"INTERPRETACIÓN DEL FACTOR GEOMÉTRICO DE FASE EN UNA FIBRA ÓPTICA, A PARTIR DEL TEOREMA DE GAUSS-BONNET"

POR

Luz Stefany Murcia Correa

MONOGRAFIA

PRESENTADA AL PROYECTO CURRICULAR

DE LICENCIATURA EN FSICA

COMO PARTE DE LOS REQUISITOS

PARA EL GRADO DE

LICENCIADA EN FÍSICA

DIRECTOR: ANDRÉS REYES

CODIRECTOR: CÉSAR HERREÑO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
24 DE OCTUBRE DE 2011

Agradecimientos

Primero agradecer a mis padres y hermano por su apoyo incondicional, paciencia, confianza y fortaleza al entrar en el maravilloso mundo de la física y las matemáticas. También quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al profesor Andrés Reyes por todo su apoyo, constancia, motivación y enseñanzas en el desarrollo de este trabajo y en mi formación profesional.

Además, reconocer el apoyo del profesor César Herreño, y mis queridos y estimados amigos Ronald Rodríguez, Fernanda Santana, Carlos Gamboa y Elena Echeverría. Y a todas aquellas personas que de alguna u otra manera contribuyeron al desarrollo de este trabajo, David Guzmán del laboratorio de óptica cuántica de la Universidad de los Andes, y a aquellos docentes y compañeros que ejercieron una influencia positiva a lo largo de mi carrera.

"El misterio es la cosa más bonita que podemos experimentar.

Es la fuente de todo arte y ciencia verdaderos".

Dedico esta tesis a:

A mi familia y amigos incondicionales.

Índice general

Índice de figuras v

0.1. Resumen . . . 1
0.2. Introducción . . . 2

1. CURVAS Y SUPERFICIES. **4**
1.1. Curvas. . . . 4
1.1.1. Parametrización de rectas y curvas. . . . 5
1.1.2. Longitud de arco. . . . 8
1.1.3. Reparametrización. . . . 10
1.1.4. Curvatura. . . . 11
1.1.5. Curvas en el plano y en el espacio. . . . 14
1.2. Superficies. . . . 20
1.2.1. Longitud de curva sobre superficies. . . . 24
1.2.2. Isometrías de superficies. . . . 26
1.2.3. Área de una superficie. . . . 27
1.2.4. Curvatura de una superficie. . . . 28
1.2.5. La curvatura de las curvas en una superficie. . . . 30
1.2.6. Curvaturas normal y principal. . . . 32
1.2.7. Curvatura Gaussiana. . . . 33

2. CURVATURA Y TRANSPORTE PARALELO. **37**
2.1. Teorema de Gauss-Bonnet. . . . 37
2.1.1. Gauss-Bonnet para curvas cerradas. . . . 37
2.1.2. Gauss-Bonnet para polígonos curvilíneos. . . . 38
2.1.3. Gauss-Bonnet para superficies compactas. . . . 39
2.2. Teoría del transporte paralelo . . . 43
2.2.1. Relación entre transporte paralelo y curvatura. . . . 51

3. CURVATURA Y POLARIZACIÓN. **54**
3.1. Ecuaciones de Maxwell. . . . 54
3.1.1. Ecuación de onda para **E** y **B**. . . . 55
3.2. Polarización. . . . 56
3.2.1. Polarización lineal. . . . 57

3.2.2. Polarización circular. 57
3.3. Teorema de Gauss-Bonnet y la rotación de la polarización en una fibra óptica. 59
3.4. Cálculo de ángulo de polarización. 64

4. INTERDISCIPLINARIEDAD. 68
4.1. Interdisciplinariedad en el proceso Enseñanza-Aprendizaje. 68
4.2. Aspectos generales de una práctica interdisciplinar. 70
4.2.1. Propuesta de una práctica pedagógica interdisciplinar: Geometría, Topología y Física. 71

5. PERSPECTIVAS Y CONCLUSIONES. 76
5.1. Medición de ángulo de polarización. 76
5.1.1. Detalles experimentales. 76
5.2. "De la teoría de superficies a la geometría no conmutativa: un ejemplo elemental" 82
5.3. Conclusiones. 86

A. Anexos: Ecuaciones de Gauss y Símbolos de Christoffel. 89

Bibliografía 94

Índice de figuras

1.1. Curva de γ, cuando ésta es diferenciable. 5
1.2. La ecuación de la recta l. 6
1.3. (a) La primera derivada y (b) el vector tangente. 8
1.4. Incremento infinitesimal de la longitud de arco. 8
1.5. Curvatura de una circunferencia con centro en el origen. 12
1.6. Vectores tangente $\mathbf{t}$ y normal $\mathbf{n}$ en un punto sobre una curva. . . . 14
1.7. Diagrama del signo de la curvatura κ_s. 15
1.8. Parametrización de un círculo con velocidad unitaria. 16
1.9. Vectores tangente $\mathbf{t}$, normal $\mathbf{n}$ y binormal $\mathbf{b}$ en un punto sobre una curva. 17
1.10. Vector normal, tangente y binormal en un plano. 18
1.11. Superficie parametrizada. 21
1.12. Los vectores σ_u y σ_v son tangentes a curvas sobre la superficie S y por lo tanto, son tangentes a S. 22
1.13. Las dos posibles normales unitarias a una superficie en un punto. 24
1.14. Cinta de Möbius: deslizar $\mathbf{n}_2$ alrededor de $\mathcal{C}$ una vez; cuando $\mathbf{n}_2$ regrese a su punto inicial, $\mathbf{n}_2$ coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$. 24
1.15. La PFF del plano y del cilindro son iguales porque al doblar o envolver el plano, la distancia de A a B no cambia, es decir, ambas superficies son invariantes bajo isometrías. 27
1.16. "$\|\sigma_{ui} \times \sigma_{vj}\|\Delta U \Delta V$ es igual al área de un paralelogramo que aproxima el área de un retazo en una superficie $S = \sigma(U)$". 28
1.17. La curvatura de una superficie mide que tanto se "aleja" esta de su plano tangente. 29
1.18. La curvatura de una curva sobre una superficie determinada por la curvatura normal κ_n y geodésica κ_g. 30
1.19. "Intersección" de los planos normal y tangente de una curva en una superficie. 32
1.20. Mapeo gaussiano. 35

2.1. La pseudoesfera. 39
2.2. (a) Un toro y (b) tres toros juntos. 39
2.3. Situación no permitida al triangular cualquier superficie dada. . . 40

2.4. Triangulación de la esfera unitaria. 41
2.5. Triangulación del tetraedro. 41
2.6. (a) Un vector $\vec{a}$ a lo largo de γ y (b) vector transportado paralelamente en un plano. 44
2.7. Campo vectorial Y. 44
2.8. Conjunto de vectores tangentes sobre una superficie, generados por el transporte paralelo. 47
2.9. Transporte paralelo en un cilindro. 48
2.10. Desfase angular como resultado de transportar un vector en una superficie. 48
2.11. Geodésica y derivada covariante. 49
2.12. Curvatura geodésica de una paralela en una superficie unitaria. . . 50
2.13. Un camino escogido para el transporte paralelo de un vector. . . . 51

3.1. Vector de polarización. 56
3.2. Luz linealmente polarizada. 58
3.3. Onda lumínica circular a derechas. 59
3.4. Fibra óptica en una curva plana. 60
3.5. Fibra óptica en una curva no plana. 60
3.6. Eje de la fibra óptica en una curva no plana. 61
3.7. Circuito cerrado formado por $\mathbf{T}$ en la superficie de una esfera. . . 63
3.8. Camino seguido por la luz en la fibra óptica. 65
3.9. Proyección del vector tangente a lo largo de la fibra en la superficie de una esfera. 66

4.1. Esquema del "factor geométrico de fase en una fibra óptica, a partir del TGB". 72
4.2. Transporte paralelo de un vector en un plano: (a) vista lateral y (b) vista desde arriba. 74
4.3. (a) Transporte paralelo de un vector en una curva sobre una superficie y (b) desfase angular entre los vectores. 75

5.1. Esquema del montaje experimental. 77
5.2. Montaje experimental. 78
5.3. Entrada y salida de la fibra. 78
5.4. $\Delta\theta$ en función del pitch. 79
5.5. Barras de error experimental. 81

A.1. Base local formada por σ_1, σ_2 y $\mathbf{N}$, en una superficie. 89

0.1 Resumen

El *Teorema de Gauss-Bonnet (TGB)* es el más profundo y significativo resultado en la teoría de superficies. Su versión más importante relaciona el promedio de la curvatura gaussiana sobre una superficie con una propiedad llamada *Número o característica de Euler*, el cual es netamente topológico, es decir, que no cambia bajo cualquier deformación continua de la superficie. Así, el *TGB* permite relacionar propiedades geométricas con propiedades topológicas. En el contexto físico, particularmente en óptica, el *TGB* hace su aparición a través de ejemplos que a priori no tienen relación alguna con la geometría. Es precisamente este tipo de conexiones "escondidas" entre la óptica, la geometría diferencial y la topología lo que hace de la fase geométrica un ejemplo paradigmático de interdisciplinariedad entre estas tres ramas del conocimiento. Se ilustrará, entonces, la relación existente entre el *TGB* y la rotación del plano de polarización de la luz a lo largo de una fibra óptica en espiral, como ejemplo particular de la fase geométrica, donde el vector de polarización describe un "circuito" cerrado en la superficie de la esfera unitaria, teniendo en cuenta la Teoría de Transporte Paralelo (TTP).
Por otro lado, surge como una perspectiva de este trabajo la medición del ángulo de polarización por medio de un experimento, en el cual se midió el factor geométrico de fase de una fibra óptica en forma de hélice, mediante la aplicación del TGB y la TTP de vector de polarización a lo largo de dicha fibra óptica.

0.2 Introducción

El *Teorema de Gauss-Bonnet* es uno de los teoremas más significativos en geometría diferencial de superficies. Fué publicado en 1848 por Pierre Bonnet refiriéndose a una región acotada por una curva simple no geodésica. El nombre de Friedrich Gauss fue asociado al teorema pues fue quien publicó, en 1827, un caso particular del mismo para triángulos geodésicos. Es decir, él trató de determinar las geodésicas sobre las superficies, empleando un triángulo geodésico.

En 1984, Berry ([14]) indicó que un sistema cuántico en un estado propio, descrito por un hamiltoniano dependiente de parámetros cíclicos adiabáticos, adquiere un factor de fase geométrica adicional al factor de fase dinámica. Esta fase, de carácter netamente geométrico, es conocida como fase de Berry, y se puede observar en experimentos de interferencia (e.g., efecto Aharonov-Bohm). Con esto Berry reconoce ese factor de fase geométrico derivado del transporte adiabático de un sistema en torno a un circuito cerrado, para la mecánica cuántica.

En 1986, Chiao y Wu ([7]) toman en cuenta las manifestaciones del factor de fase geométrico y lo aplican a un fotón en un estado de helicidad adiabáticamente invariante, esto es, si linealmente la luz polarizada proviene de una fibra óptica, que está enrollada N veces alrededor de un circuito cerrado formando un cilindro, entonces se formará a su vez una hélice. Si las direcciones inicial y final de la fibra son iguales, el vector momento lineal del fotón k describe un circuito cerrado donde el campo magnético se encuentra en rotación, variando lentamente su magnitud y dirección, de tal manera que aún se considera que el campo es uniforme. Además, si k es de magnitud constante, entonces el camino descrito por el fotón es un circuito cerrado en la superficie de una esfera. Ellos también indicaron que el ángulo de rotación de la luz linealmente polarizada por la fibra es una medida directa de la fase de Berry. El mismo ángulo sólido y el cambio de fase, también observado por Tomita y Chiao ([6]), y Haldane ([8]), nos muestra que la rotación observada en el plano de polarización está dada por la geometría de la fibra óptica.

Dentro de las innumerables aplicaciones de la fase de Berry se encuentran las recientes investigaciones ([22] y [10]), en las cuales se presentan indicios hacia relaciones generales entre las transiciones de fases cuánticas e invariantes topológicos, como lo son las clases de Chern. Este tipo de investigaciones servirán como

complemento para el desarrollo del trabajo.

En el presente trabajo se pretende hacer uso de lo indicado por los autores citados ([5], [7], [6], [8] y [9]), para mostrar explícitamente que el factor de fase geométrico de una fibra óptica tiene una explicación directa, mediante la aplicación del Teorema de Gauss-Bonnet (TGB).

Capítulo 1

CURVAS Y SUPERFICIES.

En este capítulo se expondrán los preliminares en teoría de curvas y superficies de la geometria diferencial, para así adquirir los elementos necesarios para comprender el Teorema de Gauss-Bonnet (2.1) y una "forma" de trasladar un vector a lo largo de una curva sobre una superficie llamada *transporte paralelo* (2.2).

1.1 Curvas.

Para el estudio de las curvas resulta conveniente pensar en una curva en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de valores de una función que manda un intervalo de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$. Dicha función se conoce como trayectoria. Por ejemplo, una trayectoria está en un plano para $n = 2$ ($\mathbb{R}^2$), y en el espacio para $n = 3$ ($\mathbb{R}^3$)[1].
Como se muestra en la figura (1.1), los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son los extremos de la trayectoria y la imagen de γ se llama *curva de* γ, siendo γ una trayectoria diferenciable. Por lo tanto, si tenemos una función γ con variable t, $\gamma(t)$ va trazando una curva en $\mathbb{R}^n$ conforme t varía para una trayectoria γ diferenciable.
Por ejemplo, una curva en $\mathbb{R}^2$ se define como un conjunto de puntos

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \tag{1.1}$$

En $\mathbb{R}^3$ podemos considerar curvas en las que el eje x es la línea recta dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

y generalmente una curva en el espacio puede ser definida por un par de ecuaciones

$$f_1(x, y, z) = c_1, \qquad f_2(x, y, z) = c_2.$$

[1]Tomado de [1], p.1-3.

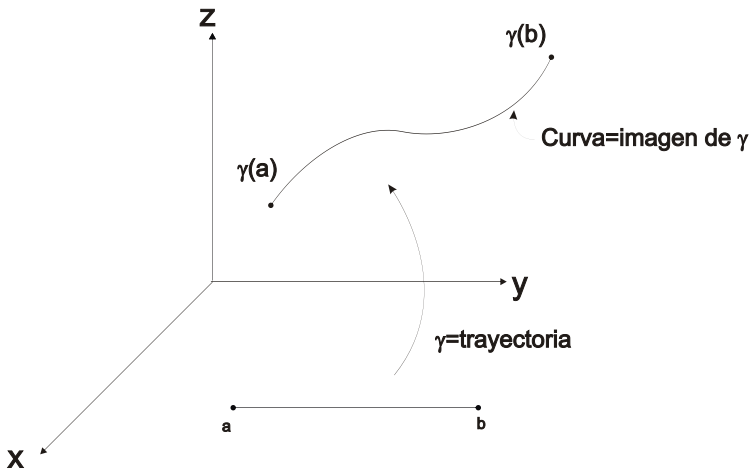


Figura 1.1. Curva de γ, cuando ésta es diferenciable.

llamadas *Superficies de Nivel*, es decir que son un conjunto de puntos (x, y, z) en el plano en donde la cantidad $f(x, y, z)$ alcanza el nivel c. Pero hay otra manera más útil de pensar en curvas; podemos ver una curva como el *camino trazado por un punto en movimiento*. Así, si $\gamma(t)$ es el vector posición del punto en un tiempo t, la curva se describe por una función γ de un parámetro escalar t con valores vectoriales.

Ejemplo 1.1.1. La recta L en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector $\mathbf{A}$ es la curva de la trayectoria:

$$\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{A} \quad \forall\, t \in R$$

1.1.1 Parametrización de rectas y curvas.

Los planos y las rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. Sin embargo, usando la interpretación geométrica de la suma vectorial y de la multiplicación por un escalar, podemos hallar la ecuación de una recta l que pase por el punto final o extremo del vector $\mathbf{a}$, con la dirección de un vector $\mathbf{v}$ (ver Figura 1.2).

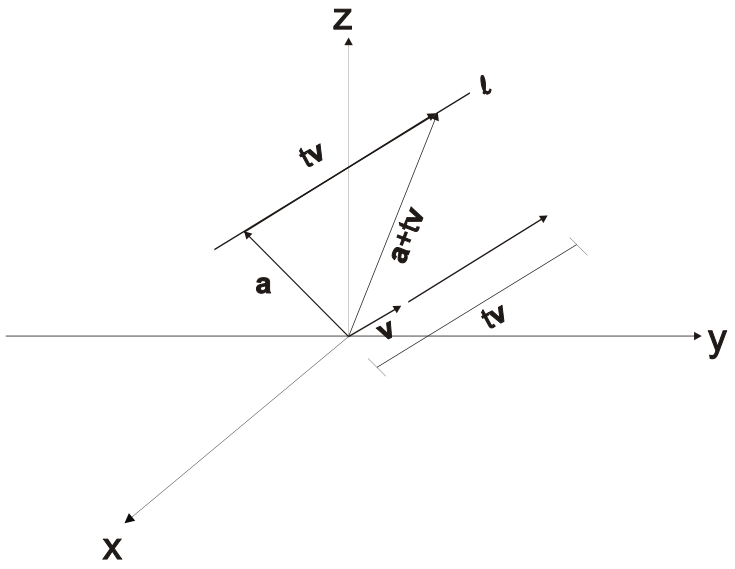


Figura 1.2. La ecuación de la recta l.

Conforme t varía, los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{v}$. Como todo punto sobre l es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados $\mathbf{a}$ y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de t, vemos que todos los puntos sobre l son de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Así, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $l(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{v}$. Entonces decimos que l está expresada de manera paramétrica, con el parámetro t. En $t = 0$, $l(t) = a$. Cuando t crece, el punto $l(t)$ se mueve alejándose de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Cuando t decrece desde $t = 0$ por los valores negativos, $l(t)$ se aleja de $\mathbf{a}$ en la dirección de $-\mathbf{v}$.

Puede haber varias parametrizaciones de una misma recta. Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está sobre la recta $l(t) = a + tv$, y así, $l_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. Incluso se pueden obtener otras parametrizaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ (o de la opuesta). Así, $l_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ es otra parametrización de $l(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$[2].

Ejemplo 1.1.2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

[2]Parafraseando de [2], p.11-14.

Representamos los puntos dados por los vectores $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} l(t) &= (1-t)(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) + t\mathbf{b} \\ &= -(1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta se puede escribir como:

$$l(t) = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{b}$$

En el caso de las curvas[3], su descripción se apoya en la concepción física de una curva como una trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio o en una superficie cualquiera. En cada instante t, la partícula se halla en una curva constituida por los puntos $(u(t), v(t), w(t))$. De esta manera, la curva está representada paramétricamente por las funciones u, v y w. Dichas funciones deben ser diferenciables, es decir, la diferenciación permite la existencia de un vector tangente en cada punto de la curva, haciendo que ésta sea suave (sin picos). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.1. *Si $\gamma(t)$ es una curva parametrizada, su primera derivada $\frac{d\gamma}{dt}$ es llamada el vector tangente de γ en el punto $\gamma(t)$.*

Notemos que el vector $\frac{\gamma(t+\delta t)-\gamma(t)}{\delta t}$ es paralelo a la "cuerda" que une los dos puntos $\gamma(t)$ y $\gamma(t+\delta t)$ de la imagen $\mathcal{C}$ de γ.

Esperamos que como δt tiende a cero, la "cuerda" se vuelve paralela a la tangente de $\mathcal{C}$ en $\gamma(t)$. Por lo tanto, la tangente debe ser paralela a $\lim_{\delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\delta t)-\gamma(t)}{\delta t} = \frac{d}{dt}\gamma = \dot{\gamma}(t)$[4], lo que nos lleva a concluir que: *Si el vector tangente de una curva parametrizada es constante, la imagen de la curva será (parte de) una línea recta.* Además, el vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ es también llamado el *vector velocidad* en $\gamma(t)$ dado por $\mathbf{v}(t) = \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ y la rapidez de una partícula está dada por $S(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$, con $\|\dot{\gamma}(t)\|$ la magnitud del vector $\dot{\gamma}(t)$[5].

Ejemplo 1.1.3. Sea la curva $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t, 0)$, su vector tangente será

$$\mathbf{v} = \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{d}{dt}\cos^2 t, \frac{d}{dt}\sin^2 t, 0\right) = (-2\cos t \sin t, 2\sin t \cos t, 0)$$

[3]Parafraseando de [1], p. 2-3.

[4]El punto en $\dot{\gamma}(t)$ indica la derivada respecto al tiempo d/dt.

[5]Tomado de [1], p.2-3.

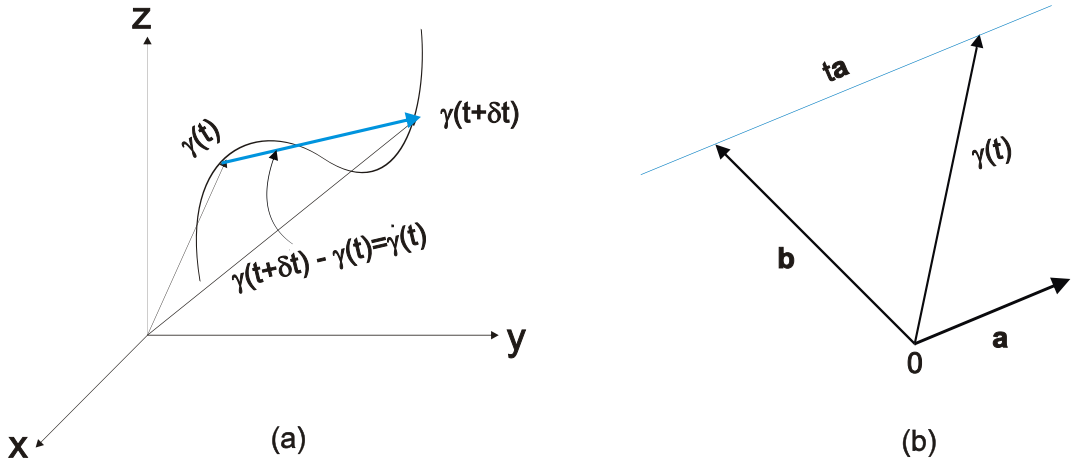


Figura 1.3. (a) La primera derivada y (b) el vector tangente.

$$\dot{\gamma}(t) = 2\sin t\cos t(-1,1,0)$$

La rapidez de un punto es la magnitud de la velocidad, entonces

$$\begin{aligned} S(t) &= \|\mathbf{v}(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\| \\ &= 2\sqrt{2\sin^2 t\cos^2 t} = \sqrt{2}|\sin 2t| \end{aligned}$$

1.1.2 Longitud de arco.

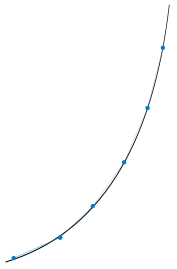


Figura 1.4. Incremento infinitesimal de la longitud de arco.

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, su longitud es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \tag{1.2}$$

Si $\mathbf{u}$ es otro vector en $\mathbb{R}^n$ entonces $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$ y $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ será la longitud del segmento de línea recta que une los puntos en $\mathbb{R}^n$ con los vectores posición $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Así mismo, para encontrar la longitud de una curva parametrizada γ, cuando δt es muy pequeño, la parte de la imagen de la curva $\mathcal{C}$ de γ entre $\gamma(t)$ y $\gamma(t + \delta t)$ es casi una línea recta, así su longitud es,

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\|\delta t \tag{1.3}$$

Si queremos calcular la longitud de una parte de la curva $\mathcal{C}$ podemos dividirla en segmentos de longitud $\|\dot{\gamma}(t)\|\delta t$, cada uno de los cuales corresponde a un incremento infinitesimal δt en t, comenzando en el punto $\gamma(t_0)$, la longitud de arco será la función $S(t)$ dada por

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\|\delta t \tag{1.4}$$

$$\frac{dS}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| \tag{1.5}$$

Así, si $\gamma(t)$ es la posición de un punto en movimiento a un tiempo t, $\frac{dS}{dt}$ será su respectiva velocidad[6].

Ejemplo 1.1.4. Hallar la longitud de arco de la hélice definida por $\rho : [0, 4\pi] \longrightarrow R^3$, $t \longmapsto (\cos 2t, \sin 2t, \sqrt{5}t)$.
El vector velocidad es $\dot{\rho}(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, \sqrt{5})$. Su magnitud es

$$\begin{aligned}\|\dot{\rho}(t)\| &= \sqrt{4(\sin 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} \\ &= \sqrt{4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 5} = 3\end{aligned}$$

Como el vector velocidad es $\dot{\rho}(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, \sqrt{5})$, entonces la longitud de arco es:

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^{4\pi} \|\dot{\rho}(t)\| dt \\ &= \int_0^{4\pi} 3dt = 3t \mid_0^{4\pi} = 12\pi\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.5. Mostrar que las siguientes curvas tienen rapidez unitaria:

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

[6]Tomado de [1], p.7-9.

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \left(\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}, -\frac{1}{2}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{\frac{1}{4}(1+t)+\frac{1}{4}(1-t)+\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

$\therefore$ una curva tiene rapidez unitaria si $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$.

1.1.3 Reparametrización.

Como vimos en la sección (1.1.1) una curva de nivel dada puede tener muchas parametrizaciones, y esto es importante para entender la relación entre ellas.
Si dos curvas que se reparametrizan entre ellas tienen la misma imagen, deberán tener las mismas propiedades geométricas. El siguiente ejemplo ilustra claramente en qué consiste la reparametrización.

