes y se comió una y Daniela come más que Karen porque la divide en dos y se come la mitad y ellas comen menos que Javier porque él la divide en 8 partes y se come una y, 8 es mayor que 2 y 4* por eso profesor. En la respuesta de la entrevista del estudiante se reconoce que presenta una confusión entre el orden entre números naturales y algunas conjeturas al respecto del orden entre números racionales positivos que apropió ya que, reconoce que $\frac{1}{2}$ es la mitad, pero se confunde porque $\frac{1}{2} < \frac{1}{8}$ ya que para él $2 < 8$

confirmándose el hecho de trasladar propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos.

4.1.3 Niveles de matematización alcanzados para la T1E3.

Para la T1, la estudiante E3 se podría clasificar en las categorías TIC3 y T1C4 o nivel general y formal de matematización: El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos determinando un orden entre fracciones unitarias correcto para las cantidades, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden entre fracciones unitarias de manera correcta. Debido a que, en las preguntas 1, 2, 4 y 5 la estudiante a través de una representación figural responde de manera correcta las preguntas, estableciendo una unidad (rectángulo) y dividiéndolas dentro de los posible congruentes en área, esto, indica que la estudiante reconoce que entre fracciones unitarias es menor que mayor denominador tiene (Maza, 1998), a su vez, dentro de una misma unidad rectángulo la estudiante realizó la división de todas las partes de la chocolatina que comió cada uno de los amigos en la tarea, esto, indica que la estudiante reconoce el concepto de unidad (Obando, 2003). Por otro lado, en la pregunta 3, en la cual le correspondía ordenar de menor a mayor las magnitudes la estudiante realizó una transformación de conversión (Duval, 1999) de la representación figural al lenguaje aritmético y utilizó símbolos formales de las matemáticas, en este caso el signo < el cual, utilizó de manera correcta. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T1E3:

4.1.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T1E3

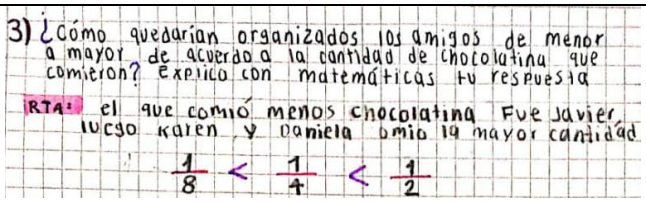


Gráfico 6. Evidencia T1P3E3

Descripción T1P3E3

La estudiante argumenta en lenguaje natural que el que comió menos chocolatina fue Javier y que en orden de menor a mayor seguiría Karen y por último Daniela que comió la mayor cantidad, a su vez, representa las fracciones de chocolatina que comen cada uno de los amigos en orden de menor a mayor indicando con el $<$ (Menor que) dicho orden.

Análisis T1P3E3

De acuerdo con la respuesta de la estudiante se puede reconocer que realiza una transformación de conversión del registro lenguaje natural al registro aritmético lo que puede indicar en términos de Duval (1999) que la estudiante coordina dos registros de representación distintos y esto, puede interpretarse como que la estudiante comprende algunas características del número racional positivo como la relación parte-todo y las relaciones entre las magnitudes de las cantidades fraccionarias, es decir, la estudiante comprende que entre fracciones unitarias son menores aquellas que tienen mayor denominador (Maza, 1999) lo cual le permite ordenar de manera correcta las fracciones de menor a mayor como lo indicaba la situación. Así mismo, hace uso de representaciones propias de las matemáticas como lo es $<$ el símbolo de (menor que) y aunque Bressan (2016) manifiesta que no hay una representación mejor que otra, no obstante, distintos tipos de representación permiten vislumbrar características diferentes de los objetos matemáticos (Duval, 1999) por esta razón se interpreta que la estudiante comprende más características de la fracción que algunos de sus compañeros.

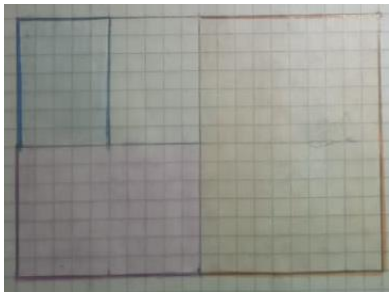
Entrevista T1P3E3

Docente Juan: Lina y para el tercer punto ¿cómo lo resolviste? Lina: en el tercer punto yo puse que el que comió la menor cantidad de chocolatina fue Javier, luego Karen y luego Daniela que fue la que comió la mayor cantidad y lo representé con un octavo que es menos que un cuarto y un cuarto es menor que un medio. De acuerdo con la respuesta de la entrevista, se reconoce que la estudiante conocía previamente las magnitudes de las fracciones y que posteriormente realizó las representaciones aritméticas respectivas lo cual sustenta el hecho de que la estudiante comprende que entre fracciones unitarias es menos la que mayor denominador tiene (Maza, 1999).

4.1.4 Niveles de matematización alcanzados para la T1E4.

Para la T1, La E4 se puede clasificar en la categoría TIC3: El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos determinando un orden entre fracciones unitarias correcto para las cantidades, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. Debido a que la estudiante, realiza una transformación de conversión de la representación figural al lenguaje aritmético, así mismo, realiza una transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal para garantizar el orden entre las magnitudes de manera correcta, esto, sugiere que la estudiante comprende varios aspectos del número racional positivo en tanto realiza interacciones entre registros semióticos (Duval, 1999) y que comprende que entre fracciones unitarias es menor la que tiene mayor denominador (Maza,1998). A su vez, cuando la estudiante realiza la transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal, se puede identificar que el orden entre los números racionales positivos puestos en la tarea se le facilitó haciendo uso de esta notación (Broitman et al, 2003) sin embargo, no hace uso de notación formal desde las matemáticas. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T1E4:

4.1.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T1E4



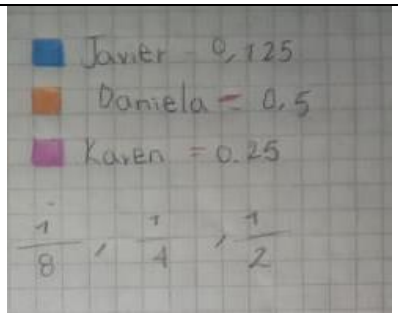


Gráfico 7. Evidencia T1P3E4

Descripción T1P3E4

La estudiante representa las cantidades en una unidad (rectángulo) y las colorea para hacer una clasificación de las porciones de chocolatina que comieron cada uno de los amigos en la situación, posteriormente representa la clasificación de las partes de chocolatina con colores pero, igualando cada nombre al número decimal que le corresponde y haciendo una comparación de los números decimales posteriormente presenta el orden en el que deberían estar las fracciones que es $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ de manera correcta.
Análisis T1P3E4
En la respuesta de la estudiante se vislumbra que puede poner en coherencia dos registros semióticos de representación (Duval, 1999) debido a que en lenguaje figural representa cada una de las partes y para llegar a responder la pregunta realizó una transformación de tratamiento dentro del registro aritmético, es decir, de la notación fracción a la notación decimal lo cual, posibilita pensar que la estudiante comprende el número racional positivo en cuanto al orden. Por otro lado, el haber realizado la transformación de tratamiento le permitió comprender las relaciones aritméticas entre las magnitudes y por ello, no traslada propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos. Así mismo, en esta estudiante se comprueba los expuesto por Broitman et al (2005) al respecto de que la notación decimal facilita comprender el orden y la densidad entre números racionales, pues se puede observas que gracias a la transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal la estudiante muestra coherencia pregunta a pregunta.
Entrevista T1P3E4
Docente Juan: Tania ¿Cómo resolviste la tercera pregunta? Tania: En el tercer punto nos piden como se organizaría de menor a mayor los amigos pues respectivamente como se comieron la chocolatina de menor a mayor pues Javier acá se ve que por los decimales o por las fracciones también se puede ver como fue el que comió menos le sigue Karen que comió un cuarto o cero coma veinticinco y de ultimas va Daniela. Acá se puede ver representado esto, esta sería como la chocolatina se dividen en las partes el naranja representa a Daniela que se comió prácticamente la mitad de la chocolatina el rosado representa Karen que se comió la mitad de la mitad de la chocolatina y el azul representa a Javier que se comió la mitad de la mitad de la mitad de la chocolatina. Cuando la estudiante manifiesta *el naranja representa a Daniela que se comió prácticamente la mitad de la chocolatina* permite pensar que la estudiante presenta dificultad en la gestión de esquemas, pues no considera que $\frac{1}{2} = 0{,}5$ sea la mitad de la chocolatina.

4.2 Niveles de matematización alcanzados para la T2 de cada caso

4.2.1 Niveles de matematización alcanzados para T2E1.

Para el T2, el estudiante E1 se puede clasificar en la categoría T2C3 o nivel de matematización

general: El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. Debido a que, en la primero pregunta realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal y luego a la notación porcentaje, lo cual, le permitió identificar dentro de las cantidades de las tareas cuáles eran menores, mayores o iguales; en la tercera pregunta el estudiante ordena de manera correcta las cantidades de pizza que comió cada una de las amigas y en la cuarta pregunta interpreta de manera correcta que si una amiga comiera mayor cantidad de partes de una pizza que las demás amigas comería mayor cantidad lo cual, se refleja en el numerador y por último, en la pregunta cinco se confirma que el estudiante reconoce que entre fracciones homogéneas es mayor la que tiene mayor numerador (Maza, 1998). Así mismo, se identifica la dificultad con respecto al obstáculo epistemológico de infinito al omitir de los números decimales las cifras periódicas (Centeno, 1996) confirmándose lo expresado por Panizza y Alvares (1990) al respecto de que la notación periódica se convierte un factor de dificultades para comprensión de la noción de densidad. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T2E1:

4.2.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T2E1.

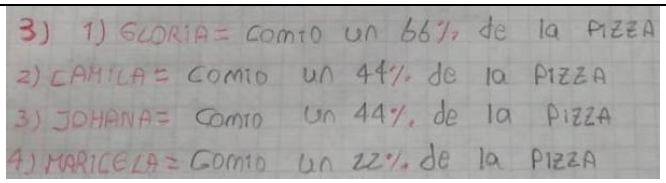


Gráfico 8. Evidencia T2P3E1

Descripción T2P3E1
El estudiante determina cada uno de los porcentajes de pizza que come cada una de las amigas estableciendo que Gloria ocupa un primer lugar con un 66% de la pizza, en segundo lugar, estaría

Camila con un 44% de la pizza, en un tercer lugar estaría Johana con un 44% de la pizza y en el cuarto lugar Maricela con 22% pizza.
Análisis T2P3E1
En la respuesta del estudiante se vislumbra que ordenó de mayor a menor las porciones de pizza comidas por las amigas como lo requería la pregunta, para llegar a este resultado el estudiante tuvo que comparar las cantidades en este caso en su representación como porcentaje lo cual, le permitió enlistar las cantidades de 1 hasta 4, este proceso de comparación es un elemento importante al momento de ordenar números racionales positivos (Maza, 1999).
Entrevista T2P3E1
Docente Juan: ¿Cómo resolviste la tercera pregunta Carlos? Carlos: Aquí podemos ver gracias al porcentaje que gloría come un 66 % de la pizza o sea que ella comió más, después le van Camila y Johana con un 44 % de la pizza y de ultimas maricela con un 22 % de la pizza. Lo cual sustenta el hecho de haber realizado una comparación de las cantidades en su representación como porcentajes para ordenar números racionales positivos.

4.2.2 Niveles de matematización alcanzados para la T2E2

Para la T2, el estudiante E2 puede ubicarse en las categorías T2C1, T2C2 y T2C3 o nivel referencial y general de matematización: El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural determinando un orden ligado a su intuición, es decir, generalizando las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos sin ningún tratamiento matemático. El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, establece un orden de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos. El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. Se puede ubicar en la T2C3 en tanto realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal que le permiten

determinar cuáles magnitudes son mayores, menores o iguales de manera correcta, es decir, el estudiante en las preguntas de la 1 a la 3 responde de manera correcta haciendo uso de la notación decimal y estableciendo un orden de mayor a menor de las cantidades de pizza de la tarea, sin embargo, en la pregunta 4 el estudiante no tiene en cuenta el valor posicional de las cantidades decimales y las suma como si fueran números naturales, es decir traslada propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los números racionales positivos (Fandiño, 2009) y en la pregunta 5, el estudiante se deja llevar por su intuición y establece que el hecho de que algunas amigas coman más cantidad de pizza que otras depende de lo rápido que coma cada una de las amigas, esto es, en la pregunta 5 no pudo pasar de una matematización horizontal a una vertical o a una respuesta mejor estructurada (Bressan, 2016). Sumado a lo anterior, se identifica que el estudiante presenta dificultad en la gestión figuras no estándar (prisma rectangular) y que presenta dificultad en la gestión del adjetivo igual (Fandiño, 2009) ya que divide de manera incorrecta dicha figura sin tener en consideración las dimensiones de la misma. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T2E2:

4.2.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T2E2

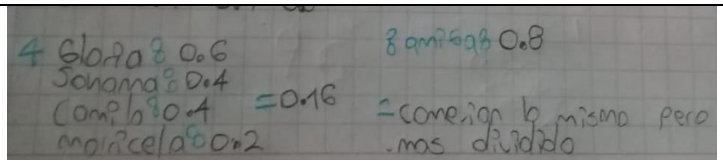


Gráfico 9. Evidencia T2P4E2

Descripción T2P4E2
El estudiante enlista de arriba hacia abajo a las amigas de mayor a menor y suma las cantidades decimales obteniendo 0,16, seguidamente expone que la quinta amiga come 0,8 y expresa en lenguaje natural que entre la cantidad de pizza que comieron las 4 primeras amigas en comparación con la cantidad que come la quinta amiga es lo mismo solo que más dividido.
Análisis T2P4E2
En la respuesta del estudiante se reconoce que realiza una transformación de tratamiento en tanto pasa de la notación fracción a la notación decimal dentro del mismo registro semiótico lo cual

sugiere que en lo numérico el estudiante ha enriquecido el concepto de número racional positivo Fandiño (2009). A su vez, se identifica que el estudiante tiene dificultades con la noción de infinito en tanto discretiza las cantidades decimales despojándolas de la parte periódica Fandiño (2009) y Centeno (1997) operándolos como números enteros o naturales. A su vez, se identifica en el estudiante lo que Centeno (1997) denomina errores en el orden entre números decimales y desconocimiento de las reglas que rigen a los mismos ya que para el estudiante $0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}16$ lo cual es incorrecto ya que $0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1{,}6$ lo cual demuestra que el estudiante no comprende el valor posicional de los números decimales y esto, sugiere que traslada propiedades y reglas de los números naturales al conjunto de los racionales positivos en su notación decimal. Así mismo, el estudiante manifiesta que $0{,}8$ es la mitad de $0{,}16$ lo cual sustenta lo expuesto en tanto el estudiante traslada propiedades de los números naturales y enteros al conjunto de los racionales positivos en su notación fracción, por otro lado, se puede reconocer que el estudiante no diferencia entre fracciones heterogéneas y fracciones homogéneas, pues no reconoció que en las fracciones homogéneas se trabaja sobre una misma unidad por tanto, el estudiante presenta dificultad en determinar la unidad que generó las fracciones (Fandiño, 2009).
Entrevista T2P4E2
Docente Juan: ¿Por qué sumaste en la solución de la pregunta 4? Christopher: Los sumé porque pensé que entre lo que comieron las amigas y la otra daba el total de la pizza, pero, ahora pienso que la amiga come menos. En este caso se puede observar que el estudiante no interpretó de manera correcta la pregunta pues el supuso que se le preguntaba si la quinta amiga come más que todo lo que comieron las amigas juntas, así mismo, el estudiante manifiesta que la quinta amiga come menos porque $0{,}16 \div 2 = 0{,}8$ por tanto el estudiante manipula los números racionales en su representación decimal como si fueran números enteros o naturales.