Ejemplo 1.1.6. Considere la curva $\gamma(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$, la cual describe un Movimiento Circular Uniforme (MCU).
Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (-\omega R\sin\omega t, \omega R\cos\omega t)\\ &= \omega R(-\sin\omega t, \cos\omega t)\end{aligned}$$

El MCU describe un movimiento de rapidez constante y trayectoria circular. Aunque su rapidez es constante, su velocidad (la cual es tangente a la trayectoria) no lo es; esta cantidad vectorial implica la existencia de una aceleración que varía en su dirección.
Al ser uniforme este movimiento, es decir, a iguales incrementos de tiempo le corresponden iguales desplazamientos angulares, tenemos que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t}$$

Entonces $\omega t = \theta$ donde $\theta = \frac{s}{R}$, $\therefore \omega t = \frac{s}{R}$, para una trayectoria de rapidez unitaria $\|\dot{\gamma}(t)\|$.
Luego, si reparametrizamos la curva γ usando la longitud de arco s como parámetro y teniendo en cuenta que $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$, tenemos,

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right)\\ \therefore \dot{\gamma}(s) &= R\left(\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\right)\\ &= \left(\sin\frac{s}{R}, -\cos\frac{s}{R}\right)\end{aligned}$$

Confirmamos, por lo tanto, que $\dot{\gamma}(s)$ es un vector unitario. Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}} &= \ddot{\gamma}(s)\\ &= \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)\\ &= \frac{1}{R}\left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\mathbf{n}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario a γ (que apunta hacia el centro), el cual corresponde a la aceleración del MCU. Más adelante veremos que el factor $\frac{1}{R}$ es justo la curvatura de γ.

Análogamente sabemos que la aceleración $a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$, $\therefore \omega = \frac{v}{R}$ con $v = 1$, entonces $\omega = \frac{1}{R} = \kappa$.

De este ejemplo concluimos que la reparametrización se utiliza para "mantener" fijo un parámetro, en este caso, fijar el hecho de que la rapidez no cambie para el MCU. Si no se reparametriza tendriamos que,

$$\dot{\mathbf{t}} = \omega^2 R(-\cos\omega t, -\sin\omega t)$$

lo cual dice que la curvatura depende de R y de la velocidad angular ω.

1.1.4 Curvatura.

La curvatura es la medida de cuán *curvada* es una curva. La curvatura[7] depende sólo de la forma de la curva. Por ejemplo:

Si γ es una línea recta en un plano con $\ddot{\gamma} = 0$ en todas partes, su curvatura debe ser cero. Entonces si γ es una curva de velocidad unitaria con parámetro s, su curvatura $\kappa(s)$ (ver ejemplo (1.1.6)) en el punto $\gamma(s)$ se define como la *magnitud de la aceleración.*[8]

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| \tag{1.6}$$

Sea S la longitud de arco AP para una circunferencia con centro en $O(x_0, y_0)$ como se ilustra en la figura (1.5).

[7] Tomado de [1], p. 23-25.

[8] La curvatura de γ debe ser un escalar y no un vector, por lo tanto tomamos la norma de γ.

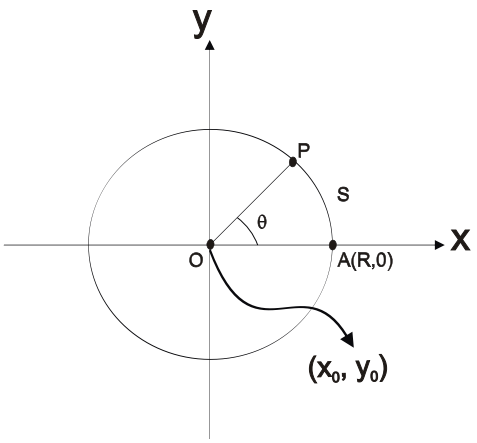


Figura 1.5. Curvatura de una circunferencia con centro en el origen.

Si θ es la medida en radianes del $\angle POA$ entonces,

$$S = R\theta \quad \therefore \theta = \frac{S}{R} \tag{1.7}$$

Sabemos que $x^2 + y^2 = R^2$ donde $x = R\cos\theta$ y $y = R\sin\theta$, entonces su parametrización será

$$\gamma(S) = (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)$$

Por la ecuación (1.7) tenemos

$$\gamma(S) = \left(x_0 + R\cos\frac{S}{R}, y_0 + R\sin\frac{S}{R}\right)$$

luego,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(S) &= \left(R\left(-\sin\frac{S}{R}\cdot\frac{1}{R}\right), R\left(\cos\frac{1}{R}\cdot\frac{S}{R}\right)\right)\\ &= \left(-\sin\frac{S}{R}, \cos\frac{S}{R}\right)\\ \therefore \|\dot{\gamma}(S)\| &= \sqrt{\left(-\sin\frac{S}{R}\right)^2 + \left(\cos\frac{S}{R}\right)^2} = 1,\end{aligned}$$

lo cual muestra que γ es de velocidad unitaria, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(S) &= \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{S}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{S}{R}\right)\\ \therefore \|\ddot{\gamma}(S)\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{R}\cos\frac{S}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{R}\sin\frac{S}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} = \kappa.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la circunferencia es una curva en un plano y su curvatura es inversamente proporcional al radio, $\kappa = 1/R$, lo cual nos hace presumir que su curvatura es de origen geométrico.

Pero qué sucede si $\gamma(t)$ es una curva que no es de velocidad unitaria. Si γ es regular[9], tendrá una reparametrización de velocidad unitaria $\widetilde{\gamma}$. Luego podemos definir la curvatura γ sin necesidad de reparametrizaciones con longitud de arco.

Proposición 1.1.1. *Sea $\gamma(t)$ una curva regular en $\mathbb{R}^3$, que no es de velocidad unitaria, luego, su curvatura es:*

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \tag{1.8}$$

donde $\times$ indica el producto vectorial (o cruz). Esta ecuación también puede ser usada para una curva en un plano.
Este es el resultado de reparametrizar (de rapidez unitaria) la curvatura κ en función de un parámetro s, es decir, $\kappa = \|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\|$, en términos de $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$.

Ejemplo 1.1.7. Calcular la curvatura de la siguientes curvas:
$(a)\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$,
$(b)\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 0)$.

(a) γ es de rapidez unitaria, por lo tanto,

$$\dot{\gamma} = \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)$$
$$\ddot{\gamma} = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)$$
$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\cos t\right)^2 + \cos^2 t, \left(\frac{3}{5}\cos t\right)}$$
$$= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

(b) Usando la Proposición 1.1.1,

$$\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} = (-3\cos^3 t + 6\cos t \sin^2 t, 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t, 0) \times (-3\sin t \cos^2 t, 3\cos t \sin^2 t, 0)$$
$$\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} = (9\sin^2 t \cos^4 t) + (9\cos^2 t$$
$$= \sin^4 t) = 9\sin^2 t \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = (0, 0, 9\sin^2 t \cos^2 t)$$

[9]Por definición se tiene que, un punto $\gamma(t)$ en γ es un punto regular si $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. Además, si una curva es regular (aquella donde todos sus puntos son regulares) tendrá reparametrización de rapidez unitaria.

$$\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\| = \sqrt{81\sin^4 t\cos^4 t} \qquad \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\cos^2 t\sin^4 t}$$
$$\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\| = 9\sin^2 t\cos^2 t \qquad \|\dot{\gamma}\| = 3\sin t\cos t$$

Luego,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}\\ &= \frac{9\sin^2 t\cos^2 t}{(3|\sin t\cos t|)^3} = \frac{1}{3|\sin t\cos t|}.\end{aligned}$$

1.1.5 Curvas en el plano y en el espacio.

Supongamos que $\gamma(S)$ es una curva de velocidad unitaria en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{t} = \frac{d}{dS}\gamma = \dot{\gamma}$ el vector tangente de γ, donde $\mathbf{t}$ es un vector unitario[10].
Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{t}$. Uno de ellos es el vector $\mathbf{n_s}$, el cual se obtiene al rotar $\mathbf{t}$ en sentido anti-horario a un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

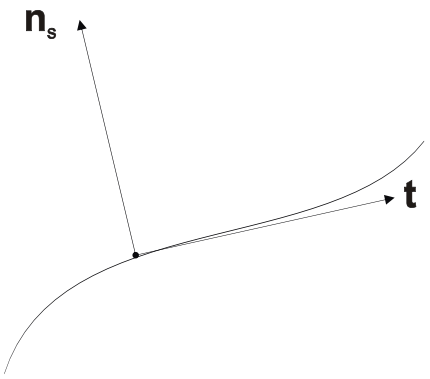


Figura 1.6. Vectores tangente $\mathbf{t}$ y normal $\mathbf{n}$ en un punto sobre una curva.

Teniendo en cuenta el hecho de que $\dot{\mathbf{n}}(t)\cdot\mathbf{n}(t) = 0$ cuando $\mathbf{n}(t)$ es un vector unitario, tenemos que $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\gamma}$ es perpendicular a $\mathbf{t}$, y por lo tanto es paralelo a $\mathbf{n_s}$. En consecuencia, hay un número κ_s, tal que

$$\ddot{\gamma} = \kappa_s\mathbf{n_s}. \tag{1.9}$$

El escalar κ_s es llamado la *curvatura con signo* de γ, (ésta puede ser positiva, negativa o cero). Como $\|\mathbf{n_s}\| = 1$, tenemos

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\kappa_s\mathbf{n_s}\| = |\kappa_s|$$

[10]Tomado de [1], p. 28-43.

Por consiguiente la curvatura de γ es el valor absoluto de su curvatura con signo. En la figura (1.7) se muestra cómo el signo de la curvatura con signo se determina (en cada caso, la dirección de la flecha en la curva indica el crecimiento de S).

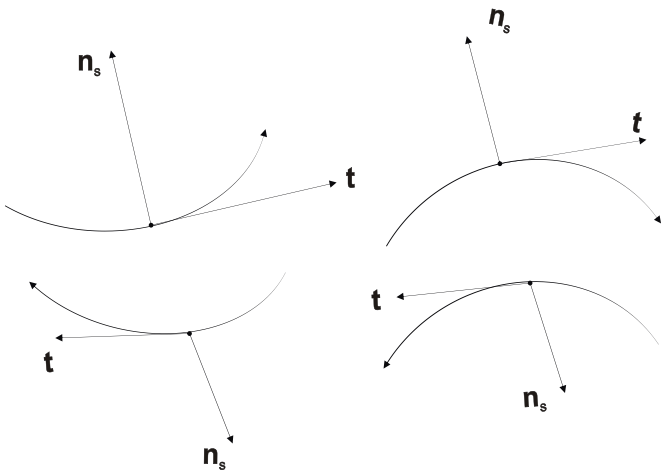


Figura 1.7. Diagrama del signo de la curvatura κ_s.

Proposición 1.1.2. *Sea $\gamma(S)$ una curva en un plano con velocidad unitaria, y sea $\varphi(S)$ el ángulo a través del cual un vector unitario fijo debe ser rotado en sentido anti-horario (o a la izquierda) para que coincida con el vector tangente unitario $\boldsymbol{t}$ de γ. Entonces,*

$$\kappa_S = \frac{d\varphi}{dS}.$$

En consecuencia, si analizamos geométricamente lo anterior, vemos que la curvatura con signo es la velocidad a la cual el vector tangente de la curva rota.

Ejemplo 1.1.8. Una parametrización con velocidad unitaria del círculo con centro en el origen y radio R es

$$\gamma(S) = \left(R\cos\frac{S}{R}, R\sin\frac{S}{R}\right)$$

Su vector tangente

$$\mathbf{t} = \dot{\gamma}(S) = \left(-\sin\frac{S}{R}, \cos\frac{S}{R}\right)$$

es el vector unitario formando un ángulo $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{S}{R}$ con el eje x positivo. Así, la curvatura con signo de γ es

$$\kappa_S = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d}{dS}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{S}{R}\right) = \frac{1}{R}$$

Por lo tanto, si $\kappa_S > 0$, el círculo de radio $\frac{1}{\kappa_S}$ tiene curvatura con signo κ_S.
Si $\kappa_S < 0$, es fácil ver que para la curva parametrizada,

$$\widetilde{\gamma}(S) = \left(R\cos\frac{S}{R}, -R\sin\frac{S}{R}\right)$$

(la cual es otra de las parametrizaciones de un círculo con radio R y centro en el origen) tiene curvatura con signo $-\frac{1}{R}$. Por lo tanto, si $R = -\frac{1}{\kappa_S}$, nuevamente obtenemos un círculo con curvatura con signo κ_S.
Esto se puede ilustrar gráficamente con el siguiente dibujo:

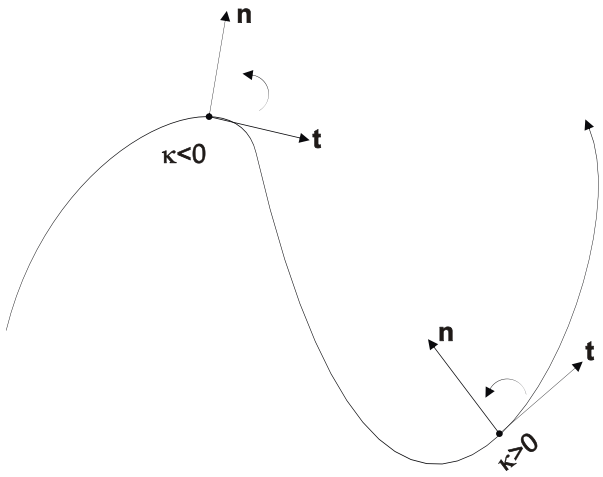


Figura 1.8. Parametrización de un círculo con velocidad unitaria.

Mientras que una curva en el plano es determinada esencialmente por su curvatura, para curvas en el espacio es necesario definir otro concepto denominado *torsión*, como se mostrará más adelante en esta sección.

Definición 1.1.2. *Sea $\gamma(S)$ una curva con velocidad unitaria en $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathbf{t} = \dot{\gamma}$ su vector tangente unitario. Si la curvatura $\kappa(S)$ no es cero, podemos definir el vector normal principal de γ al punto $\gamma(S)$ como:*

$$\mathbf{n}(S) = \frac{1}{\kappa(S)}\dot{\mathbf{t}}(S) \tag{1.10}$$

donde $\|\dot{\mathbf{t}} = \kappa\|$, y $\mathbf{n}$ es un vector unitario. Además, teniendo en cuenta la condición $\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{t}} = 0$, donde $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí, tenemos que

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} \tag{1.11}$$

donde $\mathbf{b}(S)$ *es llamado el vector binormal de* γ *al punto* $\gamma(S)$*, y a su vez es perpendicular a* $\mathbf{t}$ *y a* $\mathbf{n}$*. Así,* $\mathbf{t}$*,* $\mathbf{n}$*,* $\mathbf{b}$ *forman una base ortonormal en* $\mathbb{R}^3$*.*

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}. \tag{1.12}$$

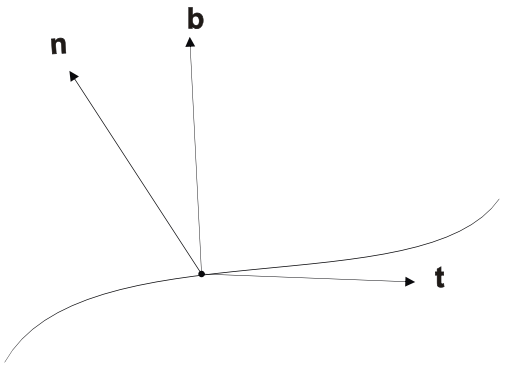


Figura 1.9. Vectores tangente $\mathbf{t}$, normal $\mathbf{n}$ y binormal $\mathbf{b}$ en un punto sobre una curva.

Análogamente $\dot{\mathbf{t}} \perp t$, entonces $\dot{\mathbf{b}} \perp b$.
Ahora calculamos $\dot{\mathbf{b}}$, aplicando la regla del producto[11] a la ecuación (1.11) tenemos,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}} &= \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} \\ &= \kappa(s)\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} \\ \therefore \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Si ilustramos estos vectores sobre un punto cualquiera de una curva que está en un plano P, tenemos que $\dot{\mathbf{b}}$ debe estar necesariamente en el plano generado por los vectores unitarios $\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}$, dado que $\dot{\mathbf{b}}$ es perpendicular a $\mathbf{t}$; lo cual se evidencia con la ecuación (1.13).

[11] La regla del producto para diferenciación del producto vectorial de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de un parámetro S:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}.$$

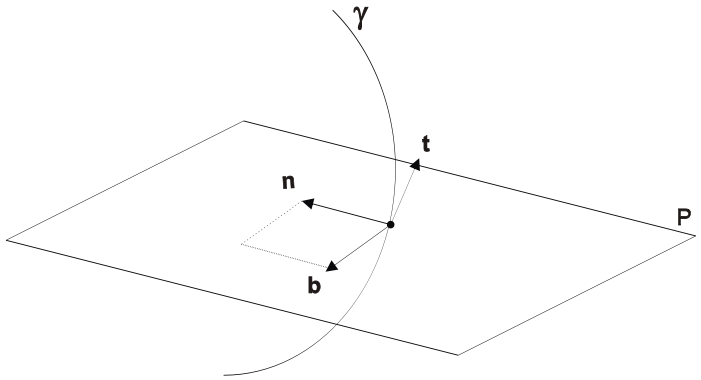


Figura 1.10. Vector normal, tangente y binormal en un plano.

Como $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\dot{\mathbf{n}}$ se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$,

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{b}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.13) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{t} \times [\alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{b}] \\ &= \alpha(\mathbf{t} \times \mathbf{t}) + \beta(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -\beta\mathbf{n}\end{aligned}$$

donde β se denomina la *torsión de* γ y se representa con τ. Además, se utilizó el hecho de que $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es una base ortonormal dextrógira y en consecuencia $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$.

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n} \quad \therefore \quad \dot{\mathbf{b}} \parallel \mathbf{n} \tag{1.14}$$

Para una curva regular $\gamma = \gamma(t)$, la torsión se puede expresar de la forma

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}$$

Tengamos en cuenta que esta fórmula muestra que $\tau(t)$ se define en todos los puntos $\gamma(t)$ de la curva en la que su curvatura $\kappa(t)$ no es cero, ya que por la Proposición (1.1.1) ésta es la condición para que el denominador sea distinto de cero.

Ejemplo 1.1.9. Una hélice circular con eje z es un curva de la forma

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta), \quad -\infty < \theta < \infty$$

donde a y b con constantes. Hallar: (a) la curvatura de la hélice y (b) la torsión.
(a) Si (x, y, z) es un punto en (la imagen de) la hélice, entonces

$$x = a\cos\theta, \;\; y = a\sin\theta, \;\; z = b\theta$$

para algún valor de θ, luego $x^2 + y^2 = a^2$, lo que muestra que la hélice está en el cilindro cuyo eje es el eje z y radio $|a|$.

$$\dot{\gamma}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\gamma(\theta) = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$$
$$\therefore \|\dot{\gamma}(\theta)\| = \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Esto muestra que $\dot{\gamma}(\theta)$ no es cero, por lo tanto γ es regular. Luego por la Proposición (1.1.1) tenemos

$$\ddot{\gamma} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$
$$\therefore \ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} = (-ab\sin\theta, ab\cos\theta, -a^2)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \kappa &= \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \\
&= \frac{\|(-ab\sin\theta, ab\cos\theta, -a^2)\|}{\|(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\|^3} \\
&= \frac{(a^2b^2 + a^4)^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{[a^2(b^2 + a^2)]^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2}}{a^2 + b^2} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura de una hélice es constante.
(b) De lo anterior tenemos que $\dot{\gamma} = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$, $\ddot{\gamma} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$ y calculamos $\dddot{\gamma}$, entonces

$$\dddot{\gamma} = (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0)$$

Luego, $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2)$

$$\begin{aligned}
\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 &= (\sqrt{a^2b^2\sin^2\theta + a^2b^2\cos^2\theta + a^4})^2 \\
&= a^2(a^2 + b^2) \\
(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma} &= (ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2) \cdot (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0) = a^2b
\end{aligned}$$

Entonces la torsión es,

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2} \tag{1.15}$$

Notemos que la torsión de la hélice circular llega a ser cero cuando $b = 0$, en cuyo caso, la hélice es sólo un círculo en el plano xy.

Teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$ y $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$, calculamos $\dot{\mathbf{n}}$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}} &= \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} \\ &= -\tau(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + \kappa(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Recordando que $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ y $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ de la ecuación (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}} &= -\tau(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{t}) \\ &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \end{aligned}$$

En resumen tenemos las ecuaciones de **Frenet-Serret**:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{\mathbf{t}} = & \kappa\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = & -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = & -\tau\mathbf{n} \end{array}}$$

Éstas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Vemos que lo interesante de la curvatura κ y la torsión τ, es que son las únicas cantidades necesarias para reconstruir la forma de una curva dada.

1.2 Superficies.

Una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ se obtiene tomando "parches" o piezas de un plano, deformándolas y arreglándolas de tal forma que la figura resultante no presente

aristas, bordes o intersecciones propias, y así tiene sentido hablar de un plano tangente en los puntos de la figura. Así mismo, podemos describir una superficie a través de una parametrización.[12]

Definición 1.2.1. *Una superficie parametrizada es una función* $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *donde* U *es algún dominio de* $\mathbb{R}^2$. *La* ***superficie*** S *es* $S = Im(\sigma)$, *donde,*

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \qquad (u, v) \in U$$

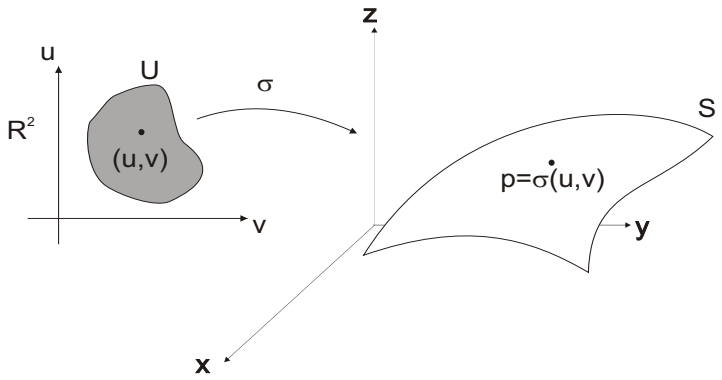


Figura 1.11. Superficie parametrizada.

Si σ es diferenciable (que equivale a decir que $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones diferenciables de (u, v)), S será una superficie diferenciable.

Suponer que σ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Fijando u en u_0 obtenemos una función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $t \longmapsto \sigma(u_0, t)$, cuya imagen es una curva sobre la superficie, como se muestra en la figura (1.12).
Por la sección (1.1.1) sabemos que el vector tangente a esta curva en el punto $\sigma(u_0, v_0)$ está dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial}{\partial v}\sigma(u_0, v_0)|_{u_0=0} \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k} \end{aligned}$$

[12]Tomado de [3], p. 52-53.

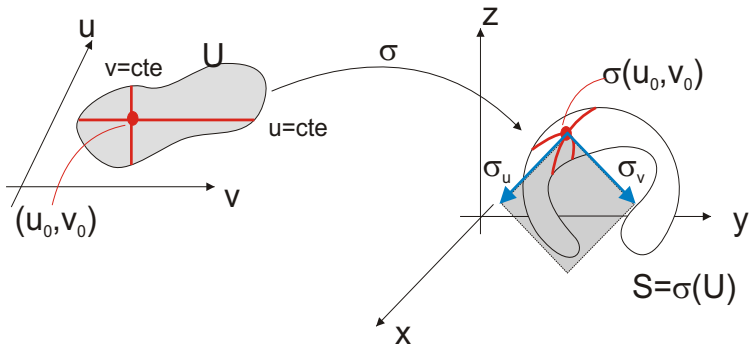


Figura 1.12. Los vectores σ_u y σ_v son tangentes a curvas sobre la superficie S y por lo tanto, son tangentes a S.

De manera análoga, si fijamos v y consideramos la curva $t \longmapsto \sigma(t, v_0)$, obtenemos el vector tangente a esta curva en $\sigma(u_0, v_0)$, dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial}{\partial u}\sigma(u_0, v_0)|_{v_0=0} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como los vectores σ_u y σ_v son tangentes a dos curvas sobre la superficie en $\sigma(u_0, v_0)$, éstos deben determinar la existencia de un plano tangente (o plano generado por σ_u y σ_v) a la superficie en este punto; esto es, que $\sigma_u \times \sigma_v$ será normal a la superficie y, será distinto de cero para superficies suaves en $\sigma(u_0, v_0) \in S$.[13]

Ejemplo 1.2.1. Calculemos el plano tangente para la esfera S^2.
Sea $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$, tenemos la esfera parametrizada

$$\hat{r} \equiv (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

hallando σ_θ y σ_ϕ,

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\partial\sigma(\theta,\phi)}{\partial\theta}, & \sigma_\phi &= \frac{\partial\sigma(\theta,\phi)}{\partial\phi} \\ &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) & &= (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)\end{aligned}$$

[13]Tomado de [2], p.442-443.

y su producto vectorial,

$$\sigma_\theta \times \sigma_\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\sin^2\theta\cos\phi)\hat{i} + (\sin^2\theta\sin\phi)\hat{j} + (\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi)\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta \times \sigma_\phi &= (\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\theta) \\ &= \sin\theta(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ &= \sin\theta\cdot\hat{r} \neq 0 \qquad \forall \;\; \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \end{aligned}$$

Podemos determinar el plano tangente en $p \in S$, tomando el vector Normal Unitario a S en p, dado por

$$\mathbf{N}_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \tag{1.17}$$

Una superficie S con "muchos parches" o parametrizaciones permite encontrar varias parametrizaciones locales sobre ella. Si tomamos dos de esas parametrizaciones, σ y $\widetilde{\sigma}$, éstas darán lugar a vectores unitarios $\mathbf{N}_{\tilde{\sigma}}$ y $\mathbf{N}_\sigma$, lo cuales difieren a lo sumo en un signo,

$$\mathbf{N}_{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\|} = \pm\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \pm\mathbf{N}_\sigma$$

donde $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)\sigma_u \times \sigma_v = Det(\mathcal{J}(\sigma))(\sigma_u \times \sigma_v)$ y $Det(\mathcal{J}(\sigma))$ es el determinante de la matriz jacobiana dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} = Det(\mathcal{J}(\sigma))$$

Por lo tanto, al cubrir una superficie con parametrizaciones donde todos los jacobianos respectivos tengan signo positivo será posible describir una superficie de dos lados, uno de ellos al lado exterior o positivo, y el otro al lado interior o negativo; dicha superficie se llama *superficie orientada.*

Por ejemplo,en la figura (1.13), para cada punto $(x, y, z) \in S$ hay dos vectores normales unitarios n_1 y n_2, donde $n_1 = -n_2$, es decir, cada una de éstas normales se asocia con un lado de la superficie. Así, para especificar un lado de una superficie S, en cada punto escogemos un vector normal unitario n que apunta hacia afuera desde el lado positivo de S en ese punto.

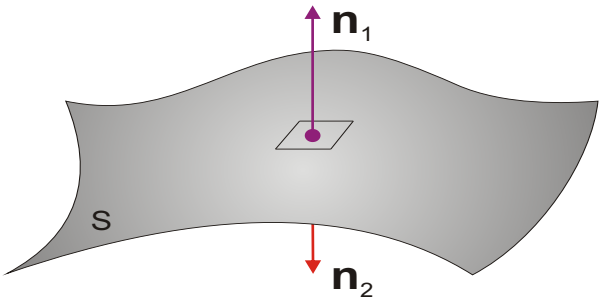


Figura 1.13. Las dos posibles normales unitarias a una superficie en un punto.

Esto supone que una superficie S tiene dos lados. Un ejemplo de una superficie con un solo lado o *superficie no orientable* es la Cinta de Möbius, como se muestra en la figura (1.14), en cada punto de M hay dos normales unitarias, n_1 y n_2. Sin embargo, n_1 no determina un lado único de M, y tampoco n_2. Podemos ver esto de manera intuitiva, deslizando n_2 alrededor de la curva cerrada C, cuando n_2 regrese a un punto fijo p de C, coincidirá con n_1, mostrando que tanto n_1 como n_2, apuntan desde el mismo lado de M y, en consecuencia, M tendrá un solo lado.

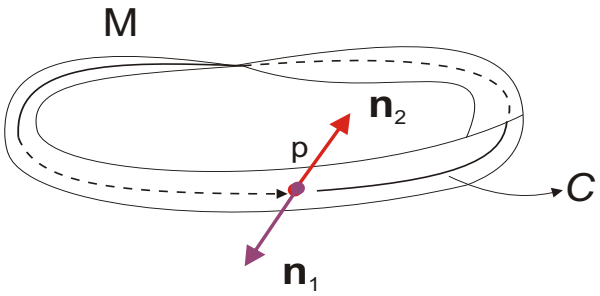


Figura 1.14. Cinta de Möbius: deslizar $\mathbf{n}_2$ alrededor de $\mathcal{C}$ una vez; cuando $\mathbf{n}_2$ regrese a su punto inicial, $\mathbf{n}_2$ coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.

1.2.1 Longitud de curva sobre superficies.

Lo primero a tener en cuenta geométricamente para una superficie, es la medida de la distancia entre dos puntos sobre ésta. El objeto con el cual calculamos la longitud en una superficie, y además, ángulos y áreas, se denomina Primera Forma Fundamental.

Sea $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ una curva en un parche de superficie σ, su longitud de

arco comenzando en el punto $\gamma(t_0)$ está dada por:

$$S = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

Por la regla de la cadena, $\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$, así

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= (\sigma_u \cdot \sigma_u)\dot{u}^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v)\dot{u}\dot{v} + (\sigma_v \cdot \sigma_v)\dot{v}^2 \\ \therefore \|\dot{\gamma}\|^2 &= E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \end{aligned}$$

donde $E = \sigma_u \cdot \sigma_u = \|\sigma_u\|^2$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ y $G = \sigma_v \cdot \sigma_v = \|\sigma_v\|^2$. Entonces,

$$S = \int_{t_0}^{t} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{1/2} dt \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_0}^{t} \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] (dt)^2 \\ &= \int_{t_0}^{t} (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) \end{aligned}$$

Donde

$$\boxed{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv Primera\ Forma\ Fundamental} \tag{1.19}$$

En ocasiones la ecuación (1.19) se escribe como:

$$dS^2 \equiv Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Ejemplo 1.2.2. Tenemos el plano $\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son vectores unitarios y ortogonales.
Entonces $\sigma_u = \mathbf{p}$, $\sigma_v = \mathbf{q}$,

$$E = \|\sigma_u\|^2 = \|p\|^2 = 1$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = p \cdot q = 0$$

$$G = \|\sigma_v\|^2 = \|q\|^2 = 1$$

La PFF para el plano σ es:

$$dS^2 = du^2 + dv^2$$

Ejemplo 1.2.3. Tenemos una esfera con coordenadas $\sigma(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Entonces

$$\sigma_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$
$$\sigma_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

$$\begin{aligned}
\therefore E &= \|\sigma_\theta\|^2 \\
&= \|\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\|^2 = 1 \\
F &= \sigma_\theta \cdot \sigma_\phi = 0 \\
G &= \|\sigma_\phi\|^2 \\
&= \|\sin^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi\|^2 = \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Luego la PFF para una esfera es:

$$dS^2 = du^2 + \sin^2\theta dv^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Ejemplo 1.2.4. Tenemos un cilindro de la forma $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{a}$ donde $\mathbf{a}$ es un vector unitario, y γ está contenido en un plano perpendicular a $\mathbf{a}$. Entonces

$$\sigma_u = \dot{\gamma}, \qquad\qquad \sigma_v = \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}
E &= \|\sigma_u\|^2 \\
&= \|\dot{\gamma}\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F &= \sigma_u \cdot \sigma_v \\
&= \dot{\gamma} \cdot \mathbf{a} \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
G &= \|\sigma_v\|^2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

La PFF es $ds^2 = du^2 + dv^2$, la cual es igual para el plano.

1.2.2 Isometrías de superficies.

Observamos según el ejemplo (1.2.4) que un plano o un cilindro, adecuadamente parametrizados, tienen la misma Primera Forma Fundamental. Geométricamente esto es fácil de ver.

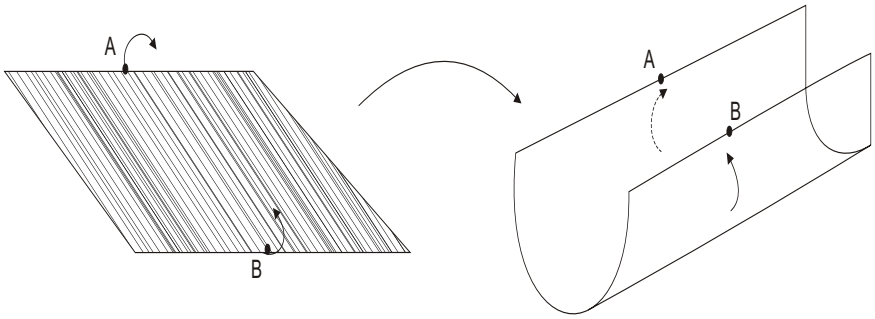


Figura 1.15. La PFF del plano y del cilindro son iguales porque al doblar o envolver el plano, la distancia de A a B no cambia, es decir, ambas superficies son invariantes bajo isometrías.

Consideremos una curva en un plano. Supongamos ahora que el plano es "envuelto", dando así lugar a una superficie cilíndrica. Entonces, la curva será ahora una curva sobre un cilindro. Como el plano no ha sido estirado ni encogido, las longitudes de estas dos curvas serán las mismas, y como la PFF es una medida de la longitud de curva en una superficie, ésta deberá ser la misma. El experimento sugiere, por otro lado, que es imposible envolver una hoja de papel alrededor de una esfera sin arrugarse. Por lo tanto, esperamos que un plano y una esfera no tengan la misma PFF (cualquiera que sea la elección de la parametrización).
La siguiente definición precisa lo que significa envolver una superficie en otra "sin arrugarse".

Definición 1.2.2. *Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son superficies, un difeomorfismo $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ se llama isometría si lleva curvas en $\mathcal{S}_1$ a curvas en $\mathcal{S}_2$, preservando su longitud. Si tal isometría $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ existe, decimos que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son isométricas*[14].

1.2.3 Área de una superficie.

Consideremos ahora el problema de calcular el área de una superficie.

Definición 1.2.3. *Definimos el área $\mathcal{A}_\sigma(R)$ de la parte $\sigma(R)$ de un "parche" de superficie $\sigma : U \to R^3$ correspondiente a la región $R \subseteq U$ por*

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv \tag{1.20}$$

[14]Tomado de [1], p.101.

donde $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ *es la norma de* $\sigma_u \times \sigma_v$. *Si* R *es una unión de superficies* S_i, *su área es la suma de las áreas de las* S_i.

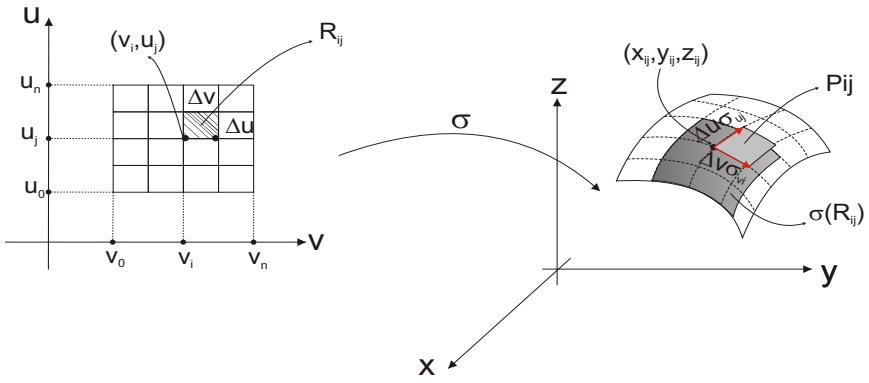


Figura 1.16. "$\|\sigma_{ui} \times \sigma_{vj}\| \Delta U \Delta V$ es igual al área de un paralelogramo que aproxima el área de un retazo en una superficie $S = \sigma(U)$".

La cantidad $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ se puede escribir utilizando el álgebra vectorial[15], en términos de la Primera Forma Fundamental $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ de σ, como:

$$\begin{aligned} \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 &= (\sigma_u \times \sigma_v) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) \\ &= EG - F^2 \\ \therefore \|\sigma_u \times \sigma_v\| &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

Así, la definición de área de una superficie será:

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \iint_R \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

la cual no depende de la parametrización y por tanto, es invariante si σ es reparametrizada[16].

1.2.4 Curvatura de una superficie.

Recordemos que para $\mathbb{R}^2$, la curvatura nos da una idea de qué tanto una curva "se aleja" de una línea recta. Mientras que para superficies en $\mathbb{R}^3$ buscamos una forma

[15]Se emplea la propiedad $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ donde a, b, c y d son vectores en R^3.

[16]Tomado de [2], p. 449-452.

de medir qué tanto se "aleja" una superficie de su plano tangente a medida que nos movemos sobre ella. La figura (1.17) generaliza el caso de curvas a superficies.

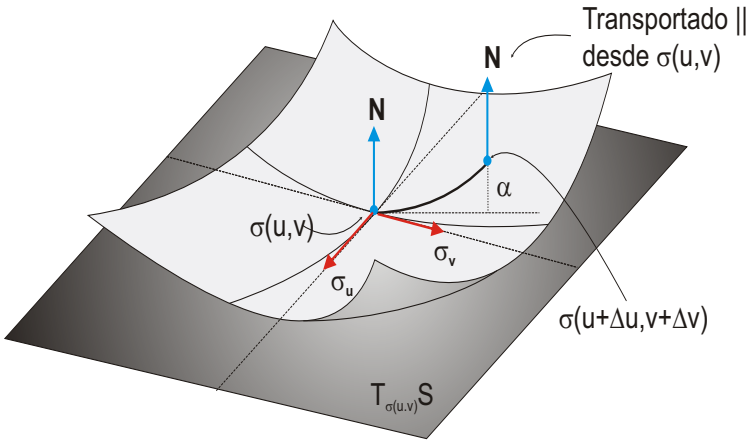


Figura 1.17. La curvatura de una superficie mide que tanto se "aleja" esta de su plano tangente.

Queremos determinar $\alpha = (\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)) \cdot \hat{\mathbf{N}}$ donde $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$, y es transportado paralelamente de $\sigma(u,v)$ a $\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v)$.
Empleando una expansión en Series de Taylor a segundo orden tenemos,

$$\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) = \sigma(u,v) + \sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v + \frac{1}{2}(\sigma_{uu}\Delta u^2 + 2\sigma_{uv}\Delta u \Delta v + \sigma_{vv}\Delta v^2 + \ldots)$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_u \perp \hat{\mathbf{N}}$ y $\sigma_v \perp \hat{\mathbf{N}}$, calculamos

$$\begin{aligned}(\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)) \cdot \hat{\mathbf{N}} \approx \\ [(\sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v) \cdot \hat{\mathbf{N}} + \frac{1}{2}(\sigma_{uu}\Delta u^2 + 2\sigma_{uv}\Delta u \Delta v + \sigma_{vv}\Delta v^2) \cdot \hat{\mathbf{N}} + \ldots] \\ \approx \frac{1}{2}(\sigma_{uu} \cdot \hat{\mathbf{N}}(\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv} \cdot \hat{\mathbf{N}}(\Delta u \Delta v) + \sigma_{vv} \cdot \hat{\mathbf{N}}(\Delta v)^2),\end{aligned}$$

donde $\sigma_{uu} = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\sigma(u,v)$, $\sigma_{uv} = \sigma_{vu} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\sigma(u,v)$ y $\sigma_{vv} = \frac{\partial^2}{\partial v^2}\sigma(u,v)$.
Si definimos

$$L := \sigma_{uu} \cdot \hat{\mathbf{N}}, \qquad M := \sigma_{uv} \cdot \hat{\mathbf{N}}, \qquad N := \sigma_{vv} \cdot \hat{\mathbf{N}} \tag{1.21}$$

Entonces la expresión (1.2.4) toma la forma

$$\begin{aligned}(\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)) \cdot \hat{\mathbf{N}} &\approx (L(\Delta u)^2 + 2M(\Delta u \Delta v) + N(\Delta v)^2) \\ &\approx \frac{1}{2}(\Delta u, \Delta v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde la expresión

$$\boxed{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}$$

se conoce como la Segunda Forma Fundamental (SFF)[17].

1.2.5 La curvatura de las curvas en una superficie.

Sea $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ una curva con velocidad unitaria en un "parche" de superficie σ, y $\dot{\gamma}$ el vector tangente unitario a σ. Por lo tanto, $\dot{\gamma}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{N}}$ de σ, así $\dot{\gamma}$, $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{N}} \times \dot{\gamma}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares. En este sentido, $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$, por tanto, $\ddot{\gamma}$ será una combinación lineal de $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{N}} \times \dot{\gamma}$.

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n \hat{\mathbf{N}} + \kappa_g (\hat{\mathbf{N}} \times \dot{\gamma}) \tag{1.22}$$

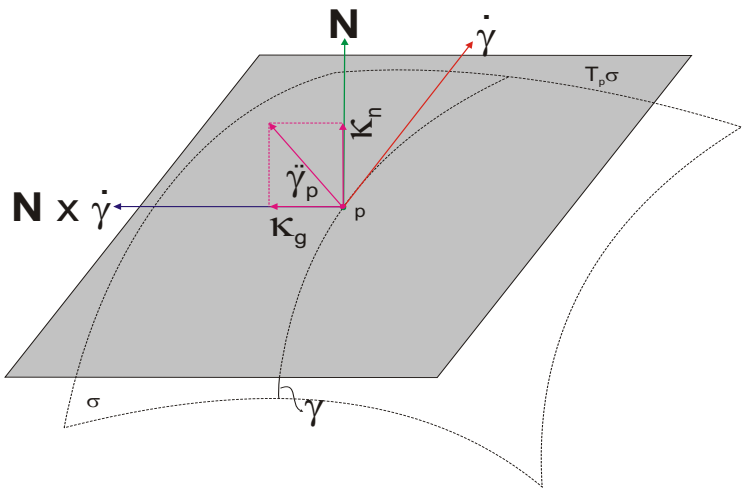


Figura 1.18. La curvatura de una curva sobre una superficie determinada por la curvatura normal κ_n y geodésica κ_g.

donde κ_n y κ_g son escalares llamados *curvatura Normal* y *curvatura Geodésica*[18], respectivamente. Además, $\hat{\mathbf{N}} \perp \hat{\mathbf{N}} \times \dot{\gamma}$. Esto implica que

[17] Tomado de [1], p. 127-137.

[18] Las geodésicas de una superficie son las líneas "más rectas" posibles (con menor curvatura) fijadas en un punto y una dirección dada sobre una superficie.

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{N}} &= \kappa_n\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{N}} + \kappa_g(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma})\cdot\hat{\mathbf{N}} \\
\ddot{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{N}} &= \kappa_n \\
\therefore \kappa_n &= |\ddot{\gamma}||\hat{\mathbf{N}}|\cos\psi \\
&= \ddot{\gamma}\cos\psi
\end{aligned} \tag{1.23}$$

y

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}\cdot(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma}) &= \kappa_n\hat{\mathbf{N}}\cdot(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma}) + \kappa_g(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma})\cdot(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma}) \\
\ddot{\gamma}\cdot(\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma}) &= \kappa_g \\
\therefore \kappa_g &= |\ddot{\gamma}||\hat{\mathbf{N}}\times\dot{\gamma}|\sin\psi \\
&= \ddot{\gamma}\sin\psi
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Por consiguiente $\|\ddot{\gamma}\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.
Luego por la sección (1.1.5), sabemos que $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$, entonces

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \tag{1.25}$$

y

$$\kappa_n = \kappa\cos\psi \tag{1.26}$$

$$\kappa_g = \pm\kappa\sin\psi \tag{1.27}$$

Sin embargo, nos interesan curvas en las que γ sea una sección normal de la superficie σ, es decir, tales que $\ddot{\gamma}_p$ vaya en la dirección de $\hat{\mathbf{N}}$, y que el plano Π, que se ilustra en la figura (1.19) sea perpendicular al plano tangente de la superficie en cada punto de γ.
Para las ecuaciones (1.26) y (1.27) vemos que $\psi = 0, \pi$, entonces,

$$\kappa_n = \pm\kappa \qquad\qquad \kappa_g = 0$$

Ejemplo 1.2.5. Calcular la curvatura normal del círculo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ para un paraboloide elíptico $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.
Calculando el vector normal unitario y las componentes de la SFF para el paraboloide tenemos

$$2\lambda(du^2 + dv^2) = \frac{2(du^2 + dv^2)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}$$

Entonces $u = \cos t$, $v = \sin t$ y $du = -\sin t$, $dv = \cos t$, respectivamente. Así,

$$\kappa_n = \frac{2((-\sin t)^2 + (\cos t)^2)}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

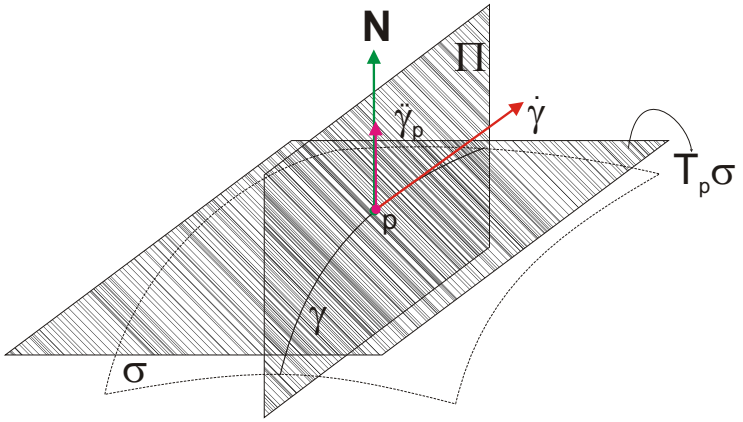


Figura 1.19. "Intersección" de los planos normal y tangente de una curva en una superficie.

1.2.6 Curvaturas normal y principal.

Utilizando la ecuación (1.23) tenemos

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \hat{\mathbf{N}} \cdot \left[\frac{d^2}{dt^2}\gamma\right] \\ &= \hat{\mathbf{N}} \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\sigma(u(t), v(t)))\right)\right] \\ &= \hat{\mathbf{N}} \cdot [\sigma_u \ddot{u} + \sigma_v \ddot{v} + \dot{u}(\sigma_{uu}\dot{u} + \sigma_{uv}\dot{v}) + \dot{v}(\sigma_{vv}\dot{v} + \sigma_{vu}\dot{u})] \\ &= (\sigma_u \cdot \hat{\mathbf{N}})\ddot{u} + (\sigma_v \cdot \hat{\mathbf{N}})\ddot{v} + (\sigma_{uu} \cdot \hat{\mathbf{N}})\dot{u}^2 + (\sigma_{uv} \cdot \hat{\mathbf{N}})\dot{u}\dot{v} + (\sigma_{vv} \cdot \hat{\mathbf{N}})\dot{v}^2 + (\sigma_{uv} \cdot \hat{\mathbf{N}})\dot{v}\dot{u}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_u \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$, $\sigma_v \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$, $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ y por la definición de las componentes de la SFF tenemos,

$$\kappa_n = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2. \tag{1.28}$$

Al considerar curvas que pasan por un mismo punto $p \in S$ pero en diferentes direcciones, caemos en cuenta que κ_n debe tomar un valor máximo y un valor mínimo. A dichos valores se les conoce como *curvaturas principales* y se denotan por κ_1 y κ_2.

Lo que nos lleva a lo siguiente[19]:

[19]Es posible demostrar que las curvaturas κ_1 y κ_2 se obtienen como las raíces de la ecuación (1.29) utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Lema. 1.2.1. *Las curvaturas principales de un parche de superficie son las raíces de la ecuación*

$$Det(\mathfrak{F}_{II} - \kappa\mathfrak{F}_I) = 0 \tag{1.29}$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0 \tag{1.30}$$

donde $\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ y $\mathfrak{F}_{\mathfrak{II}} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

1.2.7 Curvatura Gaussiana.

Ahora introducimos dos nuevas medidas de la curvatura de una superficie, las cuales contienen la misma información que las dos curvaturas principales pero tendrán una mayor importancia geométrica, éstas son la *curvatura gaussiana* y la *curvatura media.*

La curvatura gaussiana en particular, tiene la notable propiedad de no modificarse cuando la superficie se dobla sin estirarla, una propiedad que no es compartida por las curvaturas principales.

Definición 1.2.4. *Sean κ_1 y κ_2 las curvaturas principales de un parche de superficie. Luego, la curvatura gaussiana de un camino de superficie es*

$$\mathrm{K} = \kappa_1\kappa_2, \tag{1.31}$$

y su curvatura media es

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{1.32}$$

Para obtener expresiones explícitas para H y K en términos de la PFF y la SFF partimos de la definición (1.30), calculando el determinante

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (EG - F^2)\kappa^2 - (LG - 2MF + NE)\kappa + LN - M^2 = 0.$$

Ahora bien, recordemos que en la ecuación cuadrática $a\kappa^2 + b\kappa + c = 0$, la suma

de las raíces es $-b/a$ y el producto de las raíces es c/a [20]. Por tanto,

$$\mathrm{K} = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \tag{1.33}$$

$$\mathrm{H} = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}; \tag{1.34}$$

y las curvaturas principales serán $\mathrm{H} \pm \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}}$.

Ejemplo 1.2.6. Calcular la curvatura gaussiana y media de la superficie $\sigma(u, v) = (u + v, u - v, uv)$ en el punto $\sigma(u, v) = (2, 0, 1)$.
Entonces,

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (1, 1, v) \cdot (1, 1, v) = 2 + v^2,$$

Asimismo, $F = uv$, $G = 2 + u^2$. Luego si $u = v = 1 \Rightarrow$

$$E = 3, \qquad F = 1, \qquad G = 3.$$

Luego por la ecuación (1.17), tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= \frac{(u + v, v - u, -2)}{\|(u + v, v - u, -2)\|^2} \\ &= \frac{(2, 0, -2)}{8} \end{aligned}$$

Así que, $L = 0$, $M = (0, 0, 1) \cdot \frac{(2,0,-2)}{8} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, y $N = 0$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= \frac{1/2}{8}, & \mathrm{H} &= \frac{1}{2}\left(\frac{-2(-1/\sqrt{2})}{8}\right) \\ &= \frac{-1}{16}, & \mathrm{H} &= \frac{1}{8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Sabemos que una curva con velocidad unitaria tendrá una curvatura con signo que depende del cambio de dirección del vector tangente por unidad de longitud. Además en el caso de las superficies consideramos lo siguiente: Si tenemos una superficie Σ, al trazar los vectores normales $\hat{N}$ en una región de la superficie, éstos limitarán una región o área sobre la misma. En la esfera, los vectores normales también describirán una vecindad llamada $\mathcal{A}_N$. Luego el mapeo gaussiano $\mathcal{G}$ es una función que "envia" elementos del área $\mathcal{A}_\sigma$ a la esfera. Es decir, $\mathcal{G} : \Sigma \longrightarrow S^2$ y $S : Im(\sigma)$.