4.2.3 Niveles de matematización alcanzados para la T2E3.

Para T3, la estudiante E3 se podría clasificar en las categorías T2C3 y T2C4 o nivel de matematización general y formal: El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden de las cantidades racionales de manera correcta. Se le puede clasificar en T2C3, porque en las respuestas de las preguntas P1, P2 y P5 utiliza una representación figural (círculo) para representar las pizzas las

cuales trata de dividir congruentes en área, sin embargo, se identifica una dificultad en la gestión del adjetivo igual (Fandiño, 2009) pero, al respecto del propósito de la pregunta la estudiante reconoce que entre fracciones homogéneas es mayor la que mayor numerador tenga (Maza, 1998), no obstante, no utiliza símbolos ni operaciones formales de las matemáticas. Ahora bien, se le puede clasificar en la T2C4, porque en las preguntas P4 y P5 utiliza símbolos formales desde las matemáticas para indicar el orden correcto, sin embargo, se confundió en la orientación del símbolo, pero, las magnitudes si se vislumbra de izquierda a derecha están organizadas de mayor a menor correctamente, en ese sentido, la estudiante alcanza a tocar elementos de un nivel de matematización formal pero no lo alcanza completamente. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T2E3:

4.2.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T2E3

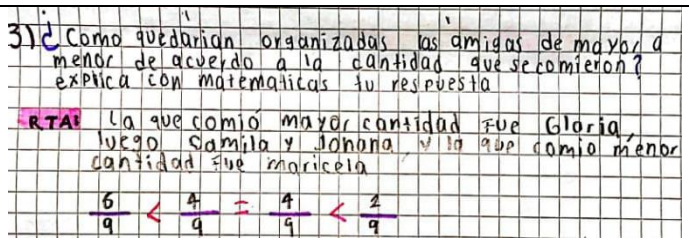


Gráfico 10. EvidenciaT2P3E3

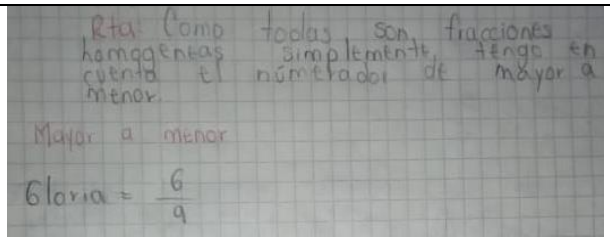
Descripción T2P3E3
La estudiante expresa en lenguaje natural que las amigas quedan organizadas de la siguiente manera Gloria, Camila y Johana, Maricela, la estudiante escribe Camila y Johana porque ambas comieron igual, así mismo, trata de traducir lo expresado en lenguaje natural al lenguaje aritmético haciendo uso de los signos (>,<,=) teniendo un error en el sentido convencional del uso de los signos pues en el lugar de < debió poner el signo > no obstante, si se observa el orden de izquierda a derecha la estudiante ordenó de manera correcta las cantidades.
Análisis T2P3E3
En la estudiante se reconoce que realiza una transformación de conversión en tanto puede coordinar dos registros semióticos del mismo concepto Fandiño (2009), pues en las respuestas anteriores gestionó correctamente el registro semiótico denominado figural y en esta respuesta gestionó el lenguaje aritmético. A su vez, se identifica que la estudiante compara fracciones como un elemento importante al momento de ordenar números racionales positivos y en este

caso números racionales positivos (Maza,1999) al comparar los numeradores de las fracciones homogéneas para ordenarlas. Por otro lado, se identifica la dificultad denominada imágenes y modelos formados demasiado pronto (Fandiño, 2009) ya que al usar los símbolos (<,>) no identifica que utilizó incorrectamente el signo (< menor que) no obstante, de izquierda a derecha la estudiante ordenó correctamente las fracciones.
Entrevista T2P3E3
Docente Juan: Lina ¿por qué usaste esos símbolos de mayor o menor para la respuesta? Lina: la tercera pregunta la que comió mayor cantidad fue Gloria, luego fue Camila y Johana y, la que comió menos fue maricela, $\frac{6}{9}$ es mayor que $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ es igual a $\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{9}$ es mayor que $\frac{2}{9}$, utilicé los símbolos para decir quién era mayor. Docente Juan: ¿Pero estás segura que el signo que utilizaste es de mayor? (La estudiante alzó las manos y abrió los dedos) y respondió Lina: Que pena profe me equivoqué era éste (Alzando su mano derecha en posición horizontal con el dedo índice y corazón abiertos). En la respuesta de la estudiante se reconoce que realizó la comparación de numeradores sin embargo presenta dificultad en el uso de los signos mayor que y menor que.

4.2.4 Niveles de matematización alcanzados para la T2E4.

Para la T2, la estudiante E4 se puede clasificar en la T2C3: El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =. Debido a que, en la pregunta P1 realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal, lo cual le permite comprar las magnitudes y determinar cuál es mayor, cuál es menor o igual, esto, se puede vislumbrar en las respuestas de las preguntas siguientes en donde teniendo en cuenta los número decimales ordena de manera correcta las magnitudes de manera vertical de mayor a menor y así mismo, reconoce que si una persona come más partes de la pizza esto se verá reflejado en el numerador, esto es, la estudiante reconoce que entre fracciones homogéneas es mayor la que tiene mayor numerador (Maza, 1998). Sin embargo, no utiliza símbolos ni operaciones formales desde las matemáticas, para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T2E4:

4.2.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T2E4



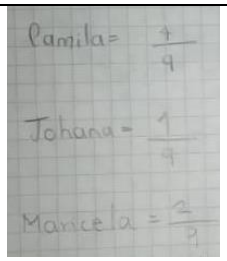


Gráfico 11. Evidencia T2P3E4

Descripción T2P3E4
La estudiante en lenguaje natural expresa que como las fracciones son homogéneas simplemente debe tener en cuenta los numeradores, seguido, representa las fracciones y las ordena de arriba para debajo de mayor a menor.
Análisis T2P3E4
En la respuesta de la estudiante se reconoce que comparó los numeradores de las fracciones para poder ordenarlas lo que para (Maza, 1999) así mismo, se reconoce que la estudiante realiza transformaciones de conversión y de tratamiento, de conversión porque pasa del registro figural al registro aritmético y de tratamiento porque pasa de la notación fracción a la notación decimal (Duval, 1999).
Entrevista T2P3E4
Docente Juan: ¿Qué hiciste en la tercera pregunta Tania? Tania: cómo quedarían organizadas las amigas de mayor a menor de acuerdo a la cantidad de pizza que se comieron, como todas las fracciones son homogéneas simplemente nos centramos en el numerador y los organizamos de mayor a menor Gloria $\frac{6}{9}$, Camila $\frac{4}{9}$, Johana $\frac{4}{9}$ y maricela $\frac{2}{9}$. Como se puede observar la estudiante comparó los numeradores debido a que identificó que las fracciones eran homogéneas.

4.3 Niveles de matematización alcanzados para la T3 de cada caso

4.3.1 Niveles de matematización alcanzados para T3E1.

Para la T3, el estudiante se puede clasificar en T3C2 y T3C3 o nivel de matematización referencial y general: El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, encontrando un número racional dentro del intervalo, pero, movilizado por su intuición, es decir, encuentra un número racional positivo atendiendo a las propiedades de orden entre números naturales, sin embargo, establece los límites del intervalo. El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético,

representaciones figurales o combinaciones de éstas, estableciendo correctamente los límites del intervalo y más de un número dentro de éste, pero, no utiliza ningún algoritmo matemático formal ni tampoco notación formal, es decir, no tiene un control sobre cómo determinar tales números. Se le puede clasificar en la T3C2, porque en todas las preguntas el estudiante realiza una transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal (Duval, 1999) lo cual le permite establecer los límites del intervalo y hallar un número dentro del mismo que es 1/4 , sin embargo, este número parece ser movilizado por las propiedades de orden entre números naturales que traslada a los números racionales positivos (Fandiño, 2009) porque 3<4<5. No obstante, se le puede clasificar también dentro de la T3C3 debido a que utiliza el recurso de añadir una décima al denominador 4 con la cual asegura que los números sigan estando dentro del intervalo (Broitman et al, 2003) y así mismo, utiliza algoritmos propios de las matemáticas como el de conversión de decimal a fracción y viceversa, también reconoce la infinitud del proceso sin embargo, se presenta la dificultad del infinito (Centeno, 1996) al quitar el período de los números decimales y al tratar éstos como números naturales que lo hacen limitar el proceso y expresar que hay aproximadamente 10 números en el intervalo pero, no utiliza símbolos formales desde las matemáticas. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T3E1:

4.3.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T3E1

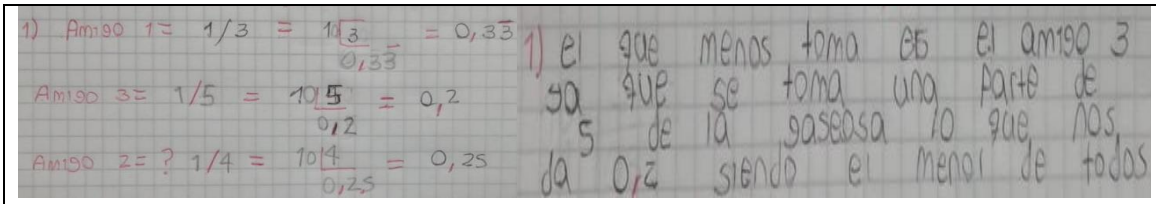


Gráfico 12. Evidencia T3P1E1

Descripción T3P1E1
El estudiante realiza un listado de los tres amigos de la siguiente manera: Amigo1, Amigo3, Amigo 2. Seguido a cada uno de los amigos les ubica en frente, la fracción en lenguaje aritmético

correspondiente, a excepción de la del Amigo 2 debido a que es la que se requiere determinar, seguido dicha fracción la transforma en número decimal realizando el cociente ubicando frente a la fracción su respectivo valor en notación decimal. Después, responde a la primera pregunta en lenguaje natural que el que toma menos cantidad de gaseosa es el amigo 3 debido a que se tomó 1 parte de 5 lo que le da $0{,}2$ siendo entre los tres el menor número decimal.
Análisis T3P1E1
De acuerdo con la respuesta del estudiante se reconoce que identifica la fracción como cociente (Gairín, 1998) y no presenta dificultad al ordenar números decimales identificando que $0{,}2 < 0{,}25 < 0{,}\underline{3}$ no obstante, se identifica que el estudiante presenta dificultad con la infinitud de los números periódico, ya que el decimal periódico de $\frac{1}{3}$ lo representa de la siguiente forma $0{,}3\underline{3}$ en lugar de $0{,}\underline{3}$ lo que sugiere que ese 3 no hace parte del periodo del número o tal vez fue una manera de discretizar el número para poderlo comparar (Centeno, 1997). A su vez, se reconoce que el estudiante realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) en tanto pasa de la notación fracción a la notación decimal lo que sugiere que el estudiante ha complejizado las representaciones respecto al concepto de número racional positivo. Sumado a lo anterior, cuando el estudiante establece que el Amigo 2 toma $\frac{1}{4}$, se reconoce que traslada propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009), pues asumió que ya que el Amigo 1 toma $\frac{1}{3}$ y el Amigo 3 toma $\frac{1}{5}$ entonces el Amigo 2 toma $\frac{1}{4}$ de la gaseosa ya que en el conjunto de los número naturales el número que se encuentra entre el 3 y el 5 es el 4, no obstante, se comprueba lo expresado por Broitman et al (2003) al respecto de que la notación decimal le permite a los estudiante de manera más orgánica acercarse a la noción de densidad.
Entrevista T3P1E1
Docente Juan: Carlos ¿qué hiciste para responder la pregunta 1? Carlos: bueno para esto yo decidí convertir las fracciones, yo decidí convertirlas en decimales y ¿cómo lo hice? de la siguiente manera, por medio de la división en este caso, es un tercio, entonces sería uno dividido en tres y de ahí sacamos el resultado por medio de la división, entonces en base a esto podemos ver que el que menos tomó fue el amigo tres ya que se tomó una parte de cinco o sea que nos da 0,2 lo cual, es menor que todos, ya que el amigo uno toma $0.3\underline{3}$ de la gaseosa, el amigo dos toma 0,25 de la gaseosa y el amigo tres toma menos que todos con 0,2.

4.3.2 Niveles de matematización alcanzados para la T3E2.

Para T3, el estudiante E2 se puede clasificar en la T3C1 o nivel situacional: El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas de manera intuitiva, esto es, que al trasladar propiedades de orden entre

números naturales al conjunto de los racionales positivos no logra establecer los límites del intervalo ni tampoco un número racional positivo dentro de éste. Debido a que, no reconoce a la fracción como un cociente y por ello, interpreta a la fracción como dos números naturales separados por una rayita (Fandiño, 2009) debido a esto, realiza el cociente invirtiendo los valores de las fracciones operándolas como números naturales, es decir, traslada propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009), esto, hace que el estudiante no establezca los límites del intervalo, sin embargo, encuentra un número dentro de éste pero movilizado por las propiedades de orden de los números naturales que es ¼ porque en dicho conjunto 3<4<5. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T3E2:

4.3.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T3E2

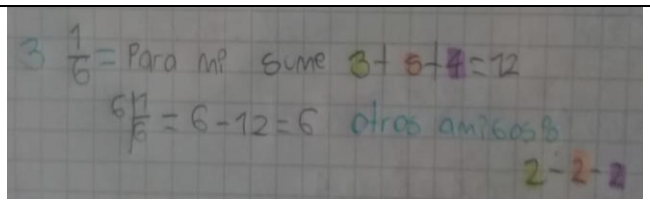


Gráfico 13 . Evidencia T3P3E2

Descripción T3P3E2
Como se mencionó en la entrevista de la pregunta anterior, el estudiante sumó los denominadores al ver que los numeradores eran iguales entonces, $3 + 5 + 4 = 12$ y esto lo tomó como unidad, seguidamente establece que los amigos 1, 2, 3 toman la mitad de la gaseosa y que por ellos el amigo 4 puede tomar $\frac{1}{6}$, así mismo, establece que $\frac{1}{6} = 6 \div 1 = 6$.
Análisis T3P3E2
En la respuesta del estudiante se reconoce que traslada propiedades y operaciones con números naturales hacia el conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009) ya que, en primer lugar no identifica la fracción como un solo número (Gairín, 1998) pues separa denominadores de numeradores respectivamente y centra su atención sobre los denominadores por ello, establece que $3 + 5 + 4 = 12$ es la unidad, esto, sugiere que el estudiante presenta dificultad para pasar de la fracción a la unidad que la originó (Fandiño, 2009), a su vez, no reconoce la fracción como cociente (Gairín, 1998) pues asume que $\frac{1}{6} = 6 \div 1 = 6$. A su vez, el estudiante interpretó la tarea y la pregunta desde una perspectiva intuitiva debido a que, asume que un litro debe ser 12

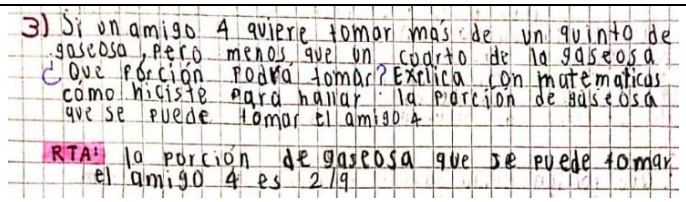
y que los tres primeros amigos deben tomarse la mitad de la gaseosa sobrándole al amigo 4, $\frac{1}{6}$ de la misma, en ese sentido, se identifica que traslada propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales positivos, pues no tuvo en cuenta la cantidad de magnitud de cada una de las porciones de gaseosa sino que asumió que como $6 > 5 > 4 > 3$ entonces $\frac{1}{6} > \frac{1}{5} > \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.
Entrevista T3P3E2
Docente Juan: ¿Cómo resolviste la pregunta 3? Christopher: En la tercera, fue un sexto para mí, sumé $3 + 5 + 4 = 12$ y 6 dividido uno pues 6 entonces, 6 menos doce es 6 y los otros amigos quedaban divididos entre dos mililitros entre sí o sea tres veces. Como se puede observar en la respuesta del estudiante se reconoce que interpretó intuitivamente la tarea y las preguntas debido a que, realizó unas elecciones no acertadas y dentro del marco de la tarea, pues los amigos 1, 2, 3 ya no toman $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ sino $2, 2, 2$ es decir, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ esto es, se comprueba lo expresado en el análisis inmediatamente anterior.