[20] Esto se conoce como el Teorema de Cardano-Viète.

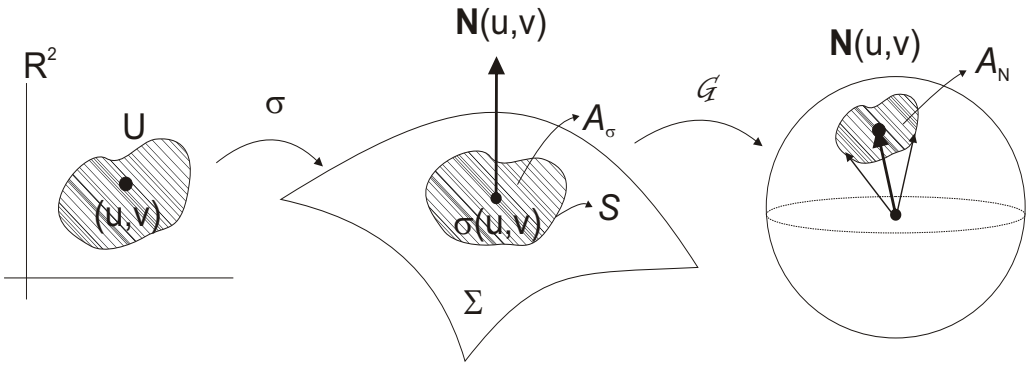


Figura 1.20. Mapeo gaussiano.

El mapeo gaussiano se obtiene al analizar *qué tan rápido cambia el vector normal en una superficie*, ya que la dirección de su plano tangente es medido por el vector normal a ella. Así, podemos esperar que la curvatura de una región o vecindad sobre la superficie esté medida por la razón entre las áreas $\mathcal{A}_N$ y $\mathcal{A}_\sigma$.

$$\lim_{\mathcal{A}_\sigma \to 0} \frac{\mathcal{A}_N}{\mathcal{A}_\sigma} = |\mathrm{K}| \tag{1.35}$$

Tomando los diferenciales de las áreas tenemos

$$d\mathcal{A}_N \cong |\mathrm{K}| d\mathcal{A}_\sigma \quad \therefore \quad \mathcal{A}_N = \int_\Sigma |\mathrm{K}| d\mathcal{A}_\sigma \tag{1.36}$$

O en términos de los vectores normales y tangentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N(\Sigma) &= \iint_\Sigma \|\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v\| du dv \\ &= \iint_\Sigma |\mathrm{K}| \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv = \iint_\Sigma |\mathrm{K}| d\mathcal{A}_\sigma. \end{aligned}$$

donde esperamos que K sea la curvatura gaussiana (ver sección (2.1)), y dado que es invariante bajo isometrías, permite llevar curvas sobre una superficie a otra preservando su longitud. En otras palabras, la curvatura gaussiana es una propiedad intrínseca de la superficie puesto que ésta no cambiará si la superficie no se contrae ni se rasga.

Ésta propiedad se denomina Teorema "Egregio" de Gauss y se enuncia así: *"La curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías"*. Éste teorema permite que las distancias se conserven a pesar de que halla flexiones en la superficie, así los coeficientes de la PFF y cualquier ente que dependa de ellos se

conservará. A fin de probar que la curvatura total depende de los coeficientes de la PFF y la SFF, y de sus derivadas se obtienen las ecuaciones de Gauss[21]:

$$\sigma_{11} = \Gamma^1_{11}\sigma_{11} + \Gamma^2_{11}\sigma_2 + L\mathbf{N} \tag{1.37}$$

$$\sigma_{12} = \Gamma^1_{12}\sigma_{11} + \Gamma^2_{12}\sigma_2 + M\mathbf{N} \tag{1.38}$$

$$\sigma_{22} = \Gamma^1_{22}\sigma_{11} + \Gamma^2_{22}\sigma_2 + N\mathbf{N} \tag{1.39}$$

donde $A^k_{ij} \equiv \Gamma^k_{ij}$ son los *símbolos de Christoffel*, $(\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji})$.
Ésta noción de curvatura gaussiana se empleará en el siguiente capítulo para el desarrollo del Teorema de Gauss-Bonnet.

[21]El cálculo en detalle de éstas ecuaciones y de los símbolos de Christoffel se encuentran en el Apéndice A.

Capítulo 2

CURVATURA Y TRANSPORTE PARALELO.

En este cápítulo se ilustrará la relación existente entre la noción de curvatura gaussiana (TGB) y la Teoría del Transporte Paralelo (TTP), en una superficie.

2.1 Teorema de Gauss-Bonnet.

El *Teorema de Gauss-Bonnet (TGB)* es el más profundo y significativo resultado en la teoría de superficies. Su versión más importante relaciona el promedio de la curvatura gaussiana sobre una superficie con una propiedad global de la misma llamada *"Número de Euler"*, la cual es netamente topológica, es decir, que no cambia bajo ninguna deformación continua de la superficie. Tal deformación implica un cambio general en el valor de la curvatura gaussiana, pero éste teorema dice que el promedio sobre la superficie no cambia. Así, el TGB permite relacionar propiedades geométricas con propiedades topológicas.

2.1.1 Gauss-Bonnet para curvas cerradas.

La versión más simple del TGB hace referencia a curvas cerradas en una superficie. De manera general, si $\gamma(s)$ es una curva simple cerrada con velocidad unitaria en una superficie σ de longitud $l(\gamma)$, y que está positivamente orientada[1],

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g d\mathcal{S} = 2\pi - \iint_{int(\gamma)} \mathrm{K} d\mathcal{A}_\sigma, \tag{2.1}$$

[1]La demostración de ésta versión del TGB se encuentra en [1], p. 247-249.

donde κ_g es la curvatura geodésica de γ, K es la curvatura gaussiana de σ, $d\mathcal{A}_\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$ es el elemento de área en σ y $2\pi = \int_0^{l(\gamma)} \dot{\theta} ds$ ya que $\dot{\theta}$ es un ángulo de rotación a lo largo de $l(\gamma)$.

2.1.2 Gauss-Bonnet para polígonos curvilíneos.

La siguiente versión del TGB generaliza la noción de una curva que pueda tener "esquinas".

Teorema 2.1.1. *Sea γ un polígono curvilíneo orientado positivamente y de rapidez unitaria con n aristas en una superficie σ, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los ángulos interiores en sus vértices. Luego*

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g d\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{int(\gamma)} \mathrm{K} d\mathcal{A}_\sigma \tag{2.2}$$

Para lo cual se debe tener en cuenta que si γ es un polígono curvilíneo con n-aristas cada una de las cuales es un arco de una geodésica, luego los ángulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ del polígono satisfacen la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + \int_{int(\gamma)} \mathrm{K} d\mathcal{A}_\sigma \tag{2.3}$$

Un caso especial de esto es considerar un n-polígono en el plano con bordes rectos, donde K = 0 para el plano, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi,$$

lo cual es un resultado conocido de geometría elemental.
Para un n-polígono curvilíneo en la esfera unitaria cuyos arcos son grandes círculos, tenemos que K = 1 entonces $\sum \alpha_i$ excede el valor del $(n-2)\pi$ de un plano por el área $\iint d\mathcal{A}_\sigma$. Tomando $n = 3$, obtenemos para el triángulo esférico ABC cuyas aristas son arcos de grandes círculos,

$$\mathcal{A}(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \tag{2.4}$$

lo cual es un caso especial del Teorema de Gauss-Bonnet.
Finalmente, para el n-polígono geodésico en la pseudoesfera[2], para la cual K = −1

[2]Una pseudoesfera es una superficie de revolución que se obtiene girando una curva (tractriz) alrededor de su asíntota. Es una superficie con curvatura gaussiana negativa, lo que implica que cada uno de sus puntos es un punto de silla, es decir donde la pendiente es cero, sin ser un extremo local.

vemos que $\sum \alpha_i$ es menor que $(n-2)\pi$ por el área del polígono. En particular, para el triángulo geodésico ABC en la pseudoesfera

$$\mathcal{A}(ABC) = \pi - \angle A - \angle B - \angle C \tag{2.5}$$

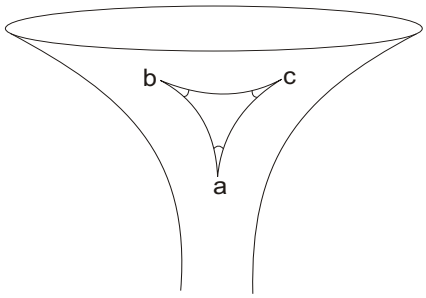


Figura 2.1. La pseudoesfera.

2.1.3 Gauss-Bonnet para superficies compactas.

Ésta es la versión más importante de éste teorema. Éste resultado es sorprendente ya que hay pocas superficies compactas en $\mathbb{R}^3$, la más sencilla de ellas es la esfera, la siguiente es el toro, el cual se puede obtener rotando un círculo alrededor del eje z en el plano xz sin cortar o intersectar el eje z. La superficie compacta mostrada

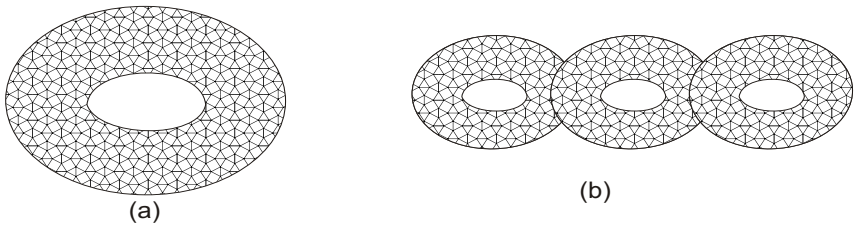


Figura 2.2. (a) Un toro y (b) tres toros juntos.

en la figura (2.2) se escribe como T_g donde g es el número de huecos, llamado el *género* de la superficie (tomando $g = 0$ para la esfera).

Teorema 2.1.2. *Para cualquier entero $g \geq 0$, entonces la superficie T_g admite un atlas que la convierte en una superficie regional suave. Por otra parte, toda superficie compacta (cerrada y sin borde) es difeomorfa a T_g para algún g.*

Ésta versión del Teorema de Gauss-Bonnet se obtiene cubriendo la superficie compacta $\mathcal{S}$ con polígonos curvilíneos que encajan muy bien (aplicando el Teorema 2.1.2), y sumando los resultados. Por consiguiente,

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie cuyo atlas está compuesto de parches de superficie $\sigma_i : U_i \to R^3$. Una triangulación de $\mathcal{S}$ es un conjunto de polígonos curvilíneos (el interior de) cada uno de los cuales está contenido en uno de los parches $\sigma_i(U_i)$, tal que*

i. cada punto de $\mathcal{S}$ está por lo menos en uno de los polígonos curvilíneos;

ii. dos polígonos curvilíneos estás disjuntos, o su intersección es un borde común o un vértice común;

iii. cada borde (o arista) pertenece a dos polígonos exactamente.

Por lo tanto, situaciones como la de la figura (2.3) no son permitidas.

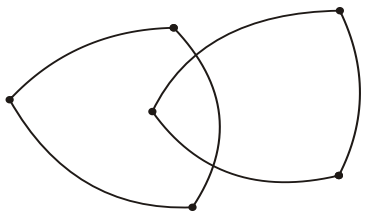


Figura 2.3. Situación no permitida al triangular cualquier superficie dada.

Por ejemplo para la esfera unitaria, tiene una triangulación con 8 polígonos, los cuales se obtienen por la intersección de la esfera con los tres planos coordenados.

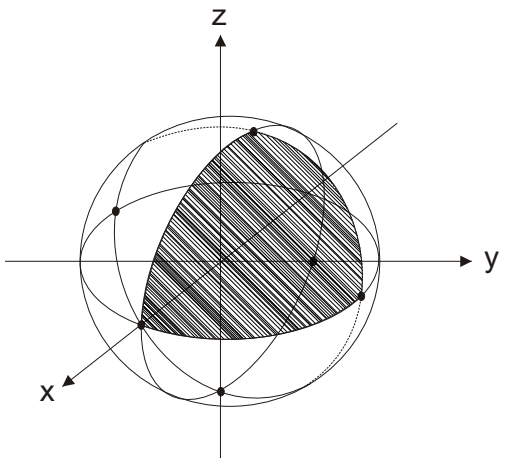


Figura 2.4. Triangulación de la esfera unitaria.

En general, debido al posible número de polígonos que se puedan dar en una superficie, *toda superficie compacta tendrá una triangulación con un número finito de polígonos, es decir, un número finito en la familia.*
Luego para cualquier triangulación de una superficie compacta S, el *número de Euler* χ será

$$\boxed{\chi = V - A + C} \tag{2.6}$$

donde V es el número total de vértices, A es el número total de aristas, y C es el número total de caras, para toda triangulación de $\mathcal{S}$.
Para la esfera $\mathcal{S}^2$, tenemos que $V = 6$, $A = 12$ y $C = 8$, así $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$. La importancia del número de Euler es que, aunque para una superficie hayan diferentes triangulaciones y a su vez diferente número de vértices, aristas y polígonos, χ es **independiente** de la triangulación. Por ejemplo para un tetraedro que se muestra en la figura (2.5), $V = 4$, $A = 6$ y $C = 4$, así $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$,

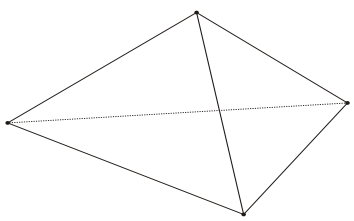


Figura 2.5. Triangulación del tetraedro.

lo mismo que para la esfera, ya que al "inflar" el tetraedro podemos obtener otra

triangulación para la esfera. Esto es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 2.1.3. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie compacta. Luego, para cualquier triangulación de $\mathcal{S}$,*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{K} d\mathcal{A} = 2\pi\chi, \tag{2.7}$$

donde χ es el ***número de Euler*** *de la triangulación, y $\iint_{\mathcal{S}}$ es la suma sobre todos los polígonos de la superficie compacta $\mathcal{S}$.*

Este teorema indica que la integral de K sobre la unión de un número finito de polígonos, todos contenidos en un sólo camino de superficie, que sean disjuntos, es simplemente la suma de las integrales de K en cada polígono, puesto que la curvatura y el diferencial de área no cambian por la elección del "parche" ni de la reparametrización, es decir, $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{K} d\mathcal{A}$ es independiente de la triangulación, lo cual implica que,

Corolario 2.1.1. *El número de Euler χ de una triangulación de una superficie compacta $\mathcal{S}$ depende sólo de $\mathcal{S}$ y no de la elección de la triangulación.*

Aplicando esto a $\mathcal{S}^2$, tenemos que

$$\iint_{\mathcal{S}^2} \mathrm{K} d\mathcal{A} = 4\pi \tag{2.8}$$

donde $\chi = 2$. Este resultado no es tan notable ya que $\mathrm{K} = 1$, entonces el lado derecho de la ecuación (2.8) es sólo el área de la esfera. Ahora, supongamos que deformamos la esfera, es decir, pensamos que la esfera es una lámina de goma y la estiramos pero sin romperla, para tal deformación de la esfera, K no será constante y calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{K} d\mathcal{A}$ será difícil. Pero si comenzamos con una triangulación de la esfera deformada, después de la deformación tendremos una triangulación de la esfera deformada con el *mismo número de vértices, aristas y polígonos como la triangulación original.* Y esto se da porque el número de Euler de la esfera deformada es el *mismo* que el de la esfera no deformada, es decir, $\chi = 2$, y de éste hecho se obtuvo la ecuación (2.8). Generalmente, esto indicaría que el número de Euler de *cualquier* superficie compacta no cambia cuando la superficie es deformada sin romperla. De aquí concluímos que χ debe ser netamente topológico.

Teorema 2.1.4. *Sea T_g una superficie compacta y cerrada con g-huecos, entonces*

$$\begin{aligned} \chi(T_g) &= 2 - 2g \\ &= 2(1-g) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Corolario 2.1.2. *Tenemos*

$$\begin{aligned}\iint_{T_g} \mathrm{K}d\mathcal{A} &= 2\pi\chi \\ &= 2\pi[2(1-g)] \\ &= 4\pi(1-g)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ejemplo 2.1.1. Calcular el TGB para el toro T_1.

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{K}d\mathcal{A} = 4\pi(1-g)$$

donde $g = 1$

$$\therefore \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{K}d\mathcal{A} = 0.$$

2.2 Teoría del transporte paralelo

Imaginemos que hay un camino que va a lo largo de la línea del Ecuador (en la superficie de la Tierra) y que viajamos a lo largo de ese camino con rapidez constante. El camino parece "perfectamente" recto, es decir, que no tendríamos que girar a la derecha o a la izquierda para continuar a lo largo del mismo. Por lo tanto, debemos percibir nuestra velocidad (y no sólo la rapidez) como constante. Por otro lado, un observador en el espacio podría ver que nuestra velocidad no es constante a medida que viajamos en un círculo en lugar de una línea recta. La resolución de ésta paradoja es que el observador que está en el espacio sólo "ve" la superficie de la Tierra, percibiendo sólo la componente de la aceleración tangencial a la superficie.

Para empezar analicemos cómo se comporta un vector al ser trasladado a lo largo de una curva en un plano: Dados dos puntos p y q unidos por una curva γ es posible tener un vector $\vec{a}$ en p, que sea igual (en magnitud y dirección) a lo largo de los puntos de la curva γ, como se muestra en la figura (3.4(a)).

Éste proceso se denomina ***transporte paralelo*** de un vector a lo largo de una curva.

Es importante resaltar que si escogemos otra curva γ uniendo los puntos p y q, el vector resultante de trasladar $\vec{a}$ desde p a q será el mismo, como se ilustra en el siguiente ejemplo (2.2.1).

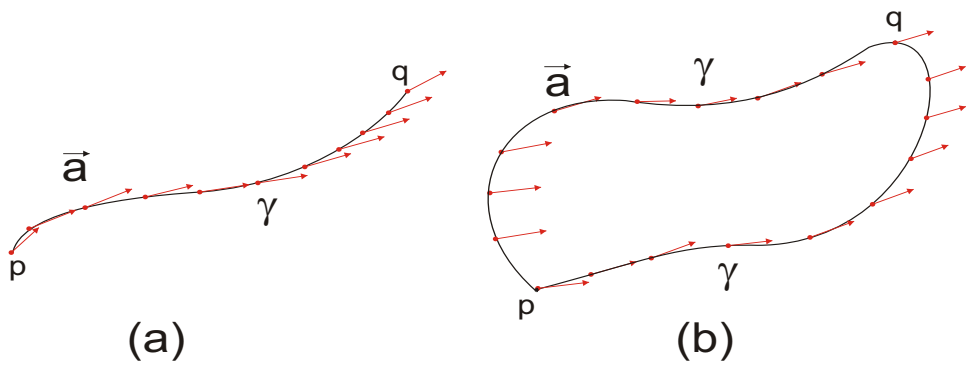


Figura 2.6. (a) Un vector $\vec{a}$ a lo largo de γ y (b) vector transportado paralelamente en un plano.

Ejemplo 2.2.1. Para un plano, la noción de campo vectorial paralelo a lo largo de una curva parametrizada se reduce a la de un campo constante a lo largo de la curva, es decir, la longitud del vector y su ángulo con una dirección fija son constantes. Como se ilustra en la figura (2.6 (b)).

En general, consideremos un campo de vectores tangentes $Y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en un plano de tres dimensiones y sea $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva en dicho plano, como se muestra en la figura (2.7).

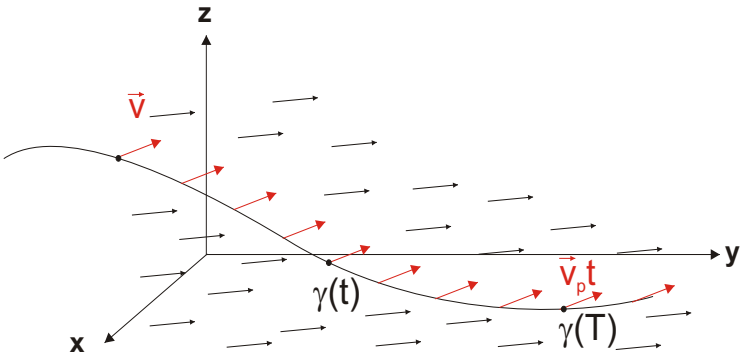


Figura 2.7. Campo vectorial Y.

Por lo tanto, si tenemos un vector $\vec{\mathbf{v}}$ para un punto inicial $(t = 0)$ viajando a lo largo de una curva, transcurrido un tiempo $(t = T)$, el vector será el *paralelo transportado* del vector en el punto inicial $\vec{\mathbf{v}}_p t$, si $Y(\gamma(t))$ cumple las siguientes condiciones:

i. $\mathrm{Y}(\gamma(0)) = \vec{\mathbf{v}}$

ii. $\mathrm{Y}(\gamma(T)) = \vec{\mathbf{v}}_p t$

Por consiguiente, ¿cuál es la condición necesaria para que haya transporte paralelo?.
Si calculamos la derivada total con respecto al tiempo de $\mathrm{Y}(\gamma(t))$ obtenemos que

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \dot{a}\sigma_1 + \dot{b}\sigma_2 + a\dot{\sigma}_1 + b\dot{\sigma}_2 \tag{2.11}$$

donde a y b son funciones reales, y las funciones $\dot{\sigma}_1$ y $\dot{\sigma}_2$ tienen componentes tangentes y componente normal a una superficie (o región considerada) en un campo de vectores como el de la figura (2.7).
Luego si analizamos detenidamente la derivada de un campo vectorial, vemos que podemos ignorar la componente normal ya que al movernos sobre la curva lo único importante es conocer las direcciones posibles de movimiento (componentes tangentes a ésta) y la posición donde se encontraría el observador. En pocas palabras, para un observador que se mueve a lo largo de la curva su dirección no cambia y percibe un movimiento rectilíneo, así que para él no tiene sentido "pensar" en una componente normal, puesto que no la percibe.
Por lo tanto, es necesario "separar" las componentes tangentes de la normal. Para ello definimos una derivada que dependa sólo de las componentes tangentes.
Entonces,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Y}(\gamma(t)) = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \delta\hat{\mathbf{N}} \tag{2.12}$$

donde $\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2$ contiene a $\dot{a}\sigma_1 + \dot{b}\sigma_2$ más toda la componente tangencial que contiene a $a\dot{\sigma}_1 + b\dot{\sigma}_2$ (ver 2.11), y se denomina la *derivada covariante*[3] D_t de Y a lo largo de la curva $\gamma(t)$ y $\delta\hat{\mathbf{N}}$ encierra "toda la parte normal".

Ahora queremos que, tanto el campo vectorial Y como la derivada covariante D_t, tengan la misma naturaleza, es decir, que pertenezcan al mismo espacio tangente. Lo importante aquí es la dirección en la que se mueva el observador, lo cual se

[3]La *derivada covariante* es una manera de especificar la derivada a lo largo de vectores tangentes de una superficie. Por lo tanto, el transporte de vectores tangentes a lo largo de una curva, proporciona una noción de *conexión* en la cual se pueden hacer comparaciones entre la geometría local en un punto y la geometría local en otro punto. En el contexto físico, la derivada covariante es empleada para calcular la aceleración inercial, es decir, la aceleración para un observador en "reposo" (en la superficie terrestre, por ejemplo) respecto a otro (observador externo).

describe con los vectores tangentes. Para ello necesitamos calcular formalmente la derivada covariante D_t de un campo vectorial Y a lo largo de γ.
Sea

$$\mathrm{Y}(\sigma(x^1,x^2)) = \mathrm{Y}^1(\sigma(x^1,x^2))\sigma_1 + \mathrm{Y}^2(\sigma(x^1,x^2))\sigma_2$$

donde Y^1 y Y^2 son funciones reales definidas sobre $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(t) &= \mathrm{Y}^1(\sigma(t))\sigma_1 + \mathrm{Y}^2(\sigma(t))\sigma_2\\ \frac{d\mathrm{Y}(t)}{dt} &= \dot{\mathrm{Y}}^1\sigma_1 + \mathrm{Y}^1\dot{\sigma}_1 + \dot{\mathrm{Y}}^2\sigma_2 + \mathrm{Y}^2\dot{\sigma}_2,\end{aligned}$$

donde a partir de las ecuaciones (1.37, 1.38 y 1.39) tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \frac{\partial\sigma_1}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t}\\ &= \sigma_{11}\dot{x}^1 + \sigma_{21}\dot{x}^2\\ &= (\Gamma^1_{11}\sigma_1 + \Gamma^2_{11}\sigma_2 + L\hat{\mathbf{N}})\dot{x}^1 + (\Gamma^1_{21}\sigma_1 + \Gamma^2_{21}\sigma_2 + M\hat{\mathbf{N}})\dot{x}^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_2 &= \sigma_{12}\dot{x}^1 + \sigma_{22}\dot{x}^2\\ &= (\Gamma^1_{12}\sigma_1 + \Gamma^2_{12}\sigma_2 + M\hat{\mathbf{N}})\dot{x}^1 + (\Gamma^1_{22}\sigma_1 + \Gamma^2_{22}\sigma_2 + N\hat{\mathbf{N}})\dot{x}^2\end{aligned}$$

Realizando la derivada obtenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{Y}}{dt} &= \sigma_1[\dot{\mathrm{Y}}^1 + (\Gamma^1_{11}\dot{x}^1 + \Gamma^1_{21}\dot{x}^2)\mathrm{Y}^1 + (\Gamma^1_{21}\dot{x}^1 + \Gamma^1_{22}\dot{x}^2)\mathrm{Y}^2]\\ &\quad + \sigma_2[\dot{\mathrm{Y}}^2 + (\Gamma^2_{11}\dot{x}^1 + \Gamma^2_{12}\dot{x}^2)\mathrm{Y}^1 + (\Gamma^2_{12}\dot{x}^1 + \Gamma^1_{22}\dot{x}^2)\mathrm{Y}^2]\\ &\quad + \hat{\mathbf{N}}[L\dot{x}^1\mathrm{Y}^1 + M\dot{x}^2\mathrm{Y}^1 + M\dot{x}^1\mathrm{Y}^2 + N\dot{x}^2\mathrm{Y}^2]\\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\mathrm{Y}}^i + \sum_{j,k=1}^{2}\mathrm{Y}^j\Gamma^i_{jk}\dot{x}^k\right)\sigma_i\\ &\quad + [\mathrm{Y}^1(L\dot{x}^1 + M\dot{x}^2) + \mathrm{Y}^2(M\dot{x}^1 + N\dot{x}^2)]\hat{\mathbf{N}}\end{aligned}$$

Lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Sea la derivada covariante*

$$D_t\mathrm{Y} = \sum_i\left(\dot{\mathrm{Y}}^i + \sum_{j,k}\mathrm{Y}^j\Gamma^i_{jk}\dot{x}^k\right)\sigma_i \tag{2.13}$$

Luego, si

$$D_t\mathrm{Y} = 0 \tag{2.14}$$

El campo vectorial Y *es "paralelo" a lo largo de* γ.

Entonces para lograr que haya transporte paralelo sobre una superficie se debe resolver la ecuación diferencial (2.14), exigiendo que en cada punto el vector no cambie de dirección para un observador que se encuentre sobre la superficie.

Por otro lado, podemos generalizar el transporte de vectores sobre curvas en superficies, como sigue:
Dada una curva γ sobre una superficie $\mathcal{S}$ y un vector tangente sobre el punto $p = \gamma(0)$. El vector paralelamente transportado desde p hasta $q = \gamma(T)$ es $\mathrm{Y}(\gamma(T))$, donde Y satisface $D_t\mathrm{Y}(\gamma(t)) = 0$. Luego al transportar paralelamente la imagen de $\vec{\mathbf{v}}$ de p a q, vemos que se genera un conjunto de vectores tangentes a la superficie a lo largo de la curva γ.

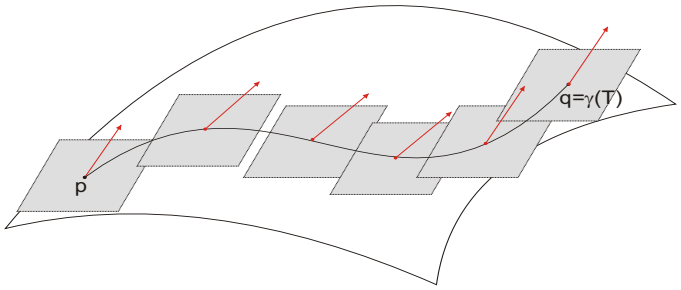


Figura 2.8. Conjunto de vectores tangentes sobre una superficie, generados por el transporte paralelo.

Por ejemplo, en la superficie mostrada en la figura (2.9), puede observarse que el desplazamiento paralelo es independiente del camino recorrido por el vector en la superficie lateral del cilindro,[4] es decir, que en la parte lateral cilindro, el vector transportado de p a b (siguiendo la línea punteada azul) será el mismo, y esto debido a que la curvatura de Gauss en esta parte es cero (así mismo sucede con el plano). Mientras que en la cara superior de p a c, el vector inicial y el paralelo transportado no coinciden, puesto que la curvatura cambia al pasar a través del borde del cilindro.

[4]Podemos ver que el resultado de desplazar paralelamente un vector a lo largo de un camino cerrado en una superficie depende de la curva o camino elegido. A éste fenómeno geométrico se le conoce como *Holonomía*.

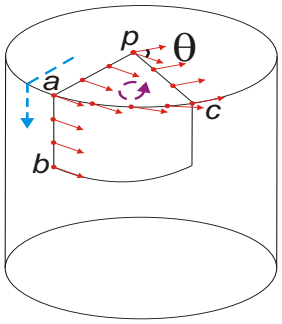


Figura 2.9. Transporte paralelo en un cilindro.

En general, existe una relación entre la curvatura de la superficie considerada y la desviación del vector transportado respecto a su posición inicial. En otras palabras, si tenemos una curva cerrada Ω sobre una superficie $\mathcal{S}$ como se muestra en la figura (2.10), el vector inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ y el vector final $\vec{\mathbf{v}}_f$ llegarán al mismo punto, a pesar de que por un desfase angular θ, sus direcciones no sean las mismas. Éste ángulo formado por el vector $\vec{\mathbf{v}}_i$ y su imagen $(\vec{\mathbf{v}}_f)$ por el transporte paralelo se denomina *ángulo de holonomía*.

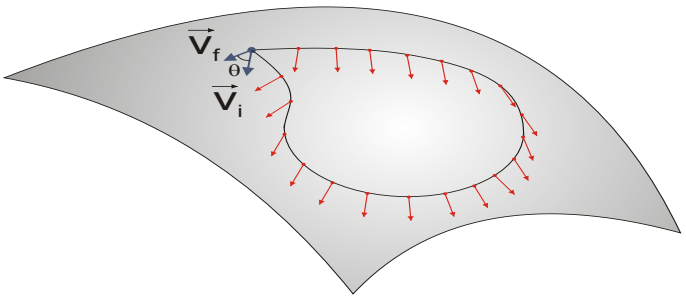


Figura 2.10. Desfase angular como resultado de transportar un vector en una superficie.

La medida de éste ángulo en radianes será[5]

$$\theta = \int_{\Omega} \mathrm{K} da \tag{2.15}$$

por lo que el ángulo de holonomía nos da la curvatura total de la región Ω.
Por otra parte, las curvas parametrizadas $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de un plano, donde el

[5]Tomado de [1], p. 362-364.

campo de vectores tangentes a las curvas $\dot{\gamma}(t)$ es paralelo, son precisamente líneas rectas de un plano. Las curvas parametrizadas sobre un plano que satisfacen una condición análoga a una superficie se llaman *geodésicas*. Por ejemplo, los grandes círculos $\mathcal{C}$ de una esfera $\mathcal{S}^2$ son geodésicas. De hecho, éstos se obtienen por la intersección de la esfera con un plano que pasa a través del centro O de la esfera. La normal principal en un punto $p \in \mathcal{C}$ se encuentra en la dirección de la línea que conecta p con O porque $\mathcal{C}$ es un círculo de centro O. Desde que $\mathcal{S}^2$ sea una esfera, la normal se encuentra en la misma dirección.
Ahora definiremos para una curva en una superficie un concepto análogo al de curvatura de planos curvados.

Definición 2.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una curva regular orientada contenida en una superficie orientada $\mathcal{S}$, y sea $\gamma(s)$ una parametrización de $\mathcal{C}$, en una vecindad de $p \in \mathcal{S}$, por la longitud de arco s. El valor algebraico de la derivada covariante $[D\dot{\gamma}(s)/ds] = \kappa_g$ de $\dot{\gamma}(s)$ en p se llama* ***curvatura geodésica*** *de $\mathcal{C}$ en p.*

Las geodésicas son curvas regulares que se caracterizan por tener curvatura geodésica cero.
Para un punto de referencia externo a la superficie, el valor absoluto de la curvatura geodésica κ_g de $\mathcal{C}$ en p es el valor absoluto de la componente tangencial del vector $\ddot{\gamma}(s) = \kappa n$, donde κ es la curvatura de $\mathcal{C}$ en p y n es el vector normal de $\mathcal{C}$ en p. Renombrando el valor absoluto de la componente normal del vector κ_n como el valor absoluto de la curvatura normal κ_n de $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ en p, tenemos que (ver figura 2.11).

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

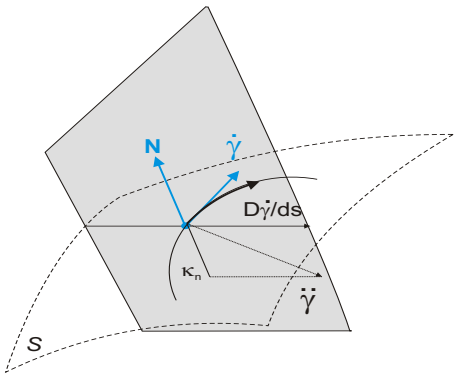


Figura 2.11. Geodésica y derivada covariante.

Por ejemplo, el valor absoluto de la curvatura geodésica κ_g de una paralela $\mathcal{C}$ de colatitud φ en una esfera unitaria $\mathcal{S}^2$ se puede calcular desde la relación (ver figura)

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \kappa_g^2 + \kappa_n^2 = 1 + \kappa_g^2;$$

que es,

$$\kappa_g^2 = \cot\varphi.$$

El signo de κ_g depende de la orientación de $\mathcal{S}^2$ y $\mathcal{C}$.
Una consecuencia de la interpretación desde un punto de vista externo a la superficie es que cuando dos superficies son tangentes a lo largo de una curva regular $\mathcal{C}$, el valor absoluto de la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ es la misma relativamente a alguna de las dos superficies.

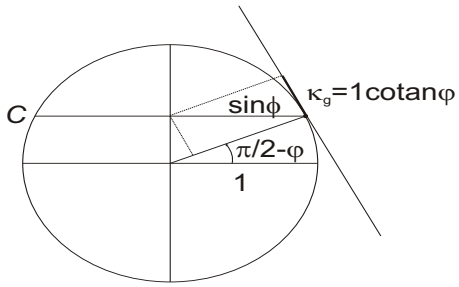


Figura 2.12. Curvatura geodésica de una paralela en una superficie unitaria.

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.2.3. *Para que una curva parametrizada γ sea una geodésica debe cumplir que*

$$\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0;$$

donde γ se llama geodésica parametrizada ***si el campo de sus vectores tangentes*** *$\dot{\gamma}(t)$* ***es paralelo a lo largo de*** *γ* ***en*** *t. Además, cumple que $\dot{\gamma}(s)$ es un vector de campo paralelo a lo largo de $\gamma(s)$, donde s es la longitud de arco.*

Observe que cada línea recta contenida en una superficie satisface la definición (2.2.3), además desde un punto de vista en el exterior de la superficie $\mathcal{S}$, esta definición es equivalente a decir que $\ddot{\gamma}(s) = \kappa n$ es normal al plano tangente, que es paralelo a la normal de la superficie. En otras palabras una curva regular $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}(\kappa \neq 0)$ es una geodésica si y sólo si su vector normal principal en cada punto $p \in \mathcal{C}$ es paralelo a la normal de $\mathcal{S}$ en p.

2.2.1 Relación entre transporte paralelo y curvatura.

Para calcular el transporte paralelo en la figura (2.13), utilizamos la ecuación diferencial (2.13) donde

$$\begin{aligned} D_t Y &= \frac{dY^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} Y^j \frac{dx^k}{dt} = 0 \\ \therefore dY^i &= -\Gamma^i_{jk} Y^j dx^k \end{aligned} \tag{2.16}$$

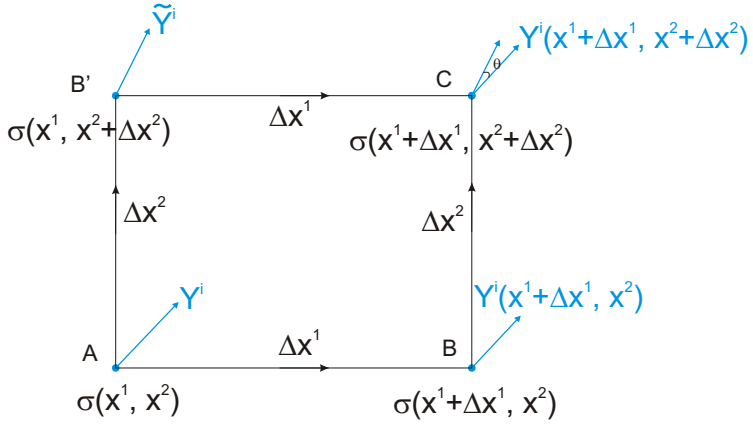


Figura 2.13. Un camino escogido para el transporte paralelo de un vector.

Sea Y^i un vector inicial en un campo vectorial dado por:

$$Y = Y^1(x^1, x^2)\sigma^1(x^1, x^2) + Y^2(x^1, x^2)\sigma^2(x^1, x^2)$$

Entonces el vector Y^i en el punto B será el paralelo transportado del vector Y^i en A y teniendo en cuenta (2.16) tenemos que,

$$Y^i_B(x^1 + \Delta x^1, x^2) = Y^i(x^1, x^2) - \Gamma^i_{j1}(x^1, x^2)Y^j(x^1, x^2)\Delta x^1 \tag{2.17}$$

A su vez, el vector Y^i en C será el paralelo transportado de Y^i en B, así

$$Y^i_C(x^1+\Delta x^1, x^2+\Delta x^2) = Y^i_B(x^1+\Delta x^1, x^2) - \Gamma^i_{j2}(x^1+\Delta x^1, x^2)Y^j(x^1+\Delta x^1, x^2)\Delta x^2 \tag{2.18}$$

Reescribiendo y usando (2.17),

$$\begin{aligned} Y^i_C(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2) = Y^i(x^1, x^2) &- \Gamma^i_{j1}(x^1, x^2)Y^j(x^1, x^2)\Delta x^1 \\ &- \Gamma^i_{j2}(x^1 + \Delta x^1, x^2)Y^j(x^1 + \Delta x^1, x^2)\Delta x^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ahora si transportamos los vectores por el otro camino indicado tenemos,

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^i(x^1, x^2 + \Delta x^2) &= Y^i(x^1, x^2) - \Gamma^i_{l2}(x^1, x^2)Y^l(x^1, x^2)\Delta x^2, \\
\tilde{Y}^i(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2) &= \tilde{Y}^i(x^1, x^2 + \Delta x^2) - \Gamma^i_{l1}(x^1, x^2 + \Delta x^2)\tilde{Y}^l(x^1, x^2 + \Delta x^2)\Delta x^1 \\
&= Y^i(x^1, x^2) - \Gamma^i_{l2}(x^1, x^2)Y^l(x^1, x^2)\Delta x^2 \\
&\quad - \Gamma^i_{l1}(x^1, x^2 + \Delta x^2)\tilde{Y}^l(x^1, x^2 + \Delta x^2)\Delta x^1
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Luego, resolvemos la serie de Taylor de orden 2,

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{j2}(x^1 + \Delta x^1, x^2)Y^j(x^1 + \Delta x^1, x^2)\Delta x^2 &= \left(\Gamma^i_{j2} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^i_{j2}\Delta x^1\right)(Y^j - \Gamma^j_{k1}Y^k\Delta x^1)\Delta x^2 \\
&= \Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^2 - \Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{k1}Y^k\Delta x^1\Delta x^2 \\
&\quad + \partial_1\Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^1\Delta x^2 - \partial_1\Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{k1}Y^k(\Delta x^1)^2\Delta x^2 \\
&= \Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^2 - \Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{k1}Y^k\Delta x^1\Delta x^2 + \partial_1\Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^1\Delta x^2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{l1}(x^1, x^2 + \Delta x^2)\tilde{Y}^l(x^1, x^2 + \Delta x^2)\Delta x^1 &= \Gamma^i_{l1}Y^l\Delta x^1 \\
&\quad - \Gamma^i_{l1}\Gamma^l_{r2}Y^r\Delta x^2\Delta x^1 + \partial_2\Gamma^i_{l1}Y^l\Delta x^2\Delta x^1
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Luego restamos las ecuaciones (2.19) y (2.20), y teniendo en cuenta (2.21) y (2.22)

$$\begin{aligned}
Y^i - \tilde{Y}^i &= Y^i - \Gamma^i_{j1}Y^j\Delta x^1 - \Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^2 \\
&\quad + \Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{k1}Y^k\Delta x^1\Delta x^2 - \partial_1\Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^1\Delta x^2 \\
&\quad - Y^i + \Gamma^i_{l2}Y^l\Delta x^2 + \Gamma^i_{l1}Y^l\Delta x^1 \\
&\quad - \Gamma^i_{l1}\Gamma^l_{r2}Y^r\Delta x^2\Delta x^1 + \partial_2\Gamma^i_{l1}Y^l\Delta x^2\Delta x^1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Los términos Y^i y los que son de orden 1 se cancelan de la ecuación. Así,

$$\begin{aligned}
Y^i - \tilde{Y}^i &= \Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{k1}Y^k\Delta x^1\Delta x^2 - \partial_1\Gamma^i_{j2}Y^j\Delta x^1\Delta x^2 \\
&\quad - \Gamma^i_{l1}\Gamma^l_{r2}Y^r\Delta x^2\Delta x^1 + \partial_2\Gamma^i_{l1}Y^l\Delta x^2\Delta x^1 \\
&= (\Gamma^i_{j2}\Gamma^j_{l1} - \Gamma^i_{j1}\Gamma^j_{l2})Y^l\Delta x^1\Delta x^2 + (\partial_2\Gamma^i_{j1} - \partial_1\Gamma^i_{j2})Y^j\Delta x^1\Delta x^2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

donde ∂_1 y ∂_2 son los campos vectoriales asociados a las coordenadas x^1 y x^2 y los Γ^k_{ij} son los *símbolos de Christoffel*, definidos en las ecuaciones (1.37, 1.38 y 1.39). Vemos que la ecuación (2.24) tiene precisamente la forma del *Tensor de Riemann (TR)*, en términos de los símbolos de Christoffel, dado por[6]

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} \equiv R^i_{\sigma 12} \tag{2.25}$$

[6]Ésta es la forma contravariante del tensor de Riemann.

El TR también se conoce como el *Tensor de Curvatura*, y sus componentes están dadas por

$$R^i_{\sigma\mu\nu} \equiv \sum_j g_{ij} R_{j\sigma\mu\nu} = \sum_j g^{ij} \det \begin{vmatrix} C_{j\mu} & C_{j\nu} \\ C_{\sigma\mu} & C_{\sigma\nu} \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

$$R^i_{\sigma 12} = g^{ij}(C_{j1}C_{\sigma 2} - C_{j2}C_{\sigma 1}) \tag{2.27}$$

Ahora recordemos que la curvatura total de una superficie está dada por[7]

$$\begin{aligned} \mathrm{K} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &\sim \frac{C_{j1}C_{\sigma 2} - C_{j2}C_{\sigma 1}}{g_{j1}g_{\sigma 2} - g_{j2}g_{\sigma 1}} \\ &\sim \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde el numerador viene dado por el TR y $EG - F^2$ se ha expresado en términos de la métrica g. Así obtenemos

$$\mathrm{K} = \frac{R^i_{\sigma 12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \tag{2.29}$$

De aquí concluimos que *la curvatura de Gauss de una superficie en* $\mathbb{R}^3$ *es determinada por los únicos coeficientes de la PFF*[8]. Además $R^i_{\sigma 12}$ está definido en términos de los símbolos de Christoffel y éstos símbolos se calculan a partir de las componentes del tensor métrico g.

[7] Ver la ecuación 1.33 y además se tuvo en cuenta la ecuación A.1.

[8] Ver Teorema "Egregio" de Gauss, en la sección 1.2.7.

Capítulo 3

CURVATURA Y POLARIZACIÓN.

En este capítulo se expone la teoría electromagnética de la polarización lineal y circular de las ondas electromagnéticas (OEM). Particular énfasis se hace sobre lo que sucede cuando el plano de polarización de la OEM rota alrededor de una fibra óptica; además, se revisa la Ecuación de Onda Electromagnética, y las condiciones de frontera en medios lineales. Finalmente, se analiza el comportamiento de la luz en una fibra óptica en forma de hélice, la rotación del plano de polarización a lo largo de ésta, y se ilustra la relación existente con el TGB.

3.1 Ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell (EM) se enuncian como sigue:

$$(i)\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad (ii)\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.1}$$

$$(iii)\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (iv)\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3.2}$$

o en términos del vector desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ y el vector intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$ tenemos,

$$(i)\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \qquad (ii)\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.3}$$

$$(iii)\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (iv)\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{3.4}$$

donde ρ_f es la *densidad volumétrica de carga libre*, $\mathbf{J}_f$ es el vector *densidad de corriente libre* y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$.

Las EM describen la *dinámica de los campos electromagnéticos*, es decir, dicen cómo el campo eléctrico puede ser producido ya sea por cargas (ρ) o cambiando los

campos magnéticos ($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$), y cómo los campos magnéticos pueden ser producidos por corrientes ($\mathbf{J}$) o cambiando campos eléctricos ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$). Estas ecuaciones deben estar acompañadas de la ecuación de fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, que describe la *dinámica de las cargas*, y que además dicen cómo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ actúan sobre ρ y $\mathbf{J}$.

3.1.1 Ecuación de onda para E y B.

Para cargas y corrientes en el interior de materiales lineales, isotrópicos y homogéneos $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Aplicando el rotacional a (iii) y (iv) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} &= \nabla \times \left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \\
&= \epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

con $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2\mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{3.5}$$

Este par de ecuaciones indica la existencia de campos electromagnéticos en ausencia de fuentes; admiten soluciones no triviales que corresponden a campos ondulatorios que se propagan a velocidad $v = c/\sqrt{\mu\epsilon}$, donde $n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ es el *índice de refracción* del material. En el caso de los dieléctricos, μ es cercano a μ_0, por tanto

$$n \cong \sqrt{\epsilon_r}, \tag{3.6}$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica. Si ϵ_r es mayor que 1, la luz viaja más lentamente a través de la materia. Así para medios lineales (donde ϵ_0 es cercano a ϵ y μ_0 es cercano a μ) la densidad de energía y el vector de Poynting serán

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \tag{3.7}$$

Las ondas planas monocromáticas, en medios no dispersos, la frecuencia y el número de onda están relacionados por $w = kv$, la amplitud de $\mathbf{B}$ es $1/v$ veces la

amplitud de $\mathbf{E}$[1], y la intensidad es

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2. \tag{3.8}$$

3.2 Polarización.

La polarización de una OEM está determinada por convención, por la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. En una OEM los campos eléctrico y magnético oscilan a lo largo del eje de propagación transportando energía a través del espacio.
Hay, por supuesto, dos dimensiones perpendiculares a cualquier línea de propagación dada. De acuerdo con esto, las ondas transversales ocurren en dos estados independientes de **polarización**: podemos agitar una cuerda hacia arriba y hacia abajo (polarización "vertical"),

$$\mathbf{f}_v(z,t) = Ae^{i(kz-wt)}\hat{\mathbf{x}}, \tag{3.9}$$

o hacia la derecha y hacia la izquierda (polarización "horizontal")

$$\mathbf{f}_h(z,t) = Ae^{i(kz-wt)}\hat{\mathbf{y}}, \tag{3.10}$$

o a lo largo de cualquier otra dirección en el plano xy:

$$\mathbf{f}(z,t) = Ae^{i(kz-wt)}\hat{\mathbf{n}}. \tag{3.11}$$

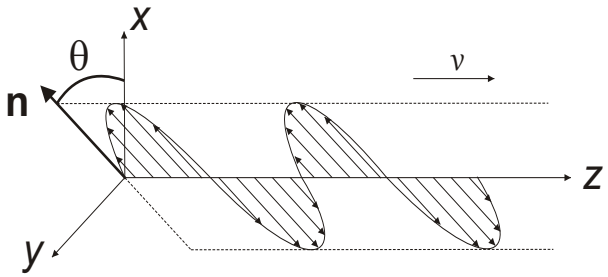


Figura 3.1. Vector de polarización.

El **vector de polarización $\hat{\mathbf{n}}$** define el plano de vibración de la onda, debido a que éstas son transversales, $\hat{\mathbf{n}}$ es perpendicular a la dirección de propagación:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0. \tag{3.12}$$

[1]Para una onda plana monocromática $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están *en fase* y *mutuamente perpendiculares*, por lo tanto sus amplitudes reales se relacionan por: $B_0 = \frac{k}{w}E_0 = \frac{1}{c}E_0$.

En términos del **ángulo de polarización** θ, el ángulo formado por la dirección del campo eléctrico y el eje x, se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}. \tag{3.13}$$

Así, la onda mostrada en la figura (3.1) puede ser considerada una superposición de dos ondas -una polarizada horizontalmente y la otra verticalmente:

$$\mathbf{f}(z,t) = (A\cos\theta)e^{i(kz-wt)}\hat{\mathbf{x}} + (A\sin\theta)e^{i(kz-wt)}\hat{\mathbf{y}}. \tag{3.14}$$

3.2.1 Polarización lineal.

En la figura (3.2), se presenta una OEM que se propaga en la dirección z mientras $\mathbf{E}$ oscila entre x y y. Al plano formado por $\mathbf{E}$ y la dirección de propagación se le conoce como **plano de polarización** de la onda.
Las componentes de $\mathbf{E}$ en este caso vienen dadas por:

$$\mathbf{E}_x(z,t) = \hat{\mathbf{i}}E_{ox}\cos(kz-\omega t) \tag{3.15}$$

$$\mathbf{E}_y(z,t) = \hat{\mathbf{j}}E_{oy}\cos(kz-\omega t+\varepsilon) \tag{3.16}$$

donde k es el vector de propagación, ω es la frecuencia angular y ε es la diferencia de fase entre las ondas ambas viajando en la dirección z. Si ε es cero o un múltiplo entero de $\pm 2\pi$, se dice que las ondas están en fase, en este caso la onda resultante será la suma vectorial de las dos ondas perpendicules (ecuaciones (3.2.1)),

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}}E_{ox} + \hat{\mathbf{j}}E_{oy})\cos(kz-\omega t) \tag{3.17}$$

Por consiguiente, la onda resultante tiene una amplitud fija igual a $\|\|\hat{\mathbf{i}}E_{ox}+\hat{\mathbf{j}}E_{oy}\|\|$. Se llama **polarización lineal** al caso en que las ondas están en fase, como se muestra en la figura (3.2).