4.3.3 Niveles de matematización alcanzados para la T3E3.

Para la T3, la estudiante E3 se puede clasificar en T3C3 y T3C4 o nivel general y formal de matematización: El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, estableciendo correctamente los límites del intervalo y más de un número dentro de éste, pero, no utiliza ningún algoritmo matemático formal ni tampoco notación formal, es decir, no tiene un control sobre cómo determinar tales números. El o la estudiante responden la (T3) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representación figural o todas a la vez junto con signos y operaciones formales de las matemáticas como el uso de signos de agrupación, notaciones simbólicas, algoritmo para hallar promedios etc. Establecen más de un número dentro del intervalo. Se le puede clasificar en T3C3, porque establece los límites del intervalo de manera correcta, a su vez, determina más de un número racional dentro del intervalo, pero sin ningún control y los comprueba a través de una transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal (Duval, 1999). A su vez, se le puede clasificar en T3C4, porque hace uso del lenguaje simbólico ⅕<x<⅓ y así mismo

utiliza algoritmos como el de conversión de un número periódico a fracción para para hallar los números del intervalo, sin embargo, no son estrategias constantes sino esporádicas. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T3E3:

4.3.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T3E3



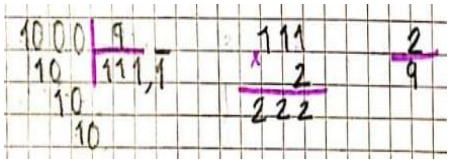


Gráfico 14. Evidencia T3P3E3

Descripción T3P3E3

La estudiante expresa en lenguaje aritmético que el amigo 2 puede tomar $\frac{2}{9}$ de la gaseosa y presenta el proceso de cómo hizo para encontrar dicha porción, lo que hizo la estudiante fue establecer la cantidad $1000\ ml = 1l$ como unidad, luego la divide en 9 partes, esto es, $1000 \div 9 = 111{,}1$ y luego al reconocer que cada una de las nueve partes equivale a 111,1, toma la parte entera y la multiplica por 2, es decir, $111 \times 2 = 222$ y luego expresa que el cuarto a amigo 4 puede tomar $\frac{2}{9}$.

Análisis T3P3E3

En la respuesta de la estudiante se identifica que su razonamiento la lleva a pensar que solo hay una porción de gaseosa que puede tomar el amigo 4, sin considerar que existen posibilidades infinitesimales en dicha pregunta, esto, debido a la dificultad que representa la noción de infinito (Fandiño, 2009) en la densidad de los números racionales positivos, a su vez, esta dificultad se puede identificar en el hecho de quitar la parte periódica de un número decimal como se observa en la explicación que otorga la estudiante sobre cómo halló la cantidad $\frac{2}{9}$. Por otro lado, el que la estudiante dividiera la unidad en 9 partes sugiere que estaba razonando desde el conjunto de los números naturales y así mismo, también se pudo reconocer que la estudiante después de haber obtenido el número 222 dividió esta cantidad entre 1000, es decir, $200 \times 1000 = 0{,}222$ y posterior a este resultado lo transformó en fracción transformando el número periódico a fracción, es decir:

$$x = 0.\underline{2}$$
$$Luego\ 10x = 2.\underline{2}$$
$$Seguido\ 10x - x = 2.\underline{2} - 0.\underline{2}$$
$$Luego\ 9x = 2$$

$Y\ por\ \acute{u}ltimo\ x = \frac{2}{9} = 0,\underline{2}$ Lo cual, indica que la estudiante obtuvo ayuda de alguien o de alguna herramienta.
Entrevista T3P3E3
Docente Juan: Lina ¿Cuéntame cómo resolviste la pregunta tres? Lina: la porción de la gaseosa que se puede tomar el amigo cuatro es $\frac{2}{9}$ entre otras, esto se sacó dividiendo el litro de gaseosa hasta que diera un resultado exacto. Docente Juan: Pero ¿Por qué el resultado debía dar exacto, a qué te refieres? Lina: Pues exacto es que cupiera entre los otros dos. Docente Juan: ¿Cómo hiciste para convertir el número periódico en fracción, alguien te ayudó y sé sincera Lina? Lina: La verdad profesor es que me ayudó mi hermana, pero yo hice la mayoría, ella solo me explicó. Docente Juan: Lina, pero, recuerda que el trabajo era individual y que no te estoy exigiendo que debe quedar perfecto sino lo que tu entiendas y hagas las cosas como tu consideras sin ayuda de nadie, por eso, te pido el favor de que las próximas tareas las resuelvas sola vale. Lina: Bueno profesor. En la respuesta de la estudiante se reconoce que piensa que hay más de una posibilidad para que el amigo 4 tome su porción de gaseosa y que como se había sospechado, la estudiante si tuvo ayuda de alguien externo, así mismo, la porción $\frac{2}{9}$ si es una de las infinitas porciones que puede tomar el amigo 4.

4.3.4 Niveles de matematización alcanzados para la T3E4.

Para la T3, la estudiante E4 se puede clasificar en T3C4: El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, estableciendo correctamente los límites del intervalo y más de un número dentro de éste, pero, no utiliza ningún algoritmo matemático formal ni tampoco notación formal, es decir, no tiene un control sobre cómo determinar tales números. Debido a que, establece el intervalo correctamente y garantiza que ¼ se encuentra dentro de éste haciendo uso del algoritmo para ordenar fracciones o para hallar fracciones equivalentes, a su vez, encuentra otro número dentro del intervalo haciendo uso de la conversión de número decimal a fracción, esto es, realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) para comprobar que el número se encuentra dentro del intervalo. Sin embargo, en la pregunta P4, se reconoce que la estudiante traslada propiedades

de orden de los números naturales al conjunto de los racionales (Centeno, 1996) en tanto, ordena los números como si fueran números naturales, sin embargo, no utiliza símbolos formales desde las matemáticas y no hay un control sobre cómo hallar tales números. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T3E4:

4.3.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T3E4

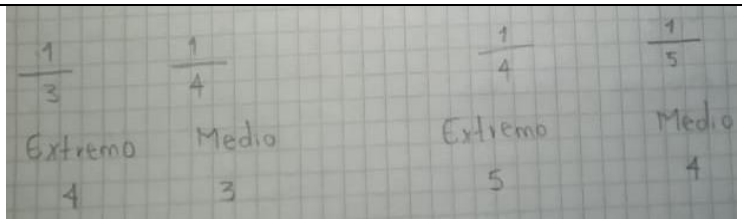


Gráfico 15. Evidencia T3P2E4

Descripción T3P2E4

En la pregunta anterior la estudiante establece que el amigo 2 puede tomar $\frac{1}{4}$ de la gaseosa, en ese sentido, en esta pregunta lo que busca hacer es comprobar que $\frac{1}{4} = 0{,}25$ se encuentra entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ a través de la comprobación de extremos y medios como lo expresa la misma estudiante. En ese sentido, lo que hace la estudiante es comparar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ es decir, $1 \times 4 = 4$ y $1 \times 3 = 3$ por tanto $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ y luego compara $\frac{1}{4}$ con $\frac{1}{5}$ entonces, $1 \times 5 = 5$ y $1 \times 4 = 4$ por lo tanto $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$ en consecuencia $\frac{1}{4}$ cumple la condición de ser una porción mayor que $\frac{1}{3}$ y mayor que $\frac{1}{5}$.

Análisis T3P2E4

En la respuesta de la estudiante se puede reconocer que trató de establecer un intervalo al hacer la comprobación de los tamaños de las magnitudes, lo cual sugiere que la estudiante puede hallar un número racional positivo entre otros dos o en otras palabras, la estudiante comprende la noción de densidad de los racionales positivos (Cabarcas y Soler, 2017) sin embargo, también se puede reconocer que la estudiante al enfrentarse a una situación sobre la cual no tenía un conocimiento previó utilizó sus recursos conceptuales a su alcance, que son los números naturales, y trasladó propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009), esto es, como en los números naturales $3 < 4 < 5$ entonces necesariamente $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ no obstante, este razonamiento no se puede generalizar ya que no siempre pasa igual si se cambian los extremos del intervalo racional positivo.

Entrevista T3P2E4

Docente Juan: ¿Cómo resolviste la pregunta 2? Tania: esto ya lo había explicado acá con esta grafica profe, yo dije que era un cuarto, pero acá para explicarlo matemáticamente o para comprobarlo hice la solución de extremos y medios, entonces acá está $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ y, tenemos que mirar cuál es mayor, entonces hice la solución de los extremos y medios $1 \times 4 = 4$ y $1 \times 3 = 3$, cuatro es más grande por lo tanto esta fracción $\left(\frac{1}{4}\right)$ es mayor, es lo que nos están pidiendo hasta el momento, acá lo mismo extremos y medios solo que acá ahora con $\frac{1}{5}$ $1 \times 5 = 5$ y $1 \times 4 = 4$ este $\left(\frac{1}{5}\right)$ es más grande tal y como nos piden que el cuarto amigo sea tenga una porción o tome una porción más grande que el tercero y una menos que el primero. Como se puede observar en la respuesta de la estudiante, sigue razonando desde el conjunto de los números naturales pues invirtió las porciones de gaseosa que le correspondían al amigo 1 y al amigo 2, lo que comprueba que la estudiante traslada propiedades del conjunto de los naturales hacia los racionales positivos.

4.4 Niveles de matematización alcanzados para la T4 de cada caso

4.4.1 Niveles de matematización alcanzados para la T4E1.

Para la T4, el estudiante E1 se puede clasificar en la T4C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso y así mismo no logran hacer la aproximación. Debido a que, determina el patrón correcto de la sucesión, así mismo, logra determinar las siguientes áreas y realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal para realizar la suma de números racionales sumándolos en binas y luego tales resultados los suma determinar un valor, pero, no realiza una aproximación de la serie haciendo uso de algoritmos informales, contrariamente, limita el proceso y expresa que para llegar al límite que él estableció solo basta consumas las primeras 6 áreas, es decir, imposibilitó la infinitud del proceso debido a la dificultad del carácter actual del infinito (Fandiño, 2009). Para complementar lo

expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T4E1:

4.4.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T4E1

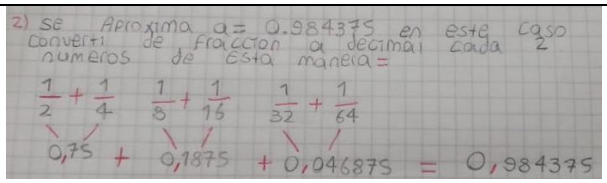


Gráfico 16. Evidencia T4P2E1

Descripción T4P2E1
El estudiante expresa que la suma de las 6 áreas se aproxima a 0.984375 y luego explica en lenguaje natural cómo realizó el proceso para obtener el número anterior, esto es, que realizó una conversión de notación fracción a decimal el resultado de la suma de dos fracciones cada vez. Seguidamente, explica en lenguaje aritmético que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0.75$, $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0.1875$ y $\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=0.046875$ por tanto $0.75+0.1875+0.046875=0.984375$.
Análisis T4P2E
En la respuesta del estudiante se reconoce que realiza una transformación de tratamiento en tanto pasa de la notación como fracción a la notación decimal dentro de un mismo registro semiótico (Duval, 2009) lo cual sugiere que el estudiante comprende la fracción como un cociente (Gairín, 1998). A su vez, se reconoce que al estudiante se le facilita gestionar una buena aproximación de las áreas a su límite haciendo uso de la notación decimal (Broitman, 2003).
Entrevista T4P2E1
Docente Juan: Carlos ¿Cómo realizaste la solución de la segunda pregunta? Carlos: bueno yo para escoger o calcular a que número se van aproximando hice lo siguiente, convertir de a dos fracciones en un decimal, o sea, escoger cada fracción convertirla en decimal y sumar los dos decimales a ver qué resultado daban y así fui sumando cada uno lo cual, me dio 0.984375 de resultado. Como se puede observar, el estudiante utilizó la notación decimal para poder realizar las sumas y determinar una aproximación límite de la serie lo cual, sugiere que la notación decimal le facilita este proceso de acercamiento por derecha de una serie.

4.4.2 Niveles de matematización alcanzados para la T4E2.

Para la T4, el estudiante E2 se puede clasificar en la T4C1 o nivel referencial de matematización:

El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético,

representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la serie y al trasladar propiedades y operaciones propias de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no realizan la operación de suma entre números racionales de manera correcta, imposibilitan la infinitud del proceso y no logran realizar una aproximación. Debido a que, determina el patrón de manera correcta, pero, al no interpretar la fracción como docente hace que no la considere un número completo sino como dos números separados por una rayita (Fandiño, 2009) esto, hace que el estudiante opere las fracciones como números naturales, es decir, traslada propiedades de los números naturales al conjunto de los números racionales (Fandiño, 2009) así mismo, presenta dificultad con la noción de infinito porque, discretiza la infinitud del proceso (Fandiño, 2009). Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T4E2:

4.4.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T4E2

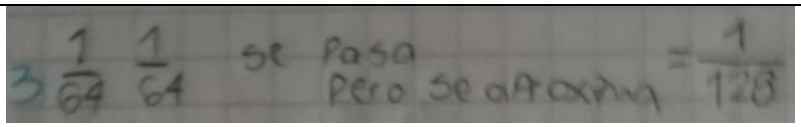


Gráfico 17. Evidencia T4P3E2

Descripción T4P3E2
Como el estudiante en el punto anterior había establecido un límite parcial para la serie que era $\frac{1}{124}$, en esta pregunta, expresa como las anteriores áreas las había hallado sumando dos veces los denominadores entonces $\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=\frac{1}{128}$ y expresa en lenguaje natural que $\frac{1}{128}$ se pasa de $1\frac{1}{124}$ pero que se aproxima el primero la secuencia.
Análisis T4P3E2
Al igual que en la anterior respuesta, el estudiante no interpreta a la fracción como un número completo (Obando, 2003) y esto hace que separe numeradores de denominadores sumando éstos últimos como su regla de generalización, así mismo, esta forma de interpretar la fracción hace que recurra a sus conocimientos previos como lo son las propiedades y operaciones con números naturales por ello, traslada estas propiedades y operaciones al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009) lo que conlleva a una respuesta incorrecta, a su vez, en el trasfondo de la respuesta del estudiante se identifica que su regla de generalización le permite hallar diversas áreas a las dadas, sin embargo, como razona con las fracciones como si fueran números

naturales, esto, hace que estas infinitas áreas que pueda hallar estén bajo la interpretación del infinito en potencia y no en acto lo que posibilita dificultades al momento de comprender la noción de densidad de los racionales positivos (Fandiño, 2009).
Entrevista T4P3E2
Docente Juan: ¿Cómo resolviste la pregunta 3? Christopher: En el tercero, no sé cómo hacer esa área, pero $64 + 64 = 128$ pero se pasa, pero se aproxima entonces no sé cómo hacer para esa área. Docente Juan: Christopher explícame de nuevo qué fue lo que hiciste. Christopher: Digamos que el área del cuadrado no cambia y como $\frac{1}{124}$ es el que buscamos entonces $\frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{1}{128}$ se aproxima. Cuando el estudiante manifiesta que el área del cuadrado no cambia puede hacer referencia a que el estableció $\frac{1}{124}$ como su límite que como de 124 a 128 no es mucha la diferencia entonces 128 está muy cerca de 124.

4.4.3 Niveles de matematización alcanzados para la T4E3.

Para la T4, la estudiante E3 se puede clasificar en la T4C3: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sugiriendo que el proceso es infinito y realizando una aproximación correcta, pero, sin utilizar procedimientos formales de las matemáticas como el límite ni tampoco notación formal desde las matemáticas. se encuentra en T4C3, porque determina el patrón correcto para describir la sucesión (Mora, 2012), halla las tres siguientes áreas como lo especificaba la pregunta, también, aproxima de manera correcta la serie a su límite realizando la suma de fracciones de manera correcta, es decir, la estudiante no presenta dificultad en la gestión de algoritmos (Fandiño, 2009), sin embargo, aunque no lo hace explícito, la estudiante realiza una transformación de tratamiento (Duval, 2009) de la notación fracción a la notación decimal para determinar tal aproximación. Por otro lado, se encuentra en T4C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y

realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso y así mismo no logran hacer la aproximación. Porque, posiblemente existe una dificultad con la noción de infinito (Fandiño, 2009), ya que al preguntarle cuántas áreas se deben sumar para alcanzar el límite 1, la estudiante discretiza la infinitud del proceso. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T4E3:

4.4.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T4E3

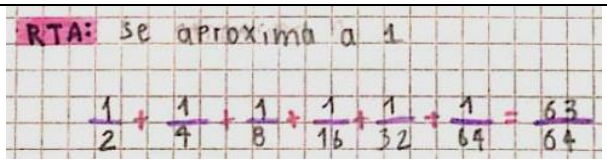


Gráfico 18. Evidencia T4P2E3

Descripción T4P2E3

En la respuesta de la estudiante se identifica que haciendo uso del lenguaje aritmético representa la suma de las seis áreas de la siguiente manera $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$ y expresa en lenguaje natural que la serie se aproxima a 1.

Análisis T4P2E3

En la respuesta de la estudiante se identifica que logra establecer una aproximación correcta de la serie, así mismo, se identifica que la estudiante no presenta dificultad en la gestión de algoritmos (Fandiño, 2009) debido a que se puede reconocer que utilizó la suma de fracciones haciendo uso del mínimo común múltiplo, de la siguiente manera:

$$mcm\,(2,4,8,16,32,64) = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^6 = 64$$

2	4	8	16	32	64	2
1	2	4	8	16	32	2
	1	2	4	8	16	2
		1	2	4	8	2
			1	2	4	2
				1	2	2
					1	

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$$

$$\frac{(64\div 2)(1)(64\div 4)(1)(64\div 8)(1)(64\div 16)(1)(64\div 32)(1)(64\div 64)(1)}{64}$$

$$=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}=\frac{63}{64}$$

De esta manera, puede interpretar cuando la estudiante expresa que la secuencia se aproxima a 1 que o pudo haber realizado una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal para determinar dicha aproximación o por el contrario, comprende que la unidad en los racionales positivos se puede representar como $\frac{n}{n}$ en ese sentido, al ser la suma parcial $\frac{63}{64}$ pudo la estudiante identificar que $\frac{64}{64} = 1$ y que $\frac{63}{64}$ no distaba mucho de la unidad y por ello, asumió que era 1 a lo que se aproximaba la serie.
Entrevista T4P2E3
Docente Juan: Lina ¿Por qué al número que se aproximan las áreas es al 1? Lina: al sumar las 6 áreas de los cuadrados al número que se aproximan es a 1, ya que todo es parte de una fracción de un entero en este caso del 1. De la respuesta de la estudiante se puede interpretar que reconoció que cada vez que suma un área más está sumando una parte menor que la anterior.

4.4.4 Niveles de matematización alcanzados para la T4E4.

Para T4, la estudiante E4 se puede clasificar en la T4C3 o nivel general de matematización: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la serie y al trasladar propiedades y operaciones propias de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no realizan la operación de suma entre números racionales de manera correcta, imposibilitan la infinitud del proceso y no logran realizar una aproximación. Debido a que, la estudiante determina el patrón (Mora, 2012) y las tres siguientes áreas como lo requerían las preguntas y realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal para realizar la suma de la serie, con ello, realizó una aproximación correcta de la serie a su límite, sin embargo, se le puede también clasificar en la T4C2 o nivel referencial: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso y así mismo no logran hacer la aproximación. Debido a que, en la pregunta P3, al

preguntarle a la estudiante cuántas áreas debe sumar, ésta responde que deben ser solo las que se hallaron en las preguntas anteriores, esto, sugiere que la estudiante presenta una dificultad con respecto a la noción de infinito en matemáticas (Fandiño, 2009). Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T4E4:

4.4.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T4E4

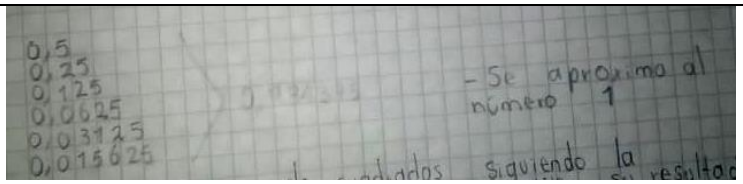


Gráfico 19. Evidencia T4P2E4

Descripción T4P2E4
La estudiante presenta en lenguaje aritmético cada una de las áreas en forma descendente y en notación decimal que son: $0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125$ y 0.015625 sin embargo, en la evidencia no se alcanza a notar la suma pero, su resultado es 0.984375,luego expresa en lenguaje natural que la serie se aproxima a 1.
Análisis T4P2E4
En la respuesta de la estudiante se identifica que realizó una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal y como lo expresa Broitman et al (2003) la notación decimal permite reconocer aspectos que la notación fracción no lo permite de forma fácil.
Entrevista T4P2E4
Docente Juan: ¿Cómo resolviste la segunda pregunta? Tania: yo lo que hice fue pasar los fraccionarios a decimales dividiéndolos, entonces, acá están los fraccionarios los sumé me dio esto y como vemos es 0.984375 por lo que 0.9 se aproxima al número 1 entero. De la respuesta de la estudiante se puede interpretar algo que es de suma importancia y que como lo manifiesta Fandiño (2009) es necesario tener una noción de lo que es el infinito pues muchos objetos matemáticos tienen que ver con esta noción, en este caso, el que la estudiante realice de manera correcta esta aproximación haciendo uso de la notación decimal permite entrever que identificó que el proceso se puede realizar de forma indefinida.

4.5 Niveles de matematización alcanzados para la T5 de cada caso

4.5.1 Niveles de matematización alcanzados para la T5E1.

Para T5, el estudiante E1 se puede clasificar en la T5C2: El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, aunque reconocen que la sucesión disminuye, aunque no logran determinar la aproximación. Debido a que, determina el patrón correctamente y halla las tres áreas siguientes que solicitaba la pregunta, esto sugiere que el estudiante puede describir de manera correcta la sucesión, sin embargo, presenta dificultad con la noción de infinito (Fandiño, 2009), ya que cuando se le pregunta cuántas áreas se deben sumar para aproximarse al límite, el estudiante limita el proceso e interpreta que el límite es un número variable que depende de cuántas áreas se determinen siguiendo el patrón, esto, puede ser causado por el hecho de que el conjunto de los números naturales no es acotado superiormente y este razonamiento lo traslada hacia los números racionales por tanto, el estudiante traslada propiedades y características de los números naturales hacia el conjunto de los números racionales (Fandiño, 2009) que le impiden realizar una aproximación acertada de la sucesión. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T5E1:

4.5.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T5E1

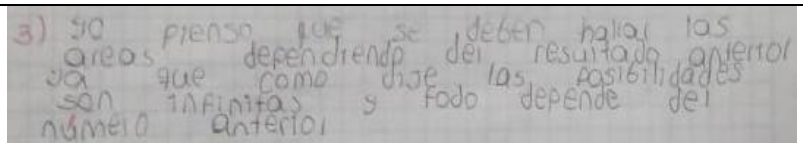


Gráfico 20. Evidencia T5P3E1

Descripción T5P3E1

El estudiante manifiesta en lenguaje natural que, dependiendo del resultado anterior, es decir, lo expuesto por él en la segunda pregunta, se pueden hallar infinitas áreas que dependen el número anterior.
Análisis T5P3E1
Al igual que en la segunda pregunta el estudiante traslada propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009) en tanto, la idea de infinito en potencia que no está acotado superiormente hace que el estudiante piense que la sucesión no tenga un límite, por tanto, el estudiante presenta dificultad en la interpretación del infinito actual (Fandiño, 2009).
Entrevista T5P3E1
Docente Juan: Carlos ¿Me puedes explicar porque las áreas son infinitas? Carlos: bueno en este caso como ya dije en la segunda pregunta los resultados pueden ser infinitos, por lo tanto, el número de áreas debería ser dependiendo del número anterior que nos hubiera dado entonces, podemos escoger cualquier número infinito que sea de cero a 5 dependiendo del que queramos puede ser no sé el 12045, que termine en 5 pues es divisible por cinco lo cual es funcional en este caso. Como se puede vislumbrar el estudiante no reconoce que el proceso es infinito, sino que dependiendo del límite parcial que se escoja se determinan las áreas que se necesitan.

4.5.2 Niveles de matematización alcanzados para la T5E2.

Para la T5, el estudiante E2 se puede clasificar en la T5C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, aunque reconocen que la sucesión disminuye, aunque no logran determinar la aproximación. Debido a que, el estudiante establece el patrón correcto y determina las tres áreas siguientes como lo solicitaba la tarea, sin embargo, al momento de explicitar cómo realizó el proceso para determinarlas, se pudo reconocer que el estudiante no interpreta a la fracción como un cociente (Gairín, 1998) sino como dos números naturales separados por una rayita, esto, hace que el estudiante opere las fracciones como si fueran números naturales, en consecuencia, el estudiante traslada propiedades y operaciones de los números

naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009). Así mismo, se le puede clasificar en la T5C1 o nivel de matematización situacional: El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la sucesión y al trasladar propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no reconocen que los valores de la sucesión van disminuyendo acercándose al número fijo cero, así mismo, imposibilitan la infinitud del proceso. Debido a que, a pesar de que halló el patrón y correcto pero, de una manera incorrecta y a pesar de que determinó las áreas siguientes de manera correcta, se puede entrever que al no interpretar la fracción como un cociente hace que las opere como números naturales, es decir, traslada propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009) en tanto, al fijar sus razonamientos en los denominadores despojándolos de los numeradores, interpreta que éstos números se comportan igual que los números naturales y por ello, al igual que los números naturales que no tienen una cota superior traslada esta idea a la T5, impidiéndole establecer una aproximación acertada para la sucesión. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T5E2:

4.5.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T5E2

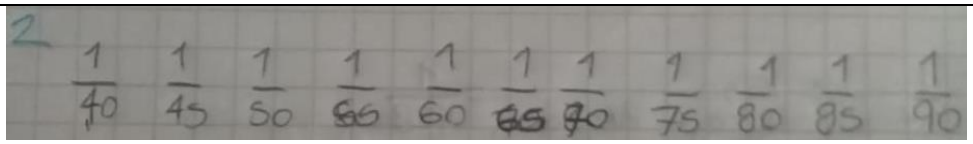


Gráfico 21. Evidencia T5P2E2

Descripción T5P2E2
Al igual que en la pregunta anterior, el estudiante de acuerdo con su patrón encontrado establece que el límite de la sucesión llega hasta $\frac{1}{90}$ haciendo uso del lenguaje aritmético.
Análisis T5P2E2
En la respuesta del estudiante se reconoce que discretiza el proceso pues no da cuenta de que el proceso se pueda realizar más allá de $\frac{1}{90}$ lo que sugiere que el obstáculo epistemológico del

infinito se encuentra presente en el razonamiento del estudiante (Fandiño, 2009) así mismo, la idea de infinito que se puede interpretar en la respuesta del estudiante es coherente con el infinito potencial como el que se encuentra implícitamente en el conjunto de los números naturales que carece de cota superior y por ello, no converge a ningún número fijo, esto, sugiere que el estudiante traslada esta interpretación del infinito al conjunto de los racionales positivos que tienen de manera implícita el infinito actual, por ello, podría decirse que el estudiante traslada propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales (Fandiño, 2009).
Entrevista T5P2E2
Docente Juan: ¿cómo resolviste la segunda pregunta? Christopher: En el segundo, pues hice todo esto para llegar a $\frac{1}{90}$ y son catorce áreas mira, bueno trece conté mal. Docente Juan: pero ¿por qué $\frac{1}{90}$? Christopher: Puse $\frac{1}{90}$ porque es suficiente, yo sabía que podía hacerlo más veces, pero, me parecía excesivo. De la respuesta del estudiante se puede interpretar que posee una noción de la idea de infinito, pero, del infinito en potencia, sin embargo, para el caso de la noción de densidad es necesario tener una idea del infinito actual en la cual un subconjunto propio de ella converge hacia un entero fijo.

4.5.3 Niveles de matematización alcanzados para la T5E3.

Para la T5, la estudiante E3 se puede clasificar en la T5C3 o nivel de matematización general: El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, así mismo, reconocer que la sucesión disminuye y que va acercándose a cero, sin embargo, no utilizan procesos formales de límite ni notación formal desde las matemáticas. Debido a que, determina el patrón correcto y así mismo las áreas siguientes solicitadas por las preguntas lo que indica que la estudiante puede describir de manera correcta la sucesión (Mora, 2012). Así mismo, a través de una transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal, la estudiante identifica que los valores decimales se van acercando a cero y establece de manera correcta que el límite de la sucesión tiene a cero, sin embargo, se presenta dificultad al respecto de la noción de infinito (Fandiño, 2009) porque a pesar de que determina diversas áreas para la sucesión, en su

respuesta discretiza imposibilita la infinitud del proceso. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T5E3:

4.5.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T5E3

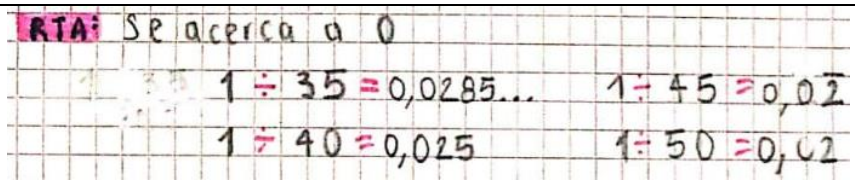


Gráfico 22. Evidencia T5P2E3

Descripción T5P2E3
La estudiante expresa en lenguaje natural que la sucesión se acerca a cero y luego realiza una explicación haciendo uso de lenguaje aritmético sobre cómo determinó esta aproximación, para ello, realiza una conversión de notación fracción a notación decimal de la siguiente manera $\frac{1}{35} = 1 \div 35 = 0.0285714$, $\frac{1}{40} = 1 \div 40 = 0.025$, $\frac{1}{45} = 1 \div 45 = 0.0\underline{2}$ y $\frac{1}{50} = 1 \div 50 = 0.02$.
Análisis T5P2E3
En la respuesta de la estudiante se reconoce que comprende la fracción como cociente y que la notación decimal como lo expresa (Panizza y Alvarez, 1990) y (Broitman et al, 2005) contribuye a la comprensión de la densidad de los números racionales positivos con mayor facilidad que la notación fracción y en este caso particular contribuye a los procesos de aproximación.
Entrevista T5P2E3
Docente Juan: ¿Por qué la secuencia se acerca a cero? Lina: n el segundo punto al número que se acerca es a 0 ya que dividiendo las áreas entre sí se van acercando a ese número. Como se puede evidenciar en la respuesta de la estudiante, se confirma lo expresado en el análisis al respecto de que comprende la fracción como cociente y que la notación decimal le permitió reconocer la aproximación a 0 de la secuencia.

4.5.4 Niveles de matematización alcanzados para la T5E4.

Para la T5, la estudiante E4 se puede clasificar en la T5C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, aunque reconocen que la sucesión disminuye,

aunque no logran determinar la aproximación. Debido a que, la estudiante determina el patrón correcto y halla las tres áreas sucesivas de la sucesión lo que para Mora (2012) significa que la estudiante puede describir de manera correcta la sucesión, sin embargo, se puedo reconocer en la estudiante una dificultad con respecto a la noción de infinito (Fandiño, 2009) porque imposibilita la infinitud del proceso y esto, hace que no pueda identificar que los valores de la sucesión tienden a cero. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T5E4:

4.5.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T5E4

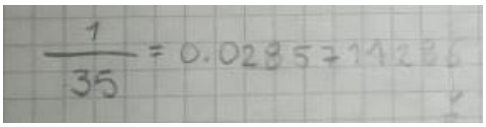


Gráfico 23. Evidencia T5P2E4

Descripción T5P2E4
La estudiante expresa en lenguaje aritmético que la sucesión se aproxima a $\frac{1}{35} = 0.02857186$.
Análisis T5P2E4
En la respuesta de la estudiante se reconoce que realiza una trasformación de tratamiento (Duval, 2009) de la notación fracción a la notación decimal, esto, permite inferir que la estudiante comprende a la fracción como cociente (Gairín, 1998). No obstante, el hecho de que la estudiante estableciera $\frac{1}{35}$ como el número al cual se aproxima la sucesión sin considerar los anteriores términos ni la infinitud del proceso puede ser consecuencia de una dificultad con la idea de infinito en matemáticas (Fandiño, 2009).
Entrevista T5P2E4
Docente Juan: ¿Por qué la secuencia se acerca a $\frac{1}{35}$? Tania: yo disminuí otra área que el resultado, si seguimos la secuencia de cinco de cinco es $\frac{1}{35}$, si lo pasamos a decimales que es dividiendo 1 en 35 es 0.02857186. Hay muchas formas de acercar un número decimal a otro dependiendo de si se compara con otro o con el mismo o si se cambia a otro número en este caso para asemejarlo en forma descendente yo solo cambie el 6 por un cinco. Como se puede inferir, la estudiante presenta una dificultad con la idea de infinito en tanto imposibilita la infinitud del proceso estableciendo un área más $\frac{1}{35}$ y expresa que acercarse a $\frac{1}{35} = 0.02857186$ es disminuyendo el último término decimal en 1 es decir 0.02857185.