3.2.2 Polarización circular.

Otro caso especial aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud (es decir, $E_{ox} = E_{oy} = E_0$) y su diferencia de fase $\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. En otras palabras, $\varepsilon = -\pi/2$ o cualquier valor aumentado o disminuido desde $\pi/2$ o en múltiplos enteros de 2π. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_x(z,t) = \hat{\mathbf{i}}E_0\cos(kz-\omega t) \tag{3.18}$$

$$\mathbf{E}_y(z,t) = \hat{\mathbf{j}}E_0\sin(kz-\omega t). \tag{3.19}$$

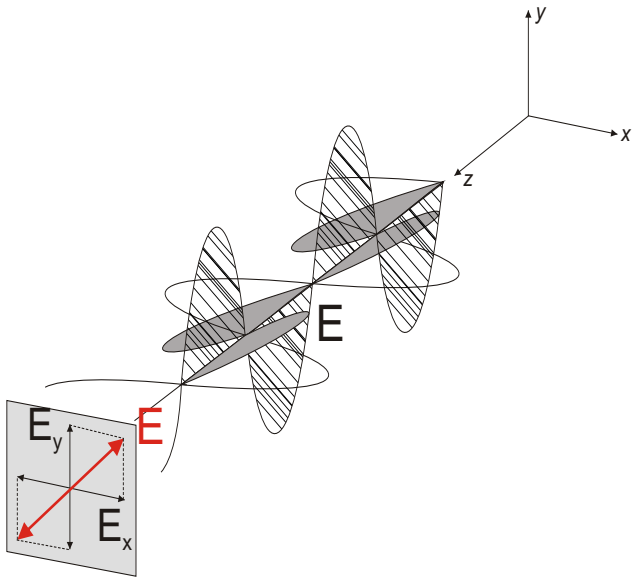


Figura 3.2. Luz linealmente polarizada.

La onda resultante será

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}}\cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}\sin(kz - \omega t)] \tag{3.20}$$

Por lo que la amplitud escalar de $\mathbf{E}$, es decir $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})^{1/2} = E_0$ es una constante. Pero la dirección de $\mathbf{E}$ varía con el tiempo y no está restringida a un sólo plano. La figura (3.3) muestra lo que sucede en algún punto arbitrario z_0 en el eje. En $t = 0$, $\mathbf{E}$ se encuentra a lo largo del eje de referencia en la figura (3.3) y así

$$\mathbf{E}_x = \hat{\mathbf{i}}E_0\cos kz_0 \qquad y \qquad \mathbf{E}_y = \hat{\mathbf{j}}E_0\sin kz_0$$

Un tiempo después $t = kz_0/\omega$, $\mathbf{E}_x = \hat{\mathbf{i}}E_0$, $\mathbf{E}_y = 0$ y $\mathbf{E}$ se encuentra a lo largo del eje x. Vemos que el $\mathbf{E}$ resultante gira en el sentido de las manecillas del reloj con una frecuencia angular ω vista por un observador hacia quien la onda se dirige. Esta onda tiene **polarización circular a derechas** como se muestra en la figura (3.3). El vector $\mathbf{E}$ realiza una rotación completa cuando la onda avanza a través de una longitud de onda donde la amplitud no se ve afectada, pero $\mathbf{E}$ gira a izquierdas y la onda tiene **polarización circular a izquierdas**.

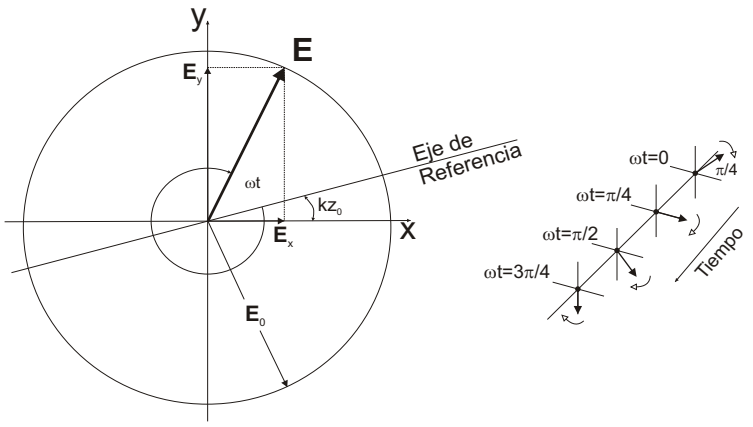


Figura 3.3. Onda lumínica circular a derechas.

3.3 Teorema de Gauss-Bonnet y la rotación de la polarización en una fibra óptica.

Consideremos una fibra óptica que solo permite un modo de propagación llamada *monomodo*, la cual no presenta birrefringencia lineal[2] intrínseca y que no tiene torsiones.

En primera instancia asumimos que la fibra esta doblada en una curva sobre un plano como se muestra en la figura (3.4). La luz polarizada en la fibra, su dirección transversal de polarización está dada por el vector campo eléctrico **E**, entonces la dirección de polarización forma un ángulo constante con el vector binormal **b**. Para una curva plana $\theta_1 = \theta_2$[3] y no hay rotación en el plano de polarización, por lo tanto **b** se mantiene constante.

[2]El fenómeno conocido como *birrefringencia lineal* se presenta cuando el estado de polarización de la luz en una fibra cambia obtiéndose dos modos de polarización, un rayo polarizado ordinario en un plano normal al *eje óptico* (eje de simetría del material), o un rayo polarizado extraordinario en un plano que contiene al eje óptico.

[3]Tomado de [9].

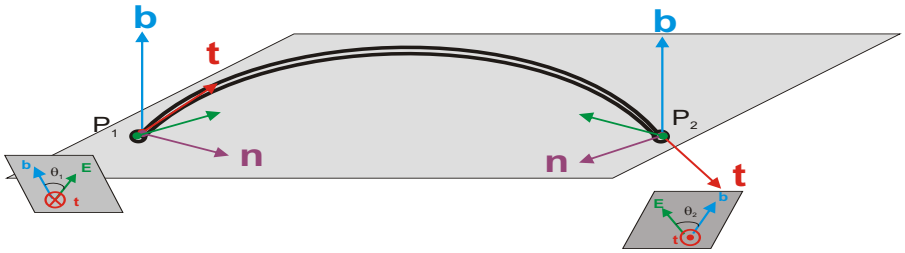


Figura 3.4. Fibra óptica en una curva plana.

Ahora en el caso de una curva no plana, el plano de polarización si rota, como se muestra en la figura (3.5).

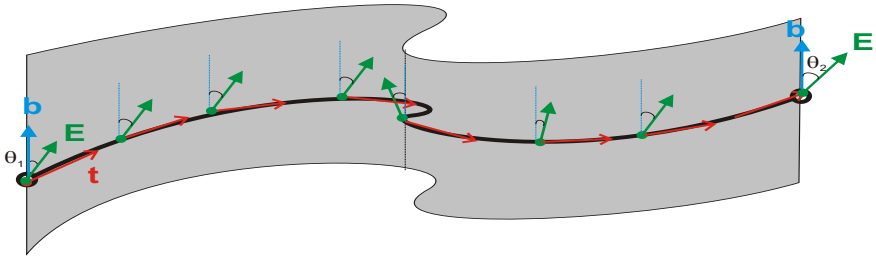


Figura 3.5. Fibra óptica en una curva no plana.

Para ver esto situamos el eje de la fibra a lo largo de una curva $\mathbf{r}(s)$ donde s es la distancia de la curva (longitud del camino por la fibra) desde un punto arbitrario P_0 (ver figura (3.6)). En el punto P_1 podemos definir una tríada de vectores ortonormales $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{b}_1$, donde $\mathbf{t}_1$ es tangente a la curva, $\mathbf{n}_1$ es el vector normal (apunta hacia el centro de curvatura) y $\mathbf{b}_1$ es normal al plano osculador[4]

[4]Plano que contiene en cada punto de una curva a los vectores tangente y normal.

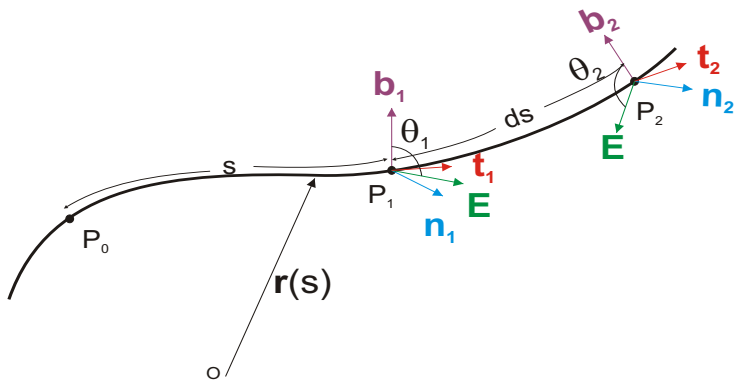


Figura 3.6. Eje de la fibra óptica en una curva no plana.

En P_2, se define una distancia corta ds a lo largo de la curva desde P_1 a la segunda tríada ortonormal de vectores $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{b}_2$. Siempre que ds sea suficientemente pequeño, el ángulo entre $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ es τds, donde τ es la torsión:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \tag{3.21}$$

Para la luz polarizada linealmente a lo largo de la fibra es conveniente usar el conjunto ortonormal de vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ para definir la orientación de la polarización. Si el vector campo eléctrico forma un ángulo θ_1 respecto a $\mathbf{b}_1$ en P_1, y luego forma el mismo ángulo respecto a $\mathbf{b}_1$ en P_2, (con tal que ds sea pequeño) de acuerdo con el axioma mencionado anteriormente, el ángulo respecto al binormal $\mathbf{b}_2$ en P_2 será

$$\theta_2 = \theta_1 - \tau ds \tag{3.22}$$

En consecuencia, la orientación de la polarización (θ_p) en el punto P respecto al vector binormal local está relacionada con la orientación de la polarización θ_0 en P_0 por

$$\theta_P = \theta_0 - \int_{P_0}^{P} \tau ds \tag{3.23}$$

Teniendo en cuenta que si la curva es plana $\tau = 0$ y $\theta_P = \theta_0$, según sea necesario. Además, si parte de la fibra es recta, $\mathbf{b}$ no está definido, y será necesario usar la dirección de $\mathbf{b}$, bien al comienzo o al final de la sección recta de la fibra, y la polarización no cambiará a lo largo de la sección recta. Ahora si consideramos una fibra de longitud finita, la rotación de la dirección de polarización es

$$\Delta\theta = \theta_{P_2} - \theta_{P_1} = -\int_{P_1}^{P_2} \tau ds \tag{3.24}$$

donde

$$\tau = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t} \tag{3.25}$$

teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = -\tau(s)\mathbf{n}$. Entonces la ecuación (3.24) es

$$\Delta\theta = -\int (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{t} ds \tag{3.26}$$

Sin embargo, necesitamos expresar la rotación del plano de polarización de la luz en términos de la derivada de $\mathbf{r}(s)$, es decir, en términos del único parámetro vectorial que describe la localización de la fibra. Para ello recordamos que $\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ donde $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, entonces de la ecuación (1.10) tenemos

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{\kappa}\ddot{\mathbf{r}} \tag{3.27}$$

Derivando la expresión anterior utilizando la diferenciación del producto vectorial, tenemos

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa}\dddot{\mathbf{r}} - \frac{1}{\kappa^2}\frac{d\kappa}{ds}\ddot{\mathbf{r}} \tag{3.28}$$

Calculándo el producto vectorial entre (3.27) y (3.28) tenemos

$$\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa^2}\ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}} \tag{3.29}$$

Y finalmente,

$$\Delta\theta = -\int \left(\frac{1}{\kappa^2}\ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}} ds. \tag{3.30}$$

En el experimento realizado por Tomita y Chiao ([6]) la dirección inicial y final de la fibra son las mismas, así el vector tangente $\mathbf{T}$ regresa a su valor inicial. La curva que describe el espacio tangente es, por lo tanto un circuito cerrado y, sabiendo que $\mathbf{T}$ es un vector unitario, entonces ésta será un "circuito" cerrado en la superficie de una esfera, como se muestra en la figura (3.7). Si la curva en el espacio tangente está parametrizada por t y dada por la función vectorial evaluada, entonces

$$\mathbf{T} = \mathbf{Y}(t) \tag{3.31}$$

En cada punto, definimos el vector tangente $\mathbf{t}$ de la curva como $\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \dot{\mathbf{Y}}$. Donde $\dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = \kappa^2$ si $\dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$, por lo tanto sea $t = \kappa s$, el vector tangente $\mathbf{t}$ tiene longitud unitaria

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} = 1. \tag{3.32}$$

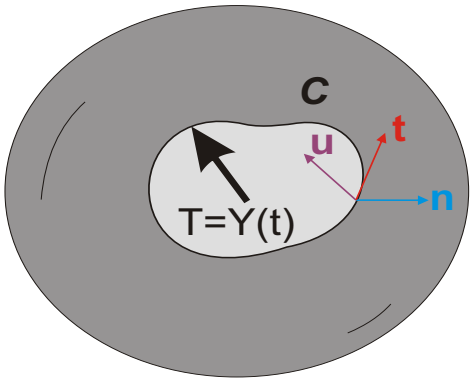


Figura 3.7. Circuito cerrado formado por $\mathbf{T}$ en la superficie de una esfera.

Luego $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Y}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \kappa\dot{\mathbf{Y}}$, $\dddot{\mathbf{r}} = \kappa^2\ddot{\mathbf{Y}} + \left(\frac{d\kappa}{ds}\right)\dot{\mathbf{Y}}$ y desde la ecuación (3.30) tenemos que

$$\Delta\theta = -\int \frac{1}{\kappa^2}\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\times\dddot{\mathbf{r}}\,ds = -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{Y}\cdot\dot{\mathbf{Y}}\times\ddot{\mathbf{Y}}\,dt \tag{3.33}$$

Esto expresa la rotación del ángulo de polarización como una integral de línea alrededor de un camino cerrado $\mathcal{C}$ en el espacio tangente.
Ahora realizando un análisis (similar al dado anteriormente para la fibra en un espacio de parámetros) para la fibra desde el espacio tangente a ella: primero observamos que $\mathbf{t}$ es normal a la curva C (ver figura (3.8)), entonces si $\mathbf{m}$ es el vector normal unitario a C (y en el plano osculador de C) escribimos,

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{m}, \tag{3.34}$$

$\mathbf{m}$ aunque es normal a la curva C, no es en general normal a la superficie donde ésta la curva. Si $\mathbf{u}$ es el vector perpendicular unitario a $\mathbf{t}$ en el plano tangente de la superficie, y $\mathbf{n}$ es el normal unitario a la superficie, resolvemos $\mathbf{t}$ como:

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa_g\mathbf{u} + \kappa_n\mathbf{n} = \kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{t}) + \kappa_n\mathbf{n} \tag{3.35}$$

donde κ_n y κ_g son la *curvatura normal y geodésica de la curva* (ver sección 1.2.5). Si cualquier punto del plano osculador de la curva es normal a la esfera, luego $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ y $\kappa_g = 0$.

Por otro lado, si $\mathbf{Y} = \mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{t}$ y $\ddot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{t}}$ entonces,

$$\kappa_g = \ddot{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{Y}\times\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\cdot\dot{\mathbf{Y}}\times\ddot{\mathbf{Y}}$$

Y desde la ecuación (3.33) tenemos que,

$$\Delta\theta = -\oint_C \kappa_g dt \tag{3.36}$$

Lo cual representa la curvatura geodésica total del camino. El TGB relaciona ésta integral con la integral de área de la curvatura gaussiana en la superficie encerrada por el camino. Dicho teorema dice que si C es una curva cerrada suave, luego desde la ecuación (2.1) tenemos

$$\oint_C \kappa_g dt = 2\pi - \iint \mathrm{K} dA, \tag{3.37}$$

donde K es la curvatura gaussiana, y la integral del lado derecho está en el área encerrada por C. Desde (3.36) y (3.37) la rotación del plano de polarización es

$$\Delta\theta = \iint \mathrm{K} dA - 2\pi \tag{3.38}$$

La integral $\iint \mathrm{K} dA$ sobre una superficie arbitraria tiene una interpretación geométrica simple: $|\mathrm{K}|dA = dA_s$ es el elemento de área de la imagen esférica del elemento de superficie. Esto será el ángulo sólido "apretado" en el espacio tangente,

$$\Delta\theta = \Omega(C) - 2\pi \tag{3.39}$$

$$\tag{3.40}$$

3.4 Cálculo de ángulo de polarización.

A continuación se calcula la fase geométrica en una fibra óptica, a partir del TGB. La figura (3.8) muestra la trayectoria seguida por la luz (descrita por el vector tangente $\mathbf{t}$) a través de la fibra óptica; así es posible definir la triada de vectores ortonormales $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}$. La ecuación que describe el camino de la fibra en la hélice circular en función de un parámetro t está dada por

$$\vec{r}(t) = \left(R\cos t, R\sin t, \frac{ht}{2\pi} \right)$$

Luego

$$L = 2\pi s = 2\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = 2\pi\sqrt{R^2 + b^2}. \tag{3.41}$$

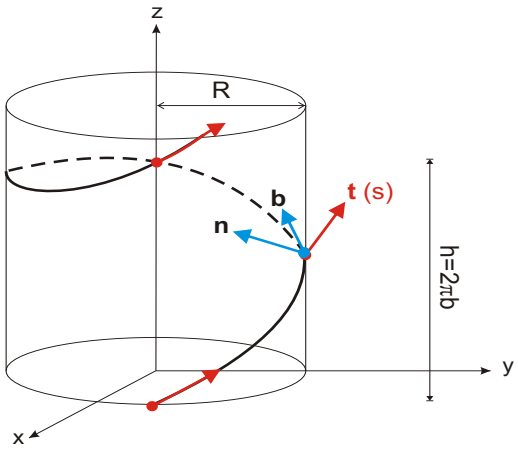


Figura 3.8. Camino seguido por la luz en la fibra óptica.

Además, parametrizando la ecuación respecto a la longitud de arco s tenemos

$$\gamma(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}\right), \left(\frac{bs}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)\right)$$

donde $s = \sqrt{R^2+b^2}t$. Teniendo en cuenta el ejemplo (1.1.9) y la ecuación (3.41) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) &= \frac{2\pi}{L}\left(-R\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), R\cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right), b\right)\\
\dot{\mathbf{t}}(s) &= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 R\left(-\cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right), -\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), 0\right) \equiv \kappa\mathbf{n}\\
\therefore \kappa &= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 R\\
\mathbf{n} &= \left(-\cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right), -\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), 0\right)\\
\mathbf{b} &= \mathbf{t}\times\mathbf{n}\\
\dot{\mathbf{b}} &= \frac{2\pi}{L}\left(-\frac{2\pi b}{L}\cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right), -\frac{2\pi b}{L}\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), 0\right) \qquad (3.42)\\
&= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 b\mathbf{n} \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la torsión de la hélice dada por (1.1.9) encontramos que,

$$\tau = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 b = \frac{b}{R^2+b^2} \qquad (3.44)$$

Como vemos, según la ecuación (3.42) si $t(0) = t(L)$, la fibra describirá un camino cerrado en la superficie de una esfera. Al colocar cada vector tangente en la superficie de la esfera, se obtiene una trayectoria sobre la misma como se muestra en la figura (3.9). Tomando la ecuación (3.24) e integrando de 0 a L tenemos,

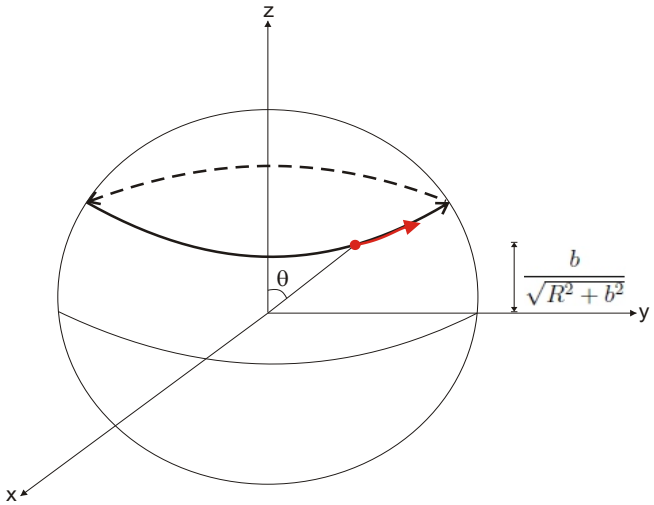


Figura 3.9. Proyección del vector tangente a lo largo de la fibra en la superficie de una esfera.

$$\Delta\theta = -\int_0^L \tau ds = -L\tau = -L\frac{b}{R^2+b^2} \tag{3.45}$$
$$= -\frac{2\pi b}{\sqrt{R^2+b^2}}$$

Análogo a la fase de Berry ([6]) dada por

$$\gamma(C) = -\sigma\Omega(C) \tag{3.46}$$
$$\Omega(C) = 2\pi N(1-\cos\theta) \tag{3.47}$$

donde σ es la helicidad del fotón para el caso cuántico[5], $\Omega(C)$ es el ángulo sólido en el centro de la esfera, θ es el ángulo de inclinación de la hélice y N es el número de vueltas de la hélice.

En particular tenemos que,

$$\Omega(C) = 2\pi(1-\cos\theta) = 2\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$$
$$= 2\pi - \frac{2\pi b}{\sqrt{R^2+b^2}} \tag{3.48}$$

[5]En nuestro caso clásico, consideramos esto como una constante.

De la ecuación (3.45) tenemos que,

$$\Delta\theta = -\frac{2\pi}{L}(2\pi b) \tag{3.49}$$

Por lo tanto la fase geométrica de una fibra óptica en forma de hélice será

$$\Omega(C) = 2\pi - \Delta\theta = 2\pi - \frac{2\pi}{L}(2\pi b). \tag{3.50}$$

Capítulo 4

INTERDISCIPLINARIEDAD.

Los problemas de la investigación científica actual, se derivan de elementos particulares de carácter interdisciplinar, que exigen aproximaciones de esta misma naturaleza. Esta condición ha impuesto la necesidad de actualizar los currículos y la enseñanza de los mismos, reorientándolos hacia una noción interdisciplinar en la que se comprendan las conexiones y relaciones entre la Física y las Matemáticas, en particular. En éste capítulo se analizará el carácter integral de las disciplinas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, y las debidas implicaciones en la enseñanza universitaria. Además, se presentará una propuesta pedagógica del desarrollo interdisciplinar entre la geometría diferencial, la topología y la física, con el objetivo de ilustrar y motivar en el estudiante el estudio de estas conexiones "escondidas" entre estas tres ramas del conocimiento.

4.1 Interdisciplinariedad en el proceso Enseñanza-Aprendizaje.

La primera idea que surge de la palabra "interdisciplinariedad" nace de su misma estructura verbal: "inter" (lo que se da entre) y "disciplinariedad" (que expresa la calidad de disciplina). Esto hace referencia a un intercambio o interaccion de conocimiento entre disciplinas. Sin embargo, "un trabajo de esta naturaleza exige que cada uno de los que intervienen tenga competencia en su respectiva disciplina y un cierto conocimiento de los contenidos y métodos de las otras". Además, *"la interdisciplinariedad sólo es posible a partir de saberes y competencias de cada una de las disciplinas"*(Ander-Egg, p.25). Es decir, cada uno de los participantes

debe conocer o tener una iniciación en las otras áreas, ya que la interdisciplinariedad no es sólo resolver un problema, sino que es un desafío y una tarea, cuya realización tiene muchas dificultades. "Las razones y la necesidad de un abordaje interdisciplinar surgen de la idea de complejidad o, para ser más precisos, surgen del hecho mismo de asumir la complejidad de lo real"(Ander-Egg, p.28). Para el problema central de éste trabajo, la interdisciplinariedad nace de la búsqueda de entrelazar disciplinas para un mejor tratamiento y comprensión de los conceptos y principios físicos a partir de puntos de vista netamente geométricos.
No obstante, desde los inicios de las antiguas civilizaciones, la ciencia se presentaba como un todo único y los saberes dentro de ella estaban integrados. Con la aparición y desarrollo moderno de la ciencia, se fue produciendo una progresiva fragmentación de éstos saberes, con el objeto de estudiar más profundamente los fenómenos naturales. De esta manera, nacieron y se desarrollaron nuevas disciplinas científicas durante los siglos XVII y XVIII, apareciendo saberes más autónomos y una creciente especialización de cada una de las diversas áreas, debido a la cantidad de información, a la acumulación de conocimientos y de nuevos desarrollos científicos y tecnológicos que llevaron a la necesidad de especializarse. Sin embargo, la ciencia actual ha requerido la interacción conceptual y procedimental en las disciplinas científicas. Este proceso viene dado por tres factores principales[1]:

1. La necesidad de una mayor profundización teórica y de comprensión de los propios objetos de las ciencias que, con la ayuda de otras disciplinas, alcanzan un mayor nivel.

2. Como un factor importante para elevar la calidad de las investigaciones científicas.

3. Como un imperativo científico y tecnológico para la comprensión de los procesos globales, dificultados por la especialización de los conocimientos, habida cuenta de la complejidad de lo real.