4.6 Niveles de matematización alcanzados para la T6 de cada caso

4.6.1 Niveles de matematización alcanzados para la T6E1.

Para la T6, el estudiante E1 se puede clasificar en la T6C2 o nivel referencial de matematización: El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y así mismo reconocen que hay infinitos números entre los límites del intervalo, aunque no lo representen de manera formal desde las matemáticas. Debido a que, el estudiante determina algunos números dentro del intervalo y que hay infinitos números en éste, sin embargo, se le puede clasificar en la T6C1: El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y al trasladar propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales positivos manipulan éstos como números naturales. Porque el estudiante manifiesta que existen dos clases de números decimales, los básicos y los otros, para él los básicos son 1.1,1.2,1.3, … y los otros toman los números básicos y les agregan centésimas, milésimas y así sucesivamente, sin embargo, esto sugiere que el estudiante está aún razonando desde las propiedades del conjunto de los números naturales y trasladar éstas, al conjunto de los racionales (Centeno, 1996) así mismo, se comprueba que lo expresado por Broitman et al (2003) puede ser una estrategia que facilita la comprensión de la noción de densidad y es que la notación decimal facilita el proceso. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T6E1:

4.6.1.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T6E1

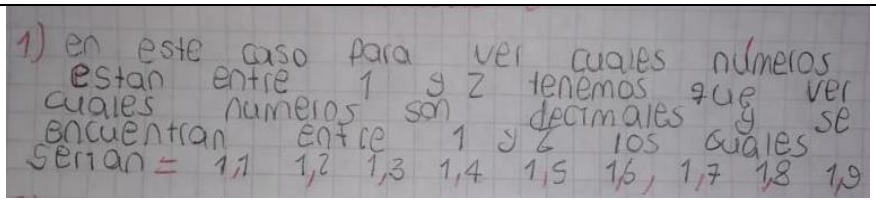


Gráfico 24. Evidencia T6P1E1

Descripción T6P1E1
El estudiante expresa en lenguaje natural que para saber cuántos números hay entre el número 1 y el número 2 se tiene que tener en cuenta cuales números son decimales y que estos números serían: {1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9}.
Análisis T6P1E1
En la respuesta del estudiante se reconoce que extrapola las propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales en tanto establece que los números racionales que se encuentran entre 1 y 2 son el {1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9} lo cual sugiere que los trata como si fueran números naturales Centeno (1990), Fandiño (2009). Así mismo, en esta en la respuesta a esta pregunta se identifica que el estudiante presenta dificultad con la idea de infinito en tanto no deja posibilidad a poderse hallar dentro del mismo intervalo racional infinitos números racionales, por ello, presenta dificultad con la noción de densidad de los números racionales positivos.
Entrevista T6P1E1
Docente Juan: ¿cómo resolviste la pregunta 1? Carlos: bueno aquí como ya les acabé de explicar la única manera de sacar números entre el uno y otro que sean naturales sería los números decimales, por lo tanto, aquí, por ejemplo, sería 1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9 para que lleguen hasta el 2, estos serían los números básicos entonces estos serían los números. Como se puede evidenciar en la respuesta de la entrevista, el estudiante traslada propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos como se expresó en el análisis.

4.6.2 Niveles de matematización alcanzados para la T6E2.

Para la T6, el estudiante E2 se puede clasificar en la T6C1 o nivel de matematización situacional: El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y al trasladar propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales positivos

manipulan éstos como números naturales. Debido a que, trasladó propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales (Centeno, 1996) en tanto operó los números racionales en notación decimal y los ordenó como si fueran números naturales bajo la idea de siguiente, a su vez, se reconoce una dificultad con el cero (Centeno, 1996) ya que para él 1.1 es diferente de 1.10 de esta manera, establece que en el intervalo racional (1, 2) existen solo 12 números, esto, también permite reconocer que existe una dificultad con respecto a la noción de infinito (Fandiño, 2009) debido a que el estudiante no reconoce la infinitud de números que existen en dicho intervalo. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T6E2:

4.6.2.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T6E2

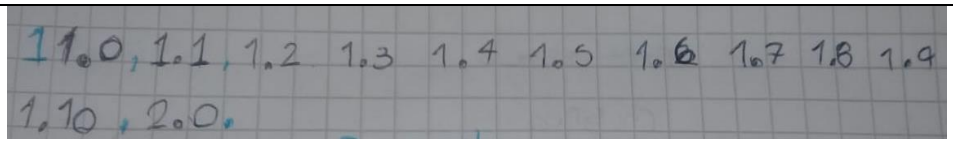


Gráfico 25. Evidencia T6P1E2

Descripción T6P1E2
El estudiante expresa en lenguaje aritmético los números racionales que se encuentran en el intervalo racional 1 y 2, que son: 1.0,1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,1.10,2.0.
Análisis T6P1E2
En la respuesta del estudiante se reconoce el obstáculo epistemológico del cero (Centeno, 1990) debido a que no tiene en cuenta que 1.1=1.10 esto es, el estudiante debido a su interpretación del cero desde el conjunto de los números naturales omite o cambia el número en este caso, para el estudiante $1.0 \neq 1$, a su vez, se reconoce que extrapola las propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales positivos (Fandiño, 2009) por ello, considera que entre 1 y 2 se encuentra el 1.1 hasta el 1.10 en este caso tratando el intervalo racional como si fueran números naturales.
Entrevista T6P1E2
Docente Juan: ¿cómo resolviste la primera pregunta Christopher? Christopher: yo puse decimas bueno decimales está de 1.0 a 2.0 que hay 12. Docente Juan: pero ¿Por qué 12 décimas? Christopher: profe la verdad es que no sé cómo contar en decimales. Como se puede vislumbrar en la respuesta del estudiante se reconoce que al no tener una idea de la noción de densidad lo

que hizo fue recurrir a sus conocimientos previos basados en el conteo y posición de las cifras de los números naturales y trasladarlo al conjunto de los racionales positivos.

4.6.3 Niveles de matematización alcanzados para la T6E3.

Para la T6, la estudiante E3 se puede clasificar en la T6C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y así mismo reconocen que hay infinitos números entre los límites del intervalo, aunque no lo representen de manera formal desde las matemáticas. Debido a que, la estudiante establece algunos números dentro del intervalo racional (1.2) y reconoce la infinitud de su cantidad, sin embargo, no hay control sobre cómo determinar esos número, a su vez, para esta tarea específica existe una categoría emergente en la que la estudiante reconoce características superficiales de la noción de densidad pero no tiene representaciones semióticas a su disposición para poder expresar lo que está razonando, no obstante, se reconoce que como lo expresa Broitman et al (2003) a la estudiante se le facilita reconocer la noción de densidad a través de la notación decimal lo cual, se refleja en el hecho de que los números que presenta en su mayoría agregan ceros intermedios entre los números entre la coma y el número decimal que esté al lado derecho. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T6E3:

4.6.3.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T6E3

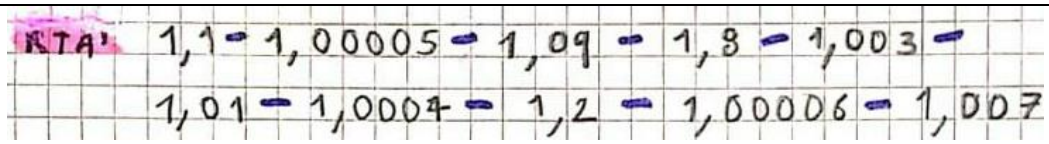


Gráfico 26. Evidencia T6P1E3

Descripción T6P1E3
La estudiante expresa en lenguaje aritmético algunos números que se encuentran en el intervalo 1 y 2.
Análisis T6P1E3
En la respuesta de la estudiante se reconoce como lo expresan Panizza y Alvarez (1990) y Guichón et al (2005) que la densidad de los números racionales positivos se les facilita haciendo uso de la notación decimal, sin embargo, se reconoce que los números ejemplificados por la estudiantes son espontáneos o sin ningún control pues como la manifiesta Fandiño (2009) los estudiantes ante objetos matemáticos como el infinito y los que sobre él se basan tienden a recurrir a su intuición y no a una respuesta elaborada y pensada con más detenimiento.
Entrevista T6P1E3
Docente Juan: Lina, tu presentas algunos números, pero, no indicas de dónde salieron estos números ¿Puedes explicarlo? Lina: algunos números racionales entre el uno y dos son 1,1; 1,005; 1,09; 1,8 etc. puede haber más ya que son infinitos. En la respuesta de la estudiante, se reconoce que comprende la infinitud de los números racionales que puede haber en el intervalo 1 y 2, esto, sugiere que la estudiante no presenta dificultad con la noción de infinito (Fandiño, 2009).

4.6.4 Niveles de matematización alcanzados para la T6E4.

Para la T6, la estudiante E4 se puede clasificar en la T6C2 o nivel de matematización referencial: El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional (1,2) sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y así mismo reconocen que hay infinitos números entre los límites del intervalo, aunque no lo representen de manera formal desde las matemáticas. Debido a que, la estudiante determina algunos números, pero, basados en el orden de lo naturales, esto es, 1.1, 1.2, 1.3… A su vez, reconoce que hay infinitos números dentro del intervalo racional (1,2) sin embargo, para representar la noción de densidad traza una recta numérica y dentro del intervalo (1,2) traza rayitas muy juntas con las cuales considera explica la densidad, en ese sentido, no hay control sobre cómo determinar esos número, a su vez, para esta tarea específica existe una categoría emergente en la que la estudiante

reconoce características superficiales de la noción de densidad pero no tiene representaciones semióticas a su disposición para poder expresar lo que está razonando, no obstante, se reconoce que como lo expresa Broitman et al (2003) a la estudiante se le facilita reconocer la noción de densidad a través de la notación decimal lo cual, se refleja en el hecho de que los números que presenta en su mayoría agregan ceros intermedios entre los números entre la coma y el número decimal que esté al lado derecho. Para complementar lo expresado en este análisis, a continuación, se presenta un ejemplo del análisis pregunta a pregunta para la T6E4:

4.6.4.1 Extracto del análisis pregunta a pregunta T6E4

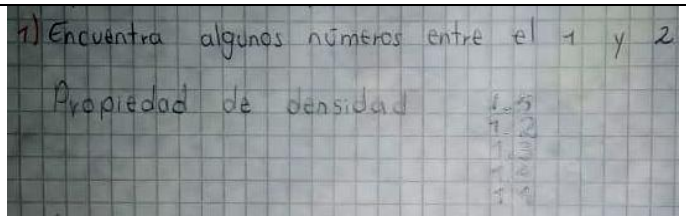


Gráfico 27. Evidencia T6P1E4

Descripción T6P1E4
La estudiante expresa en lenguaje natural que se trata de la propiedad de densidad de los números racionales y seguido presenta algunos números, que son, 1.5, 1.2,1.3,1.4,1.9.
Análisis T6P1E4
En la respuesta que borró la estudiante se reconoce que discretiza el infinito en tanto iba a ejemplificar la secuencia referenciada a los números naturales, es decir, 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 lo cual posibilita pensar que la estudiante traslada propiedades de orden entre número naturales a los números racionales positivos Fandiño (2009). A su vez, se puede interpretar por la respuesta en lenguaje verbal que, la estudiante se apoyó en alguna investigación realizada por ella o tuvo ayuda de alguna persona.
Entrevista T6P1E4
Descripción Juan: ¿Cómo resolviste la pregunta 1? Tania: , vemos que es la propiedad de densidad en este caso yo lo hice con números decimales puse algunos ejemplos como los son 1,1 etc. Al parecer la estudiante investigó sobre la propiedad de densidad y por ello, asumió que son infinitos, pero, no especifica su interpretación del infinito.

4.7 Resumen de los niveles de matematización alcanzados por cada caso al respecto de las fenómenos y propósitos de las tareas

4.7.1 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E1. Para sincopar la información, a continuación, se presenta un gráfico que resume los niveles de matematización alcanzados por E1 al respecto de las tareas:

Tabla 1
Frecuencias de los niveles de matematización alcanzados por el estudiante E1

E1	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Situacional	0	0	0	0	0	1
Referencial	0	0	1	1	1	1
General	1	1	1	0	0	0
Formal	0	0	0	0	0	0

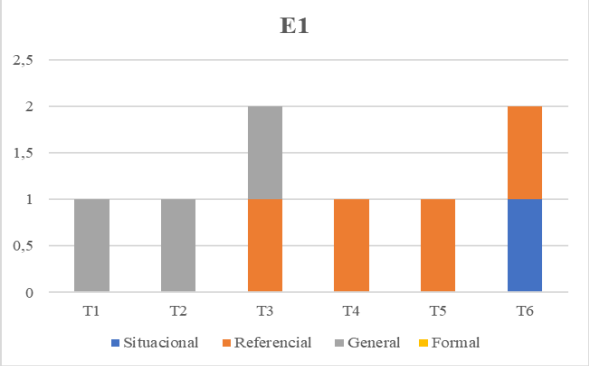


Gráfico 28. Niveles de matematización alcanzados por E1 de acuerdo con las categorías de análisis.

Como se puede observar para las T1 y T2, E1 alcanza un nivel general de matematización, es decir, el estudiante logra ordenar fracciones homogéneas y unitarias respectivamente de manera correcta, sin embargo, no hace uso de notación formal ni de procesos algorítmicos formales desde las matemáticas para generar tales ordenamientos, por ello, frente al fenómeno 1, se puede inferir que el estudiante reconoce cómo ordenar números racionales pero no desde procedimientos ni notación formales de las matemáticas, es decir, se encuentra en un nivel intermedio entre el nivel de matematización general y el formal. Por otro lado, para la T3, E1 se encuentra en dos niveles de matematización que son el referencial y general, porque establece los límites del intervalo de manera correcta, reconoce la infinitud de los números dentro de éste, pero, el número que encuentra en el intervalo y el cual toma como referencia para hallar otros más está sujeto a un razonamiento desde el conjunto de los números naturales, en ese sentido, el hecho de que se encuentre en dos

categorías para T3 puede ser un indicio de que está el proceso de transitar de un nivel a otro o que está apropiando hasta ahora ciertas propiedades, características y operaciones al respecto de la noción de intervalo, infinito y noción de densidad. Para T4 y T5, E1 se encuentra en un nivel de matematización referencial porque, aunque halló los patrones de cada una de las sucesiones y las áreas sucesivas, no logró realizar una aproximación de las mismas, ni reconoció su infinitud por ello, frente al fenómeno 3 el estudiante requiere de más tratamientos desde el nivel general que le hagan romper con algunas propiedades que tiende generalizar del conjunto de los naturales al de los racionales positivos, es decir, el estudiante debe reconocer que el infinito no solo es potencial sino también actual y por último para la T6, E1 se encuentra en dos niveles de matematización que son el situacional y el referencial porque determina algunos números dentro del intervalo racional (1,2) y reconoce su infinitud, sin embargo, el hecho de que diferenciara entre números básicos y los otros números, permite pensar que el estudiante aún razona para ciertas características de la noción de densidad desde el conjunto de los números naturales y por ello, frente al fenómeno 4 debe trabajar actividades que impliquen un control sobre cómo hallar distintos números dentro de un intervalo.

4.7.2 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E2. Para sincopar la información, a continuación, se presenta un gráfico que resume los niveles de matematización alcanzados por E2 al respecto de las tareas:

Tabla 2
Frecuencias de los niveles de matematización alcanzados por el estudiante E2

E2	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Situacional	0	1	1	1	1	1
Referencial	1	1	0	0	1	0
General	0	1	0	0	0	0
Formal	0	0	0	0	0	0

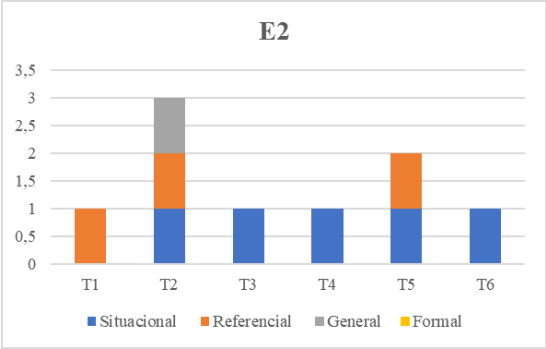


Gráfico 29. Niveles de matematización alcanzados por E2 de acuerdo con las categorías de análisis.

Con respecto a la T1, el estudiante se encuentra en un nivel de matematización referencial porque establece un orden haciendo uso de lenguaje natural y lenguaje aritmético (notación fracción) pero, el orden es incorrecto porque ordena las fracciones como números naturales. Para la T2, el estudiante se encuentra en un nivel de matematización situacional, referencial y general porque, aunque realiza una transformación de tratamiento de la notación fracción a la notación decimal que le permite hallar el orden correcto, no obstante, en las T2P4 y T2P5 se reconoce que responde desde su intuición fundamentado en la tarea y no objetivándose de ella (Duval, 1999) por esta razón, frente al fenómeno 1, este estudiante requiere reforzar tareas donde deba realizar un cambio de unidad con fracciones unitarias y priorizar la relación entre magnitudes desde registros aritméticos. Para la T3, E2 se encuentra en un nivel de matematización situacional debido a que no logró establecer los límites del intervalo y trasladó operaciones de los números naturales al conjunto de los racionales, impidiéndole determinar más números aparte de $\frac{1}{4}$ así mismo, le impidió reconocer la infinitud de los números dentro del intervalo, por ello, frente al fenómeno 2 el estudiante requiere realizar tareas que le contribuyan a comprender el valor números de las partes y de orden entre fracciones unitarias y homogéneas respectivamente. Para las T4 y T5, E2 halla

los patrones respectivos de las sucesiones y las áreas sucesivas, sin embargo, no logra realizar las aproximaciones de manera correcta ni reconoce la infinitud del proceso sumado al hecho de operar como números naturales los números racionales, por ello, para el fenómeno 3, el estudiante requiere más tareas que lo lleven a reflexionar sobre la diferencia en los procesos algorítmicos con números racionales en contraste con los procesos algorítmicos con números naturales, así mismo, trabajar aproximaciones analizando las sucesiones presentadas y la posibilidad de infinitud de su proceso. Para la T6, E2 se encuentra en un nivel situacional, porque comprende que los números deben estar dentro de unos límites establecidos pero, al momento de establecer los números dentro de esos límites se basa en el orden entre números naturales y por ello discretiza el proceso, en ese sentido, frente al fenómeno 4, el estudiante requiere situaciones en las que se le guíe a determinar números dentro de intervalos cada vez más pequeños en magnitud y reflexionar al respecto del orden entre números racionales en sus distintas notaciones.

4.7.3 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E3. Para sincopar la información, a continuación, se presenta un gráfico que resume los niveles de matematización alcanzados por E3 al respecto de las tareas:

Tabla 3
Frecuencias de los niveles de matematización alcanzados por el estudiante E3

E3	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Situacional	0	0	0	0	0	0
Referencial	0	0	0	1	0	1
General	1	1	1	1	1	0
Formal	1	1	1	0	0	0

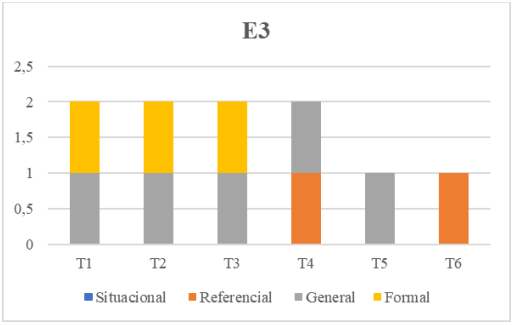


Gráfico 30. Niveles de matematización alcanzados por E3 de acuerdo con las categorías de análisis.

Para las T1 y T2, la E3 se encuentra en un nivel de matematización general y formal, porque ordena de manera correcta fracciones unitarias y también homogéneas respectivamente, sin

embargo, la estudiante presenta algunas dificultades al momento de usar la notación formal desde las matemáticas por ello, para el fenómeno 1 la estudiante requiere reflexionar sobre procedimientos formales desde las matemáticas ordenar fracciones y cómo éstos pueden sincopar el proceso. Para la T3, E3 se encuentra en nivel de matematización general y formal, porque determina los límites del intervalo, halla algunos números racionales dentro del intervalo, pero, presenta dificultades al momento de utilizar la notación formal desde las matemáticas, así mismo hace uso de notación simbólica, lo cual sugiere que la estudiante comprende que hay una infinitud de números dentro del intervalo al establecer una variable, por ello, para el fenómeno 2 la estudiante requiere de tareas que le permitan comprender cómo tener un control sobre la determinación de números dentro de un intervalo. Para la T4, E3 se encuentra en nivel de matematización referencial y general, debido a que determina el patrón correcto de la sucesión, realiza la suma de números racionales en notación fracción de manera correcta e implícitamente realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal para realizar una aproximación correcta de la serie, sin embargo, debido a su nivel de escolaridad no tiene dentro de sus herramientas cognitivas representaciones semióticas y conceptos formales que le permitan avanzar al siguiente nivel por presentarse una dificultad con la noción de infinito (Fandiño, 2009) porque discretiza la infinitud del proceso. Para la T5, E3 se encuentra en un nivel de matematización general, porque determina el patrón correcto de la sucesión, realiza la suma de números racionales en notación fracción de manera correcta e implícitamente realiza una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal para realizar una aproximación correcta de la serie, sin embargo, debido a su nivel de escolaridad no tiene dentro de sus herramientas cognitivas representaciones semióticas y conceptos formales que le permitan avanzar al siguiente nivel por ello, para el fenómeno 3, la estudiante requiere tareas

que la hagan reflexionar sobre la característica actual del infinito y sobre cómo representar procesos infinitos. Para la T6, E3 se encuentra en un nivel de matematización referencial porque, aunque reconoce ciertas características como la infinitud del proceso, no presenta ninguna forma de control sobre cómo hallar esos números racionales, en ese sentido, la estudiante frente al fenómeno 4 se puede inferir que lo interpreta desde lo intuitivo pero, le faltan herramientas, por ello, la estudiante requiere tareas que la hagan reflexionar sobre la característica actual del infinito y sobre cómo representar procesos infinitos.

4.7.4 Resumen de los niveles de matematización alcanzados para E4. Para sincopar la información, a continuación, se presenta un gráfico que resume los niveles de matematización alcanzados por E4 al respecto de las tareas:

Tabla 4
Frecuencias de los niveles de matematización alcanzados por el estudiante E4

E4	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Situacional	0	0	0	0	0	0
Referencial	0	0	0	1	1	1
General	1	1	1	1	0	0
Formal	0	0	0	0	0	0

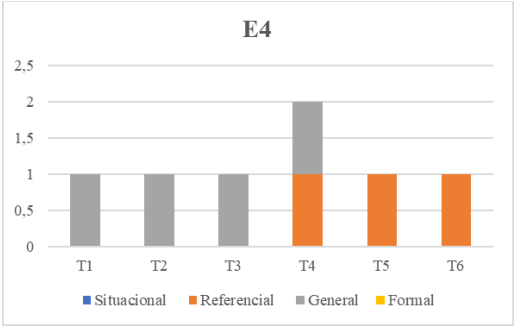


Gráfico 31. Niveles de matematización alcanzados por E4 de acuerdo con las categorías de análisis.

Para la T1 y T2, la E4 se encuentra en nivel de matematización general porque logra ordenar de manera correcta las fracciones unitarias y homogéneas respectivamente haciendo uso de una transformación de tratamiento (Duval, 1999) de la notación fracción a la notación decimal, en consecuencia, para el fenómeno 1, la estudiante requiere tareas que le permitan hacer uso de representaciones y operaciones formales desde las matemáticas. Para la T3, E4 se encuentra en nivel de matematización general porque establece los límites del intervalo y halla algunos números

dentro de mismo e incluso hace uso de el algoritmo ordenar fracciones con el cual garantiza que los números hallados se encuentren dentro de éste, así mismo, utiliza el algoritmo para convertir un número decimal a fracción, sin embargo, no hace uso de notación formal por ello, para el fenómeno 2, requiere tareas que la hagan reflexionar sobre la característica actual del infinito y sobre cómo representar procesos infinitos. Para la T4, E4 se encuentra en un nivel de matematización referencial y general porque determina el patrón correcto y halla las áreas siguientes junto con una aproximación correcta de la serie realizando algoritmos correctos, sin embargo, presenta dificultad con la idea de infinito (Fandiño, 2009) al discretizar la infinitud del proceso. Para la T5, E4 se encuentra en un nivel de matematización referencial porque, aunque halla el patrón correcto y las áreas siguientes no realiza una aproximación correcta de la sucesión y persiste su dificultad con la idea de infinito (Fandiño, 2009) por ello, para el fenómeno 3, la estudiante requiere tareas que la hagan reflexionar sobre la característica actual del infinito y sobre cómo representar procesos infinitos. Para T6, E3 se encuentra en un nivel de matematización referencial porque, aunque reconoce ciertas características como la infinitud del proceso, no presenta ninguna forma de control sobre cómo hallar esos números racionales, en ese sentido, para el fenómeno 4, la estudiante requiere tareas que la hagan reflexionar sobre la característica actual del infinito y sobre cómo representar procesos infinitos.

5. Conclusiones y reflexiones

De acuerdo con lo realizado, a continuación, se darán a conocer las conclusiones y reflexiones que surgen de esta investigación teniendo en cuenta los objetivos propuesto. En ese sentido, al respecto del instrumento (cuestionario abierto) se puede concluir que, permitió documentar los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al respecto del orden y la noción de densidad de los racionales positivos sobre los cuales hablaremos más adelante en este capítulo. Sin embargo, debido a que dicho cuestionario fue construido para realizar un análisis didáctico a priori (Bressan et al, 2016), es decir, fue una primera etapa del mismo, no está exento de modificaciones y reflexiones que surgen después de su aplicación y análisis. De esta manera, se pudo reconocer al respecto del instrumento que:

- Hizo falta puntos de comparación entre las tareas, sobre todo en lo que respecta a las representaciones, ya que en un primer momento en su construcción de manera ingenua y con el propósito de ser objetivo frente a los registros semióticos y, representaciones que los estudiantes podían gestionar al resolver las tareas, las preguntas, en su mayoría no representan aritméticamente las cantidades ni se exploran otro tipo de representaciones aritméticas que según la literatura facilitan o complejizan las propiedades de orden y la noción de densidad de los números racionales. Sumado a lo anterior, y como se expuso en la parte final de la construcción del instrumento, aparte de vincular la oración “Explica con matemáticas tu respuesta” también se debieron presentar las cantidades en cada una de las tareas de forma aritmética como elementos que exigieran del estudiante gestionar una u otra representaciones o realizar operaciones sobre éstas (Duval, 1999).

- En lo que respecta a las tareas de orden (T1, T2), aunque fueron acertadas tanto en orden como en forma, como se mencionó párrafos atrás, hizo falta proponer tareas de orden, pero, con notación aritmética y específicamente en notación decimal, con ello, se lograría reconocer en contraste si los estudiantes logran ordenar números racionales positivos de manera correcta. Así mismo, la quita pregunta, de ambas tareas en lo que se pudo vislumbrar en el análisis no proporcionaba mucha información, por ello, para una cualificación del instrumento se hace necesario eliminarla.
- Así mismo, el cuestionario en la T3 tuvo un error, en tanto se omitió una parte de las indicaciones didácticas que se habían detectado tanto en el marco teórico como en el acercamiento al análisis fenomenológico, esto es, no se debían proporcionar números racionales periódicos debido a que dificultan la comprensión de ciertas características de la noción de densidad y en la T3 en lenguaje natural se proporciona la fracción $\frac{1}{3}$. Así mismo, para esta tarea y para la T6, hizo falta considerar lo expuesto por Broitman et al (2003) al respecto de la notación utilizada para presentar los límites de un intervalo racional, es decir, realizar combinaciones en las que el límite inferior se presente en notación decimal y el superior en notación fracción y, viceversa con el propósito de que los estudiantes gestionen sus preferencias sobre notación que más se les facilita y eso a su vez, sería un referente en lo educativo. Por otro lado, en cuando al orden de las preguntas batería de esta tarea, se cambió la primera pregunta y la segunda en orden opuesto ya que primero el cuestionado debe hallar una posible cantidad y luego si compararlas para determinar cuál es mayor menor o igual, por ello, en una cualificación del cuestionario se hace necesario vincular este orden de las preguntas batería.

- Al respecto de la T4 y T5, se puede concluir que hizo falta preguntas que permitieran contrastar las respuestas de los estudiantes en lo que respecta a los acercamientos por derecha y por izquierda, a su vez, hizo falta proponer tareas de sucesiones que no tuvieran un apoyo en registros semióticos geométricos, debido a que en el análisis pregunta a pregunta se tuvo dudas al respecto de la P3 de la tareas T4 y T5, para esclarecer, se tuvo dudas en saber si los estudiantes reconocían que al sumar los términos de una sucesión éstos eran menores en magnitud cada vez o que a medida que hallaban más términos de una sucesión, dichos términos era cada vez menores en magnitud.
- Por último, en la T6, se pudo identificar del análisis pregunta a pregunta que hizo falta proponer más tareas que permitieran contrastarse entre ellas las gestiones de los estudiantes y así mismo, para garantizar que los estudiantes trasladan propiedades de orden de los naturales a los racionales hizo falta dejar más amplios los límites de algunos intervalos racionales al igual que hacer uso de la notación decimal y combinaciones para representar los límites de dichos intervalos.

Conforme con lo anterior, el propósito de la construcción del cuestionario abierto, se cumplió y fue coherente de acuerdo con el marco teórico establecido ya que, permitió reconocer que los estudiantes sin la necesidad de saber sobre series y sucesiones, logran gestionar estrategias y representaciones que las pueden describir parcialmente, es decir, son elementos que se pueden vincular en grados inferiores sin la necesidad de comprender el límite pero, que a su vez, propician el reconocimiento de características importantes como la idea de infinitesimal, el movimiento y la aproximación para la construcción de objetos matemáticos más complejos como los del cálculo.

Además, permitió reconocer que cuando los estudiantes comprenden el orden entre números racionales, se tienen muchos más recursos para la construcción de la noción de densidad, un caso específico, se puedo identificar en el análisis pregunta a pregunta de la T3, donde los estudiantes que habían demostrado una comprensión del orden entre números racionales sin saber qué es un intervalo, lo establecieron de manera correcta y que dentro del mismo se podían hallar otros números racionales. Así mismo, se pudo reconocer que cuando los estudiantes realizan transformaciones de tratamiento y transformaciones de conversión (Duval, 1999) entre los registros semióticos de los números racionales son mejor estructuradas y más acertadas las respuestas, además, se pudo identificar que cuando la pregunta específicamente cuestionaba sobre la noción de densidad, la mayoría de los estudiantes hacían uso de la notación decimal de los números racionales positivos, esto, aunque no es un indicador para dejar de enseñar dicha noción a través de la notación fracción, entre tanto, es una posibilidad ya que, los estudiantes seleccionados no conocían previamente la noción de densidad, no obstante, como se pudo identificar en el análisis pregunta a pregunta de la T4 y T5, quienes lograron realizar una aproximación correcta utilizaron la notación decimal y en la T6 en su mayoría se identifica que utilizaron la notación decimal para representar la noción de densidad, por esta razón, como lo sugiere Broitman et al (2003) la notación decimal de los números racionales puede ser un recurso facilitador de la misma, pero, bajo la condición de la comprensión de la fracción como cociente (Gairín, 1998).

Sumado a lo anterior, con respecto a los objetivos siguientes, se puede inferir que fueron coherentes y se cumplieron ya que, el acercamiento al análisis fenomenológico y el establecimiento de categorías junto con el análisis a priori realizado, permitieron documentar los niveles de matematización que alcanzan los estudiantes del grado octavo del Santa Lucia IED al

abordar tareas de orden entre fracciones orientadas a construir la noción de densidad de los racionales positivos.

Específicamente, el acercamiento al análisis fenomenológico (Puig,1997) permitió identificar algunos fenómenos en los que se tocaban algunas características que permiten comprender la noción de densidad de los números racionales positivos, en particular, fenómenos como hallar un número entre otros dos estableciendo un intervalo, las sucesiones y series como acercamientos por derecha o por izquierda son fenómenos que contribuyeron a reconocer la necesidad de tener una idea de la noción de infinitesimal para la comprensión de la noción de densidad, así mismo, permitieron reconocer que si no se tiene una comprensión del orden entre números racionales se hace más difícil establecer los límites de un intervalo y la posibilidad de hallar números racionales dentro del mismo. Por su parte, los fenómenos de acercamiento por derecha e izquierda, permitieron reconoce que cuando una tarea implica un acercamiento por derecha se facilita más que cuando se debe realizar un acercamiento por izquierda y que son elementos que deben tenerse en cuenta si se quiere generar unas bases para el cálculo sobre todo en lo que respecta al concepto de límite y las funciones racionales.

Así mismo, el análisis fenomenológico, permitió reconocer que esta investigación no podía trabajar la propiedad de densidad de los números racionales propiamente ya que, si se hubiera trabajado la propiedad de densidad correspondería vincular el conjunto de los números reales y este no es el propósito de esta investigación, porque desde una concepción personal, en lo que respecta a la educación, la noción de densidad, que es la que se trabaja en esta investigación es un primer paso hacia la construcción de objetos y conceptos matemáticos más complejos como los del cálculo los cuales, según Neira (2012) carecen de sentido y significado para los estudiantes, en ese sentido, esta investigación quería trabajar la noción de densidad debido a que permite

comprender algunas características que en las áreas del cálculo se vuelven fundamentales tales como el infinitesimal, los intervalos, las aproximaciones y el movimiento en los grados inferiores al onceavo.