Los saberes autónomos, las disciplinas por separado, representaron un gran desarrollo para la ciencia y la tecnología en la historia de la humanidad. Pero, como señala Edgar Morin, **los problemas más sustanciales e importantes siempre son los problemas globales**. Ahora bien, la ciencia actual exige la integración de áreas y conocimientos científicos, con el propósito de abordar la realidad en su

[1]Tomado de [18], p.25-32

enorme complejidad; el desarrollo individual de cada saber, permitió especializarnos en teorías y conceptos necesarios para "comprender" lo que nos rodea, ahora el mismo universo nos exige integrar éstas ciencias y conocimientos científicos, como señalaba Max Planck: *"Desde tiempos remotos, desde que existe el estudio de la naturaleza, éste tuvo ante sí como ideal el propósito final y supremo de agrupar la abigarrada diversidad de los fenómenos físicos en un sistema y, a poder ser, en una fórmula"*[2].

En resumen, un modelo de enseñanza-aprendizaje exige un enfoque globalizador e interdisciplinario como un tratamiento integrador de los conocimientos puntuales, en donde no se propongan conocimientos adicionales, sino que se procure establecer conexiones y relaciones de los saberes, en una totalidad no dividida y en permanente cambio[3].

4.2 Aspectos generales de una práctica interdisciplinar.

Con el objetivo de analizar e ilustrar el carácter interdisciplinar entre la geometría diferencial, la topología y la física, se mostrarán los aspectos generales para desarrollar una práctica o unidad didáctica interdisciplinar.

(**i**.) **Formular un marco de referencia:** Para realizar un trabajo pedagógico interdisciplinar, es conveniente realizar un marco referencial donde se integren, organicen y articulen los aspectos puntuales que se estudiarán desde cada una de las disciplinas. Además, es una forma de contextualizar el trabajo en marcos teóricos de investigación científica.

(**ii**.) **Trabajar de acuerdo con un esquema de investigación/acción:** A nivel interdisciplinar se sugiere trabajar con un esquema de investigación/acción que de respuesta a dos grandes cuestiones: ***-¿Qué pasa?***, en esta fase se procura tener un amplio conocimiento del tema o problema que será objeto de un tratamiento interdisciplinario. A esta fase se le puede considerar como la realización de un diagnóstico de la situación, consistente en recolectar datos e información sobre el tema en cuestión. ***-¿Qué hacer?***, en este punto

[2]Planck, M. Unidad del panorama físico del mundo. 1966

[3]Parafraseando de [18], p.35.

hay que llegar a respuestas concretas que apunten a la solución de los problemas que se han estudiado. En ocasiones podemos ser muy críticos frente a los problemas que aquejan a nuestra sociedad, pero en la práctica no es fácil cambiar la situación o proponer alternativas para mejorar. Responder al -*¿qué hacer?* es fundamentalmente hacer propuestas. Estas propuestas han de ser: generales y particulares. Las generales hacen referencia a que van más allá de lo que se puede hacer en el entorno inmediato. Mientras que en las particulares, se aplican los conocimientos y resultados del trabajo interdisciplinar, en su propia cotidianidad y en su propio entorno.

(**iii**.) **Explicitar y programar las actividades a realizar:** Esta fase comprende de la realización de una estrategia metodológica y va acorde al marco referencial y a los objetivos inicialmente propuestos.

(**iv**.) **Elaboración y presentación del trabajo final:** Esta última fase se puede realizar utilizando una gran variedad de formas y procedimientos de expresión y comunicación, dependiendo de la naturaleza y características del tema u objeto que ha sido escogido para llevar a cabo la tarea educativa/interdisciplinar.[4].

4.2.1 Propuesta de una práctica pedagógica interdisciplinar: Geometría, Topología y Física.

A partir del problema central estudiado, cuya temática giró entorno a la fase geometría que se observa en una fibra óptica al ser enrollada en forma de hélice empleando el TGB, se pretende ilustrar un ejemplo de una práctica pedagógica interdisciplinar entre la Geometría Diferencial, la Topología y la Física.

(**i**.) El marco referencial para la temática trabajada se evidencia en los dos primeros capítulos, en los cuales se presentan y organizan los fundamentos para comprender el problema central presentado en el tercer capítulo. Una manera esquemática de presentar este marco referencial es el indicado en la figura (4.1). Los primeros recuadros (curvas y superficies, curvatura y transporte paralelo) tienen un desarrollo particular desde la geometría diferencial de superficies. Desde el tercer recuadro (curvatura y polarización), se evidencia la conexión entre el TGB y el vector de polarización en una fibra óptica.

[4]Tomado de [18], p.70-92.

Vemos que en el trabajo coordinado entre la geometría diferencial, la topología y la física, en función de la comprensión del fenómeno educativo, el problema estudiado no se justifica por sí solo, sino en relación al aporte que algunas teorías, conceptos y enfoques que cada asignatura hace a la comprensión de dicha problemática[5]. Para ilustrar el contenido interdisciplinar

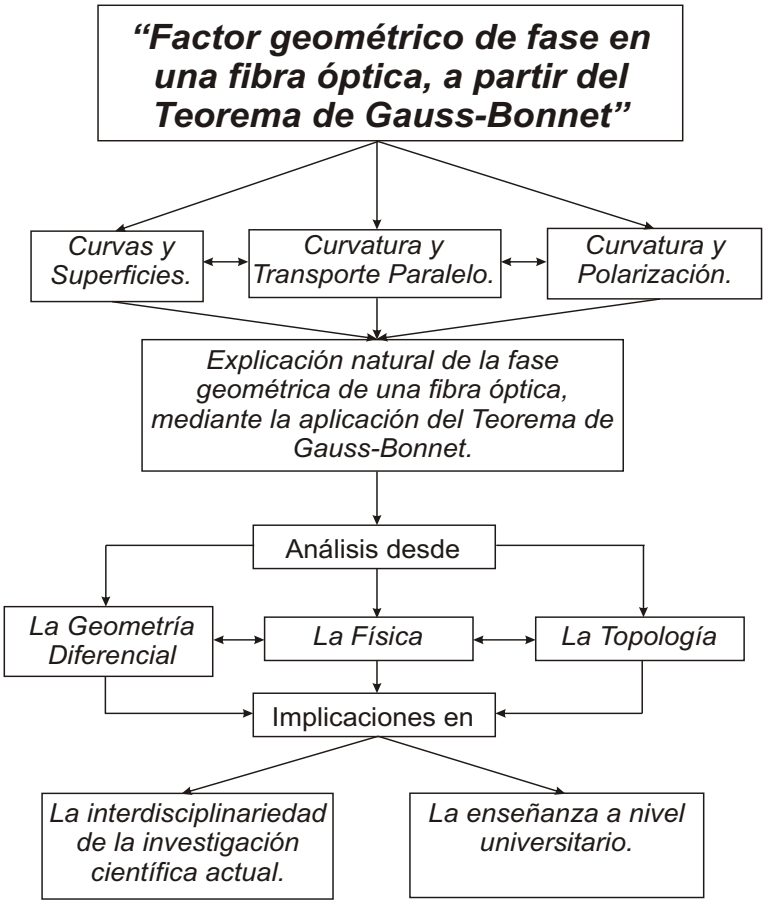


Figura 4.1. Esquema del "factor geométrico de fase en una fibra óptica, a partir del TGB".

podemos distinguir información general y particular como sigue:

(**ii**.) **En lo general:** encontramos que, el tema "*curvatura y polarización*" puede ser estudiado desde la geometría diferencial, recogiendo información a fin de comprender la configuración geométrica presente en una fibra óptica enrollada en forma de hélice. Desde la física, se puede estudiar el comportamiento dinámico que sigue la luz (OEM) al viajar por la fibra (haciendo

[5]Parafraseando de [19], p. 21.

uso de las ecuaciones de Maxwell). Y desde la topología se puede estudiar la esfera como un ejemplo de superficie compacta, la cual es invariante bajo transformaciones geométricas diferenciales. La contribución de cada una de las anteriores áreas (también presentadas en el marco referencial), articula coherentemente los diferentes aportes interdisciplinarios.

En lo particular: se trata de realizar un análisis de las implicaciones en la enseñanza de cada una de estas áreas a nivel universitario tanto para el estudiante como para el docente. Dentro de estos aspectos encontramos que el trabajo interdisciplinario supone la colaboración de profesores y estudiantes en torno a los temas planteados en el marco referencial, sin embargo, se necesita poseer una preparación disciplinaria en cálculo diferencial e integral, cálculo vectorial, electromagnetismo y óptica por parte del docente y elementos básicos de éstas en los estudiantes. Por ello, la propuesta está orientada hacia cursos complementarios o electivos de física y/o matemáticas, ya que el estudiante necesita tener un conocimiento claro de la conceptuali-zación de cada una de estas disciplinas.

No obstante, el carácter interdisciplinar debe presentarse enfáticamente como un giro natural que debe tomar la educación en todos los niveles, especialmente en la formación universitaria, esto surge de la necesidad de pensar la educación en la misma dirección que se piensa el desarrollo de la ciencia y la humanidad hoy día.

(**iii**.) Una estrategia metodológica para desarrollar la problemática planteada se puede sintetizar en las siguientes cuatro fases:

Una primera fase donde se estudie la geometría de planos y superficies en el espacio (como se muestra en los capítulos 1 y 2). En la segunda fase estudiar y reproducir la polarización lineal y circular, y la rotación del mismo por transporte paralelo a lo largo de una fibra óptica enrollada (ver capítulo 3). En la tercera fase investigar y estudiar el artículo empleado como base del trabajo y otros materiales de apoyo que de manera introductoria, ofrezcan información necesaria para el desarrollo del TGB, y de una fase geométrica en una fibra óptica (ver capítulo 3). La cuarta fase consiste en analizar y realizar una reflexión en torno a las diversas propuestas existentes acerca del carácter interdisciplinar entre la física y otros campos del conocimiento, en particular, la geometría diferencial y la topología, para el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. La metodología debe enfocar-

se al establecimiento de las conexiones existentes entre Física, Geometría Diferencial y Topología.

(**iv**.) Este punto consiste en comunicar el estudio realizado en la investigación, por ejemplo, diseñar e implementar un taller donde se desarrolle la intuición básica detrás del TGB, a partir de una fase geométrica: por medio de un taller se ilustró la intuición básica del TGB en una fase geométrica (teoría del transporte paralelo), resaltando la enseñanza de la interdisciplinariedad de las mismas. Además, se realizó una práctica con los estudiantes, en la cual transportaban un vector a lo largo de una curva sobre una superficie (como se muestra en la figura (4.3 a)), ilustrando gráfica y geométricamente el camino que sigue dicho vector. Obteniendo así forma sencilla de visualizar (y/o calcular) una fase geométrica (ver figuras 4.2 y 4.3).

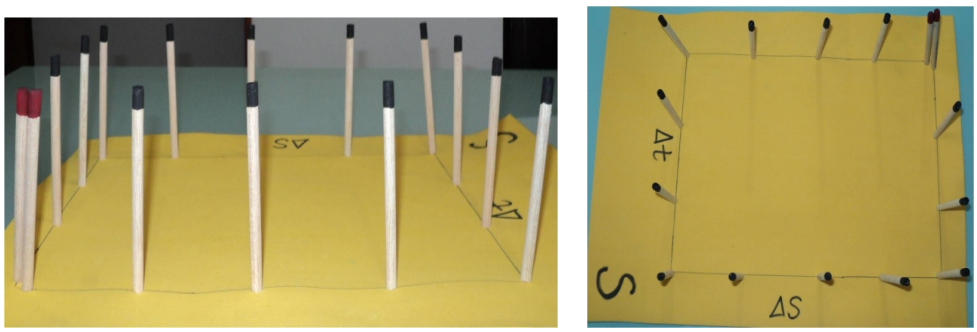
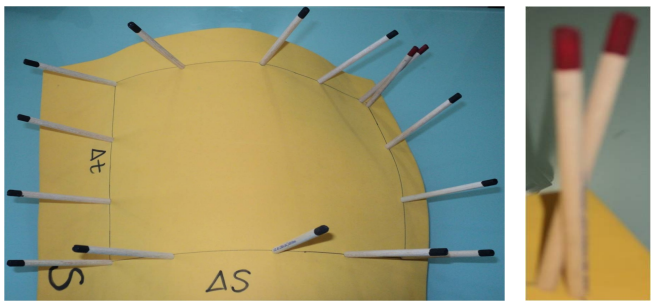


Figura 4.2. Transporte paralelo de un vector en un plano: (a) vista lateral y (b) vista desde arriba.



(a) (b)

Figura 4.3. (a) Transporte paralelo de un vector en una curva sobre una superficie y (b) desfase angular entre los vectores.

Capítulo 5

PERSPECTIVAS Y CONCLUSIONES.

Éste capítulo tiene como propósito señalar aquellas perspectivas y propuestas que surgieron en el desarrollo de éste trabajo. Una de ellas la medición del ángulo que forma el vector de polarización cuando rota a lo largo de una fibra óptica enrollada en forma de hélice. Lo cual permite "asentar" toda la teoría expuesta anteriormente por medio de un experimento, evidenciando la relación existente entre el TGB y la rotación del plano de polarización para dicha fibra. Otra de las propuesta es el desarrollo de un ejemplo sencillo para ilustrar la geometría no conmutativa, la cual permite relacionar el álgebra con la geometría. Y por último, se presentan las conclusiones de éste documento.

5.1 Medición de ángulo de polarización.

A fin de mostrar la relación entre la curvatura de Gauss (TGB) y la rotación del plano de polarización, se propone el desarrollo de un experimento en donde se evidencie tal relación.

5.1.1 Detalles experimentales.

Consideramos como medio físico una fibra óptica monomodal, la cual funciona por el principio de reflexión total interna (obedeciendo la Ley de Snell), en la cual toda la luz incidente en la fibra óptica se refleja y no hay rayos refractados.

A continuación se presentan los detalles experimentales.
La figura (5.1) muestra el esquema del montaje experimental.

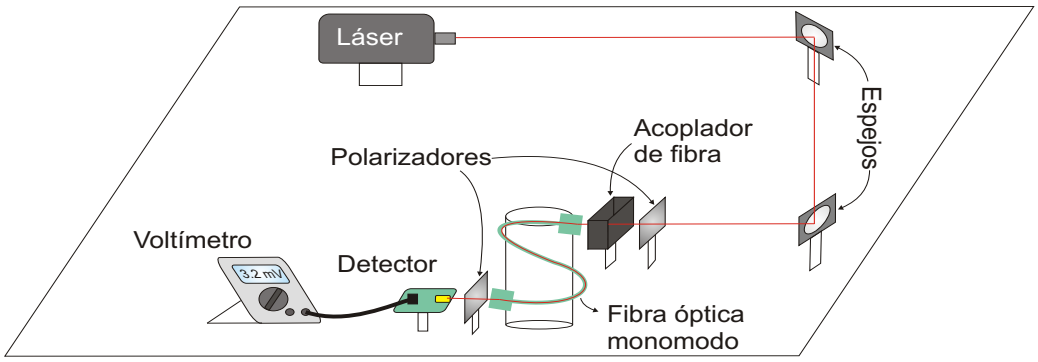


Figura 5.1. Esquema del montaje experimental.

1. **Materiales:** Fibra óptica monomodo ($1,65m$ de longitud), voltímetro, detector (fotodiodo), cinta métrica, lámina galvanizada, transportador, un par de espejos, dos polarizadores, un acoplador de fibra, un láser He-Ne de longitud de onda $633nm$, un soporte universal y nueces.

2. **Procedimiento experimental:** Con los elementos anteriormente descritos procedimos a realizar el montaje indicado en la figura (5.1), obteniendo el montaje que observa en la figura (5.2). Primero fijamos el láser, los espejos y el acoplador de fibra en la mesa de trabajo, para luego ir girando los espejos de tal manera que la mayor cantidad de luz pasara por el acoplador de fibra. Segundo, fijamos el polarizador y la fibra al acoplador para enrollarla en una lámina galvanizada de $2m$ de largo por $1m$ de ancho en forma de cilindro "circular", como se muestra en la figura (5.2).

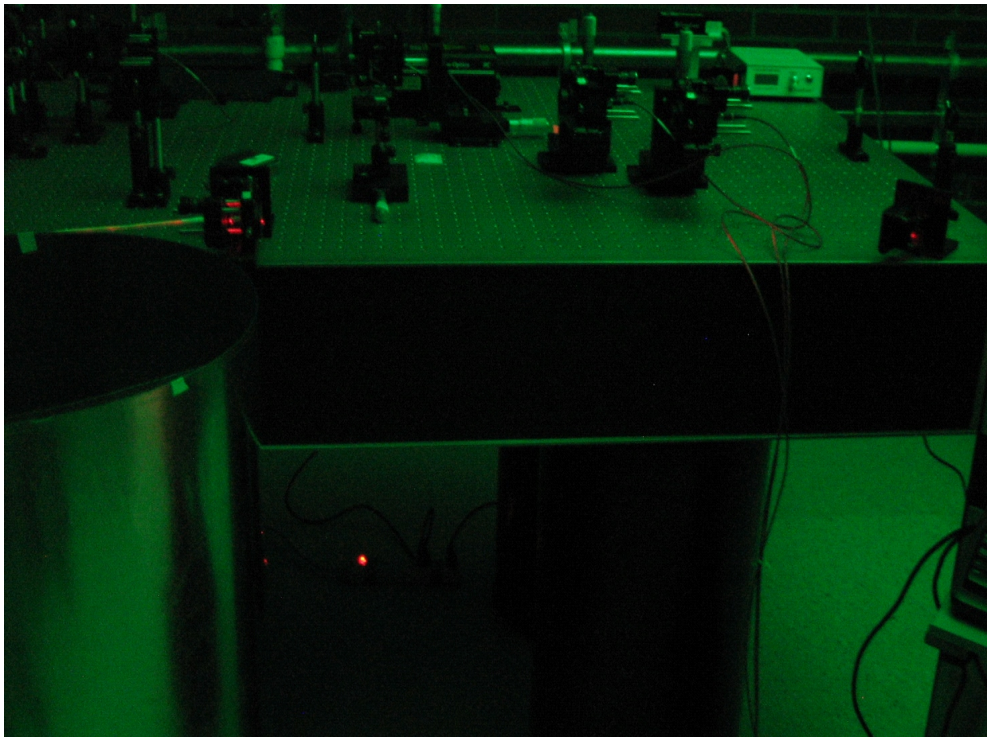
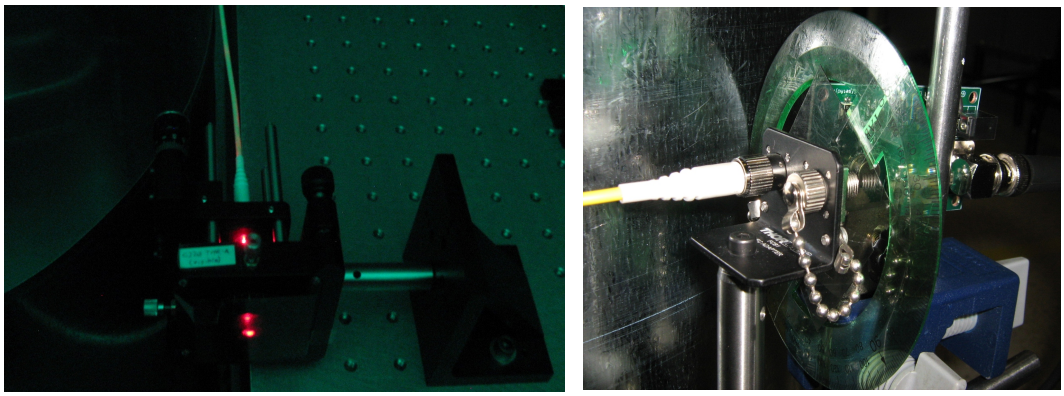


Figura 5.2. Montaje experimental.

En la figura (5.3) se muestra (a) la luz incidiendo en la fibra conectada al acoplador y (b) la salida de luz por la fibra y que llega al detector.



(a) (b)

Figura 5.3. Entrada y salida de la fibra.

3. **Resultados obtenidos y análisis:** Los resultados tomados durante la

práctica experimental se presentan en las tablas (5.1).

Pitch/mm $(\pm 0,1mm)$	$\mathbf{\Delta\theta/rad}(\pm 0,001rad)$	$\mathbf{\Delta I/mV}(\pm 0,01mV)$
320,0	1,690	3,66
500,0	1,527	3,50
520,0	0,314	1,03
700,0	0,337	4,00
750,0	0,018	4,06

Cuadro 5.1. Datos experimentales.

donde el **pitch** es la altura de la hélice, $\mathbf{\Delta}\theta$ es el ángulo de polarización final menos el inicial $(\pi/2)$ e **I** es la intensidad de luz que llegaba al detector (en milivoltios).
Graficando la rotación del plano de polarización dada por $\mathbf{\Delta}\theta$ en función del **pitch**, obtenemos la figura (5.4).

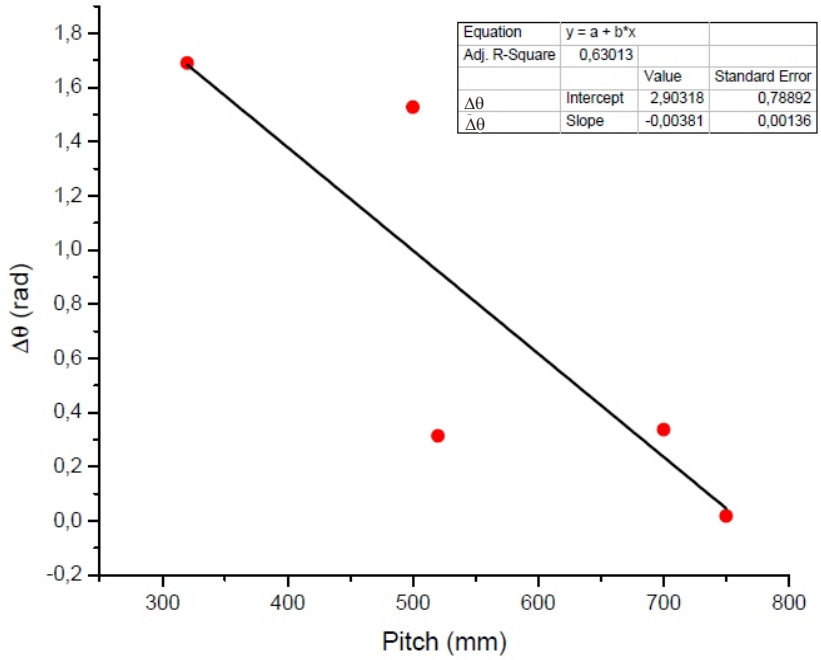


Figura 5.4. $\Delta\theta$ en función del pitch.

La recta que reproduce los resultados es $y = ax + b$ donde a es la pendiente

de la recta y b es el punto de corte con el eje y, así:

$$\begin{aligned} a &= -0,00381(rad/mm) \\ b &= 2,9031(rad/mm) \\ R^2 &= 0,63013 \qquad (5.1) \\ y &= ax + b = -0,00381x + 2,9031 \qquad (5.2) \end{aligned}$$

Luego de (5.1) es la ecuación de la recta. Teniendo en cuenta la ecuación (3.49), tenemos que la ecuación de la figura (5.4) es

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= -\frac{2\pi}{L}(2\pi b) \\ \Delta\theta &= -0,00381(2\pi b) + 2,9031 \qquad (5.3) \end{aligned}$$

En particular, a que es la pendiente de la recta, nos muestra la relación $2\pi/L$ que a su vez está relacionada con la torsión de la fibra y el factor que lo acompaña es la medida del pitch indicándonos como varía el plano de polarización a medida que varía altura de la hélice.

Por otro lado, el error de las mediciones experimentales es[1],
Error relativo (%)=|valor teórico - valor experimental| / |valor teórico|(100 %)

$$Error(\,\%) = \frac{|0,00380 - 0,00381|}{|0,00380|}(100\,\%) = |2,63 \cdot 10^{-3}|\,\% \qquad (5.4)$$

Este resultado no se aleja mucho del valor teórico, indicando que el error experimental fue pequeño y señalando que el factor de fase geométrico es medible para el caso de una fibra óptica enrollada en forma de hélice.
Sin embargo, calculándo la desviación estandar para las mediciones realizadas (ver tabla 5.1 y gráfica 5.4), obtenemos la siguiente gráfica con las barras del error experimental.

[1]Haciendo la debida conversión de cm a mm.

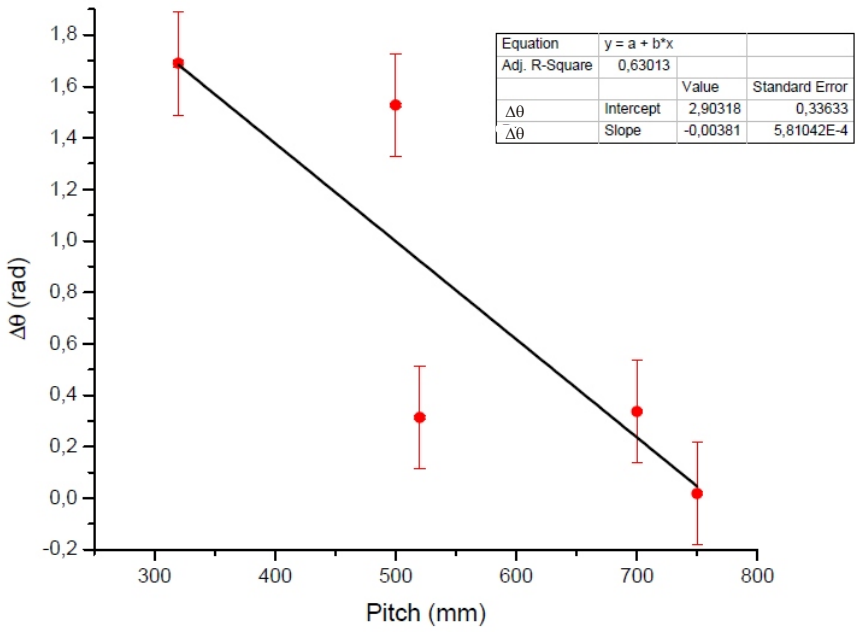


Figura 5.5. Barras de error experimental.

Como se esperaba las barras de error (relativas a la desviación estándar) en los puntos $500,0mm$ y $520,0mm$ no se acercan a la recta, debido a que es posible que al realizar estas mediciones, el acople en la fibra se haya desajustado, causando que se "perdiera" cantidad de luz entrante en la fibra. Además, por la longitud de la fibra y al cilindro donde ésta se enrollaba, estas dos mediciones fueron díficiles de fijar.

POSIBLES CAUSAS DE ERROR: Dentro de las posibles causas de error experimental encontramos las siguientes:

1. A medida que se variaba el pitch debiamos asegurarnos de que la intensidad de luz inicial fuera la "misma" para cada medida. Y como se observa en los resultados experimentales (ver tabla 5.1 y gráfica 5.4) para los pitch de $500,0mm$ y $520,0mm$, se registraron los datos con menor intensidad de luz detectada por el fotodiodo.

2. La incertidumbre del transportador utilizado para medir los ángulos del polarizador, y la incertidumbre que se debe tener en cuenta cuando una persona es quien evidencia una medida que se está tomando, ya que confié

en la visión que se obtenía de dichos ángulos al variar la altura de la hélice (pitch).

5.2 "De la teoría de superficies a la geometría no conmutativa: un ejemplo elemental"

Desde el punto de vista algebraico: tenemos un álgebra de funciones suaves y diferenciables en $\Sigma : \mathcal{A} = C^\infty(\Sigma)$ y consideramos una forma trilineal $\tau : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$\tau(f^1, f^2, f^3) = \int_\Sigma f^1 df^2 \wedge df^3 \tag{5.5}$$

que cumpla las siguientes propiedades:

i. La permutación cíclica no cambia la estructura algebraica.

$$\tau(f^2, f^3, f^1) = \tau(f^1, f^2, f^3) \tag{5.6}$$

ii.

$$\tau(f^1 f^2, f^3, f^4) - \tau(f^1, f^2 f^3, f^4) + \tau(f^1, f^2, f^3 f^4) - \tau(f^4 f^1, f^2, f^3) = 0 \quad \forall f^j \in \mathcal{A}. \tag{5.7}$$

En particular, para una familia de idempotentes que están parametrizados por t, $E_t^2 = E_t \quad \in \mathcal{A}$, se puede exponer el siguiente lemma:

Lema 5.2.1. $\tau(E, E, E)$ permanece invariante bajo idempotentes, es decir,

$$\frac{d\tau(E, E, E)}{dt} = 0 \tag{5.8}$$

Este lema se prueba teniendo en cuenta que $\tau(\dot{E}, E, E) + \tau(E, \dot{E}, E) + \tau(E, E, \dot{E}) = 0$ y utilizando las propiedades i. y ii., y además, el hecho de que los idempotentes satisfagan el conmutador $[x, E_t] = \dot{E}_t$.
Entonces para el caso en el que $\mathcal{A} = C^\infty(\Sigma)$, los únicos idempotentes posibles son $\{0, 1\}$, lo cual no resulta muy interesante ya que obtenemos funciones constantes. Ahora si consideramos un álgebra

$$\mathcal{A} = C^\infty(\Sigma) \otimes M_2(\mathbb{C}) \cong M_2(C^\infty(\Sigma)) \tag{5.9}$$

es posible obtener funciones y no sólo puntos fijos. Entonces desde ésta álgebra y utilizando la forma trilineal (5.2), tendríamos un álgebra como:

$$\tilde{\tau}(f^1 \otimes \mu_1, f^2 \otimes \mu_2, f^3 \otimes \mu_3)\tau(f^1, f^2, f^3)Tr(\mu_1\mu_2\mu_3) \tag{5.10}$$

Entonces buscamos idempotentes que pertenezcan al álgebra (5.2), es decir, $E \in M_2(\mathbb{C})$ y que cumplan con $E^2 = E$ y $E^* = E$, tales que la toda idempotencia sea una proyección de la forma

$$E = \frac{1}{2}(I + \hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \tag{5.11}$$

De tal manera que en ésta álgebra (5.2) las componentes de n serán funciones suaves. Además, el sentido de usar los idempotentes radica en que los vectores unitarios son idempotentes, y el vector normal unitario me dice cómo es el área y la curvatura de cualquier superficie.
Si n es el vector normal a la superficie, tenemos que

$$E = \frac{1}{2}(I + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3) \tag{5.12}$$

donde $\sigma \in M_2(C^\infty(\Sigma))$.

Entonces necesitamos emplear matrices que cumplan las propiedades (5.2), como ejemplo utilizamos las matrices de Pauli, como sigue[2]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Tr(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = Tr(\sigma_3\sigma_1\sigma_2) = -Tr(\sigma_2\sigma_1\sigma_3) = 2i$$

[2]Además, utilizamos la propiedad antisimétrica $dn_1 \wedge dn_2 = -dn_2 \wedge dn_1$.

Partiendo de (5.2) tenemos,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(E,E,E) = \tilde{\tau}(n_1\otimes\sigma_1, n_2\otimes\sigma_2, n_3\otimes\sigma_3) = \tau(n^1,n^2,n^3)Tr(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \\ \frac{1}{8}\int_\Sigma n_1 dn_2\wedge dn_3 Tr(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) + n_1 dn_3\wedge dn_2 Tr(\sigma_1\sigma_3\sigma_2) \\ + n_2 dn_1\wedge dn_3 Tr(\sigma_2\sigma_1\sigma_3) + n_2 dn_3\wedge dn_1 Tr(\sigma_2\sigma_3\sigma_1) \\ + n_3 dn_1\wedge dn_2 Tr(\sigma_3\sigma_1\sigma_2) + n_3 dn_2\wedge dn_1 Tr(\sigma_3\sigma_2\sigma_1) \\ = \frac{i}{2}\int_\Sigma n_1 dn_2\wedge dn_3 - n_2 dn_1\wedge dn_3 + n_3 dn_1\wedge dn_2 \quad (5.13)\end{aligned}$$

Entonces si n_1, n_2, n_3 son las componentes del vector normal a la superficie, luego el álgebra (5.2) se relaciona con el mapeo gaussiano puesto que E son vectores unitarios que se proyectan sobre S^2, limitándome un área. Por lo tanto, en términos de ese mapeo tenemos que

$$\int_\Sigma (n_1 dn_2\wedge dn_3 - n_2 dn_1\wedge dn_3 + n_3 dn_1\wedge dn_2) \cong \int_{\mathcal{G}(\Sigma)} d\mathcal{A}_{S^2} \quad (5.14)$$

En relación con la curvatura obtenemos que

$$\int_{\mathcal{G}(\Sigma)} \mathrm{K} d\mathcal{A}_{S^2} = 2\pi\chi = 4\pi(1-g) \quad (5.15)$$

Ejemplo 5.2.1. Para el caso de S^2 tenemos

$$n_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad n_2 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad n_3 = \cos\theta$$

$$\begin{aligned} dn_1 &= \cos\theta\cos\varphi d\theta - \sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ dn_2 &= \cos\theta\sin\varphi d\theta + \sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ dn_3 &= -\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(E,E,E) &= \frac{1}{2}\int_{S^2} (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta) d\theta\wedge d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{S^2} \sin\theta d\theta\wedge d\varphi = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\end{aligned}$$

Pero sabemos que $\tilde{\tau}(E,E,E) \propto \chi(\Sigma) = \chi(S^2)$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(E,E,E) &= \int_{S^2} \mathrm{K} d\mathcal{A} = 4\pi(1-g) \\ &= 2\pi\chi = 4\pi(1-g) \\ \tilde{\tau}(E,E,E) &\leftrightarrow \chi = 2(1-g)\end{aligned}$$

Luego para S^2 con $g = 0$ tenemos que $\chi = 2$.

Vemos que la integral de superficie en el TGB es un caso especial del álgebra. Éstos son los cimientos de la cohomología y la K-teoría.

5.3 Conclusiones.

El trabajo desarrollado permite concluir lo siguiente:

- Se hizo un estudio detallado de la geometría diferencial de curvas y superficies, con el fin de comprender el contenido del Teorema de Gauss-Bonnet. Así mismo, se estudió la teoría electromagnética en particular para la fibra óptica. Considerando éstos elementos de geometría y física, respectivamente, se logró mostrar que la fase geométrica de una fibra óptica, mediante la aplicación del Teorema de Gauss-Bonnet en un espacio tangente a una curva (siendo esta curva una fibra óptica en forma de hélice), tiene una explicación natural en términos de la geometría de la misma; teniendo en cuenta que si las direcciones inicial y final de la fibra son las mismas, el vector de polarización (al ser transportado paralelamente a lo largo de la fibra) se comporta como un circuito cerrado en la superficie de una esfera.
  Por otro lado, la interpretación de una fase geométrica en una fibra óptica desde el punto de vista clásico es otra forma de analizar y estudiar la fase de Berry, un fenómeno observado tanto en mecánica cuántica como en óptica (como se ha ilustrado en este trabajo).

- Se presentó una propuesta de una práctica pedagógica interdisciplinar con base en el trabajo desarrollado, en la cual se analiza cómo ha surgido el carácter interdisciplinar en el proceso enseñanza-aprendizaje de las ciencias (en general), aplicándolo en particular, a la interdisciplinariedad entre Geometría Diferencial, Topología y Física, y sus implicaciones en la enseñanza del mismo como propuesta de enseñanza en cursos complementarios o eléctivos a nivel universitario. Ésta propuesta evidencia el desarrollo y puesta en práctica de la estructuración progresiva del pensamiento, lo cual favorece sustancialmente la interacción de la formación en física con las demás áreas, permitiendo que el estudiante se apropie de metodologías de investigación y de herramientas de trabajo en física, con el objeto de ampliarlas en la solución de problemas que hacen referencia a campos más avanzados de la física, como es el caso de la físico-matemática.

- Se diseñó y realizó un taller dirigido a estudiantes de licenciatura en física, en la XIII Semana de la Enseñanza de la Física, en el que se desarrolló la intuición básica detrás del Teorema de Gauss-Bonnet, a partir de una fibra

óptica. Además, haciendo uso de los elementos fundamentales de la teoría electromagnética, el estudiante pudo conocer e interpretar el desarrollo de las fases geométricas en sistemas ópticos especialmente en la teoría del transporte paralelo, y su relación con el Teorema de Gauss-Bonnet.
Por otro lado, el taller permitió ilustrar a los estudiantes aquella interacción entre la Geometría Diferencial, la Topología y la Física, ampliando nuestra visión y perspectiva como futuros docentes de física, y así, estar capacitados para afrontar de manera interdisciplinar: la interpretación, el análisis y la solución de las problemáticas en la investigación y enseñanza de la física actual.
También se ilustró el contenido del TGB en relación con el algebra en la Escuela de Verano de Villa de Leyva[3] "*Geometric, algebraic and topologic methods for QFT*". Y por último, se mostró el contenido teórico-experimental del presente trabajo en el XXIV Congreso Nacional de Física (Bogotá, Hotel Tequendama) en la modalidad de ponencia.

- Adicional a los objetivos propuestos en el presente trabajo, se intentó desarrollar un experimento donde se midiera el factor geométrico de fase dependiente estrechamente de la geometría de la fibra óptica. Y como es de notar no se pudieron obtener más de 5 mediciones. Sin embargo, vemos que a pesar de esto, encontramos un valor experimental muy similar al valor teórico esperado. Además, al ver que la relación entre el TGB y la rotación del plano de polarización existe a nivel experimental, es posible mejorar las condiciones del experimento (utilizando una fibra óptica más corta) con el objetivo de obtener un ajuste "más" lineal en los datos y así mismo un mayor número de resultados.

- En general, podemos concluir que se "encontró" el factor de fase geométrica. Con lo cual podemos afirmar con certeza de que el análogo óptico y clásico de la fase de Berry tiene una explicación natural en términos de la geometría de la fibra óptica, y a su vez con el contenido del TGB. Así, la interpretación del factor geométrico de fase en una fibra óptica desde el punto de vista clásico es otra forma de analizar y estudiar la fase de Berry, un fenómeno observado tanto mecánica cuántica como en óptica.

[3]Evento académico realizado por la Universidad de los Andes en Julio del 2011.

Éste trabajo ha proporcionado los elementos teóricos básicos en física, geometría diferencial y topología, necesarios para continuar con niveles superiores de formación en física-matemática. Además, este tipo de instrumentos puede generar en los estudiantes de Licenciatura en Física el deseo de estudiar ejemplos físicos que a priori no tienen ninguna relación con la geometría. Es precisamente estas conexiones "escondidas" entre la física (óptica), la geometría diferencial y la topología, las que promueven la integración del conocimiento con el propósito de abordar los problemas globales y complejos que encierra la investigación científica actual, y la realidad misma, haciendo de las fases geométricas un ejemplo concreto de interdisciplinariedad.

No obstante, esta monografía puede ser el punto de partida para desarrollar otros trabajos relacionados con la naturaleza interdisciplinar que caracteriza a la ciencia actual, trabajos con los cuales el estudiante utilice los elementos básicos en la teoría electromagnética, la física y la geometría diferencial mostrados aquí, para dar cavida a conceptos más profundos entre éstas disciplinas como el desarrollo de la fase geométrica a nivel cuántico (fase de Berry), el cual es fenómeno que está en auge actualmente por sus múltiples aplicaciones.

Apéndice A

Anexos: Ecuaciones de Gauss y Símbolos de Christoffel.

En éste apéndice se mostrará en detalle el desarrollo de las ecuaciones de Gauss y los símbolos de Christoffel.
Como se ilustro con el Teorema de "Egregio" en la sección (1.2.7), la curvatura total depende de los coeficientes de la PFF y SFF, y de sus derivadas: Sea una superficie $\sigma(u, v)$, $u \leftrightarrow x^1$ y $v \leftrightarrow x^2$, cuya base local está conformada por σ_1, σ_2 y $\mathbf{N}$, como se ilustra en la figura (A.1), donde $\sigma_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x^1}$ y $\sigma_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial x^2}$ son los vectores

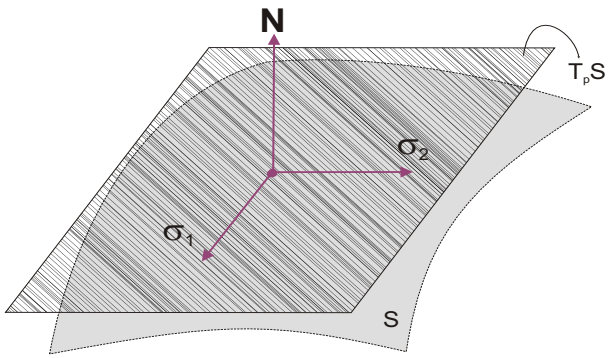


Figura A.1. Base local formada por σ_1, σ_2 y $\mathbf{N}$, en una superficie.

tangentes a S, es decir, $\sigma_1, \sigma_2 \in T_pS$. Además,

$$\sigma_{11} = \frac{\partial}{\partial x^1}\sigma_1, \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial}{\partial x^2}\sigma_1 \quad y \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial}{\partial x^2}\sigma_2.$$

Escribiendo σ_{11}, σ_{12} y σ_{22} como una combinación lineal de σ_1 y σ_2 sobre el plano tangente mostrado,

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A^1_{11}\sigma_1 + A^2_{11}\sigma_2 + C_{11}\mathbf{N} \\
\sigma_{12} &= A^1_{12}\sigma_1 + A^2_{12}\sigma_2 + C_{12}\mathbf{N} = \sigma_{21} \\
\sigma_{22} &= A^1_{22}\sigma_1 + A^2_{22}\sigma_2 + C_{22}\mathbf{N} \\
\sigma_{ij} &= A^1_{ij}\sigma_1 + A^2_{ij}\sigma_2 + C_{ij}\mathbf{N}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Si $\sigma_{11} \cdot \mathbf{N} = 0 + 0 + C_{11}$, tenemos que $C_{11} = \sigma_{11} \cdot \mathbf{N}$, y por la definición de SFF (ecuación (1.21)), $C_{11} = L$. Análogo a esto encontramos que $C_{12} = C_{21} = M$ y $C_{22} = N$.

Por lo tanto, las ecuaciones de Gauss serán:

$$\boxed{\begin{array}{llll}
\sigma_{11} = & \Gamma^1_{11}\sigma_1 + & \Gamma^2_{11}\sigma_2 + & L\mathbf{N} \\
\sigma_{12} = & \Gamma^1_{12}\sigma_1 + & \Gamma^2_{12}\sigma_2 + & M\mathbf{N} \\
\sigma_{22} = & \Gamma^1_{22}\sigma_1 + & \Gamma^2_{22}\sigma_2 + & N\mathbf{N}
\end{array}}$$

donde $A^k_{ij} \equiv \Gamma^k_{ij}$ son los *símbolos de Christoffel*, $(\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji})$.

Ahora, si calculamos los *símbolos de Christoffel*, de una región sobre la superficie $\sigma(u, v)$, en términos de la PFF y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\sigma_u \cdot \sigma_{uu} &= \frac{\partial \sigma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} = \sigma_u \cdot \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(2\sigma_u \cdot \frac{\partial \sigma_u}{\partial u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma_u \cdot \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} \cdot \sigma_u\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\sigma_u \cdot \sigma_u) = \frac{1}{2}(\sigma_u \cdot \sigma_u)_u
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_u \cdot \sigma_{uu} &= \frac{1}{2}(\sigma_u \cdot \sigma_u)_u = \frac{1}{2}E_u \qquad & \sigma_u \cdot \sigma_{uv} &= \frac{1}{2}(\sigma_u \cdot \sigma_u)_v = \frac{1}{2}E_v \\
\sigma_v \cdot \sigma_{vv} &= \frac{1}{2}(\sigma_v \cdot \sigma_v)_v = \frac{1}{2}G_v \qquad & \sigma_v \cdot \sigma_{uv} &= \frac{1}{2}(\sigma_v \cdot \sigma_v)_u = \frac{1}{2}G_u
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sigma_u \cdot \sigma_{vv} &= (\sigma_u \cdot \sigma_v)_v = \sigma_{uv} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vv} \\
&= \frac{1}{2}G_u + \sigma_u \cdot \sigma_{vv} = F_v \\
F_v &= \frac{1}{2}G_u + \sigma_u \cdot \sigma_{vv} \\
\therefore \sigma_u \cdot \sigma_{vv} &= F_v - \frac{1}{2}G_u
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_u \cdot \sigma_{vu} = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vu} \\ &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \frac{1}{2}E_v \\ F_u &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \frac{1}{2}E_v \\ \therefore \sigma_v \cdot \sigma_{uu} &= F_u - \frac{1}{2}E_v\end{aligned}$$

Luego tomando las ecuaciones de Gauss tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_u &= \sigma_u \cdot \sigma_{uu} \\ &= \Gamma^1_{11}\sigma_u \cdot \sigma_u + \Gamma^2_{11}\sigma_u \cdot \sigma_v + L\sigma_u \cdot \hat{\mathbf{N}} \\ &= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_v &= \sigma_u \cdot \sigma_{uv} \\ &= \Gamma^1_{12}\sigma_u \cdot \sigma_u + \Gamma^2_{12}\sigma_u \cdot \sigma_v + M\sigma_u \cdot \hat{\mathbf{N}} \\ &= \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}F_u - \frac{1}{2}E_v &= \sigma_v \cdot \sigma_{uu} & F_v - \frac{1}{2}G_u &= \sigma_u \cdot \sigma_{vv} \\ &= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G & &= \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}G_u &= \sigma_v \cdot \sigma_{uv} & G_v &= \sigma_v \cdot \sigma_{vv} \\ &= \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G & &= \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G\end{aligned} \tag{A.5}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones para Γ^1_{11} y Γ^2_{11}, las segundas dos ecuaciones para Γ^1_{12} y Γ^2_{12} y las dos últimas para Γ^1_{22} y Γ^2_{22} obtenemos,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

y en términos de la SFF son:

$$\boxed{\begin{aligned}L_v - M_u &= L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11} \\ M_v - N_u &= L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12}\end{aligned}}$$

Las cuales se denominan ecuaciones de *Codazzi-Mainardi.*

Ejemplo A.0.1. Calcular los símbolos de Christoffel para la esfera S^2 con parametrización $\sigma(u,v) = \sigma(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$.
Tomamos la convención $x_1 \equiv u \equiv \theta$ y $x_2 \equiv v \equiv \phi$.
Entonces,

$$\sigma_1 \equiv \sigma_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \quad \sigma_2 \equiv \sigma_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &\equiv \sigma_{\theta\theta} \\ &= (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta) \\ &= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, 1) = (-1)\hat{\mathbf{N}}\end{aligned}$$

Entonces $\Gamma^1_{11} = 0$, $\Gamma^2_{11} = 0$, $L = -1$.

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &\equiv \sigma_{\theta\phi} \\ &= (-\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) = \frac{1}{\tan\theta}\sigma_\phi\end{aligned}$$

Entonces $\Gamma^1_{12} = 0$, $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{\tan\theta}$, $M = 0$.

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &\equiv \sigma_{\phi\phi} \\ &= (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) = -\sin\theta\cos\theta\sigma_\theta - \sin^2\theta\hat{\mathbf{N}}\end{aligned}$$

Entonces $\Gamma^1_{22} = \frac{-\sin 2\theta}{2}$, $\Gamma^2_{22} = 0$, $N = -\sin^2\theta$.
Otra manera de halla éstos símbolos es en función de la métrica g, en este caso:

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_1\cdot\sigma_1 & \sigma_1\cdot\sigma_2 \\ \sigma_2\cdot\sigma_1 & \sigma_2\cdot\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

donde $g_{ij} = g_{ji} \Rightarrow g_{12} = g_{21} = 0$ y $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sin^2\theta$. De tal forma que

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

donde $g^{ij} = (g^{-1})_{ij} \Rightarrow g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{1}{\sin^2\theta}$.
Por definición, los símbolos de Christoffel en términos de la métrica

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

lo cual proviene de

$$\nabla\partial_i\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Por lo tanto, para la esfera

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\phi g_{11}) = \frac{1}{2}\partial_\phi = 0 \qquad\qquad = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}(\partial_\theta \sin^2\theta) = \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_\theta g_{22}) = -\frac{1}{2}\partial_\theta(\sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

lo cual coincide con el primer cálculo de los símbolos de Christoffel.

Bibliografía

[1] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer undergraduate mathematics series.

[2] J. Mardsden, A. Tromba, *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

[3] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, inc.

[4] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, Vol. 1 y 2. (1969).

[5] L. Ryder, *The optical Berry phase and the Gauss-Bonnet theorem*, European Journal Physics. **12**, 15 (1991).

[6] A. Tomita, R. Chiao, *Observation of Berry's topological phase by use of an optical fiber*, Phys. Rev. Lett. **57**, 937 (1986).

[7] R. Chiao, Y-S. Wu, *Manifestations of Berry's topological phase for the photon*, Phys. Rev. Lett. **57**, 933 (1986).

[8] F. D. M. Haldane, *Path dependence of the geometric rotation of polarization in optical fibers*, Opt. Lett. **11**, 730 (1986).

[9] J. N. Ross, *The rotation of te polarization in low birefringence monomode optical fibres due to geometric effects*, Opt. Quant. Electron. **16**, 455 (1984).

[10] B. Wu, J. Liu, Q. Niu, *Adiabatic Geometry Phase for a General Quantum State*, Phys. Rev. Lett., 94 (2005).

[11] M. V. Berry, *The Adiabatic phase and Pancharanam's phase for polarized light*, Journal of Modern Optics, 34 (1987).

[12] M. V. Berry, *Anticipations of the Geometric Phase*, Physics Today, december (1990).

[13] M. V. Berry, *Interpreting the anholonomy of coiled light*, Letters to Nature, 326 (1987).

[14] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A 392, 45-57 (1984).

[15] E. Hecht, *Optics*, Ed. Addison-Wesley, (2002).

[16] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, (1999).

[17] A. Sepúlveda, *Electromagnetismo*, *Colección Ciencia y Tecnología* Editorial Universidad de Antioquia (2009).

[18] E. Ander-Egg, *Interdisciplinariedad en Educación*, Magisterio del Río de la Plata. Bs. As. Argentina, (1994).

[19] A. Quiñones, *La interdisciplinariedad en el currículo de la educación superior*, PLURES-Humanidades, Ribeirâo Preto, núm. 10 (2008).

[20] J. Fiallo, *La interdisciplinariedad en la escuela: de la utopía a la realidad*, Curso Pre-reunión, Evento Internacional de Pedagogía (2001). Ciudad de La Habana.

[21] J. Torres Santomé, *Globalización e interdisciplinariedad: el currículo integrado*. Ediciones Morata, S.L. Madrid. Capítulo II (1994).

[22] H. A. Contreras P., *Quantum phase transitions, Berry phase and Chern numbers*. Bogotá, Uniandes, 2008. Tesis (Magíster en Física).

[23] Documento de Solicitud de Registro Calificado del Proyecto Curricular de Licenciatura en Física (PCLF), Febrero 2009.

[24] C. A. Manogue, K. S. Krane, *Paradigms in Physics: Restructuring the Upper Level*, Physics Today 56, 53-58 (2003).

[25] T. Dray, C. A. Manogue. *The Vector Calculus Gap*, PRIMUS 9, 21-28 (1999).