A su vez, el análisis fenomenológico propuesto por (Puig, 1997) permitió comprender algunos aspectos de la propuesta de Freudenthal que no son explícitas en la misma, como por ejemplo que una situación realista no necesariamente implica un contexto ligado a la realidad inmediata de los estudiantes y que, el propósito de la educación no es construir objetos matemáticos sino estructurados objetos mentales cercanos a la matemática formal, porque con ello, la matemática en general se sigue viendo como una entidad en construcción y no como una entidad acabada.

Al respecto del tercer objetivo, se tiene que las categorías establecidas para realizar el análisis a priori en su mayoría permitieron la categorización de los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al abordar tareas de orden entre números racionales positivos orientadas a construir la noción de densidad, sin embargo, surgieron categorías emergentes que se ven reflejadas en los casos que se encuentran en dos o más niveles de matematización. En ese sentido, E1 en la T3 se encuentra en un nivel referencial y general, es decir surge la siguiente categoría de análisis: El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, encontrando varios números racionales dentro del intervalo, pero, movilizado por su intuición, es decir, encuentra un número racional positivo atendiendo a las propiedades de orden entre números naturales y a partir de éste determina algunos más, sin embargo, establece los límites del intervalo.

Otro caso que se presentó y que generó una categoría emergente es el que se identificó en el análisis del la E4T4, ya que la estudiante realiza la mayoría de procesos correctos sin embargo, presenta dificultad con la noción de infinito de la tarea aunque realiza una aproximación correcta,

por ello, la categoría quedaría de la siguiente manera: El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, sin embargo, realiza una aproximación correcta.

Sumado al caso anterior, se encuentra el caso vislumbrado en el análisis de la E3T1, E3T2 y E3T3 donde la estudiante ordena los números de manera correcta y establece el intervalo y números dentro de éste pero, al utilizar la notación formal desde las matemáticas presenta algunos errores, no los desarrolla o no los utiliza de forma regular, en ese sentido la primera categoría emergente quedaría: El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden entre fracciones unitarias de manera correcta, pero, no utiliza de manera regular la notación formal. La segunda categoría emergente quedaría: El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas de manera incorrecta, aunque establece el orden de las cantidades racionales de manera correcta y la tercera categoría quedaría: El o la estudiante responden la (T3) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representación figural o todas a la vez junto con signos y operaciones formales de las matemáticas como el uso de signos de agrupación, notaciones simbólicas, algoritmo para hallar promedios de manera incorrecta etc… aunque establecen más de un número dentro del intervalo.

Después de haber realizado el análisis pregunta a pregunta de cada una de las tareas por cada uno de los casos y de haber sincopado el mismo, para tratar de dar una posible respuesta a la pregunta resumiré los datos en la siguiente tabla con su respectivo gráfico, con el propósito de

vislumbrar a nivel general los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo, a saber:

Tabla 5
Frecuencias de los niveles de matematización alcanzados por los cuatro casos en conjunto

T1	T2	T3	T4	T5	T6
0	1	1	1	1	2
1	1	1	3	3	3
3	4	3	2	1	0
1	1	1	0	0	0

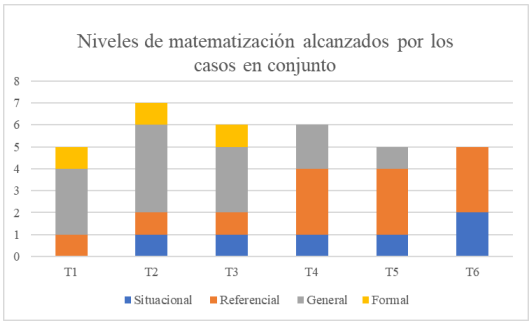


Gráfico 32. Niveles de matematización alcanzados por los cuatro casos de acuerdo con las categorías de análisis

Como se puede observar en la gráfico estadístico, las áreas con mayores frecuencias son las correspondientes a los niveles de matematización referencial y general, es decir, los estudiantes como lo expresa Bressan et al (2016) respecto a las tareas de orden entre números racionales positivos orientadas a construir la noción de densidad, generan modelos gráficos, notacionales, descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema, es decir para las tarea que implican ordenar números racionales positivos, lo casos en su mayoría realizan una matematización vertical ya que, dentro de la matemática misma, conlleva a estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (Bressan, 2004, p. 6) lo anterior, se puede complementar en los análisis realizados presentados en los anexos, en ese sentido, cada uno de los casos gestionó estrategias y procedimientos del nivel referencial para esquematizar la tarea, sin embargo, tales procedimientos en el caso de E2 siguen apegados a la situación y en los casos de E1, E3 y E4 funcionaron como punto de partida para la gestión de procedimientos matemáticos personales basados en los formales de las matemáticas y que les

permitieron desapegarse de la situación de la tarea. Así mismo, en el gráfico se vislumbra que otras áreas que tienen mayores frecuencias son las del nivel de matematización general y como se expresó anteriormente, en la mayoría de los estudiantes se identifica a través de su desarrollo constante de las actividades que estrategias, representaciones y procedimientos gestionados en una tarea anterior, se utilizaban en la siguiente como lo manifiesta (Bressan et al, 2016) para este nivel, así mismo, se reconoce que la mayoría de estudiantes esquematizaron las tareas, es decir, los alumnos reconocen que tales esquematizaciones son utilizables en conjuntos de problemas homólogos a los estudiados, dando lugar a los (modelos para) la resolución de los mismos (Bressan, 2016, pág. 7-8). No obstante, los procesos matemáticos y la notación gestionada por los estudiantes no son formales sino apropiaciones u objetos mentales propios de los estudiantes, por ello y debido a algunos conceptos utilizados como referentes en la construcción de las tareas, los estudiantes no alcanzaron niveles formales sobre todo en lo que respecta a las tareas que implicaban aspectos de la noción de densidad.

De acuerdo con lo anterior, se vislumbra que en las tareas al respecto de la noción de densidad que implicaban hallar un número racional entre otros dos, infinitud del proceso y aproximación, los niveles de matematización de los casos se tornan de un nivel referencial, es decir, al respecto de la noción de densidad, los casos presentan dificultades en el control sobre cómo hallar números racionales en un intervalo racional, la posibilidad de infinitud de dicho proceso y generalización del orden entre números naturales al conjunto de los números racionales, por ello, se puede inferir que lo expresado por Fandiño (2009) y (Centeno, 1996) al respecto de que las propiedades de orden y el conteo con números naturales se convierten en un impedimento para la comprensión de la noción de densidad es comprobable, lo cual, es problemático porque como lo manifiesta Gairín

(1998) dicha noción es uno de los elementos diferenciadores entre el conjunto de los naturales con respecto al de los racionales.

Por otro lado, se vislumbra que un área muy pequeña pero frecuente se encuentra en un nivel de matematización situacional, esto, es debido al caso E2, quien, a pesar de gestionar representaciones y procedimientos algorítmicos, éstos, en su mayoría estaban permeados por un razonamientos desde el conjunto de los números naturales y en otros casos se basaba en la situación específica de la tarea, es decir, el estudiante usa estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma (Bressan et al, 2016), en ese sentido, el estudiante ante todas las tareas se quedó en la matematización horizontal, solo en la T2 logró despegarse de la situación de la tarea, aunque en la misma, específicamente en las preguntas P4 y P5 termina recurriendo a su intuición ligada la situación.

A su vez, se vislumbran algunas áreas de menor magnitud que corresponden al nivel formal, esto es debido a que la E3, en lo que respecta a las tareas de orden entre números racionales positivos hace uso de lenguaje formal de las matemáticas, sin embargo, no es frecuente, debido a que en ocasiones no sabía cómo utilizarlo o no lo desarrollaba como en el caso particular de la T3, aunque gestionó lenguaje simbólico estableciendo una variable, en las respuestas no la desarrolló. Por esta razón en términos globales en su mayoría los estudiantes se encuentran en un nivel de matematización referencial y general, lo que puede significar que los casos están en ese proceso de transición de un nivel a otro en tanto, recurren a procedimientos y notaciones informales, pero no ligadas netamente al contexto de la tarea.

De acuerdo con lo expuesto, a continuación, se presenta el instrumento cualificado atendiendo a las indicaciones detectadas en el proceso de análisis y con el cual se espera se desarrollen otros trabajos que contribuyan a seguir cualificando el cuestionario abierto con el propósito de ser una

herramienta educativa para diagnosticar los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes del grado octavo al respecto del orden y la noción de densidad de los números racionales positivos.

En esta cualificación, se propuso una esquematización distinta de las tareas, para esclarecer, se propusieron las mismas seis tareas pero, con varias situaciones con las cuales realizar un contraste mejor elaborado en próximas aplicaciones, así mismo, se codificaron las tareas de igual a como se realizó en esta investigación, es decir, T1, T2, T3, T4, T5 y T6, a su vez, las situaciones dependiendo de la cantidad que se hayan agregado para cada tarea se codificaron como S1, S2, S3, S4 etc. y por último, a cada situación se le agregaron las preguntas batería codificadas con P1, P2, P3 así sucesivamente.

Además de lo anterior, se agregaron las categorías emergentes que surgieron en el análisis, sin embargo, cabe aclarar que este instrumento al ser cualitativo siempre estará sujeto a modificaciones y por ello, serán las aplicaciones sucesivas del mismo las que detecten nuevas categorías, situaciones, tareas o preguntas emergentes que lo cualifiquen.

De acuerdo con lo anterior, a continuación, se presenta el instrumento cualificado de acuerdo con el análisis realizado, a saber:

Tarea 1 (T1)	
Fenómeno 1	Relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que.
Situación 1 (S1)	
Javier, Karen y Daniela tienen una chocolatina y la quieren compartir entre los tres, sin embargo, a algunos no les gusta la chocolatina por tal razón cortan la chocolatina de la siguiente forma: Javier corta $\frac{1}{8}$ de la chocolatina y se la come, Daniela corta $\frac{1}{2}$ de la chocolatina y se la come, y, Karen corta $\frac{1}{4}$ de chocolatina y se la come. Teniendo en cuenta la situación anterior responde:	
S1P1.	¿Cuál de los tres amigos comió la mayor cantidad de chocolatina? Explica tu respuesta usando matemáticas.
S1P2.	¿Cuál de los tres amigos comió la menor cantidad de chocolatina? Explica tu respuesta usando matemáticas.

S1P3.	¿Cómo quedarían organizados los amigos de menor a mayor de acuerdo a la cantidad de chocolatina que se comieron? Explica tu respuesta usando matemáticas.
S1P4.	Si otro amigo se come $\frac{1}{16}$ de la chocolatina ¿Come mayor cantidad o menor cantidad que Daniela? Explica tu respuesta usando matemáticas.

Situación 2 (S2)

A José en la clase de educación física le pidieron que tomara el tiempo que duraba caminando del colegio a la casa durante 4 días, para ello, realizó la siguiente tabla:

Día	Tiempo (Horas)
Lunes	0.25
Martes	0.27
Miércoles	0.3
Jueves	0.22

De acuerdo con la tabla anterior responde:

S2P1.	¿Qué día José se demoró más caminando del colegio a la casa?
S2P2.	¿Qué día José se demoró menos caminando del colegio a la casa?
S2P3.	¿Cómo quedarían organizados los días de menor a mayor tiempo en el recorrido del colegio a la casa?
S2P4.	Si el día viernes que no puso en la tabla José se demoró en el recorrido 0,210 ¿Caminó mayor o menor tiempo?

Situación 3 (S3)

Colombia tiene una gran riqueza hídrica; algunas de las más representativas son:

Nombre de la laguna	Área (km^2)
Laguna Mapiripana	$\frac{550}{100}$
Laguna Cumbal	2.11
Laguna de Fúquene	$\frac{680}{100}$
Laguna la paya	2.25

De acuerdo con la información anterior responde:

S3P1.	¿Cuál es la laguna con mayor área?
S3P2.	¿Cuál es la laguna con menor área?
S3P3.	¿Cómo quedarían organizadas las áreas de las lagunas de mayor a menor?
S3P4.	Si hubiera una laguna que tiene un área de 2.10 km^2 ¿tendría mayor o menor área que las del cuadro.

Categorías de matematización (T1)

Situacional T1C1	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural determinando un orden entre fracciones unitarias ligado a su intuición, es decir,

	generalizando las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos sin ningún tratamiento matemático.
Referencial T1C2	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, estableciendo un orden entre fracciones unitarias de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos.
General T1C3	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos determinando un orden entre fracciones unitarias correcto para las cantidades, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =.
Formal T1C4	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden entre fracciones unitarias de manera correcta.
Categoría emergente T1C3-T1C4	El o la estudiante responden la (T1) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden entre fracciones unitarias de manera correcta, pero, no utiliza de manera regular la notación formal

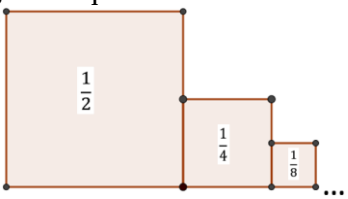
Tarea 2	
Fenómeno 1	Relaciones de orden en el conjunto de los números racionales como lo son mayor que, menor que e igual que.
Situación 4 (S4)	
Cuatro amigas Johana, Camila, Maricela y Gloria cada una compró una pizza personal rebanada en nueve porciones iguales en tamaño, las cuales, se comieron de la siguiente manera: Camila se comió cuatro $\frac{4}{9}$ de la pizza, Gloria se comió $\frac{6}{9}$ de la pizza, Johana se comió $\frac{4}{9}$ de la pizza y Maricela se comió $\frac{2}{9}$ de la pizza. De acuerdo con lo anterior responde:	
S4P1.	¿Quién comió más Pizza Camila o Gloria? Explica con matemáticas tú respuesta.
S4P2.	¿Quién comió menos pizza Camila o Johana? Explica con matemáticas tú respuesta.
S4P3.	¿Cómo quedarían organizadas las amigas de mayor a menor de acuerdo a la cantidad de pizza que se comieron? Explica con matemáticas tú respuesta.
S4P4.	Si una quinta amiga se comiera ocho novenos de pizza ¿Comería mayor o menor cantidad de pizza que Johana, Camila, Maricela y Gloria? Explica con matemáticas tú respuesta.
Situación realista 5 (S5)	
En la tabla se presenta el peso de tres insectos que Julian encontró: Insecto | Peso (gramos) Saltamontes | 2.4 Escarabajo | 2.7 Oruga | 2.9 De acuerdo con la información anterior, responde:	
S5P1	¿Cuál de los insectos tiene mayor peso?

S5P2	¿Cuál de los insectos tiene menor peso?
S5P3	¿Ordena de mayor a menor los pesos de los insectos?
S5P4	Si Julian encontrara otro insecto que pesara 0.3 ¿Este insecto pesaría más o menos que los demás?
Situación 6 (S6)	
Johana tiene 4 listones con las siguientes características: - Un listón rojo con $\frac{6}{5}$ de metro de longitud - Un listón negro con 1.6 metros de longitud - Un listón rosado con 1.4 metros de longitud - Un listón violeta con $\frac{7}{5}$ metros de longitud De acuerdo con los anterior responde	
S6P1.	¿Cuál de los listones es el más largo en longitud $\frac{6}{5}$ o 1.6?
S6P2.	¿Cuál de los listones es el de menor longitud el rosado o violeta?
S6P3.	¿Cómo quedarían ordenados los listones de mayor longitud a menor longitud?
S6P4.	Si Johana compra otro listón con 1.8 metros de longitud ¿este listón será mayor, menor o igual a los que ya tenía?
Categorías de matematización (T2)	
Situacional T2C1	El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural determinando un orden ligado a su intuición, es decir, generalizando las propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos sin ningún tratamiento matemático.
Referencial T2C2	El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de representaciones figurales, lenguaje aritmético, lenguaje natural o combinaciones de éstos para apoyar sus razonamientos, estableciendo un orden de acuerdo con sus conocimientos previos, es decir, trasladando propiedades de orden de los números naturales al conjunto de los racionales positivos.
General T2C3	El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstos estableciendo un orden correcto entre fracciones homogéneas, pero, sin utilizar símbolos formales de las matemáticas para representar su solución como los son <, > o =.
Formal T2C4	El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas y establece el orden de las cantidades racionales de manera correcta.
Categoría emergente T2C3-T2C4	El o la estudiante responden la (T2) haciendo uso de lenguaje formal de las matemáticas de manera incorrecta, aunque establece el orden de las cantidades racionales de manera correcta.

Tarea 3 (T3)	
Fenómeno 2	Reconocimiento de la noción de intervalo y cuando un número está entre otros dos, en otras palabras, dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
Situación 7 (S7)	

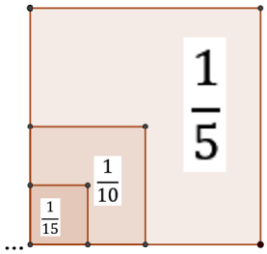
Tres amigos compran una gaseosa de un litro de la cual se toman lo siguiente: el amigo 1 se toma $\frac{1}{2}$ de la gaseosa y el amigo 3 se tomó $\frac{1}{5}$ de la gaseosa. Si el amigo 2 quiere tomar más de un quinto de gaseosa y menos de un tercio de gaseosa, responde:	
S7P1.	¿Qué porción de la gaseosa es menor, la que se toma el amigo 1, la que se toma el amigo 2 o la que se puede tomar el amigo 3? Explica con matemáticas tú respuesta.
S7P2.	¿Qué porción o porciones de gaseosa se puede tomar el amigo 2? Explica con matemáticas cómo hiciste para hallar la porción de gaseosa o las porciones que se puede tomar el amigo 2.
S7P3.	Si un amigo 4 quiere tomar más de un quinto de la gaseosa, pero menos que un cuarto de la gaseosa ¿Qué porción podrá tomar? Explica con matemáticas cómo hiciste para hallar la porción de gaseosa que se puede tomar el amigo 4.
S7P4.	¿Hay una o varias cantidades de gaseosa que se puede tomar el amigo 4? Explica con matemáticas tú respuesta.
Situación 8 (S8)	
Un día de la semana se fue el agua en un apartamento en el que viven 3 personas, en dicho apartamento solo hay un tanque y las tres personas necesitan el agua, la cual, se reparten de la siguiente manera: la persona 1 gasta 3.4 del agua del tanque, la persona 3 gasta 3.1 del agua del tanque y la persona 2 no sabe cuánto del agua puede gastar. De acuerdo con la información anterior responde:	
S8P1.	¿Qué porción o porciones de agua puede gastar el amigo 2?
S8P2.	¿Qué porción de agua del tanque es mayor la que gastó el amigo 1, la que gastó el amigo 2 o la que gastó el amigo 3?
S8P3.	Si una persona 4 quiere gastar menos agua que el amigo 2 pero más que el amigo 3 ¿Qué parte o partes del agua del tanque podría gastar?
S8P4.	¿Hay una o varias posibles partes del agua del tanque que podría gastar la persona 4?
Situación 9 (S9)	
Tres amigos compraron una cuerda para un proyecto de física, la cual repartieron de la siguiente manera: al amigo 1 le correspondió $\frac{5}{10}$ de la cuerda, al amigo 3 le correspondió 0.3 y el amigo dos no ha tomado nada de cuerda porque no sabe cuánto puede coger. De acuerdo con la información anterior responde:	
S9P1.	¿Qué porción o porciones de la cuerda puede coger el amigo 2?
S9P1.	¿Qué porción de la cuerda es la mayor la que cogió el amigo 1, la del amigo 2 o la del amigo 3?
S9P1.	Si un amigo 4 quiere coger menos cuerda que el amigo 1 pero mas cuerda que el amigo dos ¿Qué porción o porciones de la cuerda podría coger?
S9P1.	¿Hay una o varias posibles porciones que puede coger el amigo cuatro de la cuerda?
Categorías de matematización (T3)	
Situacional T3C1	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas de manera intuitiva, esto es, que al trasladar propiedades de orden entre números naturales al conjunto de los racionales positivos no logra establecer los límites del intervalo ni tampoco un número racional positivo dentro de éste.
Referencial T3C2	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, encontrando un número racional dentro del intervalo, pero, movilizado por su intuición, es decir,

	encuentra un número racional positivo atendiendo a las propiedades de orden entre números naturales, sin embargo, establece los límites del intervalo.
General T3C3	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, estableciendo correctamente los límites del intervalo y más de un número dentro de éste, pero, no utiliza ningún algoritmo matemático formal ni tampoco notación formal, es decir, no tiene un control sobre cómo determinar tales números.
Formal T3C4	El o la estudiante responden la (T3) haciendo uso de lenguaje natural, lenguaje aritmético, representación figural o todas a la vez junto con signos y operaciones formales de las matemáticas como el uso de signos de agrupación, notaciones simbólicas, algoritmo para hallar promedios etc…
Categoría emergente T3C2-T3C3	El o la estudiante responden la (T3) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, encontrando varios números racionales dentro del intervalo, pero, movilizado por su intuición, es decir, encuentra un número racional positivo atendiendo a las propiedades de orden entre números naturales y a partir de éste determina algunos más, sin embargo, establece los límites del intervalo.

Tarea 4 (T4)	
Fenómeno 3	Acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado.
Situación 10 (S10)	
A continuación, encontrarás una gráfica que muestra sucesivas áreas de cuadrados.  De acuerdo a la gráfica responde:	
S10P1.	Si continúa el proceso ¿Cuáles serán las tres áreas de los cuadrados que siguen? Explica con matemáticas tú respuesta.
S10P2.	Si sumas las seis áreas de los cuadrados que llevas hasta el momento ¿A qué números se van aproximando? Explica con matemáticas tú respuesta.
S10P3.	¿Cuántas áreas de cuadrados siguiendo la secuencia deberías sumar para que su resultado llegue a ser el número que encontraste en la pregunta anterior? Explica con matemáticas tú respuesta.
Situación 11 (S11)	
Observa la siguiente suma y responde $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots$	
S11P1.	¿Cuáles serán los tres sumandos siguientes de la suma?
S11P2.	Si se siguen agregando términos a la suma ¿A qué número crees que se van acercando?
S11P3.	¿Cuántos términos crees hay que agregar a la suma para que llegue a ser el número que al que se acerca de la pregunta anterior?

Categorías de matematización (T4)	
Situacional T4C1	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la serie y al trasladar propiedades y operaciones propias de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no realizan la operación de suma entre números racionales de manera correcta, imposibilitan la infinitud del proceso y no logran realizar una aproximación.
Referencial T4C2	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso y así mismo no logran hacer la aproximación.
General T4C3	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sugiriendo que el proceso es infinito y realizando una aproximación correcta, pero, sin utilizar procedimientos formales de las matemáticas como el límite ni tampoco notación formal desde las matemáticas.
Formal T4C4	Teniendo en cuenta los temas que se abordan y el grado escolar de los casos, no se espera que lleguen al nivel formal porque se escapa de sus conocimientos previos.
Categoría emergente T4C2-T4C3	El o la estudiante responden la (T4) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, sin embargo, realiza una aproximación correcta.

Tarea 5	
Fenómeno 3	Acercamiento por derecha o por izquierda a un número racional dado.
Propósito de la tarea	Esta situación tiene como propósito identificar si los estudiantes al realizar una sucesión que se aproxima a cero por la izquierda logran identificar que los valores que van hallando son cada vez menores y que este proceso se puede realizar indefinidamente.
Teoría que la sustenta	Según Cabarcas y Soler (2017) y Fandiño-Pinilla (2009) uno de los detonantes en cuanto a dificultades detectadas en la enseñanza-aprendizaje de la noción de densidad es la noción de infinito, debido a que como lo expresa Leston (2009) desde los primeros años de escolaridad muchos conceptos se apoyan en dicha noción, pero, en el proceso no se hace claridad o reflexión al respecto del carácter dual de la noción de infinito en matemáticas. De esta manera la familiaridad de los estudiantes con el infinito en potencia de los números naturales y enteros les hace comprender que todo lo que es infinito aumenta, sin embargo, lo anterior no siempre es cierto ya que la otra característica del infinito, esto es, el infinito actual

	permite comprender que puede haber números más pequeños y que éstos se pueden ir acercando a un número fijo.
Situación 12 (S12)	
En la parte de abajo se visualizan áreas de cuadrados, el área del cuadrado grande es un quinto, el área del siguiente es un décimo y el área del tercero es un quinceavo. De acuerdo a esta información responde: 	
S12P1.	Si continúa el proceso ¿Cuáles serán las tres áreas de los cuadrados que siguen? Explica con matemáticas tú respuesta.
S12P2.	Si siguen disminuyendo las áreas ¿a qué número se van acercando? Explica con matemáticas tú respuesta.
S12P3.	¿Cuántas áreas de cuadrados siguiendo la secuencia deberías hallar para que tu resultado llegue a ser el número que encontraste en la pregunta anterior? Explica con matemáticas tú respuesta.
Situación 13 (S13)	
Observa la siguiente sucesión y responde $\ldots, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}$	
S13P1.	Si se continúan hallando términos de la sucesión ¿Cuáles serán los tres términos que continúan?
S13P2.	Si el proceso se hallar términos de la sucesión continua ¿A qué número se van acercando los términos?
S13P3.	¿Cuántos términos se deben hallar para que los términos de la sucesión sean el número que hallaste en la pregunta anterior?
Categorías de matematización (T5)	
Situacional T5C1	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, pero, no determinan el patrón correcto de la sucesión y al trasladar propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos no reconocen que los valores de la sucesión van disminuyendo acercándose al número fijo cero, así mismo, imposibilitan la infinitud del proceso.
Referencial T5C2	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el patrón correcto de la sucesión, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, aunque reconocen que la sucesión disminuye, aunque no logran determinar la aproximación.
General T5C3	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Determinan el

	patrón correcto de la sucesión, así mismo, reconocer que la sucesión disminuye y que va acercándose a cero, sin embargo, no utilizan procesos formales de límite ni notación formal desde las matemáticas.
Formal T5C4	Teniendo en cuenta los temas que se abordan y el grado escolar de los casos, no se espera que lleguen al nivel formal porque se escapa de sus conocimientos previos.
Categoría emergente T5C2-T5C3	El o la estudiante responden la (T5) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas, determinando el patrón correcto de la serie y realizan de manera correcta la operación de suma entre racionales positivos, sin embargo, al trasladar características y propiedades de los números naturales al conjunto de los racionales positivos limitan la infinitud del proceso, sin embargo, realiza una aproximación correcta.

Tarea 6 (T6)	
Fenómeno 4	Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica. (Aclaración: en este fenómeno no se hará uso de la recta numérica sino de la posibilidad de encontrar entre dos racionales otro)
Situación 14	
En la clase de matemáticas a los estudiantes les piden que encuentren números entre los siguientes números, para ello responde:	
S14P1.	Encuentra algunos números entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{2}$.
S14P2.	¿Cuántos números crees que hay entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{2}$?
Situación 15	
En la clase de matemáticas a los estudiantes les piden que encuentren números entre los siguientes números, para ello responde:	
S15P1.	Encuentra algunos números entre 0.3 y 0.6
S15P2.	¿Cuántos números crees que hay entre 0.3 y 0.6?
Situación 16	
En la clase de matemáticas a los estudiantes les piden que encuentren números entre los siguientes números, para ello responde:	
T6P1.	Encuentra algunos números entre los números 1 y 2, explica con matemáticas cómo hiciste para encontrar esos números.
T6P2.	¿Cuántos números hay entre 1 y 2? Trata de explicar con matemáticas tu respuesta.
Categorías de matematización (T6)	
Situacional T6C1	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional, sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y al trasladar propiedades del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales positivos manipulan éstos como números naturales.
Referencial T6C2	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional, sin embargo, no hay un control sobre cómo determinar tales números y así mismo reconocen que hay infinitos números entre

	los límites del intervalo, aunque no lo representen de manera formal desde las matemáticas.
General T6C3	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan algunos números en el intervalo racional a través de alguna estrategia preestablecida pero no desde algoritmos matemáticos formales, aunque sí reconocen la infinitud de la cantidad de números que hay en el intervalo.
Formal T6C4	El o la estudiante responden la (T6) utilizando lenguaje natural, lenguaje aritmético, representaciones figurales o combinaciones de éstas. Hallan números en el intervalo, reconocen la infinitud del proceso y utilizan algoritmos matemáticos formales como el de hallar promedios, sucesiones etc.

Referencias Bibliográficas

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito* (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Bressan, A.; Zolkower, B. Gallego, F. (2004). *Los principios de la educación matemática realista*. En Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática. Compilador: Alagia, H. y otros. Editorial Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.

Bressan, A. (2005). Los principios de la educación de la Matemática Realista. Recuperado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Bressan, A. Gallego, M. Perez, S. (2016). Educación Matemática Realista Bases Teóricas. Recuperado 15 de marzo del 2020 de https://documen.site/download/educacion-matematica-realista-bases-teoricas_pdf#:~:text=La%20Educaci%C3%B3n%20Matem%C3%A1tica%20Realista&text=Esta%20corriente%20did%C3%A1ctica%20nace%20en,moderna%E2%80%9D%20o%20%E2%80%9Cconjuntista%E2%80%9D.

Bressan, A. (2021). *Representaciones y Modelos en la Educación Matemática Realista*. Recuperado 15 de marzo del 2021 de: https://new.gpdmatematica.ar/wp content/uploads/2021/02/repesentaciones_modelos.pdf

Broitman, C., Itzcovich, H. y Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Relime, 6*(1), 5-27.

Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué?, ¿Para qué?* España: Síntesis.

Corral, Y. (2010). *Diseño de cuestionarios para la recolección de datos*. Revista Ciencias de la Educación, 36, 152-168. Recuperado de http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/index.htm

Crespo, C. (2004). *El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos.* En L. Díaz (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 39-44). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa*, Vol. 1. Barcelona, España: Gedisa.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle, Peter Lang.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Gairín, J. M. (1998). Números Racionales positivos. Reflexiones sobre la instrucción. *Revista Aula, 10*, 41-64.

Gallardo, Y., Moreno, A., (1999). *Análisis de la información*. Santa Fe de Bogotá, Colombia: ICFES.

Gallego, M. Perez, S. (2013). Aportes "realistas" a la educación matemática. Desde la Patagonia, *Vol (10)* N°16.

García Muñoz, T. (2003). *El cuestionario como instrumento de investigación/evaluación*. Página personal de Tomás García Muñoz. Consultado el 20/08//2021 en http://www.buenastareas.com/ensayos/EvaluacionAprendizaje/272948.html

González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas*, 45(138), 125-135.

Guichón, M. Duarte, A. (2014). Sobre la densidad de los números racionales. *Quehacer Educativo*, XXIV (125), 48-53.

Guba, E. Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. Antología de métodos cualitativos en la investigación social. La Sonora: El Colegio Sonora.

Hans Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 1 traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México: CINVESTAV, 2001.

Kemmis, J. y R. McTaggart (1992). Cómo planifica la investigación-acción. Barcelona: Alertes.

Maza, C. (1999). Equivalencia y Orden: la enseñanza de la comparación de fracciones. *Suma*, 87-95.

Martínez Carazo, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento Y Gestión*, (20). Recuperado a partir de https://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/pensamiento/article/view/3576

Munarriz Irañeta, Begoña. *Técnicas y métodos en Investigación cualitativa*. 1ª Edición. España: A Coruña: Universidade da Coruña, Servizo de Publicacions, 1992. ISBN: 84-600-8006-4

Nardoni, M., Camara, V. y Pochulu, M. (2014). Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria. *Yupana, 14*(8), 67-82.

Neira, G. (2012). Del algebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En DIE (Ed), Énfasis: pensamiento, epistemología y lenguajes matemáticos (pp. 13-42). Colombia, Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte -todo. *Revista Ema*, 157-182.

Oviedo, L, Kanashiro, A. Benzaquen, M. Gorrochategui, M. (2011). *Los registros semióticos de representación en matemática*. Aula Universitaria, 1(13), 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Panizza, M. Álvarez, J. (1990). La propiedad de densidad, características desde su aprendizaje y conclusiones para la enseñanza. *Revista Educación Matemática, 2*, 15-21.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria. (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

TAMAYO, Mario. (1998). El proyecto de Investigación. Serie Aprender a investigar, Módulo 5, Santafé de Bogotá: ICFES.

Waldegg, Guillermina (1996). *La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número.* Educación Matemática, 08(02), pp. 5-17.

Yin, R. K. (1984/1989). *Case Study Research: Design and Methods, Applied social research Methods Series*, Newbury Park CA, Sage

Zolkower, Betina; Bressan, Ana; Gallego, Fernanda (2006). *La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores.* Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL, 6, pp. 11-